INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CEARÁ
Campus Fortaleza

Departamento de Física e Matemática - Defimat
Professor: Roberto Carlos Feitosa
Avaliação Parcial 3 - Cálculo I
Aluno(a) ____________ Nota 10,0

muito bem!

Questões:

1. Estude a continuidade de $f(x) = \begin{cases} x^3 + 4x^2 + x \text{ se } x \leq 0 \\ x^2 + x - 4x \text{ se } x > 0 \end{cases}$. *(4 escores)*

2. Calcule as seguintes derivadas indicadas: *(3 escores cada)*
   a) $y = \log x \,.\, \sin x, \frac{dy}{dx};$
   b) $y = x^{55} + 2^x + \cos x, \frac{d^{54}y}{dx^{54}};$
   c) $y = \sin^2\left(\sec\sqrt[5]{x^2 - 2^x}\right), \frac{dy}{dx}$

3. Encontre uma equação da reta tangente à curva $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ no ponto de abscissa $x = 2$. *(4 escores)*

4. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em uma circunferência de raio r. *(4 escores)*

Observações:

1- *utilize caneta de cor azul ou preta. Questões resolvidas com o uso de lápis não serão consideradas;*
2- *não escreva na folha de frente da prova;*
3- *resolva as questões na sequência apresentada.*

Escores:

1. 4
2. a) 3 b) 3 c) 3
3. 4
4. 4

Total de escores: 21

Boa Prova!

1) Para $x > 0$, $f(x) = x^3 + 4x^2 + x$ é polinomial. Por conta disso, $f(x)$ é contínua para $x > 0$, x

Para $x < 0$, $f(x) = x^2 + x - 4$ é polinomial. Por conta disso, $f(x)$ é contínua para $x < 0$, $x \in$

Resta analisar a continuidade de $f(x)$ para $x = 0$.

Para $f(x)$ contínua em 0

i) $\exists f(0)$?

$f(0) = 0$ ✓

ii) $\exists \lim_{x \to 0} f(x)$?

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^3 + 4\,0^2 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0^2 + 0 - 4 = -4$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$ X

Como não existe limite para $x \to 0$, $f(x)$ é descontínua em $x = 0$

$f(x)$ { contínua para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. //

Contínua para todo real não nulo

a) $Y = (\log x) \cdot \sin x$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d}{dx}(\log(x) \cdot \sin x) \Rightarrow \frac{dY}{dx} = \log'(x) \cdot \sin x + \log(x) \cdot (\sin' x) = \frac{1}{x \ln 10} \cdot \sin x + \log(x) \cdot (\cos x)$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\sin x}{x \cdot \ln 10} + \log(x) \cdot \cos x$$

//

b) $$\frac{d^{54}Y}{dx^{54}} = \frac{d^{54}}{dx^{54}}\left(x^{55} + 2^x + \cos x\right) \Rightarrow \frac{d^{54}Y}{dx^{54}} = \underset{(i)}{(x^{55})^{(54)}} + \underset{(ii)}{(2^x)^{(54)}} + \underset{(iii)}{(\cos x)^{(54)}}$$

i) $(x^{55})^{(54)}$

$(x^{55})' = 55 \cdot x^{54}$

$(x^{55})'' = 55 \cdot 54 \cdot x^{53}$

$(x^{55})''' = 55 \cdot 54 \cdot 53 \cdot x^{52}$

...

$(x^{55})^{(54)} = 55 \cdot 54 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot x = 55!\, x$

ii) $(2^x)^{(54)}$

$(2^x)' = 2^x \ln 2$

$(2^x)'' = (2^x \ln 2) \ln 2$

$(2^x)''' = (2^x \ln 2) \ln^2 2$

...

$(2^x)^{(54)} = 2^x \cdot (\ln 2)^{54}$

iii) $(\cos x)^{(54)}$

Repetição

$(\cos x)' = -\sin x$ — $n \equiv 1 \pmod 4$

$(\cos x)'' = -\cos x$ — $n \equiv 2 \pmod 4$

$(\cos x)''' = \sin x$ — $n \equiv 3 \pmod 4$

$(\cos x)^{IV} = \cos x$ — $n \equiv 0 \pmod 4$

$(\cos x)^{V} = -\sin x$

$\Rightarrow (\cos x)^{(54)}$, $54 \equiv 2 \pmod 4$

$\Rightarrow (\cos x)^{(54)} = -\cos x$

$$\frac{d^{54}Y}{dx^{54}} = (i) + (ii) + (iii) = 55!\, x + 2^x (\ln 2)^{54} - \cos x$$

