1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = (x+y+3)^2 \\ y(0) = -3 \end{cases}$

1° Passo: fazer a substituição:

$u = x + y + 3$ $\qquad y = u - x - 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

2° Passo: Substituir na equação:

$$\frac{du}{dx} - 1 = u^2$$

$$\frac{du}{dx} = u^2 + 1 \qquad du = (u^2+1)\,dx$$

$$\frac{1}{u^2+1}\,du = dx \qquad \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \int dx$$

$$\operatorname{arctg}(u) = x + C$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(u)) = \operatorname{tg}(x+C)$$

$$u = \operatorname{tg}(x+C)$$

3° Passo: Como $u = x+y+3$ temos:

$$x + y + 3 = \operatorname{tg}(x+C)$$

$$\boxed{y = \operatorname{tg}(x+C) - x - 3}$$

4º Passo: Utilizando o valor inicial; $y(0) = -3$ para encontrarmos C temos:

$$tg(0 + C) - 0 - 3 = -3$$

$$tg(C) - 3 = -3$$

$$tg(C) = 0 \Rightarrow \boxed{C = 0}$$

Para $y(0) = -3$ temos:

$$\boxed{tg(x) - x - 3 = -3}$$

2) $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

1º Passo: Fazendo a Substituição.

$V = \frac{y}{x}$ $\quad y = Vx \quad$ $\frac{dy}{dx} = x\frac{dV}{dx} + V$

2º Passo: Substituir na equação:

$x\frac{dV}{dx} + V = e^{V} + V$

$x\frac{dV}{dx} = e^{V}$ $\quad x\,dV = e^{V}dx \quad$ $\frac{1}{e^{V}}dV = \frac{1}{x}dx$

3º Passo: integrando os 2 lados:

$$\int \frac{1}{e^V} dV = \int \frac{1}{X} dX$$

$$\frac{-1}{e^V} = \ln|X| + C$$

$$\frac{1}{e^V} = -\ln|X| - C$$

$$e^{-V} = -\ln|X| - C$$

$$\ln e^{-V} = \ln(-\ln(X) - C)$$

$$-V = \ln(-\ln(X) - C)$$

$$V = -\ln(-\ln(X) - C)$$

$$u = e^V$$

$$\frac{du}{dV} = e^V \quad dV = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u^2} du$$

$$\int u^{-2} du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} =$$

$$= -u^{-1}$$

Substituindo:

$$-e^{-V} = -\frac{1}{e^V}$$

4º Passo: Voltando para as Variaveis X e Y:

$$\frac{Y}{X} = -\ln(-\ln(X) - C)$$

$$\boxed{Y = -X\ln(-\ln(X) - C)}$$

3) $x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 5y^3$

1º Passo: retirar o x^2 do $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{5y^3}{x^2}$$

2º Passo: Fazer a substituição $v = y^{-2}$; multiplicando toda equação por y^{-2}:

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{xy} = \frac{5y}{x^2}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{xy}\right) = \frac{5}{x^2}$$

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{xy^2} = \frac{5}{x^2}$$

3º Passo: Derivar v em relação a x temos:

$$v = \frac{1}{y^2} \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \left(\frac{-2}{y^3}\right)$$

$$\frac{-1}{2}\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^3}$$

4º Passo. Como $\frac{-1}{2}\frac{dV}{dx} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y^3}$ e $V = \frac{1}{y^2}$; substituímos na equação:

$$\frac{-1}{2}\frac{dV}{dx} + \frac{2V}{x} = \frac{5}{x^2}$$

$$\frac{dV}{dx} - \frac{4V}{x} = \frac{-10}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^4}\cdot\frac{dV}{dx} - \frac{1}{x^4}\cdot\frac{4V}{x} = \frac{-10}{x^2}\cdot\frac{1}{x^4}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}V\right) = \frac{-10}{x^6}$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx}$$

$$\mu(x) = e^{-4\ln|x|}$$

$$\mu(x) = e^{\ln(x^{-4})}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{x^4}$$

5º Passo: Integrando os 2 lados temos:

$$\int\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^4}V\right) = \int\frac{-10}{x^6}dx$$

$$\frac{1}{x^4}V = \frac{2}{x^5} + C$$

$$V = \frac{2}{x^5}\cdot x^4 + C\cdot x^4$$

$$\boxed{V = \frac{2}{x} + Cx^4}$$

$$\int\frac{-10}{x^6}dx = -10\cdot\int x^{-6}dx$$

$$-10\left(\frac{x^{-6+1}}{-6+1} = -10\cdot\left(\frac{-1}{5x^5}\right) = \frac{2}{x^5}\right.$$

6° Passo: Como $V = y^{-2}$; voltamos para a variável y.

$$\frac{1}{y^2} = \frac{2}{x} + Cx^4$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{2 + Cx^5}{x}$$

$$y^2 = \frac{x}{2 + Cx^5}$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{\frac{x}{2 + Cx^5}}}$$

(4º) $m\frac{dV}{dt} = m \cdot g - KV^2$; m = massa
g = gravidade
K = constante

$$\frac{dV}{dt} = g - \frac{KV^2}{m}$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{-K}{m} + \frac{g}{V^2}\right)V^2 \qquad \frac{-K}{m} = A$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(A + \frac{g}{V^2}\right)V^2$$

$$\frac{dV}{dt} = A\left(1 + \frac{g}{V^2A}\right)V^2$$

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{g}{V^2A}\right)V^2}\,dV = A\,dt$$

$$\frac{1}{V^2 + g/A}\,dV = A\,dt \qquad \frac{1}{n} = \frac{g}{A}$$

$$\frac{1}{V^2 + 1/n}\,dV = A\,dt$$

$$\frac{1}{\frac{V^2 n + 1}{n}}\,dV = A\,dt$$

$$\int \frac{n}{V^2 n + 1}\, dV = \int A\, dt$$

$$\sqrt{n}\ \operatorname{arctg}(\sqrt{n}\, V) = At + C$$

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{n}\, V) = \frac{At + C}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n}\, V = tg\left(\frac{At + C}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\boxed{V = tg\left(\frac{At + C}{\sqrt{n}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$V = tg\left(\frac{\frac{-Kt}{m} + C}{\sqrt{A/g}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{A}{g}}}$$

$$V = tg\left(\frac{\frac{-Kt}{m} + C}{\sqrt{\frac{-K}{m}/g}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\frac{-K}{m}}{g}}}$$

$$V = tg\left(\frac{\frac{-Kt}{m} + C}{i\sqrt{\frac{K}{m}/g}}\right) \cdot \frac{1}{i\sqrt{\frac{\frac{K}{m}}{g}}}$$

como $t \to +\infty$ temos a tangente tende a zero então:

$V_{terminal} = 0$