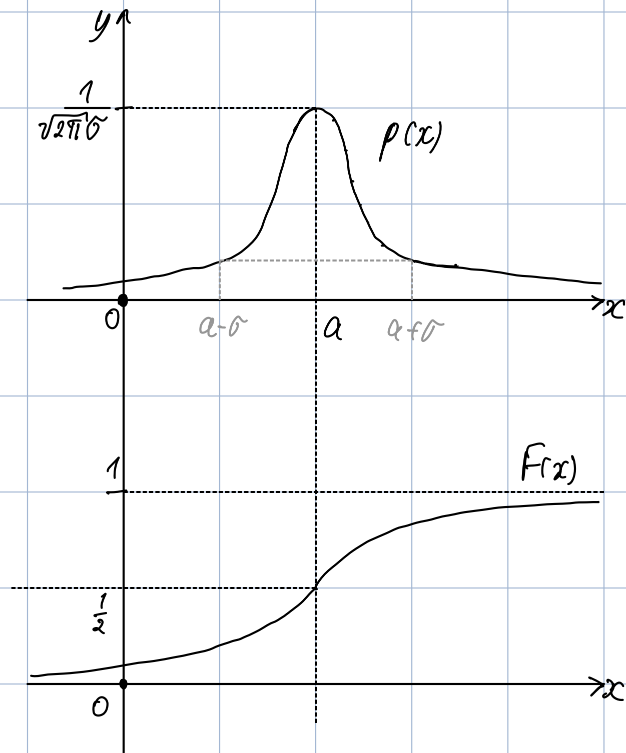
Гауссово распред.

1) Г. распред. с параметрами $(a;\sigma)$; $a\in R$, $\sigma>0$ наз. распред НСВ, кот. имеет след. плотность и ф. распред. вероят-ей:

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$



2) Кривая Г. и её св-ва:

2.1. I ООФ: $x\in R$

II О.З.Ф: $0<y\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$

III (·) $x=a$ - loc. max; $y(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$ ($x\le a \to p(x)\uparrow$; $x\ge a \to p(x)\downarrow$)

(точки)

IV $x=a\pm\sigma$ – (··) перегиба $y(a\pm\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot e}\,\sigma}$ (При $x\to\pm\infty$: $p(x)\to 0$ (+0))

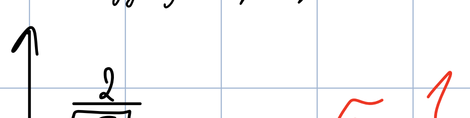
V Прямая $x=a$ - ось симметрии

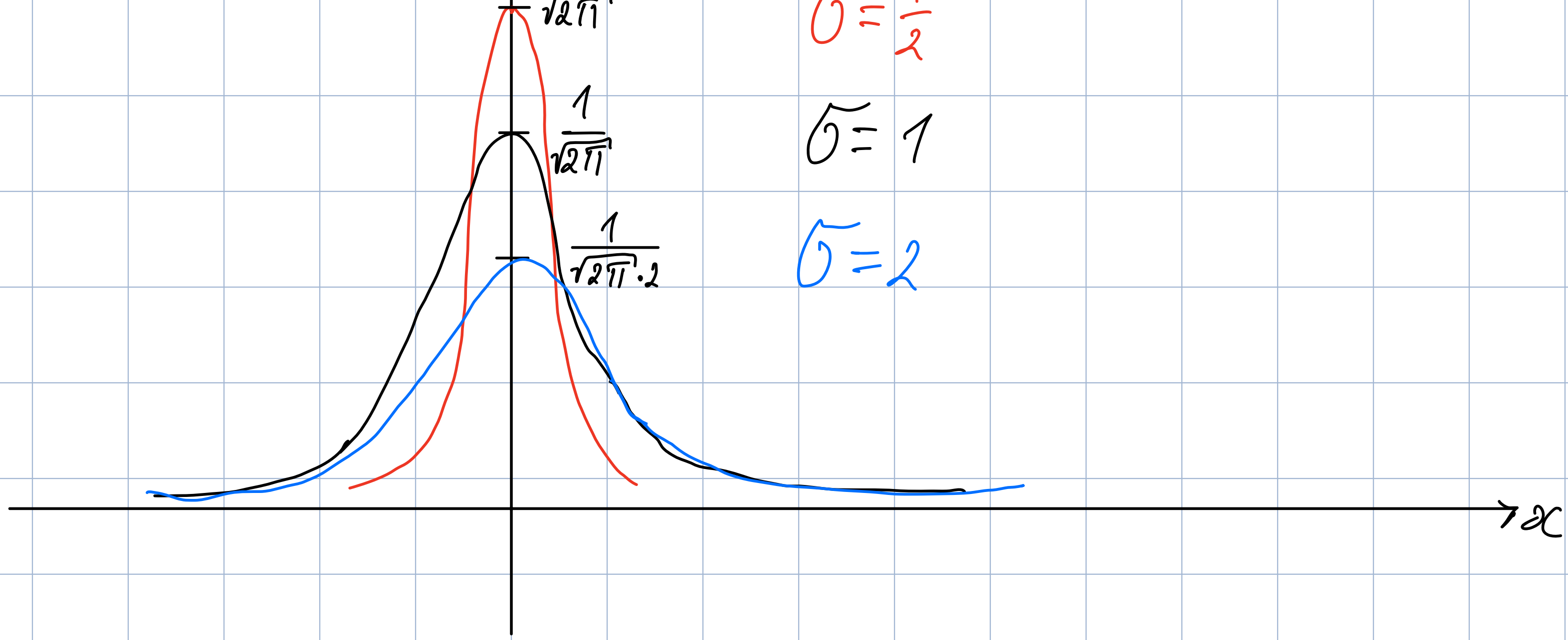
2.2.(зав. вида графика от пар-ров a и σ)

