Важнейшие хар-ки СВ

Математическое ожидание

МО ДСВ наз. сумма попарных произведений значений этой СВ на их вероят.-ти

$$M_\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$M_\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \quad \text{, где } p_i = P(\xi = x_i)$$

МО НСВ наз. выр. след. вида:

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)\, dx$$

Зам. 1

МО любой СВ явл. неслучайной константой

Зам. 2

М.О. не обязано совпадать с каким-либо знач самой СВ

Зам. 3

[illegible] значений СВ с учётом их вероят-

М.О. – это среднее арифметическое значени...
ей (частоты осуществления)

Пр 1

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$M_\xi = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + \ldots = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$$

Пр 2

ξ	1	3	7
p	0,2	0,5	0,3

$$M_\xi = 1\cdot\frac{2}{10} + 3\cdot\frac{5}{10} + 7\cdot\frac{3}{10} = \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 5 + 7\cdot 3}{10} = \frac{1+1+3+3+3+3+3+7+7+7}{10} = 3{,}8$$

Св-ва МО

1) $\xi_{min} \le M_\xi \le \xi_{max}$

$M_C = C$; C – const

2) $M(C\cdot\xi) = C\cdot M_\xi$

3) Для $\forall\ \xi$ и η: $M(\xi \pm \eta) = M_\xi \pm M_\eta$

3.1) Док-во для ДСВ:

$k \quad m \qquad k \quad m \qquad k \quad m$

$$M(\xi+\eta)=\sum_{i=1}\sum_{j=1}(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_{i=1}\sum_{j=1}x_i p_{ij}+\sum_{i=1}\sum_{j=1}y_j p_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}x_i\left(\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{m}y_j\left(\sum_{i=1}^{k}p_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot p_i^{\xi}+\sum_{j=1}^{m}y_j p_j^{\eta}=$$

$$=M_\xi+M_\eta$$

3.2) Док-во для Н СВ

$$M(\xi+\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)p(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy\right)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}y\left(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx\right)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p^{\xi}(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot p^{\eta}(y)dy=$$

$$=M_\xi+M_\eta$$

3.3) $M(\xi+C)=M_\xi+C$

4) Если $\xi\le\eta$, то $M_\xi\le M_\eta$

$\xi_{max}\le\eta_{min}$

5) Если СВ ξ и η нез., то $M(\xi\cdot\eta)=M_\xi\cdot M_\eta$

5.1. Д СВ

$$M(\xi\cdot\eta)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j\cdot p_{ij}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(x_i p_i^{\xi})\cdot(y_j\cdot p_j^{\eta})=$$

$$=\sum^{k}(x_i p_i^{\xi})\cdot\sum^{m}(y_j p_j^{\eta})=M_\xi\cdot M_\eta$$

$i=1 \qquad j=1$

5.2 НСВ

$$M(\xi\cdot\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot y\cdot p(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}x\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy\Big)dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}y\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx\Big)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p^{\xi}(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot p^{\eta}(y)dy=$$
$$=M_{\xi}\cdot M_{\eta}$$

⑥ Нер-во Йенсена

Если ф. $g(x)$ выпукла вниз, то $\forall\xi$ выполняется нер-во: $M(g(\xi))\geq g(M(\xi))$

Док-во:

$$g(x)=g(x_0)+\frac{g'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{g''(\tilde{x})}{2!}\cdot(x-x_0)^2$$

$$g(x)\geq g(x_0)+g'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$$x\to\xi,\ x_0\to M_\xi$$

$$g(\xi)\geq g(M_\xi)+g'(M(\xi))\cdot(\xi-M_\xi)$$

$$M(\xi-M_\xi)=M_\xi-M_\xi=0$$

$$M(g(\xi))\geq g(M(\xi))$$

7) нер-во Ляпунова

$\forall\alpha,\beta\in R$; Если $0<\alpha<\beta$, то $\left(M(|\xi|^{\alpha})\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\left(M(|\xi|^{\beta})\right)^{\frac{1}{\beta}}$

Доказательство:

