Лабораторна робота № 6.

Тема: Генерація комбінаторних конфігурацій

Мета роботи: набути практичних вмінь та навичок при комп'ютерній реалізації комбінаторних задач.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Головна задача комбінаторики – підрахунок та перелік елементів у скінчених множинах.

Правило додавання: якщо елемент – x може бути вибрано n способами, а y- іншими m способами, тоді вибір „ x або y" може бути здійснено (m+n) способами.

Правило добутку: якщо елемент – x може бути вибрано n способами, після чого y - m способами, тоді вибір упорядкованої пари (x, y) може бути здійснено (m*n) способами.

Набір елементів $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{im}$ з множини $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ називається вибіркою об'єму m з n елементів – *(n, m) – вибіркою.*

Упорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається *(n, m) – розміщеням*, кількість всіх можливих розміщень обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Упорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n, m) – розміщеням з повторюваннями*, кількість всіх можливих таких розміщень обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^m} = n^m.$$

Неупорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається *(n, m) – сполученням,* кількість всіх можливих сполучень обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Неупорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n,m)-сполученням з повторюваннями*, кількість всіх можливих таких сполучень обчислюється за формулою:

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m.$$

A_n^n – називається *перестановкою*, а кількість різних перестановок позначається та обчислюється за формулою:

$$P_n = n!.$$

Якщо в перестановках є однакові елементи, а саме перший елемент присутній n_1 разів, другий елемент – n_2 разів, ... , k-ий елемент – n_k разів, причому $n_1+n_2+....+n_k=n$, то їх називають *перестановками з повторенням* та кількість їх можна знайти за формулою

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Нехай $X = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$ - *розбиття множини* X ($X = n$) на k підмножин таких, що: $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X$, $X_i \cap X_j = 0$ при $i \neq j$,

$|X_i| = n_i$.

Їх кількість при фіксованих n_i та *упорядкованих* $X_1, X_2, ..., X_k$ обчислюється за формулою:

$$C_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Якщо ж множину X ($|X| = n$) потрібно розбити на підмножини, серед яких для усіх i=1, …, n є $m_i \geq 0$ підмножин з i елементами, де $\sum_{i=1}^{n} i * m_i = n$, та при цьому набір підмножин в розбитті *не є упорядкованим,* тоді їх кількість обчислюється за формулою: $n!$

$$N(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_n!(1!)^{m1}(2!)^{m2}\ldots(n!)^{m_n}}.$$

<u>Формула включень та виключень.</u> Нехай X_i – скінчені множини, де i=1,…,n, тоді:

$$|X_1 \cup \ldots \cup X_n| = (|X_1| + \ldots + |X_n|) - (|X_1 \cap X_2| + \ldots + |X_{n-1} \cap X_n|) +$$
$$+ (|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \ldots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|) - \ldots + (-1)^{n+1}|X_1 \cap \ldots \cap X_n|.$$

<u>Наслідок.</u>

$$|X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_n)| = |X| - (|X_1| + \ldots + |X_n|) +$$
$$(|X_1 \cap X_2| + \ldots + |X_{n-1} \cap X_n|) - \ldots + (-1)^n |X_1 \cap \ldots \cap X_n|.$$

Приведемо ще одну форму запису формули включень та виключень. Нехай X – скінчена множина з N елементів, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – деякі властивості, якими володіють чи ні елементи з X. Позначимо через $X_i = \{x \in X | \alpha_i(x)\}$ – множину елементів в X, які володіють властивістю α_i, а

$N(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik}) = |X_{i1} \cap \ldots \cap X_{ik}| = |\{x \in X | \alpha_{i1}(x) \wedge \ldots \wedge \alpha_{ik}(x)\}|$ – кількість

елементів в X, які володіють одночасно властивостями $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ik}$, $N_0 = |X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_n)|$ - кількість елементів, що не володіють жодною з властивостей $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik}$. Тоді маємо формулу:

$N_0 = N - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^n S_n$, де $S_k = \sum_{1 \le i_1,\ldots,i_k \le n} N(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik})$ $k = 1, 2, \ldots, n.$

Якщо треба знайти кількість елементів, які володіють рівно m властивостями, тоді використовують наступну формулу:

$$\hat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^m S_{m+k}.$$

<u>Приклади.</u>

1. Кожен день, протягом 10 днів, клієнт брав з картки гроші а) кожен день різну суму 5, 10, 15,…, 50 грн; б) 3 дні у сумі 100 грн, 5 днів у сумі 50 грн., 2 дня у сумі 20 грн, Скількома способами він це міг зробити?

Розв’язання:

а) усього 10 днів (n=10), і в усі ці дні клієнт брав гроші (m=10), кожен день різну суму, тобто має значення лише в який день була яка сума, тому маємо перестановку: $P_{10} = 10! = 3628800$,

б) усього 10! перестановок, але 3! перестановок не відрізняються між собою тому, що в три дні сума однакова – 100 грн, також – 5! та 2! перестановки однакові, тому різних способів буде:

$$P_{10}^{3,5,2} = \frac{10!}{3!5!2!} = 2520.$$

2. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з шести цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Розв'язання.

З шести цифр (n=6) необхідно вибрати – п'ять (m=5), причому цифри у числі можуть повторюватися, і має значення в якому порядку вони записані, тому усього можливо утворити: $\overline{A_6^5} = 6^5 = 7776$ чисел.

