Элементы случайного анализа

I Некоторые классические виды сходимости (пределов)

числовая

I.1 Сходимость ЧП

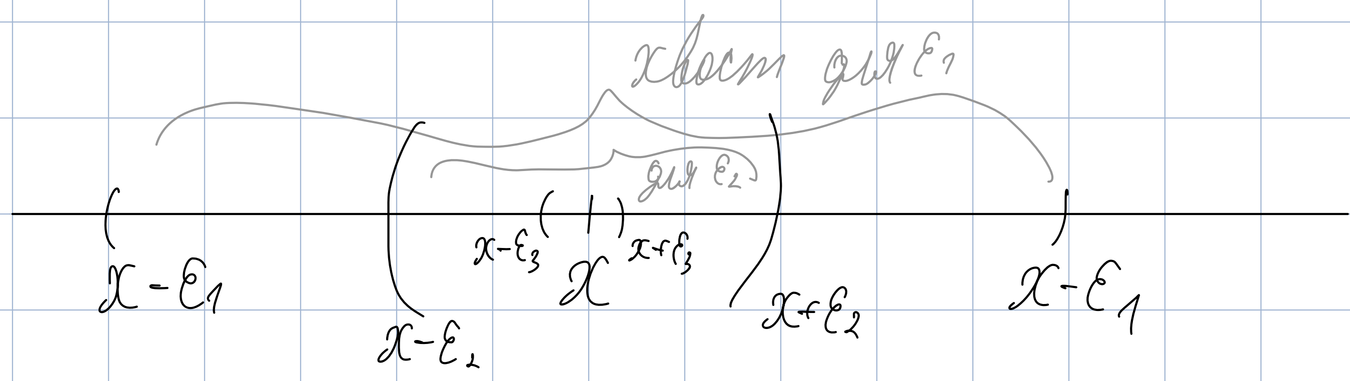
числ. послед $= x_1; x_2; \dots$

$x < \infty$ наз **пределом** $\{x_n\}$ при $n \to \infty$

Если $\forall \varepsilon > 0$ (С.У.М) $\exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon$ все послед. эл-ты ЧП принадлежат ε-окр в (·) x

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon$$

$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$



$\varepsilon_1 : \exists N_{\varepsilon_1} : \forall n > N_{\varepsilon_1} : x - \varepsilon_1 < x_n < x + \varepsilon_1$

$\varepsilon_2 : \exists N_{\varepsilon_2} : \forall n > N_{\varepsilon_2} : x - \varepsilon_2 < x_n < x + \varepsilon_2$

$\varepsilon_3 : \exists N_{\varepsilon_3} : \forall n > N_{\varepsilon_3} : x - \varepsilon_3 < x_n < x + \varepsilon_3$

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots$

(по точкам)

I.2 Поточечная сходимость функциональных послед-ей

являeтся

$\{f_n(x)\}$ наз. сход. поточечно на мн. X к ф. $f(x)$, если при каждом фикс. знач. $x \in X$ $\{f_n(x)\}$ сход. как ЧП к значению ф. $f(x)$

$f_1(x); f_2(x); \ldots \to f(x)$ (определены на каком-то мн. X, где $X = [a; b]$.

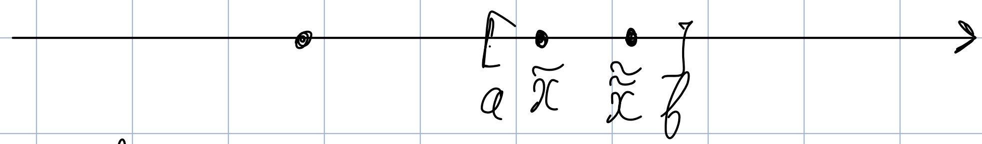
$\tilde{x} \in [a; b]$

$\underbrace{f_1(\tilde{x}); f_2(\tilde{x}); \ldots}_{\text{ЧП}} \to f(\tilde{x})$

I.3 сходимость почти всюду

(т.е. где-то найдётся (.), где-то не сойдется)

