Канонические разложения

СВ A наз **центрированной**, если её М.О = 0
$M(A)=0$

Элем. центр СП наз произведение центр. СВ на неслуч. ф.
$x(t)=A\cdot\varphi(t)$; $M(A)=0$,
Я/м были **все хар-ки**:

- $M(x(t))=0$
- $K_x(t_1;t_2)=M(A\cdot\varphi(t_1)\cdot A\cdot\varphi(t_2))=\varphi(t_1)\varphi(t_2)M(A^2)$, где
$M(A^2)=\sigma^2$
- $D_x(t)=\varphi^2(t)\sigma^2$
- $\sigma_x(t)=|\varphi(t)|\sigma$
- $r_x(t_1;t_2)=\dfrac{\sigma^2\varphi(t_1)\varphi(t_2)}{\sigma^2|\varphi(t_1)\varphi(t_2)|}=\pm 1$

Каноническим разложением СП $x(t)$ наз. представление этого СП в след. виде:
$x(t)=\varphi_0(t)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)\cdot A_k$, где

$\varphi_0(t)$ – неслучайная ф.

$\varphi_k(t);\ k\in\mathbb{N}$ – неслуч. ф., наз-ая коорд. ф-ями канонического разложения

$A_k;\ k\in\mathbb{N}$ – центр-ые попарно некорр-ые СВ, наз-ые коэф. канонического разложения

1) $M(x(t)) = M\left(\varphi_0(t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)A_k\right) = \varphi_0(t)$

2) $K_x(t_1;t_2) = M\left(\left(\varphi_0(t_1) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t_1)A_k - \varphi_0(t_1)\right)\left(\varphi_0(t_2) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t_2)A_k - \varphi_0(t_2)\right)\right) = M\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t_1)A_k\cdot\sum\limits_{m=1}^{\infty}\varphi_m(t_2)A_m\right) =$

$= M\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\varphi_k(t_1)\varphi_m(t_2)A_kA_m\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}M(\varphi_k(t_1)\varphi_m(t_2)A_kA_m) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\varphi(t_1)\varphi(t_2)M(A_kA_m)$, где $M(A_kA_m) = \begin{cases}0, & k\neq m\\ \sigma_{A_k}^2, & k=m\end{cases}$

$K_x(t_1;t_2) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t_1)\varphi_k(t_2)\sigma_{A_k}^2$

$D_x(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2(t)\cdot\sigma_{A_k}^2$

$\sigma_x(t) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2(t)\cdot\sigma_{A_k}^2}$

$$r_x(t_1;t_2) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t_1)\cdot\varphi_k(t_2)\,\sigma_{A_k}^2}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(t_1)\,\sigma_{A_k}^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(t_2)\,\sigma_{A_k}^2}}$$

Зам

Очевидно, что каноническое разложение СП зависит от выбора коорд. ф-ий, но даже при составл. выборе коорд. ф-ий имеется производная в виде з-на распред. СВ A_k

Понятие обобщённой ф. δ-ф. Дирака. Белый шум и его св-ва

дельта

один параметр

Обобщ. ф. наз. предел послед-ти однопараметрического

их очень много

семейства ф-ий

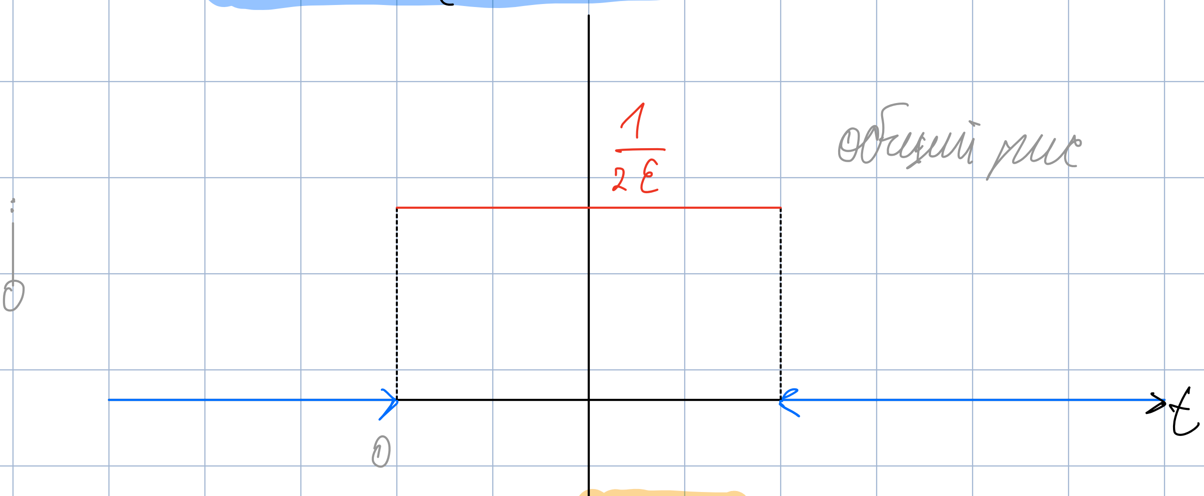
δ(t)

