Условные з-ны распред.

1) Случай ДСВ

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{1m}	p_1^{ξ}
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{2m}	p_2^{ξ}
x_k	p_{k1}	p_{k2}	p_{km}	p_k^{ξ}
	p_1^{η}	p_2^{η}	p_m^{η}	

Пусть в рез. нек. опыта или явл. СВ η принимает одно из возмож. знач y_j, при этом СВ ξ м/ принимать одно из своих знач. $x_1; x_2; \dots; x_k$.

Тогда условной вероятностью того, что СВ ξ прин. знач x_i при состоявшемся знач. η наз. условным з-ом распред СВ ξ и обозначается след. образом: $P(x_i|y_j)$

Другими словами, услов. з-ом распред СВ ξ при состоявшемся значении СВ η наз. совокуп. вероят-ей след. вида: $P(x_1|y_j); P(x_2|y_j); \dots; P(x_k|y_j)$

$$P(x_i|y_j) = \frac{P(\xi = x_i; \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_j^{\eta}}$$

Аналогично вводится понятие услов. распред. СВ η при состоявшемся знач. СВ ξ

$$P(y_j|x_i) = \frac{p_{ij}}{p_i^{\xi}}$$

2) Случай НСВ

В случае НСВ условное распред СВ ξ и η задаётся с помощью ф-, ком. наз. плотностью совместного распред. $p(x;y)$ и вводятся понятия услов. плотностей вер-ти:

$p(x|y)=\dfrac{p(x;y)}{p_\eta(y)}$ – распред ξ при фикс. знач. η

$p(y|x)=\dfrac{p(x;y)}{p_\xi(x)}$ – распред η при фикс. знач. ξ

Св-ва усл. плот. и з-ов распред:

1) $P(x_i|y_j)\geqslant 0$; $P(y_j|x_i)\geqslant 0$ неотрицательность

$p(x|y)\geqslant 0$; $p(y|x)\geqslant 0$

2) $\sum\limits_{i=1}^{k} P(x_i|y_j)=1,\ j=1;2;\dots;m$; $\sum\limits_{j=1}^{m} P(y_j|x_i)=1,\ i=1;2;\dots;k$ нормированность

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x|y)\,dx=1;\ y\in\mathbb{R}$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(y|x)\,dy=1;\ x\in\mathbb{R}$

Пр.

$\xi \backslash \eta$	2	6	
−1	0,1	0,3	0,4
4	0,2	0,4	0,6
	0,3	0,7	($\Sigma=1$)

1) Пусть $\xi = -1$

$\eta \mid \xi = -1$	2	6
$p(\eta \mid \xi = -1)$	$\frac{0,1}{0,4} = 0,25$	$\frac{0,3}{0,4} = 0,75$

$\sum = 1$

$$M(\eta \mid \xi = -1) = 2 \cdot 0,25 + 6 \cdot 0,75 = 5$$

2) Пусть $\xi = 4$

$\eta \mid \xi = 4$	2	6
$p(\eta \mid \xi = 4)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$\sum = 1$

$$M(\eta \mid \xi = 4) = \frac{2}{3} + \frac{12}{3} = \frac{14}{3}$$

3) Пусть $\eta = 2$

$\xi \mid \eta = 2$	-1	4
$p(\xi \mid \eta = 2)$	$\frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$	$\frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}$

$\sum = 1$

$$M(\xi \mid \eta = 2) = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

4) Пусть $\eta = 6$

$\xi \mid \eta = 6$	-1	4
$p(\xi \mid \eta = 6)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

$\sum = 1$

$$M(\xi \mid \eta = 6) = -\frac{3}{7} + \frac{16}{7} = \frac{13}{7}$$

Условное М.О.

В случае ДСВ услов. М.О. СВ η при состоявшемся значении $\xi = x_i$ наз. выр вида:

$$M(\eta \mid \xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot P(y_j \mid x_i), \; i = 1; \ldots; k$$

Аналогично: $M(\xi \mid \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot P(x_i \mid y_j), \; j = 1; \ldots; m$

В случае НСВ услов. М.О. имеет след. вид:

$$M(\eta \mid \xi = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot p(y \mid x)\, dy = \varphi(x), \; x \in R$$

$$M(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x \mid y)\, dx = \psi(y), \; y \in R$$

Условное МО СВ η при состоявшемся знач. $\xi = x$ явл. ф. от переменной x и эта ф. наз. ф. регрессии СВ η на СВ ξ