$\{f_n(x)\}$ наз. сход. почти всюду на мн. X к ф. $f(x)$, если эта послед. сходится поточечно к ф. $f(x)$ во всех (.)ках мн. X за искл. мн. (.)ек X_0, имеющего меру 0



$f_1(x); f_2(x); \ldots \to f(x)$

$X = [a; b]$

$\tilde{x} \in [a; b]$

$f_1(\tilde{x}); f_2(\tilde{x}); \ldots \to f(\tilde{x})$

$\tilde{\tilde{x}} \in [a; b]$ –

$f_1(\tilde{\tilde{x}}); f_2(\tilde{\tilde{x}}); \ldots \not\to f(\tilde{\tilde{x}})$

$\Bigg\}$ почти всюду

II

Вероятностные (стохастические) виды сходимости

II.1 Сходимость по вероятности

Говорят, что $\{X_n\}$ СВ-н сход. при $n \to \infty$ к СВ X, если $\forall \varepsilon > 0$ выполн. след. предельное соотн.:

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

Обозн: $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{вер}} X$

1) Пусть $n = 1$

больш. мал

$X_1 \backslash X$	x_1	x_2	...	x_k
x_{11}	$p_{11,1}$	$p_{11,2}$	...	$p_{11,k}$
x_{12}	$p_{12,1}$	$p_{12,2}$	...	$p_{12,k}$
...	...	...	...	...
x_{1m}	$p_{1m,1}$	$p_{1m,2}$	...	$p_{1m,k}$

$\Rightarrow$

допуст$_2$ < ε допуст$_2$ < ε

$\lvert X_1 - X\rvert$	$\lvert x_{11}-x_1\rvert$	$\lvert x_{11}-x_2\rvert$	...	$\lvert x_{1m}-x_k\rvert$
p	$p_{11,1}$	$p_{11,2}$	...	$p_{1m,k}$

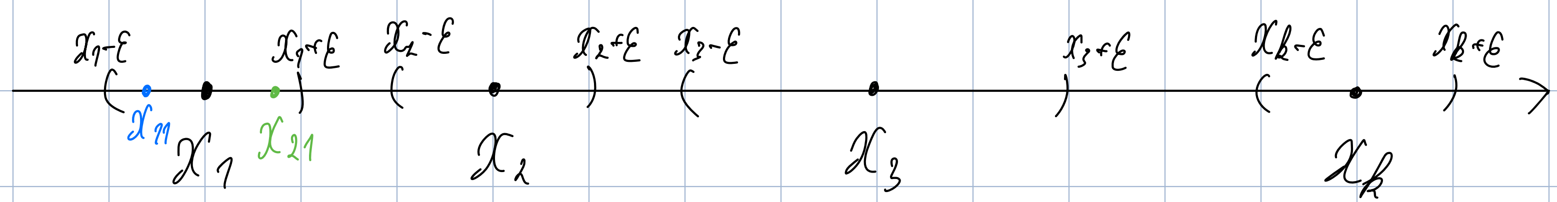
$P_1 = p_{11,1} + \ldots + p_{1m,k}$

2) Аналогично для $n = 2, 3, \ldots$

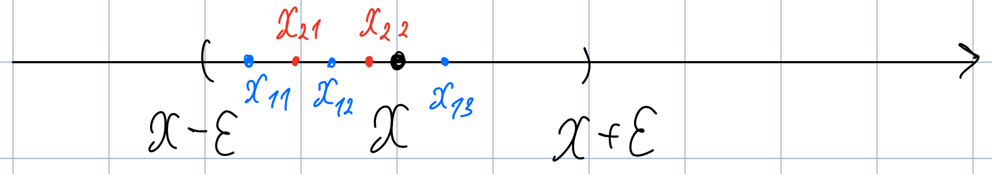
$P_2, P_3, \ldots$

3) Тогда возникает $\{P_n\}$.