3. Із 10 робітників фірми директору треба назначити бухгалтера, його помічника, двох менеджерів і трьох кур'єрів. Скількома способами це можливо зробити?

Розв'язання.

З початку з 10 чоловік виберемо бухгалтера – маємо 10 способів, потім з дев'яти залишених чоловік – його помічника – 9 способів, потім з восьми – двох менеджерів – $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$ способів та з шести, що залишилися, – трьох кур'єрів– $C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$ способів. За теоремою добутку загальна кількість способів буде: 10*9*28*20=50400.

4. Скількома способами можна поставити в одну шеренгу гравців двох команд (по 5 чоловік) так, щоб при цьому два чоловіка однієї команди не стояли поруч?

Розв'язання.

З початку поставимо в шеренгу гравців однієї команди, це можливо зробити – P_5=5!=120 способами. Потім будемо ставити між ними гравців другої команди. Усього можливих міст маємо – 6, з котрих треба вибрати п'ять без повторювань та упорядковано, тому різних способів буде – $A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = 720.$ За правилом добутку усього різних способів поставити в одну шеренгу гравців двох команд буде – 120*720=86400.

5. Скількома способами можна роздати 6 однакових іграшок трьом дітям так, щоб кожен з них отримав хоча б по однієї іграшки?

Розв'язання.

З початку роздамо по одній іграшці кожній дитині, між останніми трьома іграшками введемо два роздільника, так щоб кількість іграшок до першого з них були для першої дитини, кількість іграшок між першим та другим роздільником – для другої дитини, а після другого роздільника – для третьої дитини. Тоді кількість різних способів отримання дітьми іграшок буде дорівнювати кількості можливих варіантів вибору двох міст для роздільників з п'ятьох можливих, тобто – $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10.$

6. Скількома способами можна роздати 6 різних предметів трьом особам так, щоб кожна отримала по 2 предмети?

Розв'язання.

Це упорядковане розбиття, де n=6, $n_1=n_2=n_3=2$. Тобто можливих способів буде – $C_6^{2,2,2} = \frac{6!}{2!2!2!} = 90.$

7. Дев'ятьох робітників одного цеху мають розподілити на групи в 2, 3 і 4 чоловіка для проходження однакових курсів підвищення кваліфікації, які проходять в різних 7 навчальних закладах, з яких можливо вибрати будь-який. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання.

З початку виберемо 3 навчальних заклади, це можливо зробити

$A_7^3 = 7^3 = 343$ способами, потім розіб'ємо робітників на три групи, це буде не упорядковане розбиття, тобто маємо:

$$N(0,1,1,1,0,0,0,0,0) = \frac{9!}{1!1!1!(2!)^1(3!)^1(4!)^1} = 1260.$$

Далі за правилом добутку отримаємо – 343 * 1260 = 432180 різних способів.

8. У спортивному клубі займаються 38 чоловік. З них 16 грають у баскетбол, 17 – у хокей, 18 – у волейбол. Баскетболом і хокеєм захоплюється 4 чоловіки, баскетболом і волейболом – 7, волейболом і хокеєм – 5. Скільки чоловік захоплюється одночасно хокеєм, баскетболом і волейболом? Скільки чоловік захоплюється лише одним із цих видів спорту?

Розв'язання.

За формулою включень та виключень маємо:

N=38, N_0=0, S_1=16+17+18=51, S_2=4+7+5=16

$N_0 = N - S_1 + S_2 - S_3$, тоді $S_3 = N - S_1 + S_2 - N_0 = 38-51+16 = 3$ - чоловік захоплюється одночасно хокеєм, баскетболом і волейболом . Лише одним із цих видів спорту захоплюються:

$$\hat{N}_1 = \sum_{k=0}^{3-1}(-1)^k C_{1+k}^1 S_{1+k} = S_1 - \frac{2!}{1!(2-1)!}S_2 + \frac{3!}{1!(3-1)!}S_3 = 51-32+9 = 28 \text{ чоловік.}$$

Лексикографічний порядок – це природний спосіб упорядкування послідовностей на основі порівняння індивідуальних символів. На множині всіх розміщень із *r* елементів означимо порівняння таким чином: $b_1b_2...b_r < a_1a_2...a_r$, якщо $\exists m: (b_i = a_i\ ,\ i < m) \wedge (b_m < a_m)$.

У такому разі говорять, що перестановка $b_1b_2...b_r$ *менша* від перестановки $a_1a_2...a_r$, або перестановка $a_1a_2...a_r$ *більша* від перестановки $b_1b_2...b_r$.

Алгоритм побудови лексикографічно наступного розміщення з повтореннями за розміщенням $a_1a_2...a_r$

Алгоритм подібний до звичайного визначення наступного числа.

Крок 1. Знаходимо позицію *k* першого справа числа, відмінного від *n* $a_k < n$.

Крок 2. Збільшуємо елемент a_k на одиницю. Елементи a_i, де *i* < *k* залишаються без змін. Елементи a_i, де *i* > *k* стають рівними одиниці.

