INSTITUTO FEDERAL
CEARÁ
Campus Fortaleza

Avaliação Parcial 3 9,5

Curso: Bacharelado em Engenharia da Computação

Disciplina: Matemática Discreta

Professor: Sebastião Pontes Mascarenhas

Semestre: 2022.2

Aluno (a):

4,0 01. Considere a função $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ que associa a cada valor x em seu domínio ao número y em seu contradomínio, definida pela expressão

$$y = f(x) = \frac{3x^7 + 1}{x^7 - 1}.$$

Mostre que a função $f(x)$ é bijetiva.

Determine o domínio, o contra domínio e a expressão da função inversa $f^{-1}(x)$.

2,5 02. Considere o conjunto de números inteiros dado por $S = \{2,3,4,5,6,7,8,13,14,15,16,17,18,19\}$. Mostre que se selecionarmos **oito** elementos distintos no conjunto S, sempre existirá pelo menos dois desses elementos selecionados cuja **soma** entre eles será 21.

3,0 03. Um grupo de 5 estudantes é colocado em uma sala quadrada de lado $l = 4m$. Mostre que existem pelo menos dois desses estudantes cuja distância entre eles é menor que $3m$.

Obs.: Não é permitida a utilização de resultados oriundos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

① (i) f é injetiva? consideremos $f(a) = f(b)$, tal que $a, b \in \mathbb{R} - \{1\}$, ou seja a e b pertencem ao domínio de f, então $f(a) = f(b) \Rightarrow \dfrac{3a^7+1}{a^7-1} = \dfrac{3b^7+1}{b^7-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (b^7-1)(3a^7+1) = (a^7-1)(3b^7+1) \Rightarrow 3a^7b^7 + b^7 - 3a^7 - 1 = 3a^7b^7 + a^7 - 3b^7 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^7 - 3a^7 = a^7 - 3b^7 \Rightarrow 4b^7 = 4a^7 \Rightarrow b^7 = a^7 \Rightarrow \sqrt[7]{b^7} = \sqrt[7]{a^7} \Rightarrow b = a$

logo, f é injetiva.

(ii) f é sobrejetiva? considere $y \in \mathbb{R} - \{3\}$, tal que $y = f(x)$ temos que

$\therefore y = \dfrac{3x^7+1}{x^7-1} \Rightarrow y(x^7-1) = 3x^7+1 \Rightarrow yx^7 - y = 3x^7 + 1 \Rightarrow yx^7 - 3x^7 = 1 + y$

$\Rightarrow x^7(y-3) = 1+y \Rightarrow x^7 = \dfrac{1+y}{y-3} \Rightarrow x = \sqrt[7]{\dfrac{1+y}{y-3}}$, com isso concluímos que

como $y \in \mathbb{R} - \{3\}$ então $\exists x\ \forall y \in \mathbb{R} - \{3\}$ ou seja $Im(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ logo

f é sobrejetiva.

(iii) Por (i) e (ii) f é injetiva e sobrejetiva, logo, f é bijetiva e há inversa, cuja é dada por: $f^{-1}: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, $x \mapsto y = f^{-1}(x) = \sqrt[7]{\dfrac{1+x}{x-3}}$ $\blacksquare$

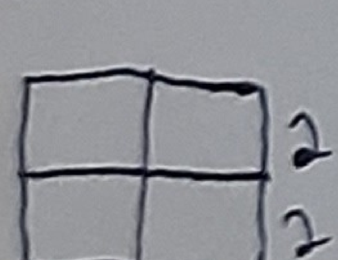
② CAIXAS $\longrightarrow$ 7 ({19,2}, {18,3}, {17,4}, {16,5}, {15,6}, {14,7}, {13,8}) *Para cujo a soma é 21

OBJETOS $\longrightarrow$ 8 (~~CAIXA + 1~~) ← Não!

pelo P.C.P existe pelo menos 2 números dentre 8 selecionados no conjunto S, tal que a soma entre eles dê 21

OBS: Pela definição do P.C.P $\Rightarrow \lceil \frac{N}{7} \rceil = 2 \Rightarrow N = 8$, ou seja, N é no mínimo 8. $\blacksquare$

③ Dividindo-se a sala de aula em quadrados de lados iguais à 2 m temos



CAIXAS $\longrightarrow$ 4 (quadrados de lado 2m)

OBJETOS $\longrightarrow$ 5 (alunos)

Pelo P.C.P existe um quadrado de lado 2m com pelo menos 2 alunos. Sabendo que a maior distância em um quadrado é sua diagonal $l\sqrt{2}$, então a maior distância entre 2 alunos nesse quadrado é $2\sqrt{2}$ cujo é menor que 3

$\therefore$ existe dois alunos entre 5 cujo a distância entre eles é menor que 3 $\blacksquare$