И если $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 1$, то говорят, что $\{X_n\} \to X$ по вероят

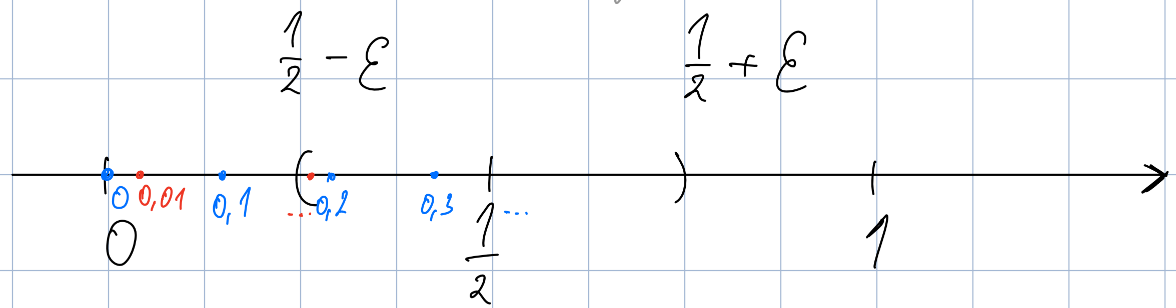


Гл случай $X = x$ - const



отличие от класс. М.А в том, что во ε окр живут числа, а в класс. окр. нет

$P_1; P_2; \ldots \to 1$



В рамках класс. сход. ЧП к числу гарантируется (начиная с нек. порядкового n) попадание всех послед. эл-тов ЧП в ε-окр предельной (•).

А в случае сход. по вероят-ти при любом порядк. номере эл-та найдутся знач-ия соотв. СВны, кот-рые как $\in \varepsilon$ окр, так и $\notin \varepsilon$ окр. Но при этом суммарная вероятн-сть зн-ий, кот-ые $\in \varepsilon$ окр, стрем. к 1

П-2 Сходимость в среднем в степени p, где $p \geq 1$

послед СВны

Говорят, что $\{X_n\}$ при $n \to \infty$ сход. в среднем в степ. p к СВ X, если выполн. с.п.с: следующее предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} M\left(|\overset{\text{СВ}}{X_n} - X|^p\right) = 0$$

Обозн.: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$

Если $p=2$, то такую сход. наз. сходимостью в средне квадратичном;

Обозн.: или $\lim\limits_{n\to\infty} M\left((X_n - X)^2\right) = 0$

или $X_n \xrightarrow{2} X$

или $l.i.m.\ X_n = X$ (точки важные)

1) $n=1$

$(X_1 - X)^2$

больш. мал

$X_1 \backslash X$	x_1	x_2	...	x_k
x_{11}	$p_{11,1}$	$p_{11,2}$	...	$p_{11,k}$
x_{12}	$p_{12,1}$	$p_{12,2}$	...	$p_{12,k}$
...	...	...	...	...
x_{1m}	$p_{1m,1}$	$p_{1m,2}$	...	$p_{1m,k}$

$\Rightarrow$

$(X_1-X)^2$	$(x_{11}-x_1)^2$	$(x_{12}-x_2)^2$	...	$(x_{1m}-x_k)^2$
p	$p_{11,1}$	$p_{12,2}$	...	$p_{1m,k}$

$$M((X_1-X)^2)=(x_{11}-x_1)^2\cdot p_{11,1}+\ldots+(x_{1m}-x_k)^2\cdot p_{1m,k}=M_1$$

2) Аналогично при $n=2\to M_2$ и т.д.

3) Если $\{M_n\}\to 0$, то говорят, что $\{X_n\}\to X$ в среднекв-ом

Среднекв. сход. реализуется в ситуациях:

1) Если $x_{n_i}\to x_i$ при $n\to\infty$, то вероят. таких пар м/б малой, и м/оказаться $\not\to 0$

2) Если $x_{n_i}\not\to x_i$ при $n\to\infty$, то P таких пар д/б исчезающе мала

П. 3) Сходимость почти наверное

сход. с вероят. 1

$\{X_n\}$ сход к X при $n\to\infty$ почти наверное, если выполн с.с.:

следующие соотношения

$$P(A)$$

$$P\Big(\underbrace{\{\omega: X_n(\omega)\to X(\omega)\}}_{A}\Big)=1, \text{ где } \omega\in\Omega;\ (\Omega, A, P$$

