Теория вероятностей

События и их классификация

Теория вероятностей – это наука о случайных событиях и их характеристиках

Элементарным исходом (событием) называется любой из взаимоисключающих друг друга исходов данного опыта или явления.

Событием называется некоторая совокупность Э.И..

Если Э.И. конечное число, то событием является любая совокупность Э.И.

Пр.

Кидаем кубик.

$A_1; \dots; A_6$ – выпадение соответствующей грани кубика

A – выпадение чёт. грани: A_2, A_4, A_6

B – вып. нечёт грани: A_1, A_3, A_5

C – вып. грани, кот $\vdots$ 3: A_3, A_6

D – вып. полож. грани: $A_1, \dots, A_6$

E – вып грани, кот $\vdots$ 7: $\varnothing$

F – вып., грани, кот. >2: $A_3, \dots A_6$

Если событие наступает в результате любого Э.И., то оно назыв. **достоверным** (D)

Если событие не содержит ни одного Э.И., то оно назыв. **невозможным** (E)

Событие наз. детерминированным, если его исход предопределён. (D, E)

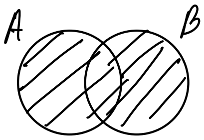
Событие наз. случайным, если мн-во его Э.И. явл. собственным подмн-вом мн-ва всех Э.И. (A, B, C)

Два события наз. равными, если мн-ва их Э.И. совпадают.

Два события наз. несовместными, если они не м/ произойти одновременно в рамках одного опыта (A, B)

Операции над соб.

1) **Сумма событий.** Суммой событий наз. событие, кот означает осуществление хотя бы одного из исходных событий

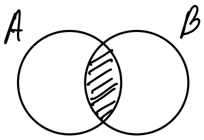


$C = A + B$

или

$A_1 + \ldots A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$

2) **Произведение событий.** Произведением соб. наз соб., кот. озн. одновременное осуществление обоих событий

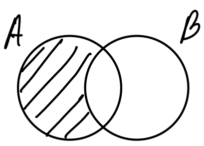


$C = A \cdot B$

или

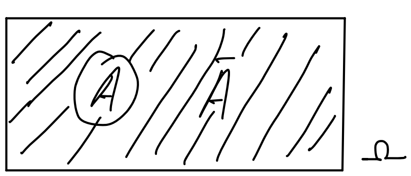
$A_1 \cdot \ldots A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$

3) **Разность событий.** Разностью соб наз соб., кот. озн. осуществление первого события при одновременном не осуществлении второго.

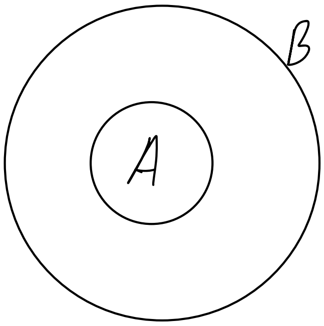


$C = A \setminus B$

4) **Дополнительное событие.** Соб. $\bar{A}$ наз. дополнительным к соб A, если оно состоит из всех Э.И. опыта, не входящих в A



5) Следование событий. Говорят, что соб. А влечёт за собой соб. В, если при осуществлении соб. А, происходит соб. В.



$A \subset B$ – из A следует B

Различные подходы к понятию вероятность

Статистический подход

Пусть соб. A в серии n независимых испытаний произошло m раз, тогда $\frac{m}{n}$ наз. относительной частотой события A в данной серии испытаний.

Существует фундаментальный з-н природы, кот. наз. принципом устойчивости относительных частот и кот. состоит в следующем:

При больших сериях испытаний отн. час. колеблется около одного и того же числового значения, кот. принято называть вероятностью события A

$$\frac{m_1}{n_1} \approx \frac{m_2}{n_2} \approx \dots \approx P(A)$$

Главное достоинство статистического подхода — это то, что он имеет дело с реальными объектами.

Главный недостаток статистического подхода — это отсутствие точного значения вероятности.

Классический подход

Если все Э.И. данного опыта или явления равновозможны, то вероятностью события A наз. отношение числа благоприятных исходов (m) к общему числу Э.И. (n)

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Классический подход реализуем только в опытах с конечным числом Э.И.

Требование равновозможностей Э.И. явл. математической идеализацией реально существующих объектов.

Игра в кости. Выбрасывают 3 кости и просчитывают сумму выпавших граней. Мере обратил внимание, что сумма 11 выпадает чаще, чем 12. Просчитал комбинации выпадения 11 и 12 и выяснил, что и там, и там 6 комбинаций => преимущества нет. Однако оно есть.

Э.И. - упорядоченная последовательность информации о выпавших гранях.