Приклад. Нехай *A* = {1, 2 ,3}. Побудуємо 6 розміщень з повтореннями лексикографічно наступних після 1222. Наступне буде 1223, так як можливо збільшити останній елемент. Після нього буде 1231, оскільки 4-й елемент ми збільшити не можемо, то збільшуємо 3-й, а 4-й ставимо рівним одиниці. Як бачимо, маємо аналогію з переносом розряду, подібно до десяткового числення. Наступні елементи, відповідно будуть 1232,1233, 1311 та 1312.

Алгоритм побудови лексикографічно наступного розміщення без повторень за розміщенням $a_1a_2...a_r$

Алгоритм від попереднього відрізняється тим, що у розміщеннях не може бути повторів, і тому потрібно "оновлювати" елементи розміщення, не порушуючи цієї властивості.

Крок 1. Знайдемо множину *B* "вільних" чисел, яких немає у розміщенні $a_1a_2...a_r$: $B = A \setminus \{a_1a_2...a_r\}$.

Крок 2. Шукаємо перший справа елемент у розміщенні, який можна збільшити. Якщо у *B* є елементи, які більші за a_r, то вибираємо серед них такий, що: $b_r = \min_{x \in B}\{x > a_r\}$.

Якщо у *B* немає елементів, більших за a_r, то додаємо до *B* елемент a_r, $B = B \cup \{a_r\}$ і шукаємо: $b_{r-1} = \min_{x \in B}\{x > a_{r-1}\}$.

Якщо у *B* немає елементів, більших за a_{r-1}, то додаємо до *B* елемент a_{r-1}, і т.д. Продовжуємо цей процес, поки не знайдемо: $b_k = \min_{x \in B} \{x > a_k\}$, або не дійдемо до початку розміщення. Якщо такого b_k не знайдено, то ми дійшли до максимального елементу, і алгоритм завершено. Якщо ні, то переходимо до кроку3.

Крок 3. Обчислюємо наступне розміщення. Записати в k-ту позицію розміщення знайдене число b_k і вилучити його з множини *B*. Записати у висхідному порядку число b_{k+1}, b_{k+2}, $b_{k+3} \dots b_r$ – найменші з чисел у множині *B*, розмістивши їх на позиціях *k + 1, k + 2,..., r*.

Приклад. Нехай *A* = {1, 2 , 3, 4}. Побудуємо 4 розміщень без повтореннями лексикографічно наступних після 123. Наступне буде 124, так як можливо збільшити останній елемент (3).

Обчислимо наступне розміщення після 124. Оскільки 3-й елемент ми збільшити не можемо, то збільшуємо 2-й елемент, тобто заміняємо "2" на "3". На останньому місці не можна ставити одиницю, бо вона вже є у розміщенні, і ставимо найменший елемент, такий що його немає в розміщенні , тобто "2". Отже отримуємо 132 .

Наступне розміщення після 132 рівне 134, тому що можливо збільшити останній елемент. Яке розміщення буде після 134? Останній елемент ми не можемо збільшити, але можемо збільшити передостанній. Тому наступне розміщення 142.

Алгоритм побудови лексикографічно наступної перестановки за перестановкою $a_1, a_2 \dots a_n$

Наведемо кроки алгоритму.

Крок 1. Знайти такі числа a_j і a_{j+i}, що $(a_j < a_{j+1},) \cap (a_{j+i} \geq a_{j+2} \geq \dots \geq a_n)$. Для цього треба знайти в перестановці першу справа пару сусідніх чисел, у якій число ліворуч менше від числа праворуч.

Крок 2. Записати в *j*-ту позицію таке найменше з чисел $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n$, яке водночас більше, ніж a_j.

Крок 3. Записати у висхідному порядку число a_j і решту чисел $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n$ у позиції *j + 1,..., n.*

Приклад. Побудуємо 2 перестановки, наступні в лексикографічному порядку за 34521. Згідно першого кроку *j=2*, бо 4<5>2>1. Отже, перше число (3) залишається на місці, а збільшується друге число(4). Розглянемо послідовність чисел 521. Серед них найменше число, більше від 4, це 5. Тепер на другому місці 5, а решту чисел розміщуємо у вихідному порядку: 35124.

Побудуємо наступну перестановку після 35124. Згідно першого кроку *j =4,* і щоби отримати наступну перестановку, треба збільшити "2", поставивши замість нього "4", так як справа немає іншого числа більше "2". Переставивши місцями два останніх числа, ми отримаємо 35142.

Зауважимо також, що для перебору перестановок з повтореннями чи без повторень алгоритм не відрізнятиметься. Єдина відмінність полягатиме у тому, що для перестановок без повторень рівності у кроці 1 будуть строгими.

Алгоритм побудови лексикографічно наступного сполучення з повтореннями за сполученням $a_1, a_2 \dots a_r$

Алгоритм подібний до алгоритмів генерування розміщень, але має одну особливість, яка полягає в наступному: якщо сполучення впорядковане у висхідному порядку, то кожен наступний елемент сполучення не менший за попередній.

Крок 1. Знаходимо позицію *k* першого справа числа, відмінного від *n:* $a_k < n$.

Крок 2. Збільшуємо елемент a_k на одиницю $b_k = a_k + 1$.

Елементи зліва a_i залишаються без змін $b_i = a_i$, де $i < k$.

Елементи справа a_i, де $i > k$ стають рівними b_k, $b_i = b_k$, де $i > k$.

Приклад. Нехай *A* = {1, 2 , 3, 4}. Побудуємо 7 сполучень з повтореннями лексикографічно наступних після 1233. Наступне буде 1234, так як можливо збільшити останній елемент.

