Propiedades sobre Complejidad Algorítmica

Análisis y Diseño de Algoritmos

Dr. Jaime Osorio Ubaldo

Propiedades

Sean las funciones $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se cumple lo siguiente:

1. $f(n) \in \mathcal{O}(f(n))$
2. $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \rightarrow \mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$
3. $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n)) \leftrightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$
4. $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n)) \leftrightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$
5. $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge g(n) \in \mathcal{O}(h(n)) \rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$
6. $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) \in \mathcal{O}(h(n)) \rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(min(g(n), h(n)))$
7. $f_1(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge f_2(n) \in \mathcal{O}(h(n)) \rightarrow f_1(n) + f_2(n) \in \mathcal{O}(max(g(n), h(n)))$
8. $f_1(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge f_2(n) \in \mathcal{O}(h(n)) \rightarrow f_1(n) \cdot f_2(n) \in \mathcal{O}(g(n) \cdot h(n))$

Propiedades

1. $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \to \mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$.
2. $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k \neq 0 \to \mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$.
3. $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \to \mathcal{O}(g(n)) \subset \mathcal{O}(f(n))$.

Ejercicios

Ejemplos.

1. Pruebe que
$$\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(\log n) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n^2)$$
2. Dado $a \in \mathbb{N}$ y $a > 2$, pruebe que
$$\mathcal{O}(n^a) \subset \mathcal{O}(2^n) \subset \mathcal{O}(n!)$$
3. Ordenar de mayor a menor por orden de complejidad. Justifique
$$2^n, \ \ n \log(n), n^8$$
4. Ordenar de mayor a menor por orden de complejidad. Justifique
$$n \log_2(n), \log(n^2), n^2$$

Ejercicios

Pruebe las siguientes proposiciones:

1. $n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$.
2. $\mathcal{O}(2^n + 1) = \mathcal{O}(2^n)$.
3. $(n-1)! \in \mathcal{O}(n!)$.
4. $\log_2 n \in \mathcal{O}(n^{\frac{1}{2}})$.(use L'Hopital)
5. $\mathcal{O}(n \log_2 n) \subset \mathcal{O}(n^8) \subset \mathcal{O}(2^n)$.

Ejercicios

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones. Justifique

1. $3^n \in \mathcal{O}(2^n)$.
2. $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n)) \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Ejercicios

Pruebe

1. $3n^2 - 2n + 1 \in \theta(n^2)$.
2. $6n^3 \notin \theta(n^2)$.
3. $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$.