$y=x^{\frac{\beta}{\alpha}}$, т.к. $\frac{\beta}{\alpha}>1$, то функция выпукла вниз, значит применимо неравенство Йенсена

$$M\left(\eta^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\geq(M_\eta)^{\frac{\beta}{\alpha}};\eta=|\xi|^{\alpha}$$

$$M\left(\left(|\xi|^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\geq\left(M|\xi|^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$M\left(|\xi|^{\beta}\right)\geq M\left(|\xi|^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\ \Big|\uparrow\frac{1}{\beta}$$

$$\left(M|\xi|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\left(M|\xi|^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

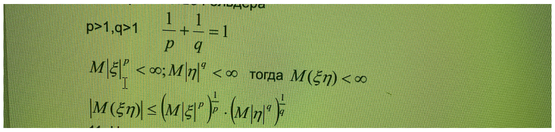
8) Нер-во Коши-Буняковского

$$|M(\xi\cdot\eta)|\leq\sqrt{M|\tilde{\xi}|\cdot M|\tilde{\eta}|}$$

9) Нер-во Гёльдера

$$M|\xi\cdot\eta| \le \left(M|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(M|\eta|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;\ p,q>0$


p>1, q>1 $\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$M|\xi|^p<\infty; M|\eta|^q<\infty$ тогда $M(\xi\eta)<\infty$

$|M(\xi\eta)| \le \left(M|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(M|\eta|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

10) Нер-во Минковского (треуг.)

$$\left(M|\xi+\eta|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(M|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(M|\eta|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ф-ии случ. аргумента и их М.О.

Если любому значению СВ ξ соответствует и притом единственное значение СВ η, то говорят, что задана ф. $\eta=f(\xi)$ случ. аргумента ξ.

1) Случай ДСВ

ξ	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n
$\eta=f(\xi)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

$$M\eta=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot p_i$$

$i=1$

② Случай Н СВ

$\eta = f(\xi); \ \xi \to p_\xi(x)$

Т.

Рассматривается ф. $\eta = f(\xi)$ случ. арг. ξ, при этом сама ф-я $y = f(\xi)$ дифференцируема (или имеет производную), монотонна, имеет обратн. ф-ю $x = f^{-1}(y)$. Тогда плот. распред СВ ξ, имеет след. вид: $p_\eta(y) = p_\xi\left(f^{-1}(y)\right) \cdot \left|\left(f^{-1}(y)\right)'\right|$

$$M_\eta = M f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot p_\xi(x)\, dx$$

Дисперсия (разброс, рассеяние от мат.)

Дисперсией СВ наз. М.О. квадрата отклонения СВ от её М.О.

$$D_\xi = M(\xi - M_\xi)^2$$

ДСВ: $D_\xi = \sum^{n} (x_i - M_\xi)^2 \, p_i$

Д СВ: $D_\xi = \sum_{i=1} (x_i - M_\xi)^2 \cdot p_i$

Н СВ: $D_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_\xi)^2 \cdot p(x)\, dx$

Арифметический кв. корень из Д. наз. стандартным или среднеквадратич. отклонением

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$$

Дисперсия хар-ует степень разброса СВ около своего среднего значения, т.е. М.О.

Св-ва:

1) $D_\xi \geq 0$; $D_\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = C$ - const

2) $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D_\xi$; C - const

3) $D_\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$

$$D_\xi = M\left(\xi^2 - 2\xi \cdot M_\xi + (M_\xi)^2\right) = M(\xi)^2 - 2M_\xi M_\xi + (M_\xi)^2 =$$

$$M(\xi)^2 - (M_\xi)^2$$

4) Если СВ ξ и η нез., то $D(\xi+\eta) = D_\xi + D_\eta$

$$D(\xi+\eta) = M\left((\xi+\eta)^2\right) - \left(M(\xi+\eta)\right)^2 =$$

$$= M(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - (M_\xi)^2 - 2M_\xi M_\eta - (M_\eta)^2 =$$

$$= M(\xi^2) - (M_\xi)^2 + M(\eta^2) - (M_\eta)^2 + 2M(\xi\eta) - 2M_\xi \cdot M_\eta =$$

$$= D_\xi + D_\eta$$

4') $D(\xi + C) = D_\xi$

Название	З-н или плотность распред. вероят.	M_ξ	D_ξ	σ_ξ
Равномерное распред. послед. натур. чисел	$\begin{array}{c\|c\|c} \xi & 1 & 2 \\ \hline p & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{array}$ $\begin{array}{c} n \\ \hline \frac{1}{n} \end{array}$; $p_i = \frac{1}{n}$; $i = 1, \ldots, n$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}$