Равновозможны

$n = 6^3 = 216$

A – выпала сумма граней = 11 | B – выпала ... = 12

A	B
$641,\ m_1 = \frac{6}{216}$	$651,\ m_1 = \frac{6}{216}$
$632,\ m_2 = \frac{6}{216}$	$642,\ m_2 = \frac{6}{216}$
$551,\ m_3 = \frac{3}{216}$	$633,\ m_3 = \frac{3}{216}$
$542,\ m_4 = \frac{6}{216}$	$552,\ m_4 = \frac{3}{216}$
$533,\ m_5 = \frac{3}{216}$	$543,\ m_5 = \frac{6}{216}$
$443,\ m_6 = \frac{3}{216}$	$444,\ m_6 = \frac{1}{216}$
$m_A = \sum_{i=1}^{6} m_i = \frac{27}{216}$	$m_B = \sum_{i=1}^{6} m_i = \frac{25}{216}$

$P(A) = \frac{m_A}{n}$; $P(A) = \frac{27}{216}$

$P(B) = \frac{m_B}{n}$; $P(B) = \frac{25}{216}$

$P(A) > P(B)$ QED

Геометрический подход

Рассматривается n-мерное Эвклидово пространство, на кот. введён n-мерный объ[ём]

Рассматривается конечная область –

$\Omega \subset E^n$, все точки которой являются Э.И. некоторого опыта или явл.

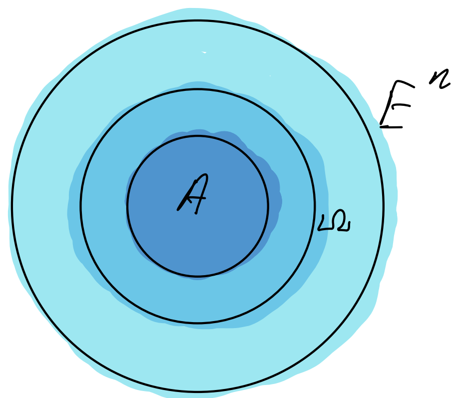
Событиями будут и некоторые ...

Событиями будем называть некоторые подмн-

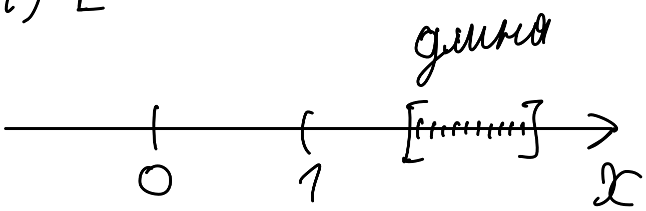
мн. Ω, т.е. $A \subset \Omega$

Тогда вероятностью соб. A наз. отноше-ние n-мерного объёма A к n-мерному объёму Ω.

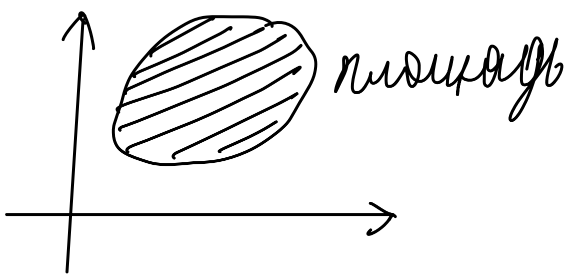
$$P(A)=\frac{V_A}{V_\Omega}$$



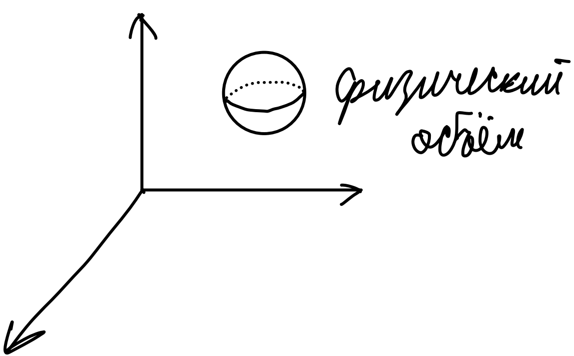
1) E^1



2) E^2



3) E^3



Задача №1

2 человека договариваются о встрече в определённом месте на промежутке времени $(0,T)$. Каждый из них в течении этого времени появляется случайно. Каждый из них ждёт другого в течении времени t $(t<T)$. Какова вероятность, что они встретятся

1) Опыт: α – первый чел., β – второй чел.

