Лабораторна робота № 4.

Тема: Основні операції над графами. Знаходження остова мінімальної ваги за алгоритмом Пріма-Краскала

Мета роботи: набуття практичних вмінь та навичок з використання алгоритмів Пріма і Краскала.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Теорія графів дає простий, доступний і потужний інструмент побудови моделей прикладних задач, є ефективним засобом формалізації сучасних інженерних і наукових задач у різних областях знань.

Графом G називається пара множин (V, E), де V – множина вершин, перенумерованих числами 1, 2, ..., $n = \upsilon$; $V = \{\upsilon\}$, E – множина упорядкованих або неупорядкованих пар $e = (v', v'')$, $v' \in V$, $v'' \in V$, називаних дугами або ребрами, $E = \{e\}$. При цьому не має примусового значення, як вершини розташовані в просторі або площині і які конфігурації мають ребра.

Неорієнтованим графом G називається граф у якого ребра не мають напрямку. Такі ребра описуються неупорядкованою парою (v', v''). *Орієнтований граф (орграф)* – це граф ребра якого мають напрямок та можуть бути описані упорядкованою парою (v', v'').

Упорядковане ребро називають *дугою*. Граф є *змішаним*, якщо наряду з орієнтованими ребрами (дугами) є також і неорієнтовані. При розв'язку задач змішаний граф зводиться до орграфа.

Кратними (паралельними) називаються ребра, які зв'язують одні і ті ж вершини. Якщо ребро виходить та й входить у дну і ту саму вершину, то таке ребро називається *петлею*.

Мультиграф – граф, який має кратні ребра. *Псевдограф* – граф, який має петлі. *Простий граф* – граф, який не має кратних ребер та петель.

Будь яке ребро e *інцедентно* двом вершинам (v',v''), які воно з'єднує. У свою чергу вершини (v',v'') інцендентні до ребра e . Дві вершини (v',v'') називають *суміжними*, якщо вони належать до одного й того самого ребра e , і *несуміжні* у протилежному випадку.
Два *ребра називають суміжними*, якщо вони мають спільну вершину. Відношення суміжності як для вершин, так і для ребер є симетричним відношенням. *Степенем вершини* графа G називається число інцидентних їй ребер.

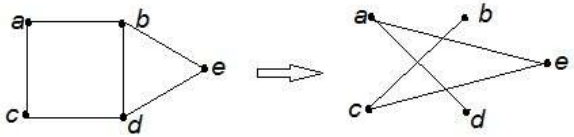
Граф, який не має ребер називається *пустим графом, нуль-графом*. Вершина графа, яка не інцедентна до жодного ребра, називається *ізольованою*. Вершина графа, яка інцедентна тільки до одного ребра, називається *звисаючою*.

Частина $G' = (V', E')$ графа $G = (V, E)$ називається *підграфом* графа G , якщо $V' \subseteq V$ і E' складається з тих і тільки тих ребер $e = (v',v'')$, у яких обидві кінцеві вершини $v',v'' \in V'$. Частина $G' = (V', E')$ називається *суграфом* або *остовим підграфом* графа G , якщо виконано умови: $V' = V$, $E' \subseteq E$.

Операції над графами

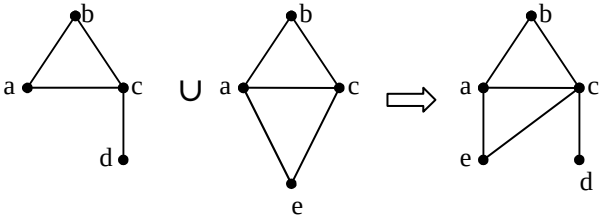
1. *Вилученням ребра* e ($e \in E$) з графа $G = (V, E)$ – є така операція внаслідок якої отримаємо новий граф G_1 для якого $G_1 = (V,E \setminus \{e\})$.

2. *Доповненням графа* $G = (V, E)$ називається граф $G = (V, E')$, якщо він має одну і ту саму кількість вершин та дві його вершини суміжні тоді і тільки тоді коли вони не суміжні в G (тобто ребро $(v_i,v_j) \in E'$ тоді коли $(v_i,v_j) \notin E$). Наприклад:



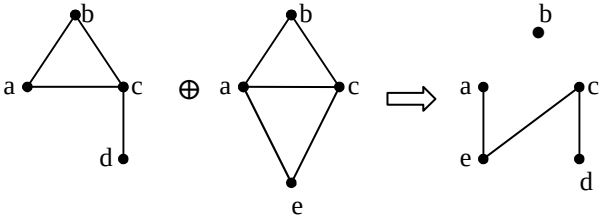
G $\overline{G}$

3. *Об'єднанням графів* $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф $G = (V, E) = G_1 \bigcup G_2$ у якому $V = V_1 \cup V_2$ та $E = E_1 \cup E_2$. Наприклад:



G_1 G_2 $G_1 \cup G_2$

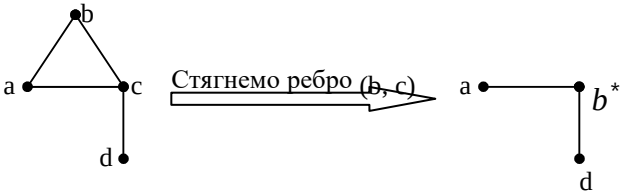
4. *Кільцевою сумою графів* $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф $G = (V, E) = G_1 \oplus G_2$ у якому $V = V_1 \cup V_2$ та $E = E_1 \Delta E_2 = (E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$. Наприклад:



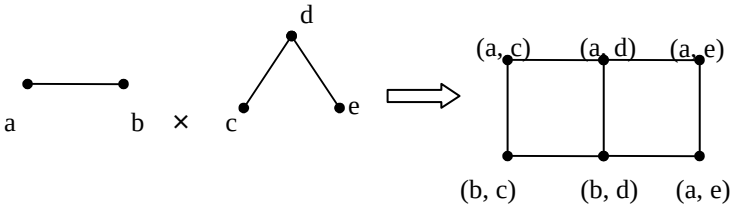
G_1 G_2 $G_1 \oplus G_2$

5. *Розщеплення (роздвоєння) вершини графа*. Нехай υ – вершина графа $G=(V, E)$. Множину усіх суміжних з нею вершин довільним чином розділимо на дві множини $N_1(\upsilon)$ та $N_2(\upsilon)$, таких що $N_1(\upsilon)\bigcup N_2(\upsilon)=V$. Видаливши вершину υ разом з інцидентними їй ребрами, додамо дві нові вершини υ_1 та υ_2 , які з'єднані ребром (υ_1, υ_2). Вершину υ_1 з'єднаємо ребром з кожною вершиною множини $N_1(\upsilon)$, а вершину υ_2 – з кожною вершиною множини $N_2(\upsilon)$. Таким чином з графа G отримаємо новий граф G_v^* . Виконана операція називається *розщепленням вершини* υ . Наприклад:

6. *Стягування ребра (дуги)*. Ця операція означає видалення ребра та ототожнення його суміжних вершин. Граф G_1 стягується до графа G_2 , якщо граф G_2 може бути отриманим з G_1 в результаті деякої послідовності стягування ребер (дуг). Наприклад:



7. Добутком графів $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф $G = G_1 \times G_2$ у якого $V = V_1 \times V_2$ а множина ребер визначається наступним чином: вершини (u_1, υ_1) та (u_2, υ_2) суміжні у G тоді і тільки тоді коли $u_1 = u_2$ і υ_1 та υ_2 суміжні у G_2, або $\upsilon_1 = \upsilon_2$ і u_1, u_2 суміжні у G_1. Наприклад:



G_1 G_2 $G_1 \times G_2$

Таблицею (матрицею) суміжності $R = [r_{ij}]$ графа $G = (V, E)$ називається квадратна матриця порядку n (n – число вершин графа), елементи якої $r_{i,j}$ (i=1, 2, …n; j=1,2, …n) визначаються наступним чином:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо існує дуга з } \upsilon_i \text{ в } \upsilon_j; \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Матриця суміжності повністю визначає структуру графа.

Ексцентриситет вершини графа – відстань до максимально віддаленої від неї вершини. Для графа, для якого не визначена вага його ребер, відстань визначається у вигляді числа ребер.

Радіус графа – мінімальний ексцентриситет вершин.

Діаметр графа – максимальний ексцентриситет вершин.

Діаметром зв'язного графа називається максимально можлива довжина між двома його вершинами.

Нехай дано неорієнтований граф $G=(V, E)$. *Маршрутом* довжини $j-1$ з вершини υ_1 у υ_j називається послідовність $M=\{(\upsilon_1,\upsilon_2), (\upsilon_2,\upsilon_3),...,(\upsilon_i,\upsilon_{i+1}), ..., (\upsilon_{j-1},\upsilon_j)\}$, яка складається з ребер $j = (v_s,v_{s+1})\in E$, при цьому кожні два сусідніх ребра мають спільну кінцеву вершину. Маршрут називається *ланцюгом*, якщо всі його ребра різні. Відкритий ланцюг називається *шляхом*, якщо всі його вершини різні. Замкнений ланцюг називається *циклом*, якщо різні всі його вершини, за винятком кінцевих. Шлях і цикл називаються *гамільтоновими*, якщо вони проходять через усі вершини графа.

