1) $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = e^{2t} \\ y(0) = 1 \; ; \; y'(0) = -1 \end{cases}$

a) Sem Laplace

(I) utilizando a equação auxiliar:

$r^2 - 5r + 4 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$

$\Delta = 25 - 16$

$\Delta = 9$

$r = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1}$

$r = \frac{5 \pm 3}{2}$ $\quad r_1 = 4 \; ; \; r_2 = 1$

$y_1(t) = c_1 e^{4t} \; ; \; y_2(t) = c_2 e^{t}$

soluções fundamentais

(II) Supondo que $y_p = Ae^{2t}$:

$y_p'(t) = 2Ae^{2t}$

$y_p''(t) = 4Ae^{2t}$

Substituindo na equação:

$4Ae^{2t} - 5 \cdot (2Ae^{2t}) + 4 \cdot (Ae^{2t}) = e^{2t}$

$4Ae^{2t} - 10Ae^{2t} + 4Ae^{2t} = e^{2t}$

$-2Ae^{2t} = e^{2t}$

$-2A = 1$

$A = \frac{-1}{2}$ $\quad y_p(t) = \frac{-1}{2} e^{2t}$

(solução particular)

Solução Geral:

$$y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{t} - \frac{1}{2} e^{2t}$$

III Usando os dados iniciais:

$$y(0) = c_1 e^{0} + c_2 e^{0} - \frac{1}{2} e^{0}$$

$$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{2}$$

$$y'(t) = 4c_1 e^{4t} + c_2 e^{t} - e^{2t}$$

$$y'(0) = 4c_1 e^{0} + c_2 e^{0} - e^{0}$$

$$y'(0) = 4c_1 + c_2 - 1$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 1/2 = 1 \\ 4c_1 + c_2 - 1 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 3/2 \\ 4c_1 + c_2 = 0 \quad \cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3/2 \\ -4c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \qquad -3c_1 = 3/2 \qquad c_1 = \frac{3/2}{-3} \qquad \boxed{c_1 = \frac{-1}{2}}$$

$$\frac{-1}{2} + c_2 = \frac{3}{2} \qquad \boxed{c_2 = 2}$$

IV Solução do P.V.I:

$$\boxed{y(t) = \frac{-1}{2} e^{4t} + 2e^{t} - \frac{1}{2} e^{2t}}$$

b) com Laplace

$$L\{y'' - 5y' + 4y\} = L\{e^{2t}\}$$

$$L\{y''\} - 5L\{y'\} + 4L\{y\} = \frac{1}{s-2}$$

$$s^2 L\{y\} - s + 1 - 5sL\{y\} + 5 + 4L\{y\} = \frac{1}{s-2}$$

$$(s^2 - 5s + 4)L\{y\} - s + 6 = \frac{1}{s-2}$$

$$(s-1)(s-4)(s-2)L\{y\} = s^2 - 8s + 13$$

$$L\{y\} = \frac{s^2 - 8s + 13}{(s-1)(s-4)(s-2)}$$

$$\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s-2} = \frac{s^2 - 8s + 13}{(s-1)(s-4)(s-2)}$$

$$\frac{A\cdot(s-4)(s-2) + B(s-1)(s-2) + C(s-1)(s-4)}{(s-1)(s-2)(s-4)} = \frac{s^2 - 8s + 13}{(s-1)(s-2)(s-4)}$$

Para $s = 1$:

$3A = 6 \quad A = 2$

Para $s = 2$:

$-2C = 1 \quad C = \frac{-1}{2}$

Para $s = 4$:

$6B = -3 \quad B = \frac{-1}{2}$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB

$$L\{y\} = \frac{2}{s-1} - \frac{1/2}{s-4} - \frac{1/2}{s-2}$$

$$L^{-1}\{L\{y\}\} = L^{-1}\left[\frac{2}{s-1} - \frac{1/2}{s-4} - \frac{1/2}{s-2}\right]$$

$$y(t) = 2L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right] - \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

$$y(t) = 2e^{t} - \frac{1}{2}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t}$$

2) $L(y) = t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0$

a) $y = t^r$

$y' = r \cdot t^{r-1}$

$y'' = r \cdot (r-1) \cdot t^{r-2}$

Substituindo:

$t^2 \cdot r \cdot (r-1) \cdot t^{r-2} + \alpha t \cdot r \cdot t^{r-1} + \beta t^r = 0$

$t^2 \cdot r \cdot (r-1) \cdot t^r \cdot t^{-2} + \alpha \cdot t \cdot r \cdot t^r \cdot t^{-1} + \beta t^r = 0$

