Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 1

Дисциплина Методы вычислений

Тема Венгерский метод решения задачи о назначениях

Вариант №3

Студент Брянская Е.В.

Группа ИУ7-11М

Оценка (баллы) _____

Преподаватель Власов П.А.

Москва.
2022 г.

Цель работы: изучение венгерского метода решения задачи о назначениях.

Содержательная и математическая постановка задачи

В распоряжении работодателя имеется n работ и такое же число исполнителей. Стоимость выполнения i-ой работы j-ым исполнителем составляет $c_{ij} \geq 0$ единиц.

Требуется распределить все работы между исполнителями так, чтобы каждый из них выполнял ровно 1 работу. А общая стоимость выполнения всех работ была минимальна.

Матрица стоимостей: $C = (c_{ij}),\ i,j = \overline{1,n}$.

Матрица назначений: $X = (x_{ij}), i,j = \overline{1,n}$.

Введём управляющие переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i-\text{ую работу выполняет } j-\text{ый исполнитель}, \\ 0, \text{иначе} \end{cases},$$

$i,j = \overline{1,n}$.

Общая стоимость всех работ:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Условие того, что j-ый исполнитель выполняет ровно 1 работу:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n}$$

Условие того, что i-ую работу выполняет ровно 1 исполнитель:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}$$

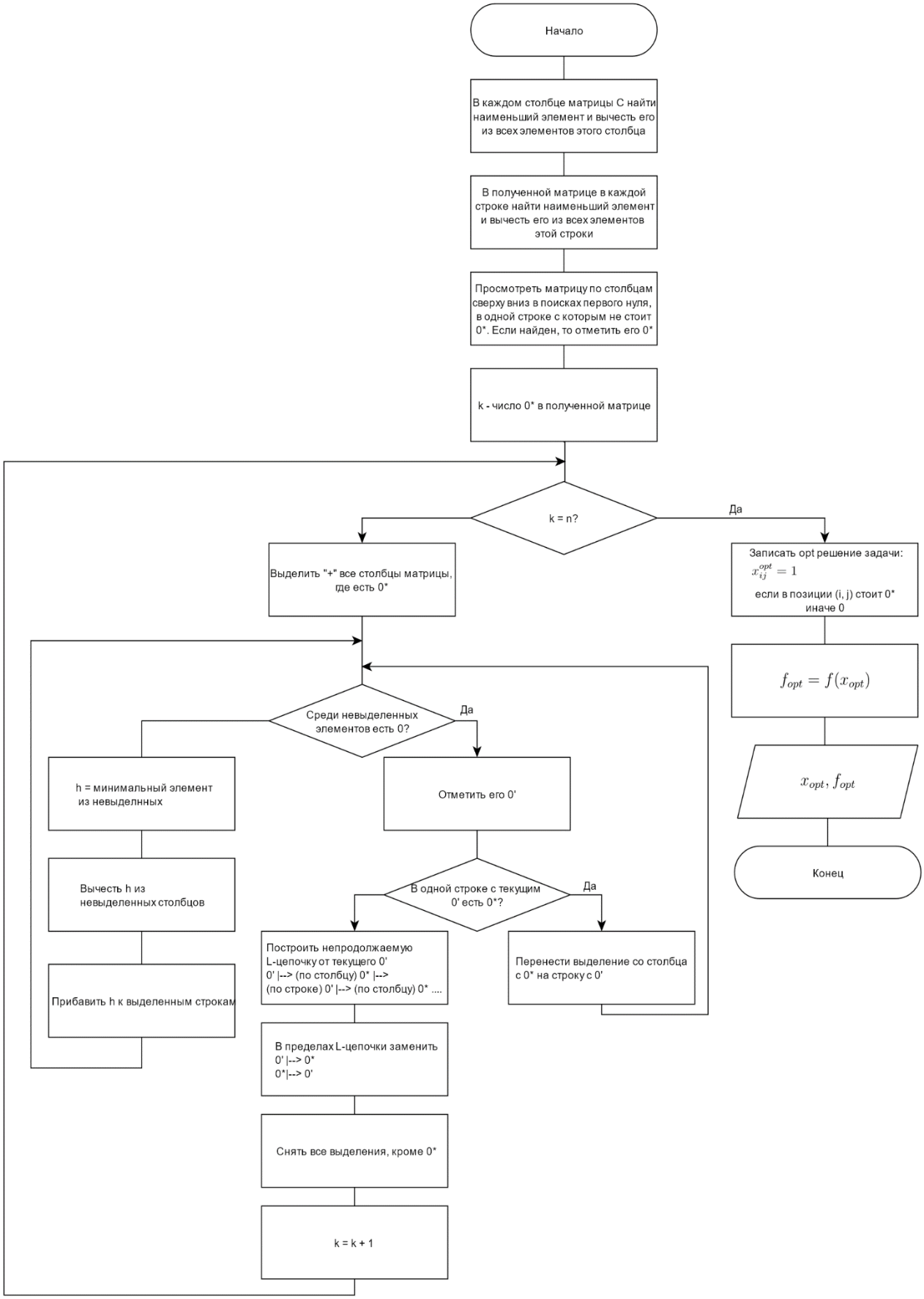
Таким образом, математическая постановка задачи о назначениях:

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\ , i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, i,j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Вариант 3

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 & 4 \\ 9 & 3 & 8 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 8 & 2 & 4 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Схема алгоритма:



Текст программы представлен на Листинге 1

Листинг 1

```
function lab1()
clc;
debugFlg = 1;
findMax = 0;
matr = [
    1 4 7 9 4;
    9 3 8 7 4;
    3 4 6 8 2;
    8 2 4 6 7;
    7 6 9 8 5];
disp('3 вариант. Матрица:');
disp(matr);

C = matr;
if findMax == 1
    C = convertToMin(matr);
    if debugFlg == 1
        disp('Матрица после приведения к задаче минимизации:');
        disp(C);
    end
end
C = updateColumns(C);
if debugFlg == 1
    disp('Результат вычитания наименьшего элемента по столбцам:');
    disp(C);
end
C = updateRows(C);
if debugFlg == 1
    disp('Результат вычитания наименьшего элемента по строкам:');
    disp(C);
end
[numRows,numCols] = size(C);
matrSIZ = getSIZInit(C);
if debugFlg == 1
    disp('Начальная СНН:');
    printSIZ(C, matrSIZ);
end
k = sum(matrSIZ, 'all');
if debugFlg == 1
    fprintf('Число нулей в построенной СНН: k = %d\n\n', k);
end
while k < numCols
    matrStreak = zeros(numRows, numCols);
    selectedColumns = sum(matrSIZ);
    selectedRows = zeros(numRows);
    selection = getSelection(numRows, numCols, selectedColumns);
    if debugFlg == 1
        disp('Результат выделения столбцов, в которых стоит 0*:');
        printMarkedMatr(C, matrSIZ, matrStreak, selectedColumns, selectedRows);
    end
    flag = true;
    streakPnt = [-1 -1];
    while flag
        if debugFlg == 1
            disp('Поиск 0 среди невыделенных элементов');
        end
        streakPnt = findStreak(C, selection);
        if streakPnt(1) == -1
            C = updateMatrNoZero(C, numRows, numCols, selection, selectedRows,
selectedColumns);
            if debugFlg == 1
                disp('Т.к. среди невыделенных элементов нет нулей, матрица была
преобразована:');
                printMarkedMatr(C, matrSIZ, matrStreak, selectedColumns, selectedRows);
            end
```

```
            streakPnt = findStreak(C, selection);
        end
        matrStreak(streakPnt(1), streakPnt(2)) = 1;
        if debugFlg == 1
            disp('Матрица с найденным 0"');
            printMarkedMatr(C, matrSIZ, matrStreak, selectedColumns, selectedRows);
        end
        zeroStarInRow = getZeroStarInRow(streakPnt, numCols, matrSIZ);
        if zeroStarInRow(1) == -1
            flag = false;
        else
            selection(:, zeroStarInRow(2)) = selection(:, zeroStarInRow(2)) - 1;
            selectedColumns(zeroStarInRow(2)) = 0;
            selection(zeroStarInRow(1), :) = selection(zeroStarInRow(1), :) + 1;
            selectedRows(zeroStarInRow(1)) = 1;
            if debugFlg == 1
                disp('Т.к. в одной строке с 0" есть 0*, было переброшено выделение:');
                printMarkedMatr(C, matrSIZ, matrStreak, selectedColumns, selectedRows);
            end
        end
    end
    if debugFlg == 1
       disp('L-цепочка: ');
    end
    [matrStreak, matrSIZ] = createL(numRows, numCols, streakPnt, matrStreak, matrSIZ);
    k = sum(matrSIZ, 'all');
    if debugFlg == 1
        disp('Текущая СНН:');
        printSIZ(C, matrSIZ);
        fprintf('Итого, k = %d\n', k);
    end
end
disp('Конечная СНН:');
printSIZ(C, matrSIZ);
disp('X =');
disp(matrSIZ);
fOpt = getFOpt(matr, matrSIZ);
fprintf("Результат = %d\n", fOpt);
end

function [streakPnt] = findStreak(matr, selection)
    streakPnt = [-1 -1];
    [numRows,numCols] = size(matr);
    for i = 1 : numCols
        for j = 1 : numRows
           if selection(j, i) == 0 && matr(j, i) == 0
                streakPnt(1) = j;
                streakPnt(2) = i;
                return;
           end
        end
    end
end
function [] = printSIZ(matr, matrSIZ)
    [numRows,numCols] = size(matr);
    for i = 1 : numRows
        for j = 1 : numCols
            if matrSIZ(i, j) == 1
