Правило умножения вероятностей

Условной вероятностью события A при условий соб. B наз. вероят. соб. A в предположении, что соб. B произошло

$P(A|B) = P_B(A)$

Услов. вероят. соб. A при условии B наз. отношение вероят-тей произв. этих соб-й к вероят. условия.

$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}; P(B) \neq 0$

$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}; P(A) \neq 0$

$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$ — правило умнож. вероят-ей

След.

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot P_{A_1 A_2 A_3}(A_4) \cdot \ldots \cdot$

$\cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n)$

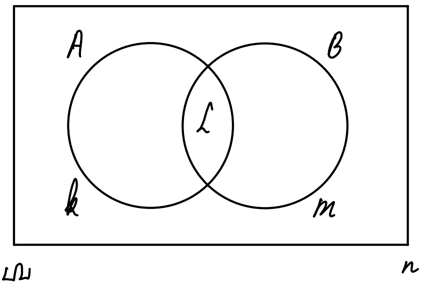
Док-во: $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P\big((A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})\cdot A_n\big)=P(A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})\cdot P(A_n|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})=P\big((A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-2})A_{n-1}\big)\cdot P(A_n|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})=$$

$$=P(A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-2})\cdot P(A_{n-1}|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-2})\cdot P(A_n|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})=\ldots=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot P_{A_1A_2A_3}(A_4)\cdot\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Зам. 1.



$$P(A|B)=\frac{L}{m}=\frac{\frac{L}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$$

$$P(B|A)=\frac{L}{k}=\frac{\frac{L}{n}}{\frac{k}{n}}=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}$$

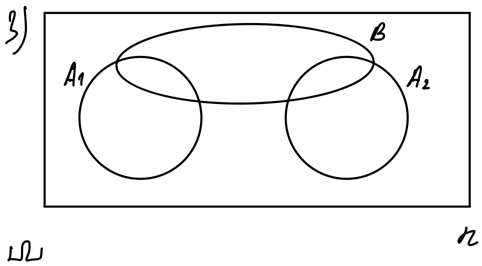
Зам. 2

Усл. вероят формирует новое вероят. пр-во $(\Omega, \mathcal{A}, P_B(A))$

1) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}\geqslant 0$

2) $P(\Omega|B)=\dfrac{P(\Omega\cdot B)}{P(B)}=1$

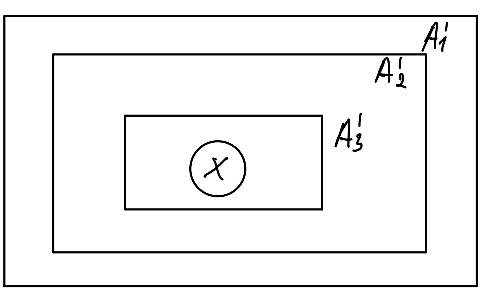
3)



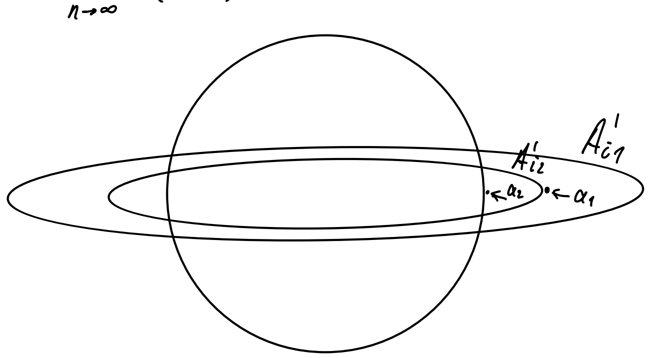
$$P(A_1+A_2|B)=\frac{P\big((A_1+A_2)\cdot B\big)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)}=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

4) $A_1\supset A_2\supset A_3\ldots;\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=0$

$A_1B\supset A_2B\supset A_3B\supset\ldots;\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cdot B)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n\cdot B)=0$



(1)



(2)

Пусть $\{A_i B\} = \{A_i'\}$, $\{A_{ik}\} = \{A_{ik}'\}$, $A_n B = A_n'$

Фиксируем окр-ность с центром в нуле и радиусом ε; $S = \pi\varepsilon^2$

Возьмём пос-сть стягивающихся мн-в до окр. и будем утверждать, что с некоторого места они будут лежать внутри окр.

Допустим, что такого места нет.