$r \cdot (r-1) \cdot t^r + \alpha \cdot r \cdot t^r + \beta \cdot t^r = 0$

$t^r (r \cdot (r-1) + \alpha r + \beta) = 0$

$t^r \cdot t^{-r} (r \cdot (r-1) + \alpha r + \beta) = 0 \cdot t^{-r}$

$r \cdot (r-1) + \alpha r + \beta = 0$

$r^2 - r + \alpha r + \beta = 0$

$$\boxed{r^2 + (\alpha - 1) r + \beta = 0}$$

b) $t^2 y'' + 5 t y' - 5 y = 0$

I) Usando a equação Auxiliar:

$r^2 + 4r - 5 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)$

$\Delta = 16 + 20$

$\Delta = 36$

$r = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1}$

$r = \dfrac{-4 \pm 6}{2}$ $\quad r_1 = 1 ; r_2 = -5$

(II) Usando $t = \ln t$

$$Y(t) = C_1 e^{\ln t} + C_2 e^{-5\ln t}$$

$$\boxed{Y(t) = C_1 t + C_2 t^{-5}}$$

3) $Y'' + 2Y' + \alpha Y = 0$

(I) Para $\alpha > 1$:

$r^2 + 2r + \alpha = 0$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot \alpha$$
$$\Delta = 4 - 4\alpha$$
$$\Delta = 4(1-\alpha)$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4(1-\alpha)}}{2 \cdot 1}$$

$$r = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-\alpha}}{2}$$

$$r_1 = -1 + \sqrt{1-\alpha}$$
$$r_2 = -1 - \sqrt{1-\alpha}$$

Como $\alpha > 1$ teremos raízes complexas; então:

$$r_1 = -1 + (\sqrt{1-\alpha})i$$
$$r_2 = -1 - (\sqrt{1-\alpha})i$$

Então a solução Geral será:

$$\boxed{Y(t) = C_1 e^{-t} \cos(\sqrt{1-\alpha}\, t) + C_2 e^{-t} \operatorname{sen}(\sqrt{1-\alpha}\, t)}$$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB / /

II Para $\alpha = 1$:

$r^2 + 2r + 1 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$
$\Delta = 4 - 4$
$\Delta = 0$

$r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1}$

$r = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$ $r_1 = -1$
$r_2 = -1$

Como o $\Delta = 0$, teremos raízes repetidas então a solução Geral será:

$$\boxed{Y(t) = C_1 e^{-t} + (C_2 (t e^{-t}))}$$

III Para $\alpha < 1$

1º Se $\alpha = 0$:

$r^2 + 2r = 0$
$r \cdot (r + 2) = 0$
$r_1 = 0$; $r_2 = -2$

Como $\alpha = 0$, teremos uma constante livre de e^{rt} então a solução geral será:

$Y(t) = C_1 + C_2 e^{-2t}$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB

2º Se $\alpha < 0$

$r^2 + 2r - \alpha = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\alpha)$
$\Delta = 4 + 4\alpha$
$\Delta = 4(1+\alpha)$

Como o $\Delta > 0$ independente do α; temos:

$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4(1+\alpha)}}{2 \cdot 1}$

$r = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+|\alpha|}}{2}$

$r_1 = -1 + \sqrt{1+|\alpha|}$
$r_2 = -1 - \sqrt{1+|\alpha|}$

Então a solução Geral será:

$$\boxed{Y(t) = C_1 e^{(-1+\sqrt{1+|\alpha|})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{1+|\alpha|})t}}$$

4) $W(f \cdot g, f \cdot h) = f^2 W(g, h)$

$W = \begin{vmatrix} fg & fh \\ f'g + fg' & f'h + fh' \end{vmatrix} =$

$f \cdot g \cdot (f'h + fh') - f \cdot h \cdot (f'g + fg') =$

$fg \cdot f'h + f^2 g \cdot h' - fh \cdot f'g - f^2 h \cdot g' =$

$f^2 \cdot (g \cdot h' - h \cdot g') + (fg \cdot f'h - fh \cdot f'g) =$

DOM SEG TER QUA QUI SEX SÁB

$f^2 \cdot (g \cdot h' - h \cdot g') + f'(f \cdot g \cdot h - f \cdot g \cdot h) =$

$f^2 \cdot (g \cdot h' - h \cdot g')$

Como $W(g,h) = (g \cdot h' - h \cdot g')$ concluimos que:

$$\boxed{W(fg, fh) = f^2 W(g,h)}$$