Лабораторна робота № 3.

Тема: Побудова матриці бінарного відношення

Мета роботи: набуття практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначені їх типів.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Декартів добуток множин А і В (позначається $A\times B$) – це множина всіх упорядкованих пар елементів (a,b), де $a \in A$, $b\in B$. При цьому вважається, що $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Потужність декартова добутку дорівнює $|A\times B| = |A| \times |B|$.

<u>Приклад.</u> Довести тотожність $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

Розв'язання.

Нехай $(x, y)\in(A\times B)\cap(C\times D) \Leftrightarrow$

$(x, y)\in(A\times B)\ \&\ (x, y)\in(C\times D) \Leftrightarrow$

$(x\in A\ \&\ y\in B)\ \&\ (x\in C\ \&\ y\in D) \Leftrightarrow$

$(x\in A\ \&\ x\in C)\ \&\ (y\in B\ \&\ y\in D) \Leftrightarrow$

$(x\in A\cap C)\ \&\ (y\in B\cap D) \Leftrightarrow (x, y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)$.

Бінарним відношенням R називається підмножина декартового добутку $A\times B$ (тобто $R\subset A\times B$).

Якщо пара (a,b) належить відношенню R, то пишуть

$(a, b)\in R$, або aRb.

Областю визначення бінарного відношення $R\subset X\times Y$ називається множина $\delta_R = \{x \mid \exists y\ (x, y)\in R\}$, а *областю значень* – множина $\rho_R = \{y \mid \exists x\ (x, y)\in R\}$ ($\exists$- існує).

Для скінчених множин бінарне відношення $R\subset A\times B$ зручно задавати за допомогою *матриці відношення* $R_{m\times n} = (r_{ij})$, де $m=|A|$, а $n=|B|$.

Елементами матриці є значення $r_{ij} = \begin{cases} 1, & якщо\ (a_i,b_j)\in \mathrm{R}, \\ 0, & якщо\ (a_i,b_j)\notin \mathrm{R}. \end{cases}$

<u>Приклад.</u> Знайти матрицю відношення $R\subset M\times 2^M$, де

$R=\{(x, y) \mid x\in M\ \&\ y\subset M\ \&\ x\in y\}$,

$M=\{x \mid x\in Z\ \&\ x\le 1\}$, Z - множина цілих чисел.

Розв'язання.

Згідно з означенням матриці відношення, розв'язок має вигляд

	$\varnothing$	{-1}	{0}	{1}	{-1,0}	{-1,1}	{0,1}	{-1,0,1}
-1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1

<u>Приклад.</u> Зобразити відношення графічно, де R - множина дійсних чисел, та знайти його область визначення та область значень:

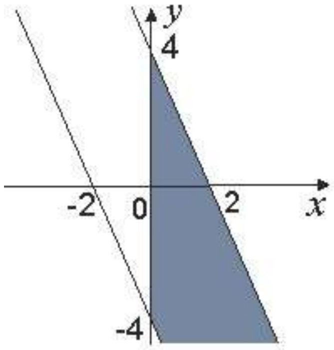
1. $\alpha_1 = \{(x,\ y) \mid (x,\ y) \in R^2\ \&\ |2x+y| \le 4\ \&\ x \ge 0\}$;

2. $\alpha_2 = \{(x,\ y) \mid (x,\ y) \in R^2\ \&\ x^2 + 2x - y^2 \le 0\}$.

Розв'язання.

Зображення відношення α_1 зводиться до графічного розв'язання системи нерівностей $\begin{cases} 2x + y \le 4, \\ 2x + y \ge -4. \end{cases}$

Розв'язок цієї системи з врахуванням останньої умови зображено на рис. 2.1. Область визначення $\delta_{\alpha_1} = [0;\infty)$, область значень $\rho_{\alpha_1} = (-\infty;4]$.



