Случайные величины

Пусть в результате некоторого опыта происходит какой-либо Э.И. $\omega \in \Omega$, тогда числовая функция (ф.) $\xi(\omega)$ наз. случайной величиной (СВ)

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – вероятностное пространство, тогда числовая ф. $\xi(\omega)$ наз. СВ, если $\forall x \in R$ мн-во Э.И. $\{\omega : \xi(\omega) \le x\} \in \mathcal{A}$ является (явл.) событием (соб-ем)

СВ

дискретные | непрерывные

ДСВ – С.В., кот. принимают конечное или счётное мн-во значений

НСВ – С.В., кот. прин. все значения числовой оси

ДСВ и их описание

$$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x_1; x_2; \dots; x_k, \quad k \le n$$

$x_1 < x_2 < \ldots < x_k$

Пусть $x = x_1$

$$A_1 = \{w : \xi(w) = x_1\}$$

$$P(A_1) = P(\xi = x_1) = p_1$$

Пусть $x = x_2$

$$A_2 = \{w : \xi(w) = x_2\}$$

$$P(A_2) = P(\xi = x_2) = p_2$$

. . .

Пусть $x = x_k$

$$A_k = \{w : \xi(w) = x_k\}$$

$$P(A_k) = P(\xi = x_k) = p_k$$

Зависимость значений СВ и вероят-ей их осуществления наз. законом распределения вероят-ей ДСВ

В случае ДСВ имеет вид след. двустроч. табл

ξ	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

;

ξ	x_1	x_2	…
P	p_1	p_2	…

3 фунд. св-ва з-на распределения

1) $p_i > 0$; $i = 1; \ldots; n$; $i = 1; \ldots$

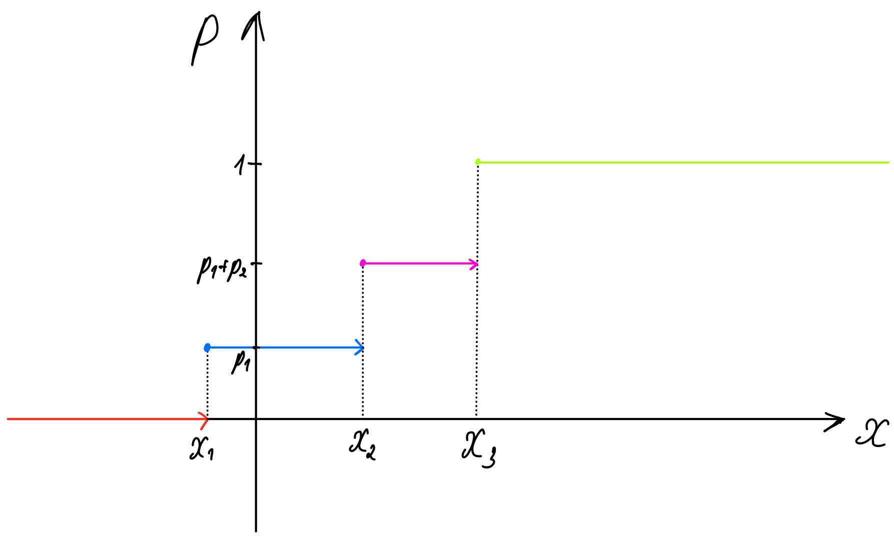
2) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$; $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

3) $P(\alpha \le \xi \le \beta) = \sum_{\alpha \le x_i \le \beta} p_i$

Ф. распределения вероят-ей ДСВ

Ф. распред. вероят-ей ДСВ наз. ф. след. вида: $F(x) = P(\xi \le x)$; $x \in R$

ξ	x_1	x_2	x_3
P	p_1	p_2	p_3



$$F(x) = \begin{cases} 0; & x < x_1 \\ p_1; & x_1 \le x < x_2 \\ p_1+p_2; & x_2 \le x < x_3 \\ 1; & x \ge x_3 \end{cases}$$ – ф. накопления вероят-ей

Св-ва:

1) неубывающая
2) кусочно-постоянная

3) непрерывна справа

4) $F(-\infty)=0$; $F(+\infty)=1$

5) $F(x)=\sum\limits_{x_i \le x} p_i$

6) $P(\alpha \le \xi \le \beta)=F(\beta)-F(\alpha-0)$, где $F(\alpha-0)=\lim\limits_{\alpha\to\alpha-0} F(x)$

Равномерно распределённая ДСВ

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

$p_i=\frac{1}{n}$; $i=1;\ldots;n$; $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$

Биномиальное распред. в серии нез. исп. по схеме Бернулли

Проводится серия n нез. исп. в рез. каждого из кот. м/произойти соб. A (успех) с вероят. p

Очевидно, что число успехов явл. СВ, кот. м/ принимать знач. от „0" до „n" $(0 \le \xi \le n)$. Распределение данной СВ наз. биномиальным

$\tilde{A}: \underset{1}{A}\,\underset{2}{A}\,\underset{3}{A}\ldots\underset{k}{A}\,\underset{k+1}{\bar{A}}\ldots\underset{n}{\bar{A}}$

$$\tilde{A} = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k} \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot \ldots \cdot \bar{A}}_{n-k}$$

$$P(\tilde{A}) = p^k \cdot q^{n-k}$$

неусп.	$n-k$
успехи	k

n

$$C_{(k;n-k)} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k$$

$$P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

ξ	0	1	2	...	n
$\tilde{p}$	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^n p^n q^0$

$$p_i = C_n^i p^i q^{n-i}\ ;\ i = 0; \ldots ; n$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^n p^n q^0 = (p+q)^n = 1$$

Признаки фор. Бернулли

1) Все исп. д/носить нез. характер

2) Вероят. успеха p не меняется в ходе исп.

Гл. дост. – факт её существования

Гл. недост. – в ней исп. наиболее громоздкие мат.

операции, кот. приводят к быстрому накоплению вычисл. погрешн. и, фактически, обесценивают получ-рез.

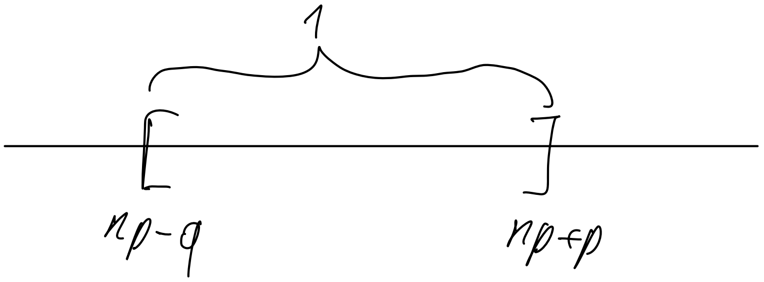
Наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли

$$\begin{cases} \dfrac{P(\xi = k_0)}{P(\xi = k_0 - 1)} \geqslant 1; \\[2ex] \dfrac{P(\xi = k_0)}{P(\xi = k_0 + 1)} \geqslant 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{C_n^{k_0} \cdot p^{k_0} \cdot q^{n-k_0}}{C_n^{k_0-1} \cdot p^{k_0-1} \cdot q^{n-k_0+1}} \geqslant 1; \\[2ex] \dfrac{C_n^{k_0} \cdot p^{k_0} \cdot q^{n-k_0}}{C_n^{k_0+1} \cdot p^{k_0+1} \cdot q^{n-k_0-1}} \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{n!\,(k_0-1)!\,(n-k_0+1)!}{k_0!\,(n-k_0)!\,n!} \cdot \dfrac{p}{q} \geqslant 1; \\[2ex] \dfrac{n!\,(k_0+1)!\,(n-k_0-1)!}{k_0!\,(n-k_0)!\,n!} \cdot \dfrac{q}{p} \geqslant 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{n-k_0+1}{k_0} \cdot \dfrac{p}{q} \geqslant 1 \\[2ex] \dfrac{k_0+1}{n-k_0} \cdot \dfrac{q}{p} \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (n-k_0+1) \cdot p \geqslant q \cdot k_0; \\ (k_0+1) \cdot q \geqslant p(n-k_0); \end{cases} \quad \begin{cases} np - pk_0 + p \geqslant q \cdot k_0; \\ q k_0 + q \geqslant pn - p k_0; \end{cases} \quad \begin{cases} (p+q) \cdot k_0 \leqslant np + p \\ (p+q) \cdot k_0 \geqslant np - q \end{cases}$$