Аналогично, условное МО СВ ξ при состоявшемся знач. $\eta = y$ явл. ф. от переменной y и эта ф. наз. ф. регрессии СВ ξ на СВ η

Уравнения регрессии, их смысл и св-ва:

$M(\eta | \xi = x) = \varphi(x) \sim \hat{y} = \varphi(x)$ – кривая регрессии η на ξ

$M(\xi | \eta = y) = \psi(y) \sim \hat{x} = \psi(y)$ – кривая регрессии ξ на η

Прямые регрессии

$y = A(x - M_\xi) + B$ – ур-ие прямой, где $x \sim \xi$

1) $M_y = A \cdot M(x - M_\xi) + B$

$B = M_y$

2) $C_{\xi\eta} = M((x - M_\xi)(y - M_\eta)) = M((x - M_\xi)A(x - M_\xi)) = A \cdot M((x - M_\xi)^2) =$

$= A \cdot \sigma_\xi^2$

$$A = \frac{C_{\xi\eta}}{\sigma_\xi^2} = \frac{r_{\xi\eta}\sigma_\xi\sigma_\eta}{\sigma_\xi^2} = r_{\xi\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}$$

$y = M_\eta + r_{\xi\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - M_\xi)$ – прямая регрессии η на ξ

$x = M_\xi + r_{\xi\eta} \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(y - M_\eta)$ – прямая регрессии ξ на η

Св-ва:

1) Если $|r_{\xi\eta}| = 1$, то СВ линейно зав при том обе ур-ия регрессии совпадают.

2) обе прямые регрессии проходят через (·) $(M_\xi; M_\eta)$

3) обе прямые регрессии имеют один и тот же характер монотонности

4) Смысл ур-ий регрессии заключ. в след.:

если СВ ξ и η коррелированны, то правая часть ур-ия регрессии $y = M_\eta + r_{\xi\eta} \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - M_\xi)$ обеспечивает наилучшее приближение СВ η к случ. лин. ф. вида: $C_1 + C_2 \cdot \xi$ в смысле метода наименьших квадратов, т.е. $\min\limits_{C_1; C_2} M(\eta - C_1 - C_2 \cdot \xi)^2 = M\left(\eta - M_\eta - r_{\xi\eta} \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \cdot (\xi - M_\xi)\right)^2 = \sigma_\eta \cdot (1 - r_{\xi\eta}^2)$

Нер-во Чебышёва

Пусть СВ ξ имеет конечную дисперсию, тогда $\forall \varepsilon > 0$ выполн. след. соотнош.:

1. $P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M|\xi|}{\varepsilon}$

2. $P(|\xi - M_\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_\xi}{\varepsilon^2}$

Док-во:

$$D_\xi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_\xi)^2 \cdot p_i \geq \sum_{|x_i - M_\xi| \geq \varepsilon} (x_i - M_\xi)^2 \cdot p_i \geq \varepsilon^2 \cdot \sum_{|x_i - M_\xi| \geq \varepsilon} p_i = \varepsilon^2 \cdot P(|\xi - M_\xi| \geq \varepsilon)$$

3\. $P(|\xi - M_\xi| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_\xi}{\varepsilon^2}$; $\boxed{P(|\xi - M_\xi| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma_\xi^2}{\varepsilon^2}}$

2-ое нер-во Чебышёва показывает, что при малой дисперсии с вероят., близкой к 1, СВ локализуется в близкой окрестности своего М.О.

Вероят-ти отклонения СВ от их М.О. Правила σ (сигм)

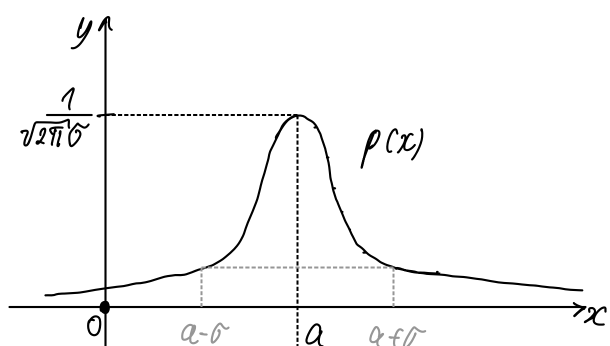
ε	$P(\lvert\xi - M_\xi\rvert < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma_\xi^2}{\varepsilon^2}$	Комментарий
σ_ξ	$P(\lvert\xi - M_\xi\rvert < \sigma) \geq 0$	$M_\xi-\sigma$ M_ξ $M_\xi+\sigma$
$2\sigma_\xi$	$P(\lvert\xi - M_\xi\rvert < 2\sigma) \geq 0{,}75$	$M_\xi-2\sigma$ M_ξ $M_\xi+2\sigma$
$3\sigma_\xi$	$P(\lvert\xi - M_\xi\rvert < 3\sigma) \geq \frac{8}{9}$	$M_\xi-3\sigma$ M_ξ $M_\xi+3\sigma$
$4\sigma_\xi$	$P(\lvert\xi - M_\xi\rvert < 4\sigma) \geq \frac{18}{16}$	$M_\xi-4\sigma$ M_ξ $M_\xi+4\sigma$