При пошуку наступного сполучення після 1234 бачимо, що збільшувати можна "3". Отже отримаємо 124. Останній елемент теж повинен бути рівний "4", бо не може бути менший за попередній. Отже отримуємо 1244.

Після нього буде 1333 - оскільки ми можемо збільшити тільки "2", а інші елементи мають бути такими самими. Аналогічно знаходимо наступні елементи: 1334, 1344, 1444 та 2222.

Алгоритм побудови лексикографічно наступного сполучення без повторень за сполученням $a_1 a_2 \dots a_r$

Перед тим як розглянути алгоритм, розглянемо одну особливість. Якщо сполучення впорядковане у висхідному порядку і не має повторів, то кожен наступний елемент сполучення більший від попереднього принаймі на одиницю.

Тоді максимальне значення, яке може набувати його останній елемент, рівне *n*. Максимум для передостаннього елементу рівний *n-1*, а не *n*. Доведемо це від зворотнього. Припустимо. що останній елемент рівний *n* , тоді наступний елемент має бути рівний *n +1*, але такого елементу немає в множині.

Отже максимум передостаннього елементу *n-1*. Аналогічно можна довести, що максимум елементу на *k*-ій позиції рівний *n-(r-k)*. Мінімум елементу – попереднє число сполучення, збільшене на одиницю.
Крок 1. Знайдемо перший справа елемент сполучення, який можна збільшувати. Він має бути менший за свій допустимий максимум, тобто $a_k < n - r + i$.

Крок 2. Збільшимо елемент a_k на одиницю $b_k = a_k + 1$.

Крок 3. Елементи зліва від a_i не змінюємо $b_i = a_i$, $i<k$.

Крок 4. Елементи справа змінюємо на мінімальні, тобто такі, що на одиницю більші від попереднього: $b_i = b_{i-1} + 1= a_k + i-k$, $i>k$.
Приклад. Нехай A={1,2,3,4,5}. Знайдемо сполучення, наступне за {1,2,5,6} у лексикографічному порядку.
Це сполучення подамо рядком 1256. Маємо n = 6, r= 4. Перший справа з таких елементів, що $a_i \neq 6 - 4 + i$, — це a_2=2. Для обчислення наступного більшого сполучення збільшуємо a_2 на 1 та одержуємо a_2 = 3. Тепер нехай a_3 = 3+1=4 і a_4 = 3 + 2 = 5. Отже, наступне в лексикографічному порядку сполучення — те, що зображене рядком 1345, тобто {1, 3, 4, 5}.

*Біномом Ньютон*а називають формулу для обчислення виразу $(a+b)^n$ для натуральних n.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання № 1. Використовуючи теоретичні відомості, розв’язати наступні комбінаторні задачі за своїм варіантом:

Варіант № 1

1. У мами було 2 яблука, 3 груші та 2 апельсини. Кожен день вона давала дитині по одному фрукту. Скількома способами вона могла це зробити?
2. Розклад на день містить 5 уроків. Визначити кількість таких можливих розкладів при виборі 11 дисциплін за умови, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі на день.
3. Скільки наборів із 17 тістечок можна скласти, якщо у продажу їх 4 сорти?
4. Із 15 робітників фірми директору треба назначити бухгалтера, його помічника, двох менеджерів і чотирьох кур’єрів. Скількома способами це можна зробити?
5. Скількома способами можна поставити в одну шеренгу гравців двох футбольних команд (по 6 чоловік) так, щоб при цьому два футболісти однієї команди не стояли поруч? **6.** Три стрільці мають влучити у 15 мішеней (кожен у п’ять). Скількома способами вони можуть розподілити мішені між собою?
7. В екскурсії брали участь студенти технічного університету. Всі вони були зі значками, або з листівками. Юнаків було 16, а зі значками усього – 24 чоловіки. Дівчат із листівками було стільки ж, скільки й юнаків із значками, дівчат із листівками та значками було – 5. Скільки всього було студентів?

Варіант № 2

1. Кожен день, протягом 10 днів, клієнт брав з картки гроші а) 3 дні у сумі 100 грн, 5 днів у сумі 50 грн., 2 дня у сумі 20 грн; б) кожен день різну суму 5, 10, 15,…, 50 грн, Скількома способами він це міг
зробити?
2. Скільки п’ятицифрових чисел можна утворити з дев’яти цифр
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
3. Команда з п’яти чоловік виступає на змаганнях, у яких бере учать ще 20 спортсменів. Скількома способами можуть бути розподілені місця, зайняті членами цієї команди, за умови, що жодне з них не може бути поділено, та немає значення, як місця будуть поділені між членами команди?
4. Комісія складається з голови, його заступника, та ще трьох чоловік. Скількома способами можна вибрати таку комісію з 7

чоловік?

5. Скількома способами можна розставити 5 різних книжок з математики і 3 різні книжки з фізики, щоб усі книжки з фізики стояли
поруч?
6. Вісім авторів мають писати книгу з шістнадцяти розділів. Скількома способами можна розподілити матеріал між авторами, якщо два чоловіки напишуть по три розділи, чотири – по два та двоє – по одному розділу книги?
7. Якщо відомо, що кожен учень у школі вивчає принаймні одну із іноземних мов, знайдіть загальну кількість учнів у школі, якщо відомо, що англійську мову вивчають 28 учнів, французьку – 23 учні, німецьку – 21 учень, англійську та французьку – 12 учнів, англійську та німецьку – 8 учнів, французьку та німецьку – 7 учнів, всі три мови -
5 учнів.