δ. ф. Д. наз. обобщённая ф., кот. явл. пределом при

мн

$\varepsilon \to 0$ семейства ф-ий $\delta_\varepsilon t$ след вида

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}; & |t| \le \varepsilon \\ 0\,; & |t| > \varepsilon \end{cases}$$



общий рис

Св-ва:

1) $\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\omega t\,d\omega$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt = 1$

3) $f(t)$ - непрерывна

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

СП $X(t)$ К.ф. кот. имеет след вид наз нестационарным белым шумом, если $w(t_1) \equiv w$ - const, то наз. стац. Б.Ш.

$$K_x(t_1;t_2) = w(t_1)\,\delta(t_1-t_2),$$ где

$w(t_1)$ - интенсивность Б.Ш.

Отсюда, никакие два сечения, даже сколь угодно близкие, не корр.

Канонические интегральные представления СП

Каноническим интегральным представлением СП $X(t)$ наз. выр. след. вида:

$$X(t) = \varphi_0(t) + \int_{\Lambda} Z(\lambda)\cdot\varphi(\lambda;t)\,d\lambda$$

$\varphi_0(t)$ – неслуч. ф. t

$\varphi(\lambda;t)$ – неслуч. ф. λ, t

$Z(\lambda)$ – центрированная СП т.е. $M(Z(\lambda))=0$

Λ – диапазон λ

большая λ

Хар-ки СП

$$m_x(t) = \varphi_0(t)$$

$$K_x(t_1;t_2) = M\left(\int_{\Lambda} Z(\lambda)\varphi(\lambda;t_1)\,d\lambda \cdot \int_{\Lambda} Z(\lambda)\varphi(\lambda;t_2)\,d\lambda\right) =$$

$$M\left(\int_{\Lambda} Z(\lambda_1)\varphi(\lambda_1;t_1)\,d\lambda_1 \cdot \int_{\Lambda} Z(\lambda_2)\varphi(\lambda_2;t_2)\,d\lambda_2\right) =$$

$$= M\left(\int_{\Lambda}\int_{\Lambda} \varphi(\lambda_1;t_1)\,\varphi(\lambda_2;t_2)\cdot Z(\lambda_1)\cdot Z(\lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2\right) =$$

$$= \int_{\Lambda}\int_{\Lambda} \varphi(\lambda_1;t_1)\,\varphi(\lambda_2;t_2)\,M\big(Z(\lambda_1)\cdot Z(\lambda_2)\big)\,d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= \Big|\ \exists\, g(\lambda) : M\big(Z(\lambda_1)Z(\lambda_2)\big) = g(\lambda_1)\,\delta(\lambda_1-\lambda_2)\ \Big| =$$

$$= \int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} \varphi(\lambda_1;t_1)\,\varphi(\lambda_2;t_2)\,g(\lambda_1)\,\delta(\lambda_1-\lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$\lambda_1 - \lambda_2$ по зову св. выше $\Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1$

$$= \int\limits_{\Lambda} \varphi(\lambda_1;t_1)\,\varphi(\lambda_2;t_2)\,g(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \boxed{\int\limits_{\Lambda} \varphi(\lambda;t_1)\,\varphi(\lambda;t_2)\,g(\lambda)\,d\lambda}$$

$$\boxed{D_x(t) = \int\limits_{\Lambda} \varphi^2(\lambda;t)\,g(\lambda)\,d\lambda}\ , \text{ где}$$

$g(\lambda)$ – плот. распред-ия Θ.

