Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

Engenharia de Computação 23/02/2017

Quarta avaliação de Lógica Matemática Professor Jânio Kléo

Aluno: Luis Filipe de Lima Sales Nota: 6,5

01. Mostre que as fórmulas $(\forall x)(\exists y)(P(x, y))$ e $(\exists y)(\forall x)(P(x, y))$ não são equivalentes.

1,5

02. Considere as relações binárias P e Q sobre o domínio U = {1, 2, 3, 4, 5}, cujos conjuntos-verdade são

2,0

$$V(P) = \{(1, 3), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5), (5, 5)\}$$

$$V(Q) = \{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 2)\}.$$

Determine $V(P \circ Q^{-1})$.

03. A relação P é dita ser *vazia* quando é verdadeira a fórmula $(\forall x)(\forall y)(\neg P(x, y))$. Pede-se:

(a) Mostre que se uma relação é vazia, então ela é simétrica e transitiva.

1,5

(b) Forneça um exemplo de uma relação não vazia P tal que $P \circ P$ seja vazia.

(b) Forneça um exemplo de uma relação não vazia que seja simétrica e transitiva, mas não reflexiva.

04. Considere a fórmula $\Psi = (\forall x)(\exists y)(Q(F(x, y), F(y, x))$ e o predicado $P(a, b, c)$ dado por "c é igual a $F(a, b)$". Escreva uma fórmula equivalente a Ψ que não contém funções em sua formação.

1,5

05. Dada $\Lambda = (\exists x)(P(x) \to (\forall y)(Q(x, y) \land \neg P(y)))$, escreva uma fórmula equivalente a Λ e que contém a menor quantidade possível de símbolos distintos em sua formação.

—

1) Primeiramente suponhamos que o domínio do predicado P seja $U = \{a_1, a_2\}$. Temos que para uma fórmula tal que $(\forall x)(P(x,y))$, terá sua interpretação como sendo: $[(P(a_1,y) \land P(a_2,y))]$. De maneira semelhante, para uma tal que $(\exists x)(P(x,y))$, sua interpretação será $[P(a_1,y) \lor (P(a_2,y))]$. Tendo isto em mente, $(\forall x)(\exists y)(P(x,y))$ pode ser expressa por:

$$(\forall x)(P(x,a_1) \lor P(x,a_2)) \Leftrightarrow ((P(a_1,a_1) \lor P(a_2,a_1)) \land (P(a_1,a_2) \lor P(a_2,a_2))$$

Interpretando $P(a_1,a_1)$ como um certo W, $P(a_1,a_2)$ como um certo U, $P(a_2,a_1)$ como um certo Z e $P(a_2,a_2)$ como um certo K, a fórmula anterior pode ser expressa por:

$$\boxed{(W \lor Z) \land (U \lor K)}$$

Da mesma maneira, a fórmula $(\exists y)(\forall x)(P(x,y))$ pode ser expressa por:

$$(\exists y)(P(a_1,y) \land P(a_2,y)) \Leftrightarrow$$

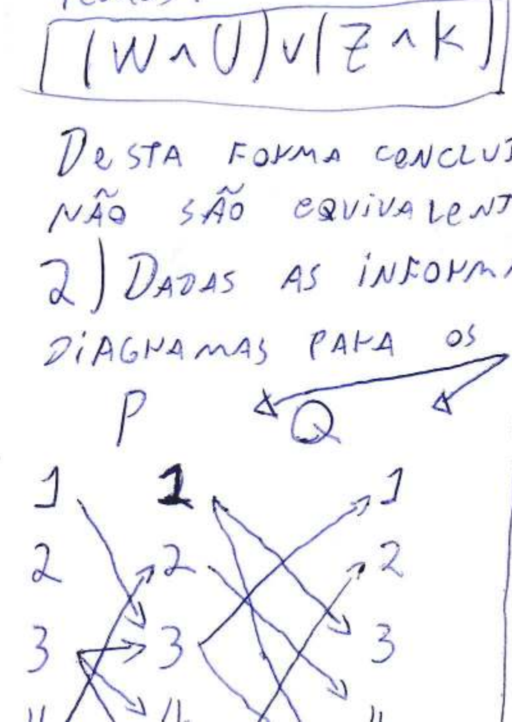
$$\Leftrightarrow (P(a_1,a_1) \land P(a_1,a_2)) \lor (P(a_2,a_1) \land P(a_2,a_2))$$

Seguindo a mesma interpretação anterior para o predicado P, temos:

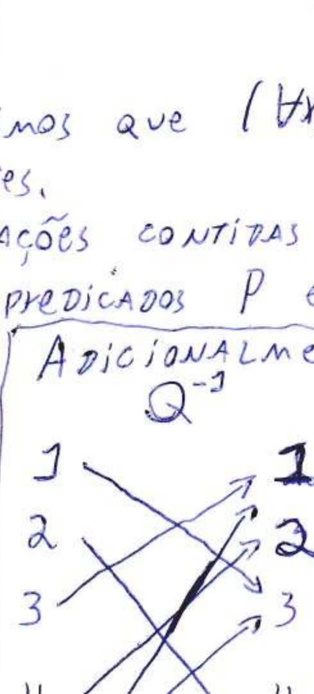
$$\boxed{(W \land U) \lor (Z \land K)}$$

Desta forma concluímos que $(\forall x)(\exists y)(P(x,y))$ e $(\exists y)(\forall x)(P(x,y))$ não são equivalentes.