Алгоритми знаходження найкоротшого кістякового дерева

Алгоритм Прима для даного n-вершинного графа G=(V, E) будує по кроках s=1, 2, …, l≤n–1 зростаюче дерево $D_s=(V_s, E_s)$, $V_s\subseteq V$, $E_s\subseteq E$. S=1. Фіксуємо довільну вершину v_0, серед усіх ребер, інцидентних вершині v_0 знаходимо найкоротше ребро $e_1=(v_0, v_1)$. Покладемо, що $D_1=(V_1, E_1)$, $V_1=\{v_0, v_1\}$, $E_1=\{e_1\}$ і переходимо до кроку s =2.

Нехай здійснено s<n–1 кроків, у результаті чого в графі G виділено зростаюче дерево $D_s=(V_s, E_s)$. Тоді на кроці (s+1) серед усіх ребер $e=(v',v'')$, таких що $v'\in V_s$, $v''\in(V\setminus V_s)$, знаходимо найкоротше ребро $e_{s+1}=(v_r, v_{s+1})$ і приєднуємо його до дерева D_s, у результаті чого одержуємо дерево $D_{s+1}=(V_{s+1}, E_{s+1})$, $V_{s+1}= V_s\cup \{v_{s+1}\}$, $E_{s+1}= E_s \cup \{e_{s+1}\}$. Алгоритм закінчує свою роботу в двох випадках: 1) результативно на кроці s=n–1 у випадку, якщо граф G зв'язний; 2) безрезультатно, якщо G – незв'язний граф.

Алгоритм Краскала. Перший етап – підготовчий, для даного графа G упорядковуються ребра $e\in E$ у послідовність $e_1, e_2, …, e_m$, $m=|E|$, у порядку неспадання ваг цих ребер: $w(e_1) \le w(e_2) \le … \le w(e_s) \le … \le w(e_m)$.

Другий етап виконується по кроках s=1, 2, …, $m_0 \le m$ у такий спосіб. На кроках s=1, 2 ребра e_1, e_2 з послідовності офарблюються. На кожному наступному кроці s розглядається ребро e_s з послідовності, і воно офарблюється тоді і тільки тоді, коли не утворює циклу з ребрами, пофарбованими на попередніх кроках. У противному випадку ребро e_s умовно викреслюється з графа $G = (V, E)$. Алгоритм закінчує роботу на кроці $s=m_0$, коли пофарбованим виявиться (n–1) по рахунку ребро e_s, $n = |V|$, тому що по необхідності n–1 пофарбованих ребер утворюють кістякове дерево n-вершинного графа.

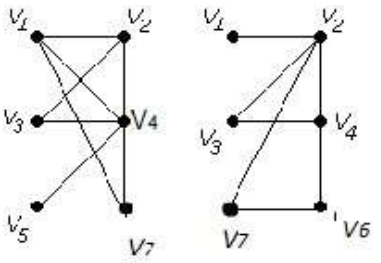
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання № 1. Розв'язати на графах наступні задачі:

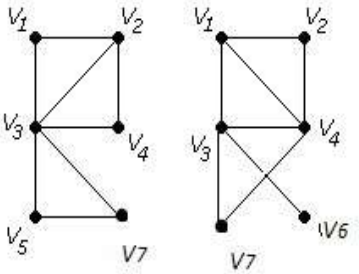
1. Виконати наступні операції над графами:

1) знайти доповнення до першого графу,
2) об'єднання графів,
3) кільцеву суму G1 та G2 (G1+G2),
4) розщепити вершину у другому графі,
5) виділити підграф A, що складається з 3-х вершин в G1 і знайти стягнення A в G1 (G1\ A), 6) добуток графів.