Получ. оценки носят универсальн. характер и при этом явл. достаточно грубыми. Для каждого конкретного распред. эти оценки носят знач. более точный характер.

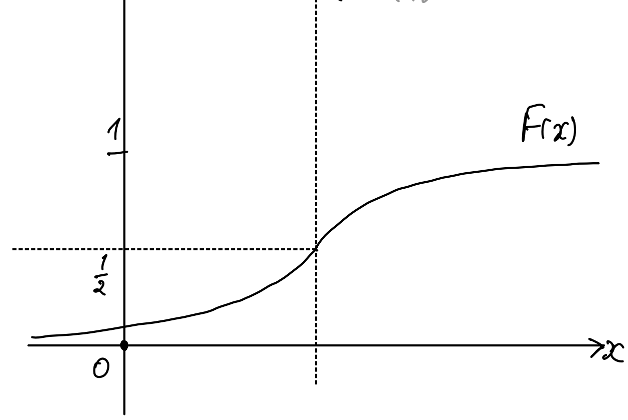
Гауссово распред.

1) Г. распред. с параметрами $(a;\sigma)$; $a \in R$, $\sigma > 0$ наз. распред НСВ, кот. имеет след. плотность и ф. распред. вероят-ей:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$



2) Кривая Г. и её св-ва:

2.1. I ООФ: $x \in R$

II О.З.Ф: $0 < y \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$

III (·) $x=a$ - loc. max; $y(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$ ($x \le a \to p(x)\uparrow$; $x \ge a \to p(x)\downarrow$)

IV $x=a\pm\sigma$ - (··) (точки) перегиба $y(a\pm\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}\,\sigma}$ (При $x\to\pm\infty$: $p(x)\to 0+0$)