Тогда бесконечная подпос-сть $A'_{i_1}, A'_{i_2}, \dots$ не лежит внутри этой окр. $\Rightarrow$ получаем пос-сть $(\cdot)$-ек $a_1, a_2, \dots$, кот лежат снаружи. Пос-сть приближается к какой-то предельной точке, кот. тоже будет лежать снаружи. Эта $(\cdot) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A'_{ik}$ и она ненулевая, т.к. она лежит вне окр. $\Rightarrow$ эта $(\cdot) \neq 0$ (посл. $\{A'_i\} \downarrow 0$ и подпосл $\{A'_{ik}\} \downarrow 0$ $\Rightarrow$ они совпадают) $\Rightarrow$ Получаем противоречие, потому что мы предположили, что есть подпосл-сть мн.-в, у каждого из которых есть $(\cdot) \notin$ окр. $\Rightarrow$

Какую бы окр. мы бы не взяли, начиная с некоторого места все будут лежать внутри окр. $\Rightarrow$ Площадь каждого из них будет меньше $\pi\varepsilon^2 \Rightarrow \lim\limits_{i\to\infty} P(A'_i) \leq \pi\varepsilon^2 \Rightarrow$

$\lim\limits_{i\to\infty} P(A_i) = 0$ QED

Независимость событий

2 соб-ия наз независимыми, если информация о том, произошло или нет одно из них не влияет на вероят. другого

$P(A|B) = P(A|\bar{B}) = P(A)$

$P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B)$

неск. соб. наз. попарно нез., если любые два из них нез

неск соб. наз. нез. в совокупности, если они попарно нез. и каждое из них нез. от всех возможных произв. оставшихся

A, B, C

попарно нез.	совокуп. нез.
A и B; A и C; B и C	A и B; A и C; B и C A и $(B\cdot C)$; B и $(A\cdot C)$; C и $(A\cdot B)$

T_1

Если соб-ия A и B нез., то вероят. произв. этих соб. = произв. этих вероят.

$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$

Зам. 1.

Данная Т. применяется для проверки соб-ий на нез.

T_2

Если соб. $A_1 \ldots A_n$ нез. в совокупности, то вероят. произв. этих

Если соб. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нез. в совокупн. ...
соб-ий = произв. вероят. этих соб-ий

Пр 1

2	3
5	30

В коробке 4 листа. Случ. обр. достаём 1 листок

A_2 – извлечённое число $:2$; $P(A_2)=\frac{1}{2}$

A_3 – извлеч. число $:3$; $P(A_3)=\frac{1}{2}$

A_5 – извлеч. число $:5$; $P(A_5)=\frac{1}{2}$

$P(A_2\cdot A_3)=\frac{1}{4}=P(A_2)\cdot P(A_3)$

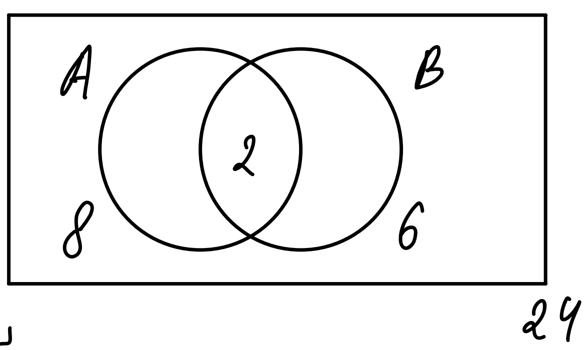
$P(A_2\cdot A_5)=\frac{1}{4}=P(A_2)\cdot P(A_5)$

$P(A_3\cdot A_5)=\frac{1}{4}=P(A_3)\cdot P(A_5)$

$\Rightarrow A_2, A_3, A_5$ – попарно нез.

$P(A_2\cdot A_3\cdot A_5)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(A_5) \Rightarrow$ зав. в совокуп.

Пр 2

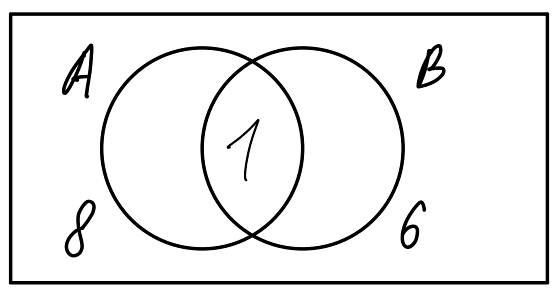


Ω 24

$P(A)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

$P(B)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

$P(A\cdot B)=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}=P(A)\cdot P(B)$



Ω 24

$P(A)=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

$P(B)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

$P(A\cdot B)=\frac{1}{24}\neq\frac{1}{12}=P(A)\cdot P(B)$

$P(A|B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(A|\bar{B})=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

$P(B|A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$P(B|\bar{A})=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

A и B нез.

$P(A|B)=\frac{1}{6}$

$P(A|\bar{B})=\frac{7}{18}$

$P(B|A)=\frac{1}{8}$

$P(B|\bar{A})=\frac{5}{16}$

A и B зав.

Пр. 3

1) Имеется колода из 36 карт

A – извлеченная карта – „пика"

B – извлеч карта – „дама"

1. $P(A)=\frac{1}{4}$

2. $P(B)=\frac{1}{9}$

3. $P(AB)=\frac{1}{36}=P(A)\cdot P(B)$

4. $P(A|B)=\frac{1}{4}$

5. $P(A|\bar{B})=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ соб-ия A, B нез

2) В колоду добавим карту

1. $P(A)=\frac{1}{4}$

2. $P(B)=\frac{1}{9}$

3. $P(AB)=\frac{1}{37}\neq P(A)\cdot P(B)$

4. $P(A|B)=\frac{1}{4}$

5. $P(A|\bar{B})=\frac{8}{33}$

$\Rightarrow$ соб-ия A, B зав.