$$np - q \leqslant k_0 \leqslant np + p$$



Асимптотические представления фор. Бернулли

1. Т. Пуассона

Если в серии n нез. исп. по схеме Б. $n \to \infty$; $p \to 0$; $np = const$, тогда вероят. k успехов м/б найдена по след. приближённой фор. $P(\xi = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot$$

$$\cdot \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\frac{\lambda}{n}\cdot(n-k)} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\lambda^k}{k!} \cdot \left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\frac{\lambda}{n}\cdot(n-k)} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}(n-k)} \approx$$

$$\approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda + \frac{\lambda k}{n}} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Зам.

фор. П. – это фор. редких соб-ий и чем больше число исп., тем ближе рез. к точному значению

2. Л. Т. Муавра-Лапласа

Если в серии n нез. исп. по схеме Б. $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \to \infty$, то вероят. k успехов находится по след. приближ. фор. $P(\xi = k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sigma}$,

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x = \frac{k - np}{\sigma}$$

Зам.

1) $\varphi(x)$ – табулирована
2) $\varphi(-x) = \varphi(x)$

3) $\sigma \geq 5$

3. И.Т. Муавра-Лапласа

Если в серии n нез. исп. по схеме Б. $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \to \infty$, то вероят. числа успехов от k_1 вкл. до k_2 вкл. находится по след. приближ. фор. $P(k_1 \leq \xi \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

$$x_{1,2} = \frac{k_{1,2} - np}{\sigma}; \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Зам.

1) $\Phi(x)$ – табулированна
2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$
3) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – ф. Лапласа
4) $\sigma \geq 5$

Распределение Пуассона

Распред. П. наз. распред. СВ, кот. принимает значения 0; 1; 2; ... с вероят-ми, кот. рассчит. по след. фор.

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0$$

ξ	0	1	2	...
p	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = e^{-\lambda} \underbrace{\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right)}_{e^{\lambda}} = 1$$

Геометрическое распределение

Геом. распред. наз. распред. СВ кот. принимает значения $1; 2; ...; \infty$ с вероят-ми, кот. рассчит. по след. фор.

$$P(\xi = k) = p \cdot q^{k-1}; \quad 0 < p, q < 1$$

ξ	1	2	3	...
p	p	pq	pq^2	...

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = p \frac{1}{1-q} = 1$$

Непрерывные случайные величины

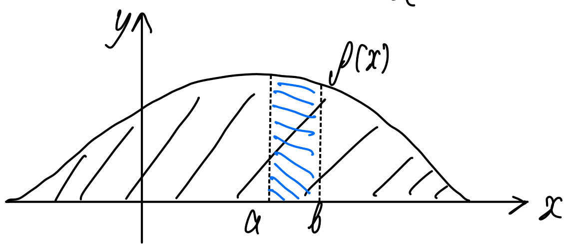
В случае НСВ бессмысленно обсуждать вероят. каждого Э.И. по отдельности, т.к. эта вероят. равна нулю. Имеет смысл обсуждать попадание СВ на промежутки. Для этого вводится спец. хар-ка $p(x)$, кот. наз. **плотностью распред. вероят.-ей НСВ**

Св-ва:

1) $p(x) \geq 0, x \in R$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = 1$

3) $P(a \le \xi \le b) = \int\limits_a^b \rho(x)\,dx$



Ф. распред. вероят-ей НСВ

Ф. распред. вероят-ей НСВ наз. ф. след. вида: $F(x) = P(\xi < x);\ x \in \mathbb{R}$