Варіант № 3

1. У вчителя 4 однакових групи з англійської мови і 3 однакових- з французької. Кожен день він готовиться до однієї мови і проводить заняття в одній групі. Скількома способами він може вести таку підготовку?
2. Садівник протягом трьох днів має посадити 10 дерев десяти різних сортів. Скількома способами він може розподілити за днями свою роботу?
3. У поштовому відділенні продаються листівки 10 сортів. Скількома способами можна купити в ньому 12 листівок?
4. Скільки існує різних нескоротних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19?
5. З цифр 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 утворюють різні п’ятицифрові числа, які не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічаються цифри 6 і 8 одночасно.
6. Скількома способами можна роздати 6 різних предметів трьом особам так, щоб кожна отримала по 2 предмети?
7. У спортивному клубі займаються 38 чоловік. З них 16 грають у баскетбол, 17 – у хокей, 18 – у волейбол. Баскетболом і хокеєм захоплюється 4 чоловіки, баскетболом і волейболом – 7, волейболом і хокеєм – 5. Скільки чоловік захоплюється одночасно хокеєм, баскетболом і волейболом? Скільки чоловік захоплюється лише одним із цих видів спорту?

Варіант № 4

1. Скількома способами можна видати 15 учням: а) 15 різних варіантів білетів; б) 5 білетів першого варіанта, 5 – другого, 5 – третього?
2. Скількома способами можна розділити 6 різних цукерок між трьома дітьми?
3. Скількома способами можна розташувати 12 різних деталей у трьох однакових ящиках?
4. Збори, на яких присутні 40 чоловік, обирають голову, секретаря і трьох членів комісії. Скількома способами це можна зробити?
5. Для учнів класу було куплено 20 білетів у театр на місцях, що знаходяться в одному ряду (на якому 20 місць). Скільки є способів розподілу цих білетів між учнями (10 хлопців та 10 дівчат), щоб два хлопця або дві дівчини не сиділи поруч?
6. Десятьох тенісистів мають розподілити на групи по 2, 3 і 5 спортсменів для поїздки на три турніри, які обираються з 6 можливих. Скількома способами це можна зробити?
7. Знайдіть кількість цілих додатних чисел, що не більше 1000 і не діляться на жодне з чисел 3, 5 і 7.

Варіант № 5

1. Скільки різних кілець, що світяться, можна утворити, розмістивши по колу 10 різнокольорових лампочок (кільця вважати однаковими, якщо послідовність кольорів одна й та сама)?
2. На дев’яти картинках записані цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (на кожній картці по одній цифрі). Беруть чотири катки і складають з них чотирицифрове число. Скільки різних чисел можна отримати таким
чином?
3. Скільки існує трикутників, довжини сторін яких мають одне з таких значень: 4, 5, 6, 7 см?

4. Скільки різних правильних нескоротних дробів можна скласти з чисел 2, 5, 7, 11, 15, 17, 19, 23, 25 так, щоб у кожен дріб входило два числа?

5. Скільки п’ятицифрових чисел можна утворити з цифр 2, 3, 6, 7, 8 (без повторення) так, щоб парні цифри не стояли поруч? **6.** Скількома способами можна розкласти 28 різних предметів у чотири однакові ящики так, щоб у кожному з них опинилося по 7 предметів?

7. Знайти кількість цілих додатних чисел, що не більше 1000 і не діляться на жодне з чисел 6, 7 і 15.

Варіант № 6

1. Скільки різних бус можна зробити з 15 різних бусинок?
2. Скільки різних трицифрових натуральних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, щоб у ньому кожна з цих цифр зустрічалась не більше одного разу?
3. З лабораторії, у якій працює 25 чоловік, 5 співробітників мають поїхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи?
4. Із 12 тенісистів і 6 тенісисток формують три змішані пари (до пари входять по одному тенісисту й одній тенісистці). Скількома способами це можна зробити?
5. На книжковій полиці вміщується тринадцять томів енциклопедії. Скількома способами їх можна розставити так, щоб томи 1 і 2 стояли поруч?
6. У турнірі беруть участь 12 шахістів. Визначити кількість різних розкладів першого туру (розклади вважаються різними, якщо вони відрізняються учасниками; колір та номер столу не враховується)
7. Знайти кількість цілих додатних чисел, що не більше 9000 і не діляться на жодне з чисел 12, 36 і 52.

Варіант № 7

1. Учасники шахового турніру грають у залі, де є 8 столів. Скількома способами можна розмістити 16 шахістів, якщо учасники всіх партій відомі?
2. Скільки трицифрових чисел можна утворити з дев’яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
3. Скільки можна побудувати різних прямокутних паралелепіпедів, довжини ребер яких виражають натуральними числами від 1 до 10?
4. У вищій лізі чемпіонату України з футболу грають 16 команд. Скільки існує способів розподілення I, II, та III місця та вибору двох команд які перейдуть у першу лігу (дві останні команди)?
5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюють різні п’ятицифрові числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічається цифри 5, 3, 4 одночасно, якщо вони не стоять поруч?
6. У шаховому турніру беруть участь 18 шахістів. Визначити кількість різних розкладів першого туру (розклади вважаються різними, якщо вони відрізняються учасниками, колір та номер столу не враховується).
7. Знайти кількість цілих додатних чисел, які змінюються від 101 до 1000 та діляться рівно на два з чисел 3, 6 і 7.