2) Э. И. – упорядоченная пара времён прихода на место встречи α и β, т.е. (x,y)

A – встреча произошла

3) $\Omega: \begin{cases} 0 \le x \le T \\ 0 \le y \le T \end{cases}$

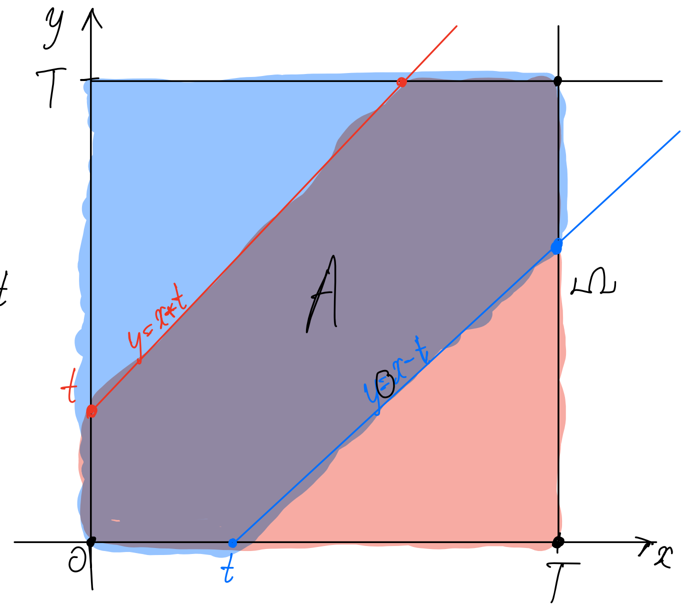
$A: |y-x| \le t$

$-t \le y-x \le t$

$x-t \le y \le x+t$

$\Downarrow$

$\begin{cases} y \geq x-t \to y = x-t \\ y \le x+t \to y = x+t \end{cases}$

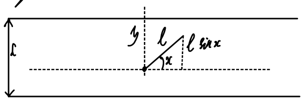


$S_\Omega = T^2; \; S_A = T^2 - (T-t)^2 = 2Tt - t^2$

$$P(A) = \frac{2Tt - t^2}{T^2} = 2\left(\frac{t}{T}\right) - \left(\frac{t}{T}\right)^2$$

Задача №2 (Б)

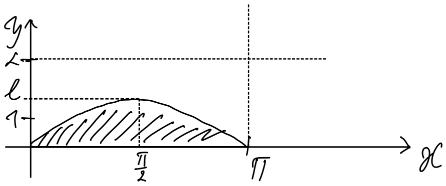
Плоскость разлинована параллельными прямыми, кот находятся на расстоянии L друг от друга. Случайным образом на плоскость падает игла длиной l $(l<L)$. Какова вероятность, что игла пересечёт одну из этих прямых.



2) Э. И. — упор. пара $(x;y)$,
x — угол м/ду иглой и парал.-льно;
y — расстояние от нижнего конца иглы до ближайшей сверху парал.-льно;

A — игла пересекает одну из // прямых

3) $\Omega: \begin{matrix} 0 \le x < \pi \\ 0 \le y < L \end{matrix}$; $A: y \le l \sin x$



$S_\Omega = L\pi$

$S_A = \int_0^\pi l \sin x \, dx = l(-\cos x)\Big|_0^\pi = 2l$

$P(A) = \frac{2l}{L\pi}$

Зам: $\pi = \frac{2l}{L \cdot P(A)}$; $P(A) \approx \frac{m}{n}$

Родился 25.04.1903 г в Тамбове. Получил домашнее образование, затем учился в частной гимназии. Наиб. интерес учёного вызывали проблемы теор. вер., кот. он до конца жизни считал своей главной специальностью. В 1930 г стал профессором, в 35 защитил докторскую диссертацию, в 39 году был избран академиком. В 76 году Колмогоров основал кафедру мат. стат. мехмата МГУ и до 80 года был её заведующим. В 80 г. стал зав. каф. мат. логики и оставался в этой должности до своей кончины 20.10.87

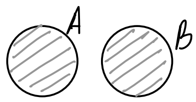
Аксиоматический подход. Аксиомы Колмогорова. Вероятностное пространство.

Пусть Ω – мн-во всех Э.И. данного опыта или явления.

$\mathcal{A}$ – алгебра или σ-алгебра подмн. мн. Ω называемых событиями

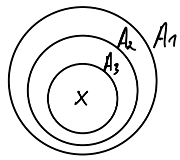
P – числовая ф-ция, опред. на событиях, наз. вероятностью и обладающая след. св-вами:

1. $\forall A \in \mathcal{A}: P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Если соб. A и B несовместны, то вероят. соб. равна сумме вероят. соб.