2) Dadas as informações contidas no enunciado, podemos traçar diagramas para os predicados P e Q:

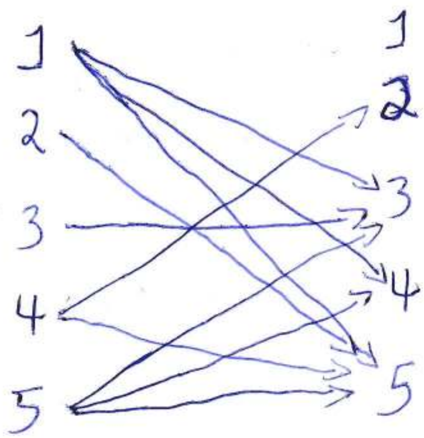


Adicionalmente, para Q^{-1}



Desta forma, para $P \circ Q^{-1}$ teremos:

$P \circ Q^{-1}$

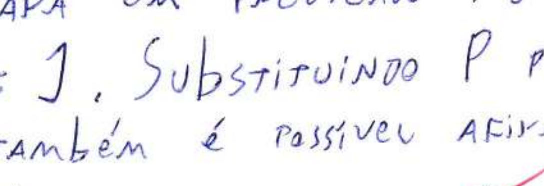


Assim, podemos afirmar que:

$V(P \circ Q^{-1}) = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,5),(3,3),(4,2),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$

3) a) Temos que para um predicado ser simétrico, $[[(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge P(y,x))]] = 1$. Assim, considerando que numa relação vazia $[[(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y))]] = 1$, e levando-se em conta as regras de interpretação de quantificadores, podemos também afirmar que $[[(\forall x)(\forall y)(\neg P(y,x))]] = 1$. Desta forma podemos definir um predicado Q tal que $[[(\forall x)(\forall y)(\neg P(x,y)]] = [[(\forall x)(\forall y)(Q(x,y))]] = 1$, portanto, com todas essas considerações podemos concluir que $[[(\forall x)(\forall y)(Q(x,y) \wedge Q(y,x))]] = 1$. Da mesma forma, temos que para um predicado seja transitivo, $[[(\exists x)(\exists y)(\exists z)(P(x,y) \wedge P(y,z) \Leftrightarrow P(x,z)]] = 1$. Substituindo P pelo Q que obtivemos anteriormente, também é possível afirmar que $[[(\exists x)(\exists y)(\exists z)(Q(x,y) \wedge Q(y,z) \Leftrightarrow P(x,z))]] = 1$.

b) Para um predicado P cujo domínio seja $U = \{1,2\}$ e cujo conjunto verdade seja $V(P) = \{(1,2)\}$, temos o seguinte diagrama para P e $P \circ P$:

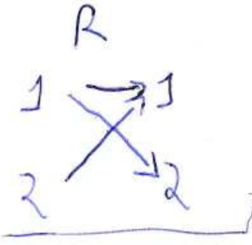


Logo, neste caso, $P \circ P$ é uma relação vazia.

3) CONTINUAÇÃO

c) ~~PARA O MESMO CASO APRESENTADO NO ITEM 'b', E LEVANDO-SE EM~~

PARA UM PREDICADO R CUJO DOMÍNIO É $U_2 = \{1, 2\}$ E CUJO CONJUNTO VERDADE É $V(R) = \{(1,2), (2,1), (1,1)\}$ TEMOS O SEGUINTE DIAGRAMA:



OBSERVAMOS QUE TRATA-SE DE UMA RELAÇÃO SIMÉTRICA POIS $[R(1,2) \wedge R(2,1)] = 1$, TRANSITIVA POIS $[R(1,2) \wedge R(2,1) \Leftrightarrow R(1,1)] = 1$, PORÉM NÃO É SIMÉTRICA, POIS $[R(2,2)] = 0$.

4) CONSIDERANDO $F(x,y)$ COMO UM CERTO Z E $F(y,x)$ COMO UM CERTO K, PODEMOS ESCREVER:

$$(\forall x)(\exists y)\ (P(x,y,z) \wedge P(y,x,k) \wedge Q(z,k)) \Leftrightarrow \psi$$

Faltou quantificador para z e k.

5) CONSIDERANDO $P(x)$, $Q(x,y)$ E $\neg P(y)$ COMO SENDO OS PREDICADOS DE ARIDADE 0, RESPECTIVAMENTE ~~EQUIVALENTES AOS MESMOS~~, RESPECTIVAMENTE Y, Z, K, PODEMOS REESCREVER A FÓRMULA Λ COMO: $Y \rightarrow (Z \wedge K)$, DISPENSANDO O USO DE QUANTIFICADORES, VISTO NÃO POSSUIR VARIÁVEIS. ESTA FÓRMULA É A FÓRMULA ψ, TAL QUE $\psi \Leftrightarrow \Lambda$.