Варіант № 8

1. З букв розрізаної абетки складено слово «конус». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставляти букви у цьому слові?
2. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, щоб у кожному з них була цифра 1? (Цифри в числі не повинні повторюватися).
3. Із групи до складу якої входять 8 хлопчиків і 3 дівчинки, треба сформувати команду з 6 чоловік. Скільки існує способів формування такої команди?

4. Скільки можна скласти різних неправильних нескоротних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17,
27?
5. Скількома способами можна переставити букви в слові «обороноздатність», щоб дві букви «о» не стояли поряд?
6. П'ять учнів мають підготовити 10 докладів на семінар (кожен по два). Скількома способами вони можуть розподілити доклади між собою?
7. Підкидаються три гральні кістки. Скільки може бути варіантів таких, щоб не виповнилась жодна умова: 1) на всіх кістках випали трійки; 2) на всіх кістках випали попарно різні числа; 3) рівно на одніє̈ з них випала одиниця?

Варіант № 9

1. Скількома способами можна розставити 4 однакових книжки з алгебри і 5 різних з геометрії так, щоб усі книги з геометрії стояли
разом?
2. У класі тридцять учнів. Скількома способами можна серед них вибрати старосту та його заступника?
3. Скільки наборів з 10 цукерок можна скласти, якщо у продажу їх 6 сортів?
4. На площині дано три точки: А, В, С. Проведемо через точку А 5 прямих, через В- 3 прямих, через С- 7 прямих. Причому у сукупності ці прямі є прямими загального положення, тобто жодні дві з них не паралельні і жодні три з них не перетинаються в одній точці (крім точок А, В, С), а також немає прямих, що проходять через дві з цих трьох точок. Знайти кількість трикутників, вершини яких є точками перетину цих прямих і не збігаються з точками А, В, С.
5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюють різні шестицифрові числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічаються цифри 6 та 8 одночасно, але вони не стоять поруч.
6. У групі 20 чоловік. Їх необхідно поділити на п'ять коаліцій, в яких повинно бути 3, 3, 3, 4 та 7 чоловік. Скількома способами це можна зробити?
7. У класі навчається 40 учнів. Із них мають трійки з англійської мови 16 учнів, з математики – 12, з фізики – 18. Мають трійки з фізики та англійської мови – 11 учнів, з математики та англійської мови – 8, з математики та фізики – 6. А 7 учнів мають трійки по всім цим предметам. Скільки учнів навчаються без трійок з цих предметів? Скільки мають лише по дві трійки з цих предметів?

Варіант № 10

1. Скількома способами можна розставити а) 10 різних книжок на полиці; б) якщо серед них є 5 однакових?
2. З команди у якої 10 плавців, вибирається четвірка, яка бере участь в естафеті з комплексного плавання (тобто кожен пливе своїм стилем). Скількома способами можна вибрати цю естафетну четвірку?
3. Скількома способами можна розташувати 12 різних ручок у чотири однакові пенала?
4. На футбольний турнір треба послати збірну команду в складі: тренер, його помічник, 2 асистенти, 20 футболістів, лікар і 2 масажисти. Тренерський склад може бути відібраний з 10 спеціалістів, футболісти - з 25 спортсменів, лікаря треба вибрати одного з трьох, а масажистів – двох з п'яти. Скількома способами може бути укомплектована така команда?
5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюють різні шестицифрові числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічаються цифри 7, 8 одночасно.
6. У групі 21 чоловік. Їх необхідно поділити на три коаліції по 7 чоловік. Скількома способами це можна зробити?
7. На базі відпочинку знаходиться 70 чоловік. З них 27 займаються в драматичному гуртку, 32 співають у хорі, 20 захоплюються спортом. Драмгурток відвідують 10 чоловік з хору, а хор – 6 спортсменів, у драмгуртку 8 спортсменів; 3 спортсмени займаються і в драмгуртку, і в хорі. Скільки чоловік не співають у хорі, не захоплюються спортом та не займаються у драмгуртку? Скільки чоловік займається лише одним з цих гуртків?

Варіант № 11

1. Скількома способами можна розставити 12 стрільців: а) к 12 мішеням; б) 5 к перший мішені, 4 – к другій, 3 – к третій?
2. Із групи, що складається з 15 чоловік вибирають чотирьох учасників естафети 800х400х200х100 м. Скількома способами можна розставити спортсменів на етапах такої естафети?
3. Скількома способами можна вибрати 5 олівців з 11 різних?
4. Ліфт, у якому знаходиться 9 пасажирів, може зупинятись на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по два, три і чотири чоловіки. Скількома способами вони можуть вийти, якщо ліфт не повертається на поверх, де він уже був?
5. На книжковій полиці вміщується одинадцять томів енциклопедії. Скількома способами їх можна розставити так, щоб томи 3 і 4 не стояли поруч?
6. Чотири садовода повинні висадити 14 різних дерев. Перший – 3 дерева, другий – 4 дерева, третій – 2 дерева, а четвертий останні дерева. Скількома способами вони можуть розподілити ці дерева між собою?
7. Під час дослідження читацьких смаків студентів виявилось, що 60% читають журнал А, 50% - журнал В, 50% - журнал С, 30% - журнали А і В, 20% - журнали В і С, 40% - журнали А і С, 10% - журнали А, В і С. Скільки відсотків студентів: а) не читає жодного журналу; б) читає тільки 2 журнали; в) читає не менше двох журналів?

