Aula 30-08-22
Prova dia 20/09
Finalizado o conteúdo de filtros

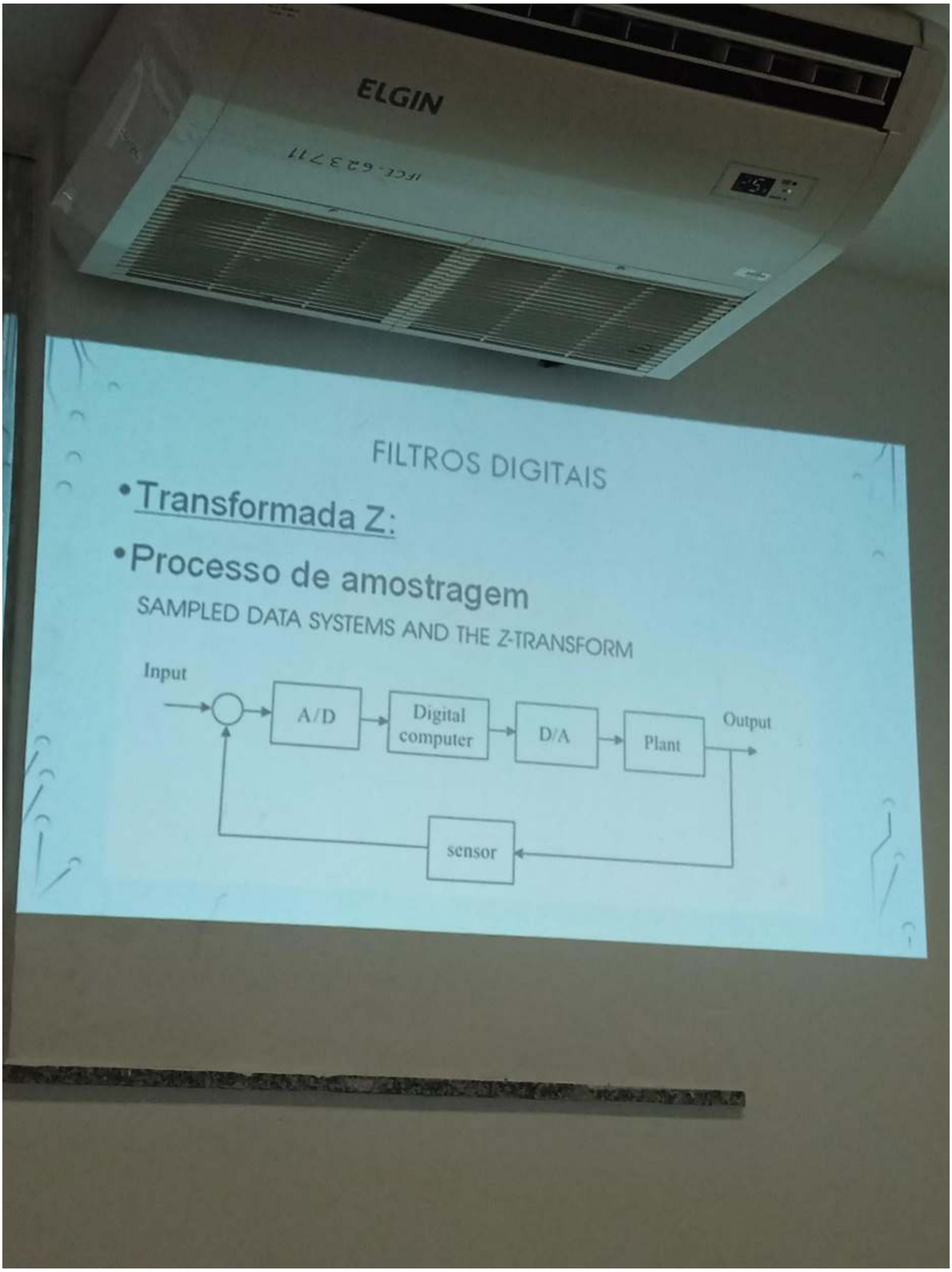
Transformada Z

Conceito

FILTROS DIGITAIS