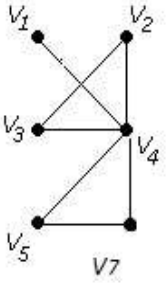
1

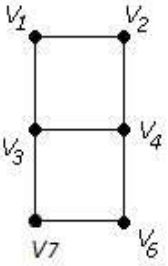


2

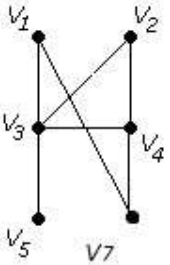


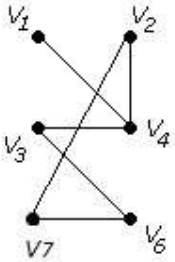
3


V1
V2
V3
V4
V5
V7

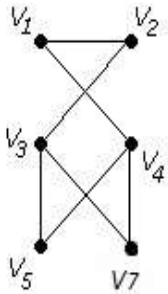

V1
V2
V3
V4
V7
V6

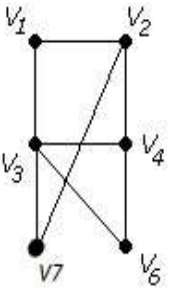
4


V1
V2
V3
V4
V5
V7

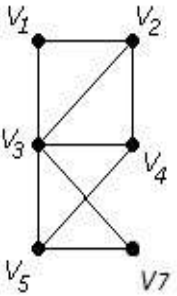

V1
V2
V3
V4
V7
V6

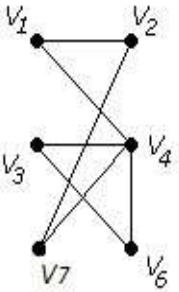
5


V1
V2
V3
V4
V5
V7

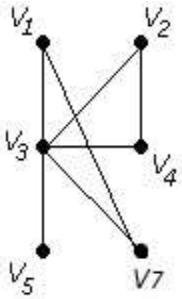

V1
V2
V3
V4
V7
V6

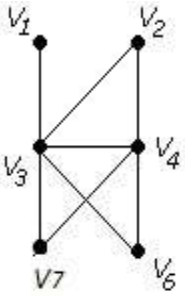
6


V1
V2
V3
V4
V5
V7

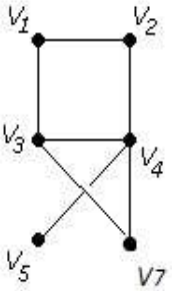

V1
V2
V3
V4
V7
V6

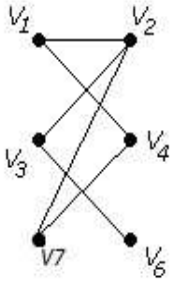
7


V1
V2
V3
V4
V5
V7

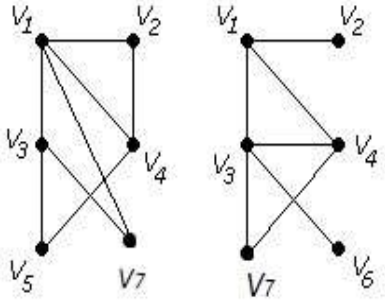

V1
V2
V3
V4
V7
V6

8

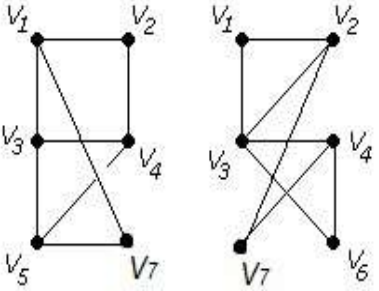

V1
V2
V3
V4
V5
V7


V1
V2
V3
V4
V7
V6

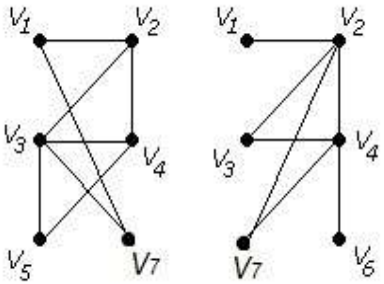
9


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

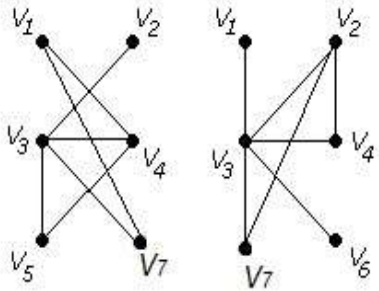
10


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

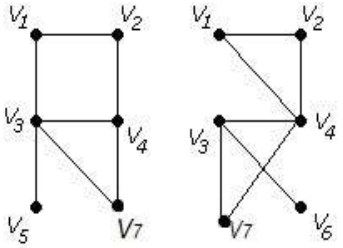
11


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

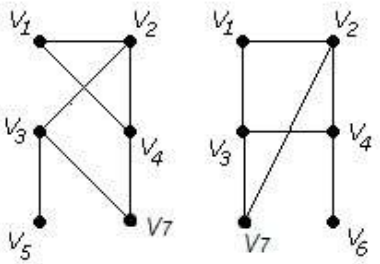
12


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

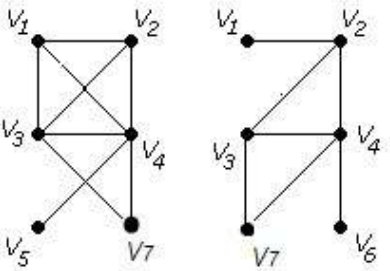
13



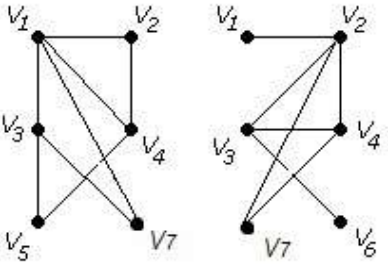
14



15

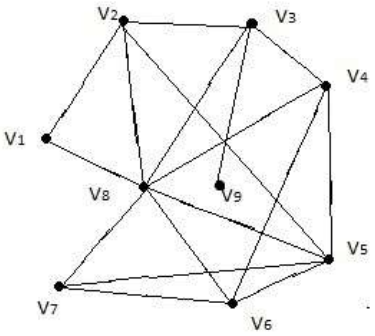


16

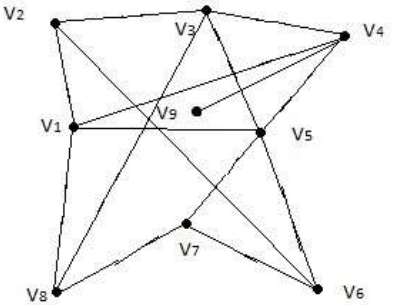


2. Знайти таблицю суміжності та діаметр графа.