$(A \cdot B = \emptyset) \to P(A+B) = P(A) + P(B)$

4. $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots; \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \Rightarrow \lim\limits_{i=\infty} P(A_i) = 0$



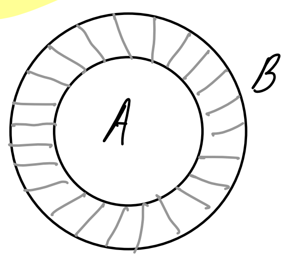
Тогда тройка объектов $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ – вероятностное прос-во

Зам. 1: не любая сов-ность Э.И. явл. событием.

Зам. 2: аксиомы 3–4 м/заменить аксиомой, кот. наз. „аксиомой счётной аддитивности" 3*, кот. состоит в след.: Если события $A_1; A_2; \ldots$ попарно несовместны, то $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Т.: система аксиом 1–4 равносильна системе аксиом 1–3*

Простейшие св-ва вероятности



1) Если $(A \subset B) \to P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

Док-во: $B = A + (B \setminus A)$

$A \cdot (B \setminus A) = \emptyset$

$P(B) = P(A + B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$; $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

$P(B) = P(A + B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$;

2) $(A \subset B) \to P(A) \le P(B)$

$P(A) = P(B) - P(B \setminus A) \le P(B)$

3) $\forall A \in \mathcal{A}: 0 \le P(A) \le 1$

$A \subset \Omega$; $P(A) \le P(\Omega) = 1$

4) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$A + \bar{A} = \Omega$, $A \cdot \bar{A} = \varnothing$

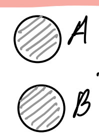
5) $P(\varnothing) = 0$

Док-во: $\Omega \cdot \varnothing = \varnothing \Rightarrow P(\Omega + \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) = P(\Omega) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(\Omega) - P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) - P(\Omega) \Leftrightarrow 0 = P(\varnothing)$ QED

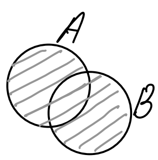
Правило сложения вероятностей

$P(A+B) = P(A) + P(B)$



- несовместные

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$



Док-во:

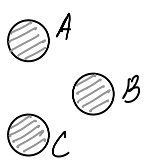
$A + B = A \setminus AB + AB + B \setminus AB$

$P(A+B) = P(A \setminus AB) + P(AB) + P(B \setminus AB) = \left[\begin{array}{l} P(A) = P(A \setminus AB) + P(AB) \;.\; P(A \setminus AB) = P(A) - P(AB) \\ P(B) = P(B \setminus AB) + P(AB) \;,\; P(B \setminus AB) = P(B) - P(AB) \end{array}\right] = P(A) - \cancel{P(AB)} + \cancel{P(AB)} + P(B) - P(AB) =$

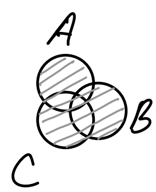
$= P(A) + P(B) - P(AB)$ QED

3.1.

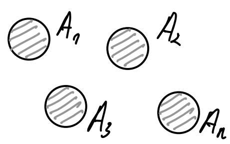
$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$



$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(B \cdot C) - P(A \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C)$



$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

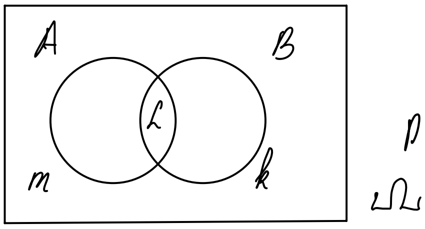


$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum^{n-1} \sum^{n} P(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$

$$P\left(\bigcup_{i=1} A_i\right) = \sum_{i=1} P(A_i) - \sum_{i=1} \sum_{j=i+1} P(A_i \cdot A_j) + \ldots + (-1) \cdots P\left(\bigcap_{i=1} A_i\right)$$

3.2

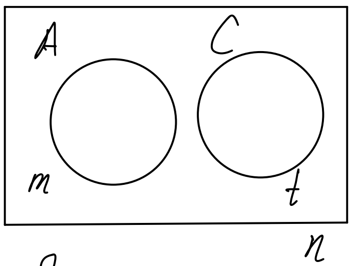
Обоснование классического подхода в рамках аксиом Колмогорова



$$P(A) = \frac{m}{n} \to \frac{m}{n} \geq 0$$

$$P(A) = \frac{m}{n} \to P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$$

$$P(A+B) = \frac{m+k-l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$



$$\longrightarrow P(A+C) = \frac{m+t}{n} = \frac{m}{n} + \frac{t}{n} = P(A) + P(C)$$