$$\boxed{\sigma_x(t) = \sqrt{\int\limits_{\Lambda} \varphi^2(\lambda;t)\,g(\lambda)\,d\lambda}}$$

$$\boxed{r_x(t) = \frac{\int\limits_{\Lambda} \varphi(\lambda;t_1)\,\varphi(\lambda;t_2)\,g(\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{\int\limits_{\Lambda} \varphi^2(\lambda;t_1)\,g(\lambda)\,d\lambda}\ \sqrt{\int\limits_{\Lambda} \varphi^2(\lambda;t_2)\,g(\lambda)\,d\lambda}}}$$

Линейные и не- преобразования СП

2 В трансформатор

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\;S\;} \longrightarrow y(t)$$

$$A_t$$

$$y(t) = A_t\,(x(t))$$

Задачи

1) Прямая задача

Дано: $x(t)$; A_t

Найти: $y(t)$

2) Обратная задача

Дано: $y(t)$; A_t

Найти: $x(t)$

3) Оптимизационная задача

Дано: $x(t)$; $y(t)$

Найти: A_t

Операторы A_t

- Линейные L
  - Линейные однородные L_0
  - Линейные неоднородные $L_н$
- Нелинейные N

$$L_0(C_1 \cdot x_1 + C_2 x_2) = C_1 L_0(x_1) + C_2 L_0(x_2)$$

x_1 – на что действует оператор

$$L_H(\ldots) = L_0(\ldots) + \varphi(t)$$

$$L_H(a) = a + 1; \; L_H(b) = b + 1$$

$$L_H(a+b) = a + b + 1 \neq L_H(a) + L_H(b)$$

Задача о преобразовании СП L_H системы

1) Прямая задача

Дано: $X(t); A_t$

Найти: $y(t)$

Дано: $X(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(t)$; $A_t = L_H$

Найти: $y(t)$

$$y(t) = L_H(X(t)) = L_H\left(\varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(t)\right) =$$

$$= L_H\left(\varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(t)\right) + \varphi(t) =$$

$$= L_H(\varphi_0(t)) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k L_H(\varphi_k(t)) + \varphi(t) =$$

$= \psi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(t)$ — каноническое разложение выходного сигнала $y(t)$

$$m_y(t) = \varphi_0(t)$$

$$K_y(t_1; t_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t_1)\,\psi_k(t_2)\,\sigma_{A_k}^2$$

$$D_y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2(t)\,\sigma_{A_k}^2$$

$$\sigma_y(t) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2(t)\,\sigma_{A_k}^2}$$

$$r_y(t) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t_1)\,\psi_k(t_2)\,\sigma_{A_k}^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2(t_1)\,\sigma_{A_k}^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2(t_2)\,\sigma_{A_k}^2}}$$

Квадратичный детектор

нелинейное преобразование

поэтому такое название

$Y(t) = (X(t))^2$

$X(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \varphi_k(t)$, где

1) A_k; $k \in N$ – центрированные

2) З-ны распред-ия (при ДСВ) или плотности распред (при НСВ) обл.-ют св-вом чётности, т.е симметричны относительно нуля

3) Любые четре нез. в совокупности $M(A_7; A_2; A_1; A_8) = 0$ $M(A_7)\cdot \ldots$

Рассматривается квадратичное преобразование: $V_k = A_k$

$$Y(t)=(X(t))^2, \quad X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{n} V_k\, \varphi_k(t) = m_X(t) + \overset{\circ}{X}(t),$$

V_k-центрированные случайные величины, имеющие симметричное относительно нуля распределение; любые четыре из них независимы в совокупности. Тогда

$$Y(t) = (X(t))^2 = (m_X(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k\, \varphi_k(t))^2 =$$

$$= m_X^2(t) + 2m_X(t) \sum_{k=1}^{n} V_k\, \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{n} V_k^2\, \varphi_k^2(t) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=k+1}^{n} V_k V_m\, \varphi_k(t) \varphi_m(t);$$

$$m_Y(t) = M(m_X(t) + \overset{\circ}{X}(t))^2 = m_X^2(t) + 2m_X(t) \cdot M(\overset{\circ}{X}(t)) + M(\overset{\circ}{X}{}^2(t)) =$$

$$= m_X^2(t) + D_X(t) = m_X^2(t) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2(t)\, D_{V_k}.$$