                fprintf("\t%d*\t", matr(i, j));
            else
                fprintf("\t%d\t", matr(i, j));
            end
        end
        fprintf("\n");
    end
    fprintf("\n");
end
function [] = printMarkedMatr(matr, matrSIZ, matrStreak, selectedCols, selectedRows)
    [numRows,numCols] = size(matr);
    for i = 1 : numRows
```

```
        if selectedRows(i) == 1
            fprintf("+")
        end
        for j = 1 : numCols
            fprintf("\t%d", matr(i, j))
            if matrSIZ(i, j) == 1
                fprintf("*\t");
            elseif matrStreak(i, j) == 1
                fprintf("'\t")
            else
                fprintf("\t");
            end
        end
        fprintf('\n');
    end
    for i = 1 : numCols
        if selectedCols(i) == 1
            fprintf("\t+\t")
        else
            fprintf(" \t\t")
        end
    end
    fprintf('\n\n');
end
function matr = convertToMin(matr)
    maxElem = max(max(matr));
    matr = matr * (-1) + maxElem;
end
function matr = updateColumns(matr)
    minElemArr = min(matr);
    for i = 1 : length(minElemArr)
        matr(:, i) = matr(:, i) - minElemArr(i);
    end
end
function matr = updateRows(matr)
    minElemArr = min(matr, [], 2);
    for i = 1 : length(minElemArr)
        matr(i, :) = matr(i, :) - minElemArr(i);
    end
end
function matrSIZ = getSIZInit(matr)
    [numRows,numCols] = size(matr);
    matrSIZ = zeros(numRows, numCols);

    for i = 1: numCols
        for j = 1 : numRows
            if matr(j, i) == 0
                count = 0;
                for k = 1 : numCols
                   count = count + matrSIZ(j, k);
                end
                for k = 1 : numRows
                   count = count + matrSIZ(k, i);
                end
                if count == 0
                    matrSIZ(j, i) = 1;
                end
            end
        end
    end
end
function [selection] = getSelection(numRows, numCols, selectedColumns)
    selection = zeros(numRows, numCols);
    for i = 1 : numCols
        if selectedColumns(i) == 1
            selection(:, i) = selection(:, i) + 1;
        end
    end
end
```

```
function [matr] = updateMatrNoZero(matr, numRows, numCols, selection, selectedRows,
selectedColumns)
    h = 1e5; % Наименьший элемент среди невыделенных
    for i = 1 : numCols
        for j = 1 : numRows
            if selection(j, i) == 0 && matr(j, i) < h
                h = matr(j, i);
            end
        end
    end
    for i = 1 : numCols
        if selectedColumns(i) == 0
            matr(:, i) = matr(:, i) - h;
        end
    end
    for i = 1 : numRows
        if selectedRows(i) == 1
            matr(i, :) = matr(i, :) + h;
        end
    end
end
function [zeroStarInRow] = getZeroStarInRow(streakPnt, numCols, matrSIZ)
    j = streakPnt(1);
    zeroStarInRow = [-1 -1];
    for i = 1 : numCols
       if matrSIZ(j, i) == 1
           zeroStarInRow(1) = j;
           zeroStarInRow(2) = i;
           break
       end
    end
end
function [matrStreak, matrSIZ] = createL(numRows, numCols, streakPnt, matrStreak, matrSIZ)
    i = streakPnt(1);
    j = streakPnt(2);
    while i > 0 && j > 0 && i <= numRows && j <= numCols
        matrStreak(i, j) = 0;
        matrSIZ(i, j) = 1;
        fprintf("[%d, %d] ", i, j);
        kRow = 1;
        while kRow <= numRows  && (matrSIZ(kRow, j) ~= 1 || kRow == i)
            kRow = kRow + 1;
        end

        if (kRow <= numRows)
            lCol = 1;
            while lCol <= numCols && (matrStreak(kRow, lCol) ~= 1 || lCol == j)
                lCol = lCol + 1;
            end

            if lCol <= numCols
                matrSIZ(kRow,j) = 0;
                fprintf("-> [%d, %d] -> ", kRow, j);
            end
            j = lCol;
        end
        i = kRow;
     end
end
function [fOpt] = getFOpt(matr, matrSIZ)
    fOpt = 0;
    [numRows,numCols] = size(matr);
    for i = 1 : numCols
        for j = 1 : numRows
            if matrSIZ(j, i) == 1
                fOpt = fOpt + matr(j, i);
            end
        end
    end
end
```