//

c) $Y = \sin^2\left(\sec \sqrt[5]{x^2 - 2^x}\right)$

$$\begin{cases} Y = t_1^2 \\ t_1 = \sin t_2 \\ t_2 = \sec t_3 \\ t_3 = t_4^{1/5} \\ t_4 = x^2 - 2^x \end{cases}$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{dY}{dx} = \underbrace{2 \cdot \sin\left(\sec \sqrt[5]{x^2 - 2^x}\right)}_{\frac{dY}{dt_1}} \cdot \underbrace{\left(\cos\left(\sec \sqrt[5]{x^5 - 2^x}\right)\right)}_{\frac{dt_1}{dt_2}} \cdot \underbrace{(-)\, tg\left(\sqrt[5]{x^2 - 2^x}\right) \cdot \sec\left(\sqrt[5]{x^2 - 2^x}\right)}_{\frac{dt_2}{dt_3}} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\frac{1}{5}\left(x^2 - 2^x\right)^{-\frac{4}{5}}}_{\frac{dt_3}{dt_4}} \cdot \underbrace{\left(2x - 2^x \ln 2\right)}_{\frac{dt_4}{dx}}$$

//

3) Derivamos $f(x)$ para encontrar m_t

$$f'(x) = \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)' = (x^2)' + \left(\frac{2}{x}\right)' = 2x - 2\frac{1}{x^2} = 2\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$$

Para $x = 2$, $m_t = 2\left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{2}$

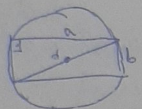
reta t: $m_t = \frac{7}{2}$, $\underset{(2,5)}{\underbrace{(2, f(2))}} \in m_t$

$$\Rightarrow m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-y}{2-x} \Rightarrow 7 - \frac{7x}{2} = 5 - y \Rightarrow y - \frac{7x}{2} + 2 = 0$$

$t: y - \frac{7}{2}x + 2 = 0$ //

$t: -\frac{7}{2}x + y + 2 = 0$ //

4) Observe que $2R = d$, sendo d a diagonal do retângulo



Por pitágoras, $a^2 + b^2 = d^2 = 4R^2$

i) $a^2 + b^2 = 4R^2$, onde $a, b \in [0, 2R]$

$A(\square) = a \cdot b = A(a,b)$

Observe em i

$$a^2 + b^2 = 4R^2 \Rightarrow b^2 = 4R^2 - a^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{4R^2 - a^2} \xRightarrow{b \text{ é uma distância, } b \geq 0} b = \sqrt{4R^2 - a^2}$$

Assim escrevemos

$$A(a) = a \cdot \sqrt{4R^2 - a^2}.$$

$$A'(a) = \left(a \cdot \sqrt{4R^2 - a^2}\right)' = \sqrt{4R^2 - a^2} + a \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4R^2 - a^2}} \cdot (-2a) = \frac{4R^2 - a^2 - a^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}} = \frac{4R^2 - 2a^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$$

$$\begin{cases} \nexists A'(a) \Rightarrow 4R^2 - a^2 \leq 0 \Rightarrow 4R^2 \leq a^2 \Rightarrow |a| \geq 2R \Rightarrow |a| \geq 2R \cap [0, 2R] \Rightarrow a \in \{2R\} \\ A'(a) = 0 \Rightarrow \dfrac{4R^2 - 2a^2}{\sqrt{4R^2 - a^2}} = 0 \xRightarrow{\sqrt{4R^2 - a^2} \neq 0} 4R^2 - 2a^2 = 0 \Rightarrow 4R^2 = 2a^2 \Rightarrow 2R^2 = a^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}R \end{cases}$$

$\hookrightarrow a = R\sqrt{2}$

$a \in [0, 2R]$

Testes dos extremos e dos números críticos

$A(0) = 0 \cdot \sqrt{4R^2 - 0} = 0$

$A(2R) = 2R \cdot \sqrt{4R^2 - (2R)^2} = 2R \cdot \sqrt{4R^2 - 4R^2} = 2R \cdot 0 = 0$

como é área, utilizaremos a raiz positiva

$A(R\sqrt{2}) = R\sqrt{2} \cdot \sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2} = R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2} = 2R^2$ //

Área máxima $= 2R^2$, com $a = b = \sqrt{2}R$. //