3.3

Обоснование геометрического подхода в рамках аксиом Колмогорова

Док-во:

$\Omega \subset E^n$; $x \in \Omega$ - Э.И.; $A \subset \Omega$ - событие $x \in A$ - благоприятный исход

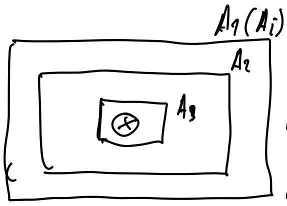
$$P(A) := \frac{V_A}{V_\Omega}$$

1) числитель неотриц., знам. - положит. => всегда будет $P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = \frac{V_\Omega}{V_\Omega} = 1$

3) $A \cap B = \varnothing$ $V_{A \cup B} = V_A + V_B$; $P(A+B) = \frac{V_{A \cup B}}{V_\Omega} = \frac{V_A}{V_\Omega} + \frac{V_B}{V_\Omega} = P(A) + P(B)$

4)



Фиксируем окружность с центром в нуле и радиусом ε; $S = \pi \varepsilon^2$

Возьмём пос-сть стягивающихся множеств до окр. и будем утверждать, что с некоторого места они будут лежать внутри окр.

Допустим, что такого места нет. тогда Бесконечная подпос-сть $A_{i1} \supset A_{i2} \supset \ldots$ не лежит внутри этой окружности

=> получаем пос-сть (·) $a_1, a_2, \ldots$, кот. лежат снаружи. Пос-сть приближается к какой-то предельной точке, кот. тоже будет лежать снаружи. Эта (·) $\in \bigcap_{k=1} A_{ik}$ и она ненулевая т.к. она лежит вне окружности => эта (·) $\neq 0$. + посл $\{A_i\} \downarrow 0$ и подпосл $\{A_{ik}\} \downarrow 0$ => они совпадают Противоречие => Какую бы окр. мы бы не взяли начиная с некоторого места все будут лежать внутри => S каждого из них будет $< \pi \varepsilon^2$ => $\lim_{i \to \infty} P(A_i) \le \pi\varepsilon^2 = 0$

Зам. 4. Потому что мы предположили, что есть подпосл-сть мн-в, у каждой из которых есть (·) ∉ окр-сти, пересечение не пустое мн-во

Если соб. A достоверное, то $P(A) = 1$

. Если соб. невозможное, то его вероятность = 0

Обр. утв. справедливы только если число Э.И. конечно

Задача о совпадениях (вероятность! до опыта!, а не во время

Экзамен по теор. вер. Ст. складывают тел. в коробку.

Е после э. студент выходит, с.о. забир. тел и уходит

Какова P, что хотя бы 1 получит свой тел

1. n студентов

2. A — х.б 1 получит свой телефон

A_1 - 1-ый получает свой тел.

...

A_n - n-ый получает свой тел

совместны

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \; ; \; P(A) = \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)}}_{P_1} - \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i A_j)}}_{P_2} + \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i A_j A_k)}}_{P_3} + \ldots$$

$$\ldots (-1)^{n-1} \cdot \underbrace{\boxed{P(A_1 A_2 \ldots A_n)}}_{P_n}$$

1) $P(A_1) = \frac{1}{n}$

$$P(A_2) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} \Rightarrow P(A_1) = P(A_2) = P(A_i) \Rightarrow P_1 = \frac{1}{1!} = 1$$

$$P(A_i) = \frac{A_{n-m}^{k-m}}{A_n^k}, \; m = 1$$

n - общее кол-во людей

k - кол-во людей, кот. вышли

m - кол-во людей, получ. телефон

2) $P(A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = P(A_i \cdot A_j)$

$$P_2 = \frac{1}{n(n-1)} \cdot C_n^2 = \frac{1}{n(n-1)} \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{1}{2!}$$

③ $$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = P(A_i A_j A_k), \quad P(A_i A_j A_k) = \frac{A_{n-m}^{k-m}}{A_n^k}, \quad m=3$$

$$P_3 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} C_n^3 = \frac{1}{3!}$$

④ $$p_n = \frac{1}{n!}$$

$$P(A) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots$$

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots$$

$$1 - e^{-1} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$$

$$P(A) \approx 1 - e^{-1}$$

!пример, не писать!

$$P(A_i) = \frac{A_{n-1}^{k-1}}{A_n^k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$P(A_i A_j) = \frac{A_{n-2}^{k-2}}{A_n^k} = \frac{(n-2)!}{(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{(n-1)n}$$

$$P(A_i A_j A_k) = \frac{A_{n-3}^{k-3}}{A_n^k} = \frac{(n-3)!}{(n-k)!} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$$