2.2. Пар. a приводит к смещению прямой Г. вдоль оси OX без изменения её формы.

$f(x-a)$ - вправо

При увелич. σ уменьш. амплитуда, и график становится более пологим.





3) Важнейшие хар-ки Г. распред.

$$M_\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot p(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\left|\begin{array}{l}\frac{x-a}{\sigma}=t\\ x=\sigma t+a\\ dx=\sigma\,dt\\ t_н=-\infty\\ t_в=+\infty\end{array}\right|=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(t\sigma+a)\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\underbrace{\sigma\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{0}+\underbrace{a\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{a\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}}\right)=a$$

$$D_\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\,p(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\sigma^2;$$

4) Вероятн. попад. Г. распред. на заданный отр.

$$P(\alpha\le\xi\le\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}p(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

5) Отклонение Г. распред. от его М.О

$P(|\xi-a|\le\varepsilon)=P(a-\varepsilon\le\xi\le a+\varepsilon)=2\cdot\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$

$\varepsilon=\sigma:\ P(|\xi-a|\le\sigma)=2\cdot\Phi(1)\approx0{,}6826$

$\varepsilon=2\sigma:\ P(|\xi-a|\le2\sigma)=2\cdot\Phi(2)\approx0{,}9544$

$\boxed{\varepsilon=3\sigma:\ P(|\xi-a|\le3\sigma)=2\cdot\Phi(3)\approx0{,}9973}$

$\varepsilon=4\sigma:\ P(|\xi-a|\le4\sigma)=2\cdot\Phi(4)\approx0{,}9994$

Зам. 1.

Оценка, кот. получена для случая $\xi=3\sigma$ наз. правилом трёх сигм и заключ. в след.
Если СВ ξ норм. распределена, то входе опыта, с вероятн. практически равной 1, она прин. знач. в 3σ окрестности своего М.О.

Зам. 2

На практике часто исп обр. утв.:
Если какая-либо СВ удовл. правилу 3σ, то её считают норм. распред.

6) Расчёт доверительных интервалов

$P(|\xi-a|\le\varepsilon)=2\cdot\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=\gamma$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=\frac{\gamma}{2}\xrightarrow[\text{ф. Лапласа}]{\text{по табл.}}\frac{\varepsilon}{\sigma}=x^*\longrightarrow\boxed{\varepsilon=\sigma\cdot x^*}$$

Ответ: $(a-\sigma\cdot x^*;\ a+\sigma\cdot x^*)$

7) Супер св-ва Г. распред.

Пусть СВ нч ξ, η н/р, тогда:

I. $\xi \pm \eta$ также имеет н/р;

II. $\xi \cdot C$ также имеет н/р;

III. $\xi + C$ также имеет н/р.

$\Big\}$ C – const

Нек. важнейшие распред., связанные с норм. распред.

χ^2 распред.

1

Пусть ξ н/р СВ с пар $(0;1) \longrightarrow$ распред. СВ ξ^2 б/наз. χ^2 распред. с 1ой степенью свободы

$$p(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x > 0 \end{cases}$$

2

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ нез., н/р с пар. $(0;1)$ СВ нч, тогда СВ $\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2$ имеет распред., кот. принято наз. χ^2 распред. с n степенями свободы

Зам

Появление любой функциональной зав. между СВ-ми $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ уменьш. число степеней свободы на 1.