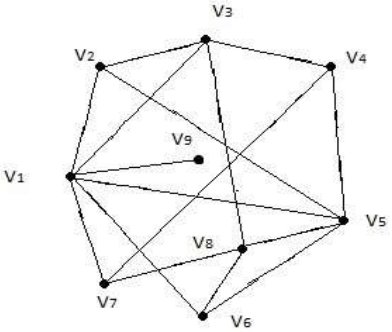
1


V2
V3
V4
V1
V8
V9
V5
V7
V6

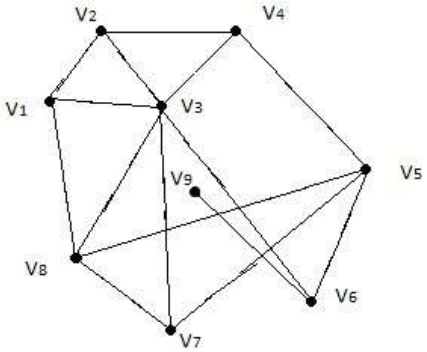
2


V2
V3
V4
V9
V1
V5
V7
V8
V6

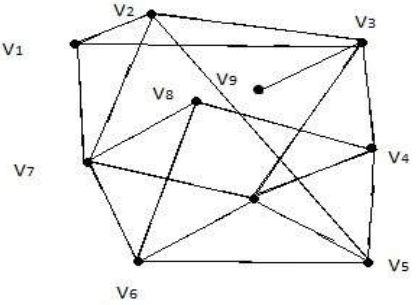
3


V3
V2
V4
V9
V1
V5
V8
V7
V6

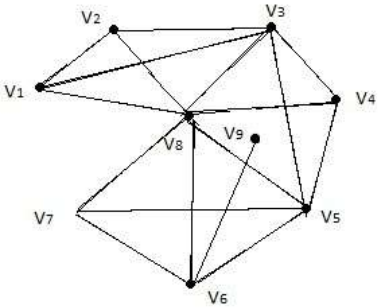
4


V2
V4
V1
V3
V9
V5
V8
V6
V7

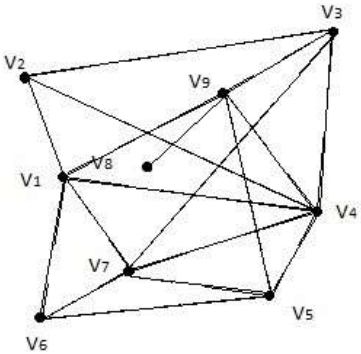
5


V1
V2
V3
V4
V5
V6
V7
V8
V9

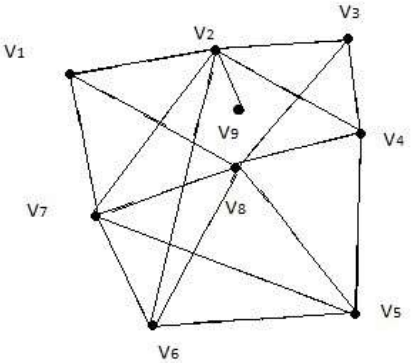
6


V1
V2
V3
V4
V5
V6
V7
V8
V9

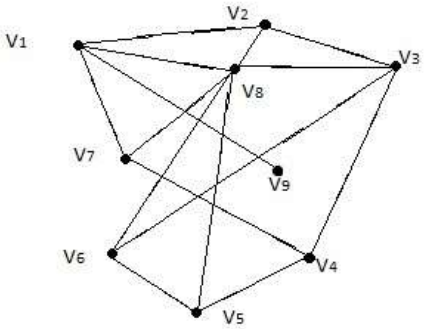
7


V1
V2
V3
V4
V5
V6
V7
V8
V9

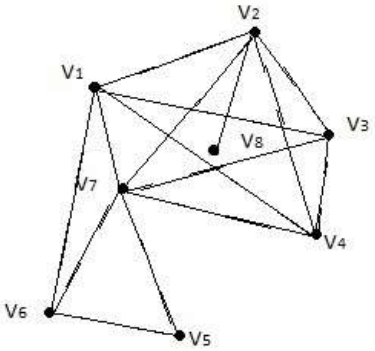
8


V1
V2
V3
V4
V5