Биномиальное распред.	$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} \xi & 0 & 1 & \dots & n \\ \hline p & C_n^0 p^0 q^n & C_n^1 p^1 q^{n-1} & \dots & C_n^n p^n q^0 \end{array}$	$n \cdot p$	npq	$\sqrt{npq}$
Распред. Пуассона	$P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \lambda>0$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c} \xi & 0 & 1 & \dots \\ \hline p & e^{-\lambda} & \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} & \dots \end{array}$	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
Геом распред.	$P(\xi=k)=pq^{k-1}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c} \xi & 1 & 2 & \dots \\ \hline p & p & pq & \dots \end{array}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{\sqrt{q}}{p}$
Равномер. распред. на отр.	$p(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}; & a\le x\le b \\ 0; & x<a; x>b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
пок. распред.	$p(x)=\begin{cases} 0; & x<0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \end{cases}$ $\lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$
		a	σ^2	σ

$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ + Гаус

Корреляционный момент

двух СВ

Кор. мом. СВ-ны ξ и η наз. выр. вида

$$C_{\xi\eta} = M\left((\xi - M_\xi)\cdot(\eta - M_\eta)\right)$$

Случай Д СВ:

$$C_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M_\xi)(y_j - M_\eta)\cdot p_{ij}$$

Случай Н СВ:

$$C_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - M_\xi)(y - M_\eta)\cdot p(x,y)\,dx\,dy$$

Св-ва кор. мом.:

1) $C_{\xi\xi} = D_\xi$

2) $C_{\xi\eta} = M(\xi\cdot\eta) - M_\xi\cdot M_\eta$

$$C_{\xi\eta} = M\big((\xi - M_\xi)\cdot(\eta - M_\eta)\big) = M(\xi\eta - \eta M_\xi - \xi M_\eta + M_\xi \cdot M_\eta) =$$

$$= M(\xi\cdot\eta) - M_\xi\cdot M_\eta - \cancel{M_\eta \cdot M_\xi} + \cancel{M_\xi M_\eta}$$

3) Если ξ, η нез., то $C_{\xi,\eta} = 0$

4) $|C_{\xi\eta}| \le \sigma_\xi \cdot \sigma_\eta$; $-\sigma_\xi\sigma_\eta \le C_{\xi\eta} \le \sigma_\xi\sigma_\eta$

Док-во: $\theta = \xi\cdot\sigma_\eta \overset{+}{-} \eta\sigma_\xi$; $D\theta \ge 0$

$$D\theta = M(\xi\cdot\sigma_\eta \overset{+}{-} \eta\cdot\sigma_\xi - M_\xi\sigma_\eta \overset{-}{+} M_\eta\sigma_\xi)^2 = M\big(\sigma_\eta(\xi - M_\xi) \overset{+}{-} \sigma_\xi(\eta - M_\eta)\big)^2 = M\big(\sigma_\eta^2(\xi - M_\xi)^2 \overset{+}{-}$$

$$\overset{+}{-} 2\sigma_\eta\sigma_\xi(\xi - M_\xi)(\eta - M_\eta) + \sigma_\xi^2(\eta - M_\eta)^2\big) = \sigma_\eta^2 M(\xi - M_\xi)^2 \overset{+}{-} 2\sigma_\xi\sigma_\eta M(\xi - M_\xi)(\eta - M_\eta) + \sigma_\xi^2 M(\eta - M_\eta)^2 =$$

$$= \sigma_\eta^2\cdot\sigma_\xi^2 \overset{+}{-} 2\sigma_\xi\sigma_\eta$$

проверить

$\sim$ — док

$\theta = \xi \cdot \sigma_\eta + \eta \cdot \sigma_\xi$ ← y

5) Гл. недост. кор. мом. — это то, что он обладает размерностью

Коэфф. корреляции и его св-ва:

Коэф. корр. СВ ξ и η наз. отношение корр. момента к произведению стандартных отклонений

$$r_{\xi\eta} = \frac{C_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}$$

Если коэф. корр. $r_{\xi\eta} = 0$, то такие СВ наз. некоррелированными

Если коэф. корр. $r_{\xi\eta} \neq 0$, то такие СВ наз. коррелированными

Св-ва:

1) $-1 \leq r_{\xi\eta} \leq 1$

2) Если СВ ξ и η нез., то они некоррелированные, т.е. $r_{\xi,\eta} = 0$

Если СВ ξ и η коррелированы ($r_{\xi,\eta} \neq 0$), то они зависимы.