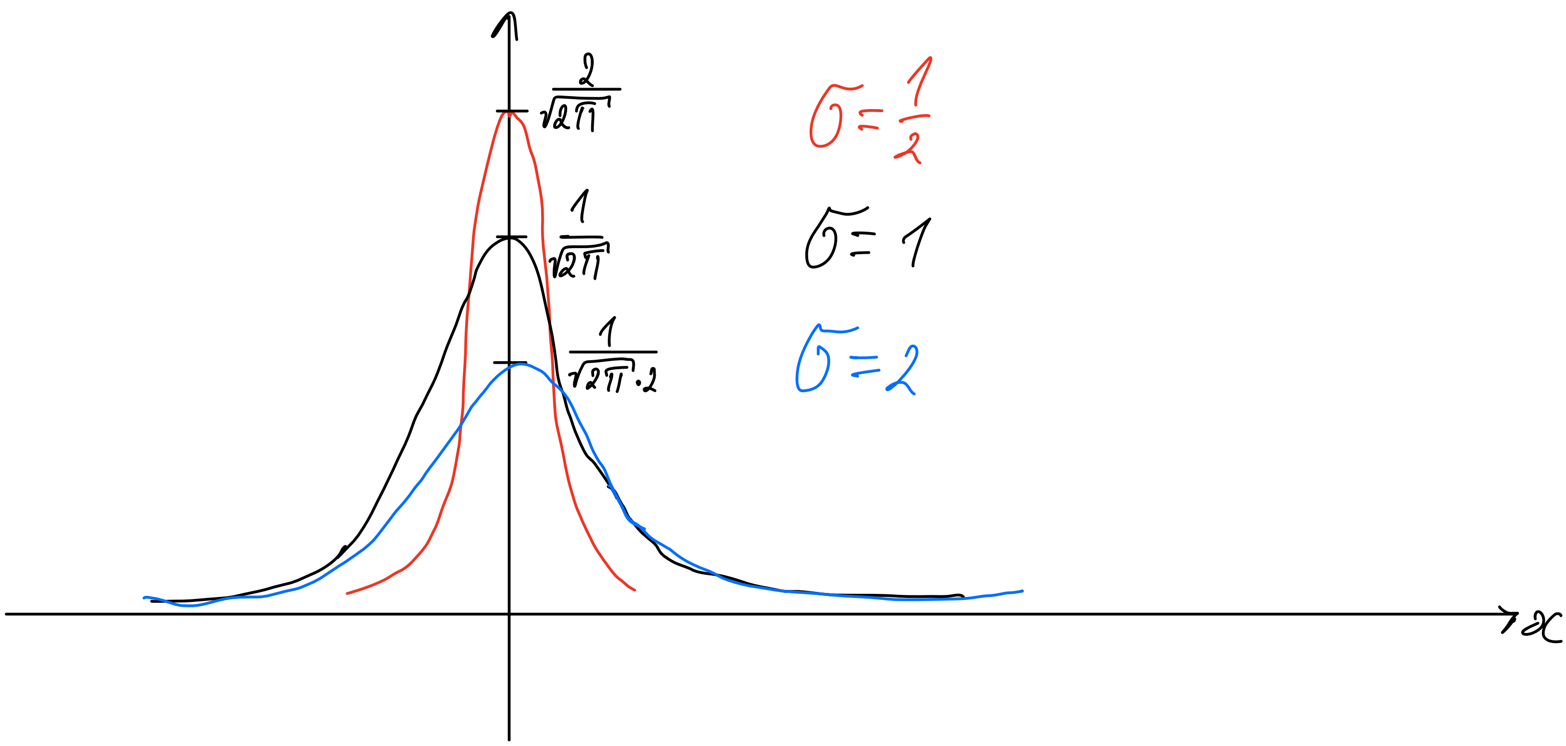
V Прямая $x=a$ - ось симметрии

2.2.(зав. вида графика от пар-ров a и σ)

2.2. Пар. a приводит к смещению прямой Г. вдоль оси OX без изменения её формы.

$f(x-a)$ - вправо

При увелич. σ уменьш. амплитуда, и график становится более пологим.



3) Важнейшие хар-ки Г. распред.

$$M_\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{array}{l}\frac{x-a}{\sigma}=t\\ x=\sigma t+a\\ dx=\sigma\,dt\\ t_н=-\infty\\ t_в=+\infty\end{array}\right|=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(t\sigma+a)\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sigma\cdot\overbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt}}^{0}+a\cdot\overbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}}^{a\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}}\right)=a$$

$$D_\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2p(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2;$$

4) Вероятн. попад. Г. распред. на заданный отр.

$$P(\alpha\le\xi\le\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}p(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

5) Отклонение Г. распред. от его М.О.

$$P(|\xi-a|\le\varepsilon)=P(a-\varepsilon\le\xi\le a+\varepsilon)=2\cdot\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$\varepsilon=\sigma:\ P\left(|\xi-a|\le\sigma\right)=2\cdot\Phi(1)\approx0{,}6826$$

$$\varepsilon=2\sigma:\ P\left(|\xi-a|\le2\sigma\right)=2\cdot\Phi(2)\approx0{,}9544$$

$$\boxed{\varepsilon=3\sigma:\ P\left(|\xi-a|\le3\sigma\right)=2\cdot\Phi(3)\approx0{,}9973}$$

$$\varepsilon=4\sigma:\ P\left(|\xi-a|\le4\sigma\right)=2\cdot\Phi(4)\approx0{,}9994$$

Зам. 1.

Оценка, кот. получена для случая $\xi = 3\sigma$ наз. правилом трёх сигм и заключ. в след.

Если СВ ξ норм. распределена, то в ходе опыта, с вероят. практически равной 1, она прин. знач. в 3σ окрестности своего М.О.

Зам. 2

На практике часто исп. обр. утв.:

Если какая-либо СВ удовл. правилу 3σ, то её считают норм. распред.

6) Расчёт доверительных интервалов

$$P(|\xi - a| \le \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \gamma$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \frac{\gamma}{2} \xrightarrow[\text{ф. Лапласа}]{\text{по табл.}} \frac{\varepsilon}{\sigma} = x^* \longrightarrow \boxed{\varepsilon = \sigma \cdot x^*}$$

Ответ: $(a - \sigma \cdot x^*; a + \sigma \cdot x^*)$