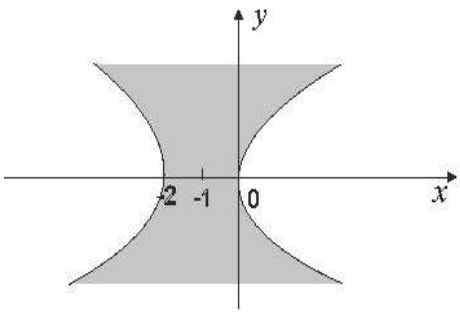


Рисунок 2.1 Рисунок 2.2

Для побудови області, яка відповідає відношенню α_2, знаходимо границю цієї області $x^2 + 2x - y^2 = 0$, або $(x+1)^2 - y^2 = 1$. Це є рівняння гіперболи з центром симетрії в точці (-1; 0) та дійсною та уявною піввісями, рівними 1. Тому відношенню α_2 відповідає частина площини, зображена на рис. 2.2. Область визначення $\delta_{\alpha_2} = R$, область значень $\rho_{\alpha_2} = R$.

<u>Види бінарних відношень</u>.

Нехай задано бінарне відношення R на множині $A^2 : R \subseteq A \times A = \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in A\}$.

1. Бінарне відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ виконується aRa, тобто $(a,a) \in R$. Головна діагональ матриці рефлексивного відношення складається з одиниць. Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі у кожній вершині.
2. Бінарне відношення R на множині A називається *антирефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ не виконується aRa, тобто $(a,a) \notin R$. Головна діагональ матриці антирефлексивного відношення складається з нулів. Граф антирефлексивного відношення не має петель.
3. Бінарне відношення R на множині A називається *симетричним*, якщо для будь яких $a,b \in A$ з aRb слідує bRa, тобто якщо $(a,b) \in R$ то і $(b,a) \in R$. Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Граф симетричного відношення не є орієнтованим.
4. Бінарне відношення R на множині A називається *антисиметричним*, якщо для будь яких $a,b \in A$ з aRb та bRa слідує що $a = b$. Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,a) \in R$, то $a = b$. Матриця антисиметричного відношення не має жодної пари одиниць, які знаходяться на симетричних місцях по відношенню до головної діагоналі. У графа антисиметричного відношення вершини з'єднуються тільки однією напрямною дугою.

5. Бінарне відношення R на множині A називається *транзитивним*, якщо для будь яких a, b, $c \in A$ з aRb та bRc слідує, що aRc . Тобто якщо $(a,b) \in R$ і $(b,c) \in R$, то $(a,c) \in R$. Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 1$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково є дуга з першої в третю вершину.

6. Бінарне відношення R на множині A називається *антитранзитивним*, якщо для будь яких a, b, $c \in A$ з aRb та bRc слідує що не виконується aRc . Тобто якщо $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, то $(a, c) \notin R$. Матриця антитранзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 0$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

<u>Приклад.</u> На множині $A = \{1,2,3,4,5\}$ задано відношення $R = \{(a, b) \mid a, b \in A, a + b - \textit{парне число}\}$. Визначити тип даного відношення.

Розв'язання.

Матриця даного відношення має вигляд: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Очевидно, що дане відношення є:
- рефлексивним (вздовж головної діагоналі знаходяться одиниці);
- симетричним ($\sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{24} = \sigma_{42}$ та інші);
- транзитивним ($(1,3) \in R$,$(3,5) \in R \Rightarrow (1,5) \in R$; $(1,5) \in R$, $(5,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$ та інші).

<u>Приклад.</u> Які властивості на множині $A = \{a, b, c, d\}$ має бінарне відношення $R = \{(a, b), (b, d), (a, d), (b, a), (b, c)\}$.

Розв'язання.

Матриця даного відношення має вигляд: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Дане відношення є:
- антирефлексивним (вздовж головної діагоналі знаходяться нулі);
- не симетричним, так як $\sigma_{23} = 1$, а $\sigma_{32} = 0$;
- не антисиметричним, так як $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1$;
- не транзитивним, тому що $\sigma_{12} = 1$, $\sigma_{23} = 1$ та $\sigma_{13} = 0$.

Функцією з множини X на множину Y називається всюди визначена бінарна відповідність, при якому кожен елемент множини X зв'язаний з єдиним елементом множини Y. Функція записується наступним чином: якщо $f \subseteq X \times Y$, то $f : X \to Y$. Множину X називають областю визначення, а Y – множиною значень функції.

Областю значень функції називається підмножина Y, яка складається з образів всіх елементів $x \in X$. Вона позначається символом $f(X)$.

Оскільки для кожного $x \in X$ існує єдиним образом визначений $y \in Y$, такий що $(x, y) \in f$, то записують $y = f(x)$ та говорять, що функція f відображує множину X на множину Y, а $f(x)$ називають образом x при відображенні f або значенням функції, яка відповідає аргументу x.

Види функціональних відношень

1. Функція називається ін'єктивною (ін'єкцією), якщо з умови $f(x_1) = f(x_2)$ слідує, що $x_1 = x_2$ для будь-яких $x_1, x_2 \in X$.

Функція ін'єктивна тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ якщо $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, тобто для різних аргументів функція f приймає різні значення.

2. Функція називається сюр'єктивною (сюр'єкцією), якщо для кожного $y^* \in Y$ знайдеться такий $x^* \in X$, що $y^* = f(x^*)$.

3. Функція називається бієктивною (бієкцією), якщо вона ін'єктивна та сюр'єктивна одночасно. Таку функцію ще називають взаємно-однозначним відображенням.

Приклад. Визначити, які з зображених функцій ін'єктивні, сюр'єктивні або бієктивні.

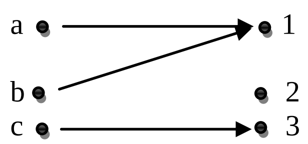


Рисунок 2.3

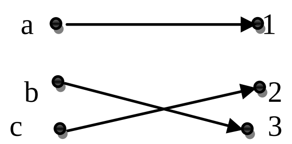


Рисунок 2.4

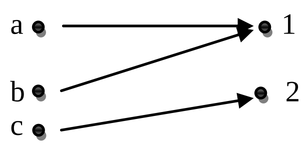


Рисунок 2.5

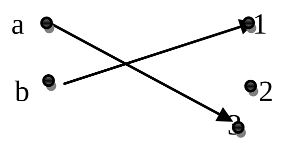


Рисунок 2.6

Розв'язання.

1. Рисунок 2.3. Дана функція не ін'єктивна, тому що значення $1 \in Y$ відповідає a та $b \in X$. Функція не є сюр'єктивною, тому що у елемент $2 \in Y$ нічого не переходить;
2. Рисунок 2.4. Дана функція ін'єкнивна, тому що різним аргументам відповідають різні значення. Функція сюр'єктивна, тому що множина її значень співпадає з областю значень. У даному випадку маємо бієктивну функцію;
3. Рисунок 2.5. Дана функція не інє'ктивна, тому що значення 1 функція приймає як для a так і для b. Функція сюр'єктивна, тому що множина Y співпадає з областю значень функції, тобто для кожного $y \in Y$ існує відповідний аргумент x з області визначення, що $y = f(x)$;
4. Рисунок 2.6. Дана функція ін'єктивна, але не сюр'єктивна.

НДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання №1. Використовуючи теоретичні відомості, розв'язати наступні задачі за своїм варіантом:

Варіант № 1

1. Чи є вірною рівність $(A\times B)\cap(A\times C)=A\times(B\cap C)$?

2. Знайти матрицю відношення $R\subset M\times 2^M$, де $M=\{1,2,3\}$:
$R=\{(x,\ y)\,|\,x\in M\ \&\ y\subset M\ \&\ |y|=x\}$.

3. Зобразити відношення графічно:
$\alpha=\{(x,\ y)\,|\,(x,y)\in R^2\ \&\ |x-2y|\le 3\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R\subset A\times A$, де $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, яке є рефлексивне, симетричне, нетранзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha=\left\{(x,\ y)\,|\,(x,y)\in R^2\ \&\ \sqrt{(x+y)^2}=9\right\}.$$

Варіант № 2

1. Чи є вірною рівність $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$?

2. Знайти матрицю відношення $R\subset 2^A\times 2^B$:
$R=\{(x,\ y)\,|\,x\in A\ \&\ y\subset B\ \&\ |y|=|x|,\ x\cap y=\otimes\}$,
де $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3,5\}$.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha=\{(x,\ y)\,|\,(x,y)\in R^2\ \&\ x^2-2x+y^2\le 3\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R\subset A\times A$, де $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, яке задане своєю матрицею:

$A(R)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$. Перевірити чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:
$\alpha=\{(x,\ y)\,|\,(x,y)\in R^2\ \&\ y=\ln|x|\}$.

Варіант № 3

1. Чи є вірною рівність $(A\cap B)\times(A\cap C)=A\times(B\cap C)$?

2. Знайти матрицю відношення $R\subset M\times 2^M$, де $M=\{1,2,3\}$:
$R=\{(x,\ y)\,|\,x\in M\ \&\ x\in y\ \&\ y\subset M\ \&\ |y|=x\}$.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2\ \&\ x + 1 \geq y\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є антирефлексивне, антисиметричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2\ \&\ y = |\ln(x - 1)|\}$.

Варіант № 4

1. Чи є вірною рівність: $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$?

2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$:

$R = \{(x,\ y) | x \in M\ \&\ y \subset M\ \&\ |y| = |x|\}$, де $M = \{x | x \in Z\ \&\ |x| \leq 1\}$,

Z - множина цілих чисел.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2\ \&\ |4 + 2x| = y\}$, де R – множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$A(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$. Перевірити чи є дане відношення

рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2\ \&\ (x + y)^2 = 4\}$.

Варіант № 5

1. Чи є вірною рівність $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \times B)$?

2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$:

$R = \{(x,\ y) | x \in M\ \&\ y \subset M\ \&\ |y| < x + 2\}$, де $M = \{x | x \in Z\ \&\ |x| \leq 1\}$,

Z - множина цілих чисел.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2\ \&\ (x + y)^2 = 4\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є рефлексивне, несиметричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ xy = 2\}$.

Варіант № 6

1. Чи є вірною рівність: $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\times C)\cap(B\times D)$?

2. Знайти матрицю відношення $R\subset 2^B\times A$:
$R = \left\{(x,\ y) \mid x \subset B \,\&\, y \in A \,\&\, |x| = \dfrac{y}{2}\right\}$, де $B = \{1, 2\}$, $A = \{y | y \in Z \ \& 1 \le y \le 4\}$, Z - множина цілих чисел.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ x \le y\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A\times A$, де $A=\{a,b,c,d,e\}$, яке задане своєю матрицею:

$A(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Перевірити чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ (x+y)^3 = 5\}$.

Варіант № 7

1. Чи є вірною рівність: $(A\cap B) \times(C\cap D) = (A\times D) \cap(B\times C)$?

2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A\times 2^B$:
$R = \{(x,\ y) \mid x \subset A \,\&\, y \subset B \,\&\, x \subset y\}$, де $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,4\}$.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ x^2 - 2x + y^2 = 8\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R\subset A\times A$, де $A=\{a,b,c,d,e\}$, яке є антирефлексивне, симетричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ y = (x-2)^{-2}\}$.

Варіант № 8

1. Чи є вірною рівність $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$?

2. Знайти матрицю відношення $R\subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$: $R = \{(x,\ y) | x \in M \ \& \ y \subset M \ \& \ y < x\}$.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2\ \&\ x^2 + y^2 = 4\}$, де R – множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$A(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Перевірити чи є дане відношення

рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2\ \&\ y = |x^3|\}$.

Варіант № 9

1. Чи є вірною рівність $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$?

2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$:
$R = \{(x,\ y) | x \in M\ \&\ y \subset M\ \&\ |y| - 1 = x\}$, де $M = \{x | x \in Z\ \&\ |x - 1| < 2\}$, Z - множина цілих чисел.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2\ \&\ x - y^2 > 0\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є рефлексивне, антисиметричне, нетранзитивне,
та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2\ \&\ y = \sqrt{1 - x^2}\}$

Варіант № 10

1. Чи є вірною рівність
$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$?

2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$:
$R = \{(x,\ y) | x \subset A\ \&\ y \subset B\ \&\ y \subset x\}$, де $A = \{2,4\}$, $B = \{1,2,4\}$.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2\ \&\ |y - 4x| < 2\}$, де R - множина дійсних чисел.

3. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де

$A=\{a,b,c,d,e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$A(R)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&0&1&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$. Перевірити чи є дане відношення у рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

4. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha=\{(x,\ y)|(x,y)\in R^2\ \&\ y=e^{x-1}\}.$$

Варіант № 11

1. Чи є вірною рівність $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$?

2. Знайти матрицю відношення $R\subset M\times 2^M$, де $M=\{1,2,3\}$:

$$R=\{(x,\ y)|\ x\in M\ \&\ y\subset M\ \&|y|>x\}.$$

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha=\{(x,\ y)|(x,y)\in R^2\ \&|x+3|\geq|y|\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R\subset A\times A$, де $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, яке є антирефлексивне, антисиметричне, нетранзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha=\{(x,\ y)|(x,y)\in R^2\ \&\ x+\sqrt{y^2}=1\}.$$

Варіант № 12

1. Чи є вірною рівність $(A\cup B)\times(A\cup C)=A\times(B\cup C)$?

2. Знайти матрицю відношення $R\subset 2^A\times 2^B$:

$R=\{(x,\ y)|\ x\subset A\ \&\ y\subset B\ \&|x|+|y|=3\}$, де $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3,5\}$.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha=\{(x,\ y)|(x,y)\in R^2\ \&x^2+y^2=9\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R\subset A\times A$, де $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$A(R)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$. Перевірити чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x,\ y)|(x,y) \in R^2\ \&\ x + y = 1\}$.

Варіант № 13

1. Чи є вірною рівність $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$?

2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$:

$R = \{(x,\ y)|\ x \in M\ \&\ x \in y\ \&\ |y| > x\}$, де $M = \{x | x \in Z\ \&\ |x| \le 1\}$, Z – множина цілих чисел.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y)|(x,y) \in R^2\ \&\ (x - y)^2 = 9\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є нерефлексивне, симетричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \left\{(x,\ y)|(x,y) \in R^2\ \&\ y = \left(\sqrt{x}\right)^4\right\}$.

Варіант № 14

1. Чи є вірною рівність

$A \times (B \cap C \cup D) = (A \times B) \cap (A \times C) \cup (A \times D)$?

2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$:

$R = \{(x,\ y)|\ x \subset A\ \&\ y \subset B\ \&\ |y| \le x\}$, де $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4\}$.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y)|(x,y) \in R^2\ \&\ |6 - 3y| = x\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$A(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$. Перевірити чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x,\ y)|(x,y) \in R^2\ \&\ |x| + |y| = 4\}$.

Варіант № 15

1. Чи є вірною рівність:

$(A \times (B \cap C)) \cap ((A \cap B) \times C) = (A \times C) \cap (B \times B)$?

2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:

$R = \{(x,\ y) | x \in M \ \&\ y \subset M \ \& |y| \le x\}.$

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ x + y^2 - 1 > 0\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A\times A$, де $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, яке є антирефлексивне, несиметричне, транзитивне,
та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ y = x + |x|\}.$$

Варіант № 16

1. Чи є вірною рівність $A\times(B \setminus C) = (A\times C) \setminus (B\times C)$?

2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^M \times M$, де $M = \{1,3,5\}$:

$$R = \left\{(x,\ y) \middle| x \subset M \ \&\ y \in M \ \&\ y \in x \ \& |x| = \frac{y+1}{2}\right\}.$$

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,\ y) | (x, y) \in R^2 \ \& |x + 3y| \le 6\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A\times A$, де $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, яке задане своєю матрицею:

$A(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Перевірити чи є дане відношення

рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \left\{(x,\ y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ x + \left(\sqrt{y}\right)^2 = 1\right\}.$$

Завдання №2. Написати програму, яка знаходить матрицю бінарного відношення $\rho \subset A\times B$, заданого на двох числових множинах. Реалізувати введення цих множин, та виведення на екран матриці відношення. Перевірити програмно якого типу є задане відношення. Навести різні варіанти тестових прикладів.

Відношення обрати згідно варіанту:

1. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, a > b\};$
2. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, a < b\};$
3. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (a + b) > 2\};$
4. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (2a + 1) < b\};$
5. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (a + 2) > 3b\};$
6. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, 2a < b\};$

7. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, a < 3b\}$;

8. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (5a - b) > 3\}$;

9. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, a^2 < b\}$;

10. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (2b + 1) > a\}$;

11. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, 2a > 3b\}$;

12. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, b < a^2\}$;

13. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (2a - b) < 3\}$;

14. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, a > 2b\}$;

15. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (a + b + 1) > 3\}$;

16. $\rho = \{(a,\ b) | a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, |a - b| < 2\}$.