Результаты расчетов для задач из индивидуального варианта.

Задача минимизации

3 вариант. Матрица:

1	4	7	9	4
9	3	8	7	4
3	4	6	8	2
8	2	4	6	7
7	6	9	8	5

Результат вычитания наименьшего элемента по столбцам:

0	2	3	3	2
8	1	4	1	2
2	2	2	2	0
7	0	0	0	5
6	4	5	2	3

Результат вычитания наименьшего элемента по строкам:

0	2	3	3	2
7	0	3	0	1
2	2	2	2	0
7	0	0	0	5
4	2	3	0	1

Начальная СНН:

0*	2	3	3	2
7	0*	3	0	1
2	2	2	2	0*
7	0	0*	0	5
4	2	3	0*	1

Число нулей в построенной СНН: k = 5

Конечная СНН:

0*	2	3	3	2
7	0*	3	0	1
2	2	2	2	0*
7	0	0*	0	5
4	2	3	0*	1

X =

1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

Результат = 18

Задача максимизации

3 вариант. Матрица:

1	4	7	9	4
9	3	8	7	4
3	4	6	8	2
8	2	4	6	7

7 6 9 8 5

Матрица после приведения к задаче минимизации:

8 5 2 0 5
0 6 1 2 5
6 5 3 1 7
1 7 5 3 2
2 3 0 1 4

Результат вычитания наименьшего элемента по столбцам:

8 2 2 0 3
0 3 1 2 3
6 2 3 1 5
1 4 5 3 0
2 0 0 1 2

Результат вычитания наименьшего элемента по строкам:

8 2 2 0 3
0 3 1 2 3
5 1 2 0 4
1 4 5 3 0
2 0 0 1 2

Начальная СНН:

8	2	2	0*	3
0*	3	1	2	3
5	1	2	0	4
1	4	5	3	0*
2	0*	0	1	2

Число нулей в построенной СНН: k = 4

Результат выделения столбцов, в которых стоит 0*:

8	2	2	0*	3
0*	3	1	2	3
5	1	2	0	4
1	4	5	3	0*
2	0*	0	1	2
+	+		+	+

Поиск 0 среди невыделенных элементов
Матрица с найденным 0"

8	2	2	0*	3
0*	3	1	2	3
5	1	2	0	4
1	4	5	3	0*
2	0*	0'	1	2
+	+		+	+

Т.к. в одной строке с 0" есть 0*, было переброшено выделение:

	8	2	2	0*	3
	0*	3	1	2	3
	5	1	2	0	4
	1	4	5	3	0*
+	2	0*	0'	1	2
	+			+	+

Поиск 0 среди невыделенных элементов

Т.к. среди невыделенных элементов нет нулей, матрица была преобразована:

	8	1	1	0*	3
	0*	2	0	2	3
	5	0	1	0	4
	1	3	4	3	0*
+	3	0*	0'	2	3
	+			+	+

Матрица с найденным 0"

	8	1	1	0*	3
	0*	2	0	2	3
	5	0'	1	0	4
	1	3	4	3	0*
+	3	0*	0'	2	3
	+			+	+

L-цепочка:
[3, 2] -> [5, 2] -> [5, 3]
Текущая СНН:

8	1	1	0*	3
0*	2	0	2	3
5	0*	1	0	4
1	3	4	3	0*
3	0	0*	2	3

Итого, k = 5

Конечная СНН:

8	1	1	0*	3
0*	2	0	2	3
5	0*	1	0	4
1	3	4	3	0*
3	0	0*	2	3

X =

0	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0

Результат = 38