Введем неслучайные функции

$$\psi_k(t) = 2m_X(t) \cdot \varphi_k(t); \quad \nu_k(t) = \varphi_k^2(t); \quad \varphi_{km}(t) = 2\varphi_k(t) \cdot \varphi_m(t)$$

и случайные величины

$$U_k = V_k^2 - D_{V_k}, \quad W_{km} = V_k \cdot V_m,$$

тогда случайный процесс Y(t) приобретает вид

$$Y(t) = m_Y(t) + \sum_{k=1}^{n} V_k\, \psi_k(t) + \sum_{k=1}^{n} U_k\, \nu_k(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=k+1}^{n} W_{km}\, \varphi_{km}(t).$$

~~k,m=1,…,n.~~ Это, в свою очередь, означает, что получено каноническое разложение случайного процесса Y(t). Корреляционная функция Y(t):

$$K_Y(t_1;t_2) = M((Y(t_1) - m_Y(t_1)) \cdot (Y(t_2) - m_Y(t_2)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t_1)\,\psi_k(t_2)\,D_{V_k} + \sum_{k=1}^{n} \nu_k(t_1)\,\nu_k(t_2)\,D_{U_k} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n} \varphi_{km}(t_1)\,\varphi_{km}(t_2) D_{W_{km}};$$

$$D_{U_k} = D\left(V_k^2 - D_{V_k}\right) = M\left(V_k^2 - D_{V_k}\right)^2 = MV_k^2 - D_{V_k}^2;$$

$$D_{W_{km}} = D(V_k V_m) = M\left(V_k^2 V_m^2\right) = D_{V_k} D_{V_m}.$$

Дисперсия: $D_Y(t) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k^2(t)\,D_{V_k} + \sum_{k=1}^{n} \nu_k^2(t)\,D_{U_k} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n} \varphi_{km}^2(t)\,D_{W_{km}}.$

Векторные СП

Векторным СП наз. с.с. вида: $\overline{X}(t) = (X_1(t); \ldots; X_n(t))$, где $X_i(t)$ – обычный СП

1) МО ВСП: $m_{\overline{X}}(t) = (m_{X_1}(t); \ldots; m_{X_n}(t))$

2) Квадратная матрица корр. ф-ий: корреляция каждого с кажды

$$\begin{pmatrix} R_{x_1x_1} & R_{x_1x_2} & \ldots & R_{x_1x_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{x_n x_1} & R_{x_n x_2} & R_{x_n x_n} \end{pmatrix} = \left(R_{x_i x_j}(t_1;t_2)\right)$$

$$R_{x_i x_j}(t_1;t_2) = M\left(X_i(t_1) - m_{x_i}(t_1)\right)\left(X_j(t_2) - m_{x_j}(t_2)\right)$$

$$R_{x_i x_i}(t_1;t_2) = K_{x_i}(t_1;t_2)$$

Комплексные СП

Комплексным СП наз. структура след. вида:

$$X(t) = X_1(t) + i\,X_2(t);\quad i = \sqrt{-1}$$

$X_1(t);\ X_2(t)$ – обычные действ. числа

1) МО: $m_x(t) = m_{x_1}(t) + i \cdot m_{x_2}(t)$

2) Корр. ф: $K_x(t_1;t_2) = M\left(\left(X(t_1) - m_x(t_1)\right)\overline{\left(X(t_2) - m_x(t_2)\right)}\right) =$

$$X(t_1) - m_x(t_1) = X_1(t_1) + i X_2(t_1) - m_{x_1}(t_1) - i\, m_{x_2}(t_1) =$$

$$= \underbrace{\left(X_1(t_1) - m_{x_1}(t_1)\right)}_{X_1^\circ(t_1)} + i \underbrace{\left(X_2(t_1) - m_{x_2}(t_1)\right)}_{X_2^\circ(t_1)} \Big| =$$

$$= M\left(\left(X_1^\circ(t_1) + i X_2^\circ(t_2)\right)\left(X_1^\circ(t_1) - i X_2^\circ(t_2)\right)\right) = \underset{\ldots}{\text{док-во}} =$$

$$K_{x_1}(t_1; t_2) + K_{x_2}(t_1; t_2) + i\left(R_{x_1 x_2}(t_2; t_1) - R_{x_1 x_2}(t_1; t_2)\right)$$

$$D_x(t) = D_{x_1}(t) + D_{x_2}(t)$$