О.Д.Д.С.-зам.

При установлении нез. соб-ий используют след. принцип:

Если реальные прообразы этих соб-ий явл. причинно нез., то они также считаются нез. в теоретико вероят-ном смысле

Зад. о наилучшем выборе

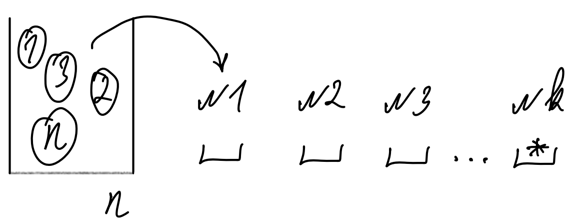
В хран. имеется n объектов различного качества. Задача заключ. в том, чтобы выбрать объект наилучшего качества. Чел-с.о. извл. объект из хран. На этом процедура м/б закончена. Если процедура продолжается, то в след. раз он может остановиться в тот момент, когда будет извлечён объект лучше всех предыдущих. В рез. опыта на шаге k извлекается предмет лучше всех предыдущих. Какова вероят., что этот объект окажется наилучшим

A – на шаге k выбран наилучший объект (из хран.)

B – на шаге k выбран объект, кот. лучше ранее извлечённых

$P(A|B) = ?$

$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = ?$



2) Э.И. – размещения из n по k. равновозможны

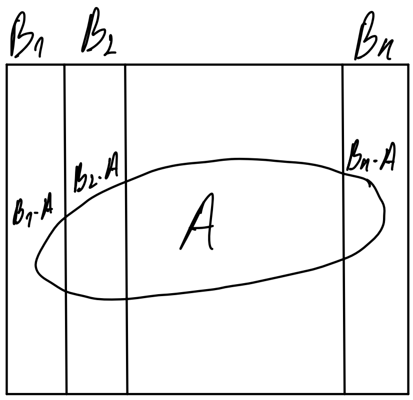
3) $N = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

$M_A = A_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!}$

$M_B = C_n^k \cdot (k-1)!$

$\Rightarrow P(A|B) = \frac{A_{n-1}^{k-1}}{A_n^k} : \frac{C_n^k (k-1)!}{A_n^k} = \frac{k}{n}$

Формула полной вероятности



Ω

В рез. опыта происходит и при том единственное из соб.

$B_1 + B_2 + \ldots + B_n$; $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega$

$$B_i \cdot B_j = \begin{cases} \varnothing; & i \neq j \\ B_i; & i = j \end{cases}$$

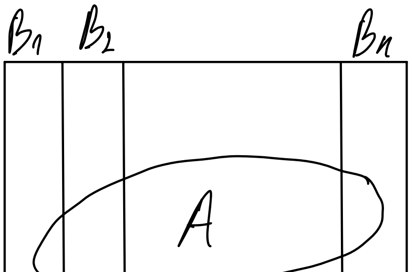
$$A = \bigcup_{i=1}^{n} AB_i$$

$$AB_i \cdot AB_j = \begin{cases} \varnothing; & i \neq j \\ AB_i; & i = j \end{cases}$$

$$P(A) = P(\underbrace{AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n}_{\text{несовм.}}) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

Формула Байеса



$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

Ω

В рез. опыта происходит и при том единственное из соб.

$$B_1+B_2+\ldots+B_n=\Omega$$

$$B_i\cdot B_j=\begin{cases}\varnothing; & i\neq j\\ B_i; & i=j\end{cases}$$

В ходе опыта приходит ин-ция о том, что соб. A произошло.

Какова вероят., что при этом произошло также соб. B_1, или B_2, или B_3, …, или B_n?

$P(B_1); P(B_2); \ldots; P(B_n)$ – доопытные/априорные вероят-ти B_i

$P(B_1|A); P(B_2|A); \ldots; P(B_n|A)$ – послеопытные/апостериорные вероят-ти B_i

$$P(A\cdot B_i)=P(A)\cdot P(B_i|A)=P(B_i)\cdot P(A|B_i)$$

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P(A|B_k)},\quad i=1;2;\ldots;n$$

Зад. о разорении игрока

Игрок приходит на игру, имея x рублей. Он хочет довести свой капитал до a рублей ($a>x$). Игра продолжается д.т.п., пока игрок выиграет a рублей или разорится. Какова вероят., что игрок разорится?

C – игрок разорится

$P(x) = P(C)$ – вероятность разорения игрока при начальном капитале x рублей.

A – игрок угадал 1 игру; $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(C|A) = P(x+1)$

B – игрок не угадал 1 игру; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C|B) = P(x-1)$

$$P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B)$$

$$P(x) = \frac{1}{2} \cdot P(x+1) + \frac{1}{2} P(x-1)$$

$P(x-1) - P(x) = P(x) - P(x-1)$ приращение постоянно

$P(x)$ – линейная ф.

$P(x) = k + bx$

$x = 0 \longrightarrow k = 1$

$x = a \longrightarrow b = -\frac{1}{a}$

$\Rightarrow P(x) = 1 - \frac{x}{a}$