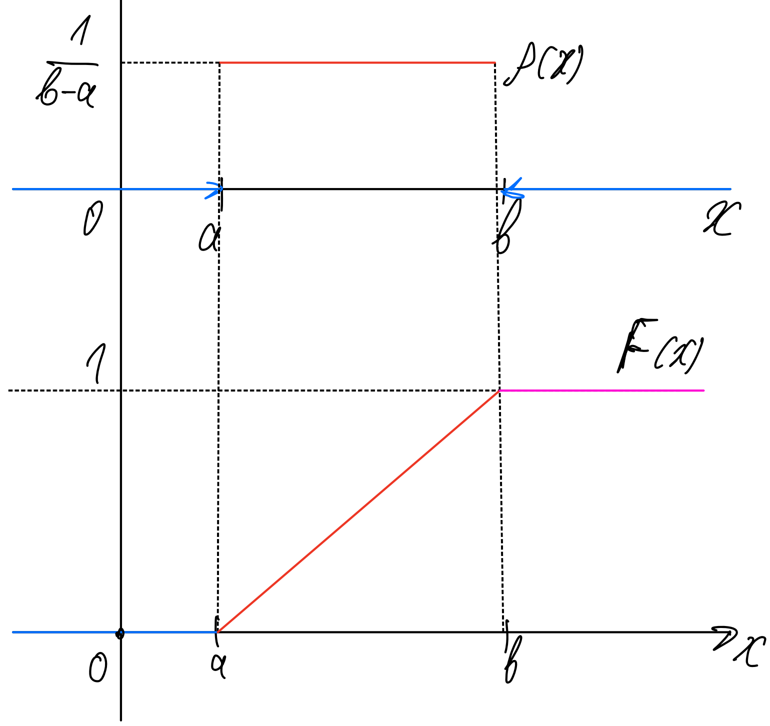
Св-ва:

1) неубывающая
2) непрерывная
3) $F(-\infty) = 0;\ F(+\infty) = 1$
4) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)\,dt \iff \rho(x) = F'(x)$
5) $P(\alpha \le \xi \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Равномерное распределение на отрезке

НСВ наз. **равномерно распред. на отр.** $[a; b]$, если её плотность и ф. распред. вероят-ей имеет след. вид:

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}; & a\le x\le b\\ 0; & x<a;\ x>b\end{cases}$$

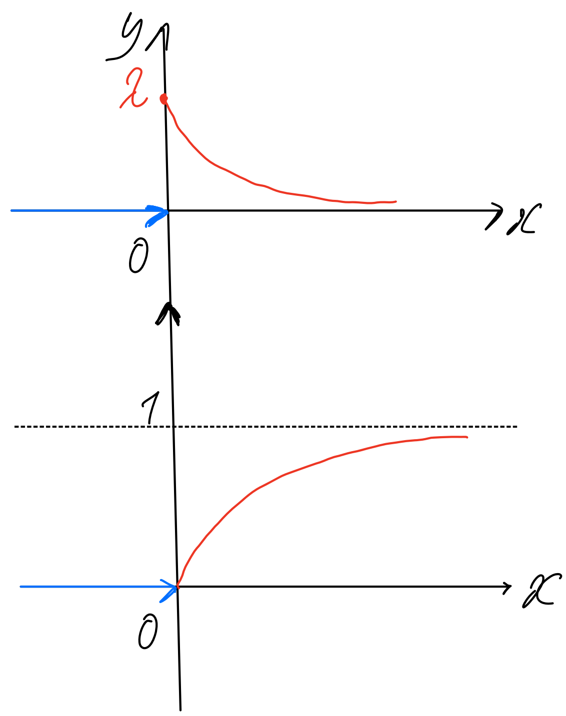


$$F(x)=\begin{cases}0; & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}; & a\le x\le b\\ 1; & x>b\end{cases}$$

Показательное распределение

НСВ наз. показательно распред., если её плотность и ф. распред. вероят-ей имеет след. вид:

$$p(x)=\begin{cases}0; & x<0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}; & x\ge 0\end{cases}$$



$$F(x)=\begin{cases}0; & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}; & x\ge 0\end{cases}$$

λ – положительный параметр