Варіант № 12

1. В дитячому садку 10 хлопчиків. Скільки є способів одягнути їх в новорічні костюми: а) якщо є 10 різних костюмів; б) є 2 костюми зайців, 5 - ведмежат і 3 - білочок.
2. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр
1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо кожну з них використовувати при записи числа лише один раз?
3. У вазі стоїть пронумеровані 10 червоних і 5 рожевих гвоздик. Скількома способами можна вибрати з вази три квітки?
4. У чемпіонаті України з футболу грає 18 команд. Скількома способами можуть розподілити місця, якщо відомо, що команди «Динамо», «Дніпро», «Шахтар», «Чорноморець» і «Таврія» займуть перші п’ять місць?
5. Скількома способами можна поділити 15 однакових цукерок між п’ятьма дітьми?
6. Дванадцять атлетів треба розподілити на 2 групи по 3 атлета, та 3 групи по 2 атлета для змагань на різні дистанції, при цьому кожна з цих груп може поїхати на змагання в одне з трьох можливих міст. Скількома способами можна розподілити атлетів на необхідні групи та для кожної з них вибрати місто для змагання?
7. На одній з кафедр університету працює 13 чоловік, кожен з яких знає хоча б одну іноземну мову. 10 чоловік знають англійську, 7 – німецьку, 6 – французьку, 5 – англійську та німецьку, 4 – англійську та французьку, 3 – німецьку та французьку. Скільки чоловік: а) знають всі три мови; б) знають тільки дві мови; в) знають лише англійську?

Варіант № 13

1. Чоловік протягом 14 днів мати був прочитати 14 журналів, причому в день він читав лише один журнал. Скількома варіантами він міг прочитати всі журнали?
2. Скільки різних трицифрових натуральних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 за умови, що в кожне число входить цифра не більше одного разу?
3. Скількома способами можна вибрати трьох чергових із класу, в якому навчається 20 учнів?
4. Скількома способами можна розділити 6 різних іграшок та 5 різних книжок між 3 дітьми?
5. Скількома способами можна поділити 9 однакових яблук та 6 однакових груш між трьома чоловіками?
6. П’ять учнів вирішили написати всі необхідні 15 білетів, яки пропонував викладач на екзамен з філософії. При цьому кількість написаних кожним з них білетів розподілили так – перший має написати 4 білета, другий – 3, третій – 2, четвертий – 1, п’ятий – 5. Скількома способами можна розподілити таким чином всі білети між ними?

7. Скільки чотирьохзначних чисел діляться хоча б на одне з чисел 12, 8?

Варіант № 14

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «січень»; б) «автомат».
2. Скільки різних шестицифрових чисел можна утворити з восьми цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, так щоб у кожному з них була одна цифра 5 та цифри не повторювались?
3. З 10 пронумерованих білих і 8 пронумерованих червоних троянд треба скласти букет, який мав би п'ять квітів. Скількома способами це можна зробити?
4. У речовій лотереї розігрується 8 предметів. Усього в «урні» 50 квитків. Виймається 5 квитків. Скількома способами їх можна вийняти так, щоб тільки два з них були виграшні?
5. Скількома способами можна поділити 8 однакових ручок між чотирма учнями так, щоб у кожного з них було хоча б по одніеї?
6. У класі 18 учнів. Для проведення контрольної роботи вчитель повинен кожному з них видати один з чотирьох варіантів. Перший варіант получили 4 учня, другий – 6 учнів, третій – 5 учнів, а четвертий – останні учні класу. Скількома способами учні цього класу могли получити варіанти завдання до контрольної роботи? **7.** З колоди взяті 5 карт, які занумеровані числами 1, …,5. Скількома способами можна розкласти їх у рядок так, щоб ні одна карта з номером і не займала і-є місце?

Варіант № 15

1. Скількома способами можна розставити а) 15 чоловік в шеренгу; б) 5 червоних, 3 зелені и 4 сині кубика в ряд?
2. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна утворити з семі цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?
3. На площині 12 точок розміщенні так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести через ці точки?
4. З лабораторії, у якій працює 25 чоловік, 5 співробітників мають поїхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи, якщо начальник лабораторії і головний інженер одночасно їхати не можуть?
5. Скількома способами можна поділити 10 зошитів у клітку та 12 зошитів у лінійку між шістьома студентами так, щоб по одному зошиту у клітинку та по одному зошиту у лінійку було у кожного?
6. В гуртожиток необхідно поселити у три двомісні кімнати, та чотири трьохмісні кімнати 18 дівчат. Скількома способами можна розподілити дівчат у кімнати, якщо має значення тільки хто з ким буде в однієї кімнаті?
7. У бібліотеці усього 40 різних книг з математики, в яких можуть бути розділи за темами першого, другого та третього семестрів з курсу „Вища математика". У 28 книгах є інформація за перший семестр, у 24 – за другий, у 15 – за третій; у 18 – за перший та другий, у 11 – за перший та третій, у 9 – за другий та третій; у 7 – за усі семестри. Скільки книг з математики не містять інформації з курсу вища математика? Скільки книг містить інформацію лише за перший семестр?

