DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB

1) $y' = Ay - By^2$

$y' = (A - By)y$

$y' = A\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$; onde $K = \frac{A}{B}$

$$\frac{dy}{dt} = A\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$$

$$\frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} = A\,dt$$

utilizando frações parciais podemos reescrever:

$$\frac{1}{(1 - y/K)\,y} = \frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K}$$

integrando os 2 lados:

$$\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K}\right)dy = \int A\,dt$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy + \int \frac{-du}{u} = At + C$$

$$\ln|y| - \ln|1 - y/K| = At + C$$

$u = 1 - \frac{y}{K}$

$\frac{du}{dy} = -1/K$

$-du = 1/K\,dy$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SAB

$$\ln\left|\frac{Y}{1-Y/K}\right| = At + C$$

Aplicando exponencial a ambos os lados:

$$\left|\frac{Y}{1-Y/K}\right| = e^{C} + e^{At}$$

$$\frac{Y}{1-Y/K} = \pm e^{C} + e^{At}$$

Substituindo $\pm e^{C}$ por C, pois $\pm e^{C}$ é constante temos

$$\frac{Y}{1-Y/K} = C \cdot e^{At}$$

$$Y = (1-Y/K) \cdot C \cdot e^{At}$$

$$Y = \left(C - \frac{YC}{K}\right) \cdot e^{At}$$

$$Y = C \cdot e^{At} - \frac{YCe^{At}}{K} \quad \text{onde } K = \frac{A}{B}$$

Na condição inicial $Y(0) = Y_0$ temos:

$$C = \frac{Y_0}{1 - \frac{Y_0}{K}}$$

Isolando y teremos:

$$\boxed{y = \frac{y_0 K}{(K-y_0)e^{-At} + y_0} \quad \text{onde } K = \frac{A}{B}}$$

2) $(x+y)\,dx - (x-y)\,dy = 0$

$$(x+y) - (x-y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-(x-y)\frac{dy}{dx} = -(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x+y)}{-x+y} \quad \text{(A equação é Homogênea)}$$

dividindo o numerador e o denominador por x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\left(1 + \frac{y}{x}\right)}{-1 + \frac{y}{x}}$$

Substituindo $V = \frac{y}{x}$ e $\frac{dy}{dx} = x\frac{dV}{dx} + V$

$$x\frac{dV}{dx} + V = \frac{-(1+V)}{-1+V}$$

$$x\frac{dV}{dx} = \frac{-(1+V)}{-1+V} - V$$

$$x\frac{dV}{dx} = \frac{-(1+V)-(V^2-V)}{V-1}$$

$$x\frac{dV}{dx} = \frac{-V^2-1}{V-1}$$

$$\frac{V-1}{-V^2-1}\,dV = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int\frac{V-1}{-V^2-1}\,dV = \int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\int\frac{V}{-V^2-1}\,dV - \int\frac{1}{-V^2-1}\,dV = \ln|x|+C$$

$$-\frac{1}{2}\ln|-V^2-1| + \operatorname{arctg}(V) = \ln|x|+C$$

Substituindo $V = Y/X$ temos:

$$\boxed{\operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(-1-\frac{Y^2}{X^2}\right) = \ln|x|+C}$$

3) $\frac{dy}{dx} = (x + y + 1)$

$u = x + y + 1$

$y = u - x - 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$

$\frac{du}{dx} - 1 = u^2$

$\frac{du}{dx} = u^2 + 1$

$\frac{1}{u^2+1} du = dx$

$\int \frac{1}{u^2+1} du = \int dx$

$\text{arctg}(u) = x + c$

$u = tg(x + c)$

Como $u = x + y + 1$ temos:

$x + y + 1 = tg(x + c)$

$\boxed{y = tg(x + c) - x - 1}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = K(T-25) \\ T(0) = 100 \\ T(5) = 90 \end{cases}$

$$\frac{1}{T-25}\, dT = K\, dt$$

$$\int \frac{1}{T-25}\, dT = \int K\, dt$$

$$\ln|T-25| = Kt + c$$

Aplicando exponencial temos

$$T-25 = \pm e^{c+Kt}$$

Como $\pm e^{c}$ é uma constante substituímos por C

$$T-25 = Ce^{Kt}$$

$$T(t) = 25 + Ce^{Kt}$$

Substituindo $t=0$ e $T=100$

$$100 = 25 + C$$

$$C = 75$$

$$T(t) = 25 + 75e^{Kt}$$

Substituindo $t = 5$ e $T = 90$ temos

$$90 = 25 + 75e^{5K}$$

$$75e^{5K} = 65$$

$$e^{5K} = \frac{65}{75} \qquad 5K = \ln\left(\frac{13}{15}\right)$$

$$K = \frac{\ln\left(\frac{13}{15}\right)}{5}$$

$$T(t) = 25 + 75^{\frac{\ln\frac{13}{15}}{5}t}$$

Substituindo $T = 50$ temos:

$$25 + 75^{\frac{\ln\left(\frac{13}{15}\right)}{5}t} = 50$$

$$75^{\frac{\ln\left(\frac{13}{15}\right)}{5}t} = 25$$

$$\frac{\ln\frac{13}{13}}{5}t \cdot \ln 75 = \ln 25$$

$$\frac{\ln\frac{13}{13}}{5}t = \frac{\ln 25}{\ln 75} \qquad t = \frac{\ln 25}{\ln 75} \cdot \frac{5}{\ln\left(\frac{13}{15}\right)}$$

$$\boxed{t \simeq 26 \text{ min}}$$