Св-ва χ^2 распред.:

1) Плотность распред. СВ χ^2 опр. числом степеней свободы, составляющих его СВ-н $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

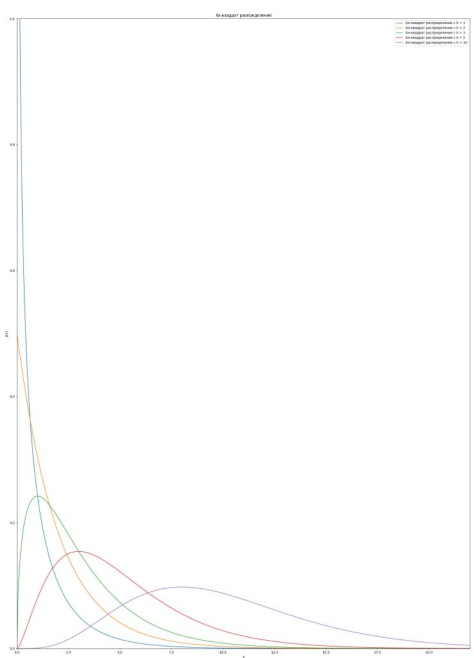
$$p(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}; & x > 0 \end{cases}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n+1) = n!$

k - число степеней свободы

2)



$p(x)$ при $k=1$ и $k=2$ монотонно убывает

При $k=3$: $x = k-2$ есть loc max

3) При увелич. числа степеней свободы χ^2 распред. медленно

приближ. к норм. распред.

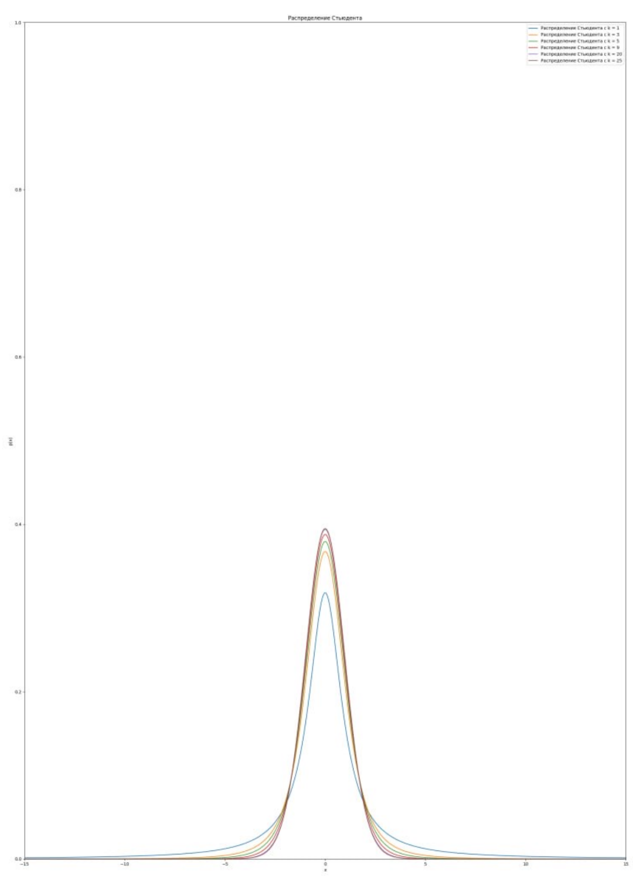
4) $M(\chi^2) = n$

$D(\chi^2) = 2n$

Распред. Стьюдента (t распред.)

Пусть СВ-ны $\xi; \xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n$ нез., н/р с пар. $(0;1)$, тогда СВ $t = \dfrac{\xi}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ имеет распред., кот. наз. t распред. или распред. Стьюдента с n степенями свободы.

$$p(x) = \sqrt{\pi k}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}; \quad x \in R$$



При увелич. числа степеней свободы распред. С. стремительно быстро приближ. к норм. распред.

Распред. Фишера-Снедекона (F-распред.)

Пусть СВ $\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_m$ и $\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n$ нез., равномерно распред. с пар $(0;1)$, тогда $F = \dfrac{\frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k^2}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_k^2}$ имеет распред., кот. наз. распред Фишера-Снедекона или F распред. с m и n степенями свободы

$$p(x; m; n) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ \dfrac{m^{\frac{m}{2}-1} n^{\frac{n}{2}-1} \cdot \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{m}{2}-1} \cdot (n+mx)^{-\frac{m+n}{2}} \end{cases}$$

$$M(F) = \frac{n}{n-2} \quad (n>2)$$

$$D(F) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$$