Утверждения, обратные к данным, в общем случае, неверны

+ написать их

3) Если СВ ξ имеет M_ξ и σ_ξ, то СВ $\xi' = \frac{\xi - M_\xi}{\sigma_\xi}$ наз. нормированной по отношению к СВ ξ

$$M'_\xi = \frac{M(\xi - M_\xi)}{\sigma_\xi} = 0$$

$$D'_\xi = \frac{D(\xi - M_\xi)}{\sigma_\xi^2} = \frac{D\xi}{\sigma_\xi^2} = 1$$

Коэф. корр. 2-ух СВ равен корр. мом. их нормированных значений

$$r_{\xi\eta} = C_{\xi'\eta'}$$

Док-во:

$$r_{\xi\eta} = \frac{C_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{M(\xi - M_\xi)(\eta - M_\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = M\left(\frac{\xi - M_\xi}{\sigma_\xi} \cdot \frac{\eta - M_\eta}{\sigma_\eta}\right) = M_{\xi'\eta'} =$$

$$= C_{\xi'\eta'}$$

4) Если СВ ξ и η линейно зав., т.е $\exists\, a, b \in R;\ a \neq 0 : \eta = a \cdot \xi + b$, то

$$|r_{\xi\eta}| = 1$$

Док-во:

1. $M_\eta = a \cdot M_\xi + b$

$D\eta = a^2 \cdot D_\xi$

$\sigma_\eta = |a| \cdot \sigma_\xi$

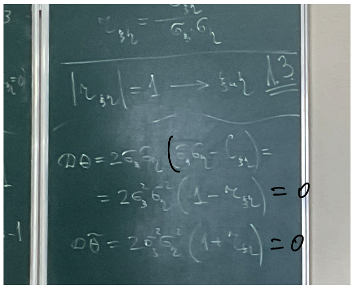
2. $C_{\xi\eta} = M\big((\xi - M_\xi)(\eta - M_\eta)\big) = M\big((\xi - M_\xi)(a\xi + b - aM_\xi - b)\big)$

$C_{\xi\eta} = aM\big((\xi - M_\xi)^2\big) = a \cdot \sigma_\xi^2$

3. $r_{\xi\eta} = \dfrac{a \cdot \sigma_\xi^2}{\sigma_\xi \cdot |a| \cdot \sigma_\xi} = \dfrac{a}{|a|}$ $\xrightarrow{a>0} 1$, $\xrightarrow{a<0} -1$

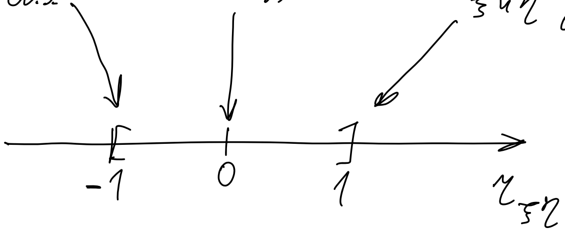
5) Если $|r_{\xi\eta}| = 1 \longrightarrow \xi$ и η линейно зав.

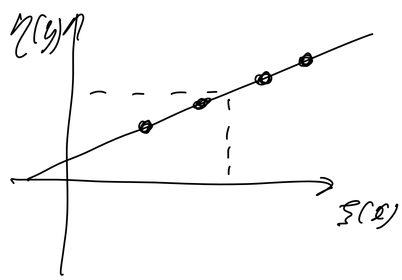
$D\theta = 2\sigma_\xi\sigma_\eta($



$\theta = C$ - const ; $\xi \cdot \sigma_\eta - \eta\sigma_\xi = C \Rightarrow \eta = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} \cdot \xi - \frac{C}{\sigma_\xi}$

6)





Коэф. корр. явл. мерой линейной зав. 2-ух СВ

7) степень линейной зависимости

$\lvert r_{\xi\eta} \rvert$	$0 \div 0{,}3$	$0{,}4 \div 0{,}7$	$0{,}8 \div 1$
мера Л.З.	слабая	умерен-ная	сильная