V6
V7
V8
V9

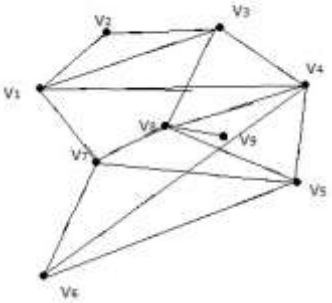
9


V1
V2
V3
V8
V7
V9
V6
V4
V5

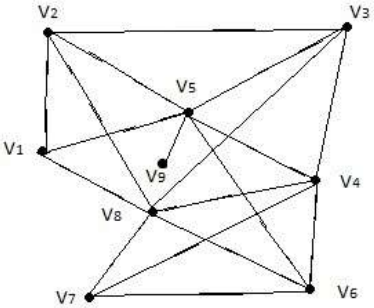
10


V2
V1
V3
V8
V7
V4
V6
V5

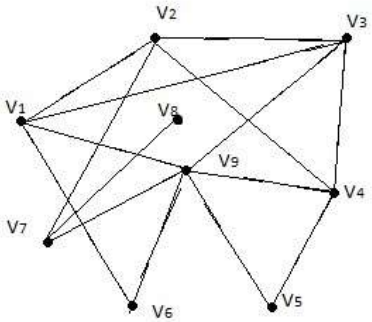
11


V2
V3
V4
V1
V8
V9
V7
V5
V6

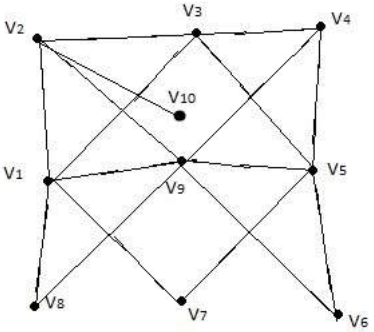
12


V2
V3
V5
V1
V9
V4
V8
V7
V6

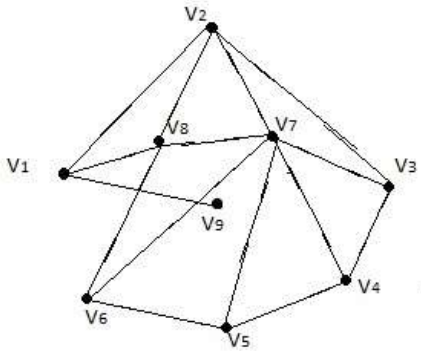
13



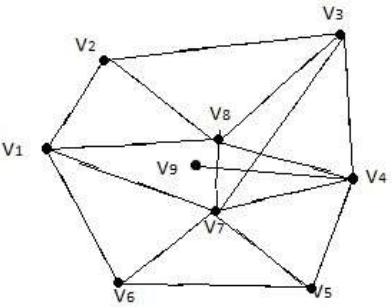
14



15

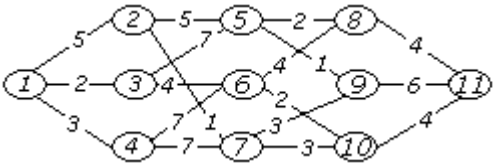


16

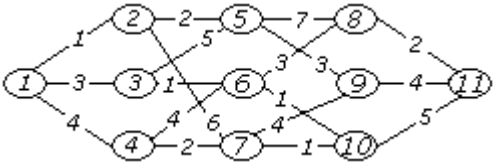


3. Знайти двома методами (Краскала і Прима) мінімальне остове дерево графа.