Варіант № 16

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «грудень»; б) «робота».
2. Розклад на день містить 4 уроків. Визначити кількість таких можливих розкладів при виборі з 8 дисциплін.
3. Група складається з 10 чоловік. Скільки є способів відправити на екскурсію чотирьох чоловік з цієї групи?
4. Із групи до складу якої входять 7 хлопчиків і 4 дівчинки, треба сформувати команду з 6 чоловік так, щоб вона мала не менше двох дівчат. Скільки існує способів формування такої команди?

5. Скількома способами можна розділити виріб 8 однакових деталей з латуні та 6 однакових деталей зі сталі на трьох станках, які можуть виробляти обидва ці типа деталей, якщо хоча б по одній з цих деталей повинен зробити кожен зі станків?

6. Скількома способами можна розділити 13 різних цукерок на 3 кучки по три цукерки, та одну кучку з чотирьох цукерок?

7. До університету прийшли п'ять вчителів, які читають кожен свій предмет: фізику, хімію, математику, інформатику, історію. Диспетчерська склала розклад занять на один день по одній парі з цих предметів навмання для кафедри за фамілією вчителя, та навмання для деканату за назвою предмету. Скількома способами можна скласти такий розклад, щоб ні один з вчителів не попав на свій предмет?

Завдання №2. Запрограмувати за варіантом обчислення кількості розміщення(перестановок, комбінацій, алгоритму визначення наступної лексикографічної сполуки, перестановки) та формулу Ньютона і побудувати за допомогою неї розклад за варіантом

Варіант № 1

Задане додатне ціле число n. Розташувати у лексикографічному порядку всі перестановки множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x + y)^5$.

Варіант № 2

Задане додатне ціле число n. Розташувати у лексикографічному порядку всі перестановки множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x - y)^5$.

Варіант № 3

Задане додатне ціле число n і невід'ємне ціле число r (r <= n). Розташувати у лексикографічному порядку всі розміщення без повторень із елементів множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x + y)^6$.

Варіант № 4

Задане додатне ціле число n. Побудувати всі сполуки без повторень елементів множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x - y)^6$.

Варіант № 5

Задані додатні цілі числа n та r. Побудувати у лексикографічному порядку всі розміщення з повтореннями із r елементів множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x + y)^7$.

Варіант № 6

Задані додатні цілі числа n та r. Побудувати у лексикографічному порядку всі сполуки з повтореннями із r елементів множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x - y)^7$.

Варіант № 7

Визначити лексикографічно наступну перестановку для кожної з перестановок: 1432, 54123, 12453, 45231, 6714235,і 31528764. Побудувати розклад $(x - y)^8$.

Варіант № 8

Розташувати наведені перестановки елементів множини {1, 2, 3, 4, 5, 6} у лексикографічному порядку 234561, 231456, 165432, 156423, 543216, 541236, 231465, 314562, 432561, 654321, 654312, 435612. Побудувати розклад $(x + y)^8$.

Варіант № 9

Використовуючи алгоритм побудови лексикографічно наступної перестановки, записати перші 12 перестановок елементів множини {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Побудувати розклад $(x - y)^9$.

Варіант № 10

Використовуючи алгоритм побудови лексикографічно наступної сполуки по 4 елементи множини {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Побудувати розклад $(x + y)^9$.

Варіант № 11

Задане додатне ціле число n. Розташувати у лексикографічному порядку всі перестановки множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x - y)^{10}$.

Варіант № 12

Задане додатне ціле число n. Розташувати у лексикографічному порядку всі перестановки множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x + y)^{10}$.

Варіант № 13

Задане додатне ціле число n і невід'ємне ціле число r (r <= n). Розташувати у лексикографічному порядку всі розміщення без повторень із елементів множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x - y)^{11}$.

Варіант № 14

Задане додатне ціле число n. Побудувати всі сполуки без повторень елементів множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x + y)^{11}$.

Варіант № 15

Задані додатні цілі числа n та r. Побудувати у лексикографічному порядку всі розміщення з повтореннями із r елементів множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x - y)^{12}$.

Варіант № 16

Задані додатні цілі числа n та r. Побудувати у лексикографічному порядку всі сполуки з повтореннями із r елементів множини {1, 2, …, n}. Побудувати розклад $(x + y)^{12}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. – СПб.: Вильямс, 2003.
2. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Структуры данных и алгоритмы. – СПб.: Вильямс, 2003.
3. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Печурін М.К. Основи дискретної математики. К., Наукова думка, 2002.
4. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988.
5. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. Львів, Магнолія Плюс, 2005, 2006 (1-е видання), 2007 (2-е видання, виправлене й доповнене), 2008 (3-є видання, виправлене й доповнене).
6. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика (у серії «Інформатика»). Київ, Видавнича група BHV, 2006, 2007.
7. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика (у серії «Комп'ютинґ»). Львів, Магнолія-2006, 2009 (1-е видання), 2010 (2-е видання).
8. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2000.
9. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. – Москва: Техносфера, 2005. – 400 с.