Обозн: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} X$

Допустим

Ω: ω_1, ω_2, $\tilde{\omega}$, ω_3, ω_4

$X_1(\omega); X_2(\omega); \dots; X(\omega)$

Если $X_1(\omega_1); X_2(\omega_1) \longrightarrow X(\omega_1)$

Если $X_1(\tilde{\omega}); X_2(\tilde{\omega}) \not\longrightarrow X(\tilde{\omega})$

П.4 Слабая сходимость

Говорят, что $\{X_n\}$ при $n \to \infty$ слабо сход. к X, если имеет место поточечная сход. послед. ф-ий распред $\{F_{X_n}(x)\}$ к ф. распред. $F_X(x)$ в каждой (·) непрерыв-ти

Обозн: $X_n \Longrightarrow X$

$X_1; X_2; \dots; X$

$F_{X_1}(x); F_{X_2}(x) \longrightarrow F_X(x)$

П.5 Связь различ. вероятн-ых видов сходимости

$$\begin{tikzcd}
\boxed{X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X} \arrow[dr] & & \\
& \boxed{X_n \xrightarrow{\text{вер}} X} \arrow[r] & \boxed{X_n \Longrightarrow X} \\
\boxed{X_n \xrightarrow{2} X} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Производная СП и её св-ва

СП $X(t)$ наз. дифф-ым в (·) t, если сущ. СП $X'(t)$ такой, что:

$$\lim_{\Delta t\to 0} M\left(\left(\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}-X'(t)\right)^2\right)=0$$

СП $X'(t)$ наз. производной СП $X(t)$ в (·) t

Обозн: $\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t\to 0]{2} X'(t)$;

$$\text{l.i.m.}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}=X'(t)$$

Т.1 М.О. производной

М.О. производной СП = производной М.О. самого СП

$$m_{x'}(t)=(m_x(t))'$$

Док-во:

$$M(X'(t))=M\left(\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m.}}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right)=$$

[Операции M и l.i.m. м/б переставлены местами]

$$= \underset{\Delta t \to 0}{l.i.m.} M \left(\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} \right) = \underset{\Delta t \to 0}{l.i.m.} \frac{m_x(t+\Delta t) - m_x(t)}{\Delta t} =$$

$$= \left(m_x(t)\right)'$$

След.

$$m_{x^{(n)}}(t) = \left(m_x(t)\right)^{(n)}$$

Т.2 К.ф. производной

К.ф. производной СП $X(t)$ равна 2ой смешанной произв самого СП

$$K_{\dot{x}}(t_1;t_2) = \left(K(t_1;t_2)\right)''_{t_1 t_2}$$

Доказать

Т.3

конп.

Взаимная К.ф. СП и его производной равна частной производной К.ф. исходного СП по переменной, кот. соотв. производной

$$R_{xx'}(t_1;t_2) = \left(K_x(t_1;t_2)\right)'_{t_2}$$

$$R_{x'x}(t_1;t_2) = \left(K_x(t_1;t_2)\right)'_{t_1}$$

Интеграл от СП и его св-ва

Интегралом от СП $X(t)$ на отр. $[0;t]$ наз. предел в среднекв.-ом интегральных сумм.

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} X(s_k)(t_{k+1}-t_k),$$ где $s_k \in [t_k;t_{k+1}]$ при

$\lambda \to 0\ (n\to\infty)$, $\lambda = \max(t_{k+1}-t_k)$, $k=0,\dots,n-1$

Обозн. $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sigma = \int_0^t X(s)\,ds$, в рамках этого раздела $Y(t)$

Т.1.

М.О. интегр. СП $Y(t)$ равно интегралу М.О. от самого С.П.

$$m_y(t)=\int_a^t m_x(s)\,ds$$

Т.2

К.ф. СП. $X(t)$ равна двойному интегралу от К.ф. СП $X(t)$

$$K_y(t_1;t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(s_1;s_2)\,ds_1\,ds_2$$

Т.3

Взаимная К.ф. СП и интегр. от него равна интегралу от К.ф. самого СП по переменной, кот. соотв. интегралу

$$R_{xy}(t_1;t_2)=\int_0^{t_2} K_x(t_1;s)\,ds$$

$$R_{yx}(t_1;t_2)=\int_0^{t_1} K_x(s;t_2)\,ds$$