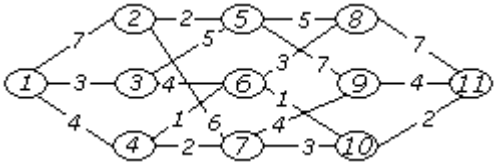
1


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

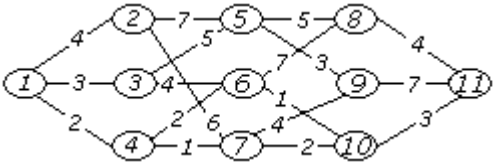
2


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

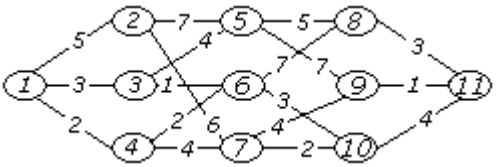
3


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

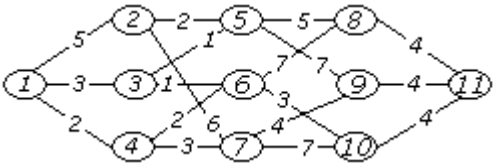
4


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

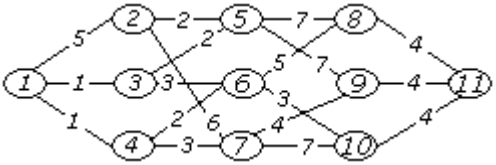
5


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

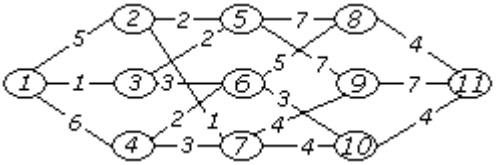
6


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

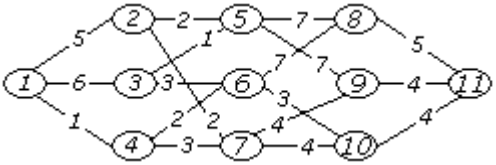
7


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

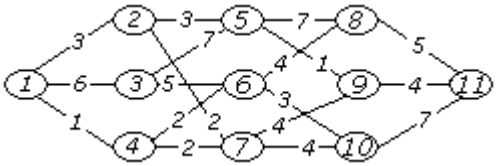
8


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

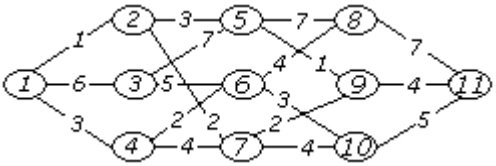
9


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

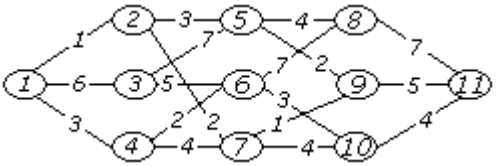
10


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

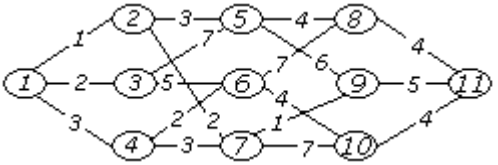
11


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

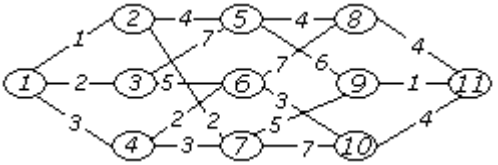
12



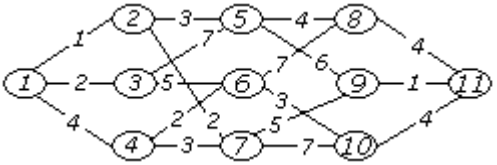
13



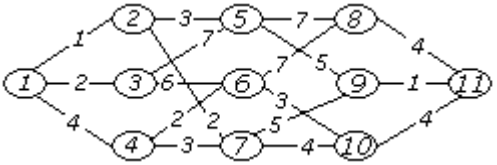
14



15



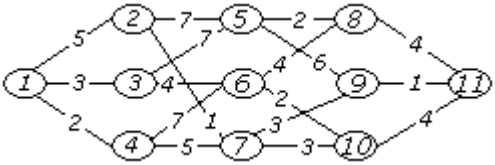
16



Завдання №2. Написати програму, яка реалізує алгоритм знаходження остового дерева мінімальної ваги згідно свого варіанту.

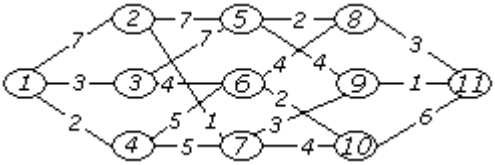
Варіант № 1

За алгоритмом Прима знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



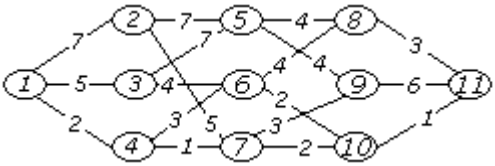
Варіант № 2

За алгоритмом Краскала знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



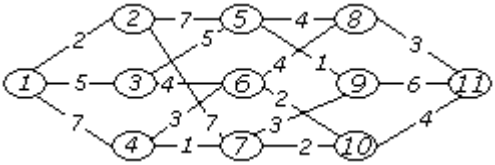
Варіант № 3

За алгоритмом Прима знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



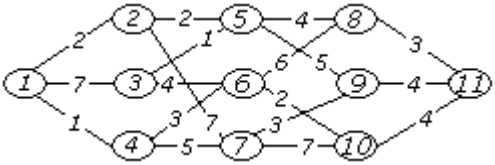
Варіант № 4

За алгоритмом Краскала знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



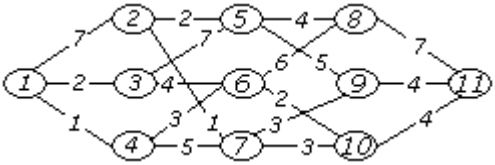
Варіант № 5

За алгоритмом Прима знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



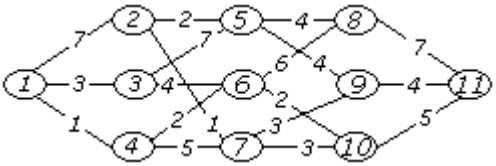
Варіант № 6

За алгоритмом Краскала знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



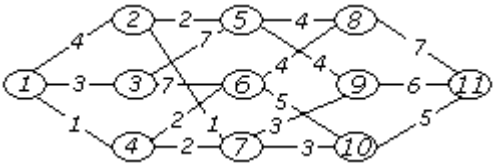
Варіант № 7

За алгоритмом Прима знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



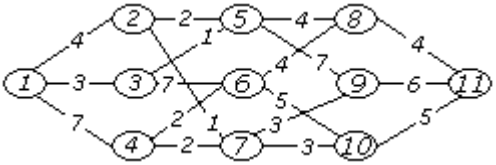
Варіант № 8

За алгоритмом Краскала знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



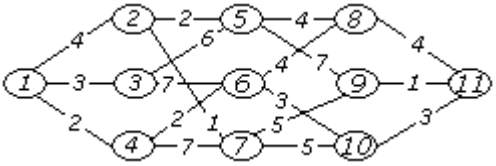
Варіант № 9

За алгоритмом Прима знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



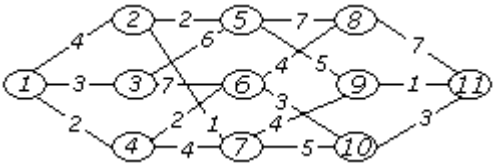
Варіант № 10

За алгоритмом Краскала знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



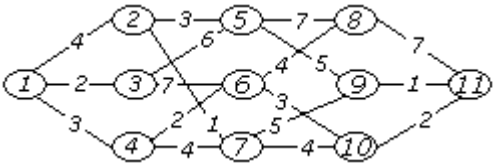
Варіант № 11

За алгоритмом Прима знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



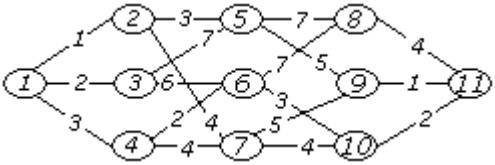
Варіант № 12

За алгоритмом Краскала знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



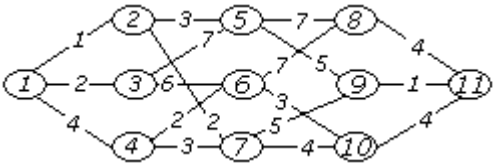
Варіант № 13

За алгоритмом Прима знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



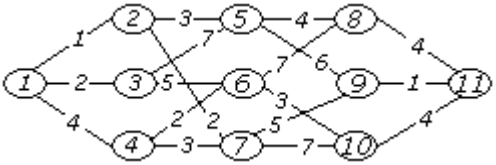
Варіант № 14

За алгоритмом Краскала знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



Варіант № 15

За алгоритмом Прима знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі:



Варіант № 16

За алгоритмом Краскала знайти мінімальне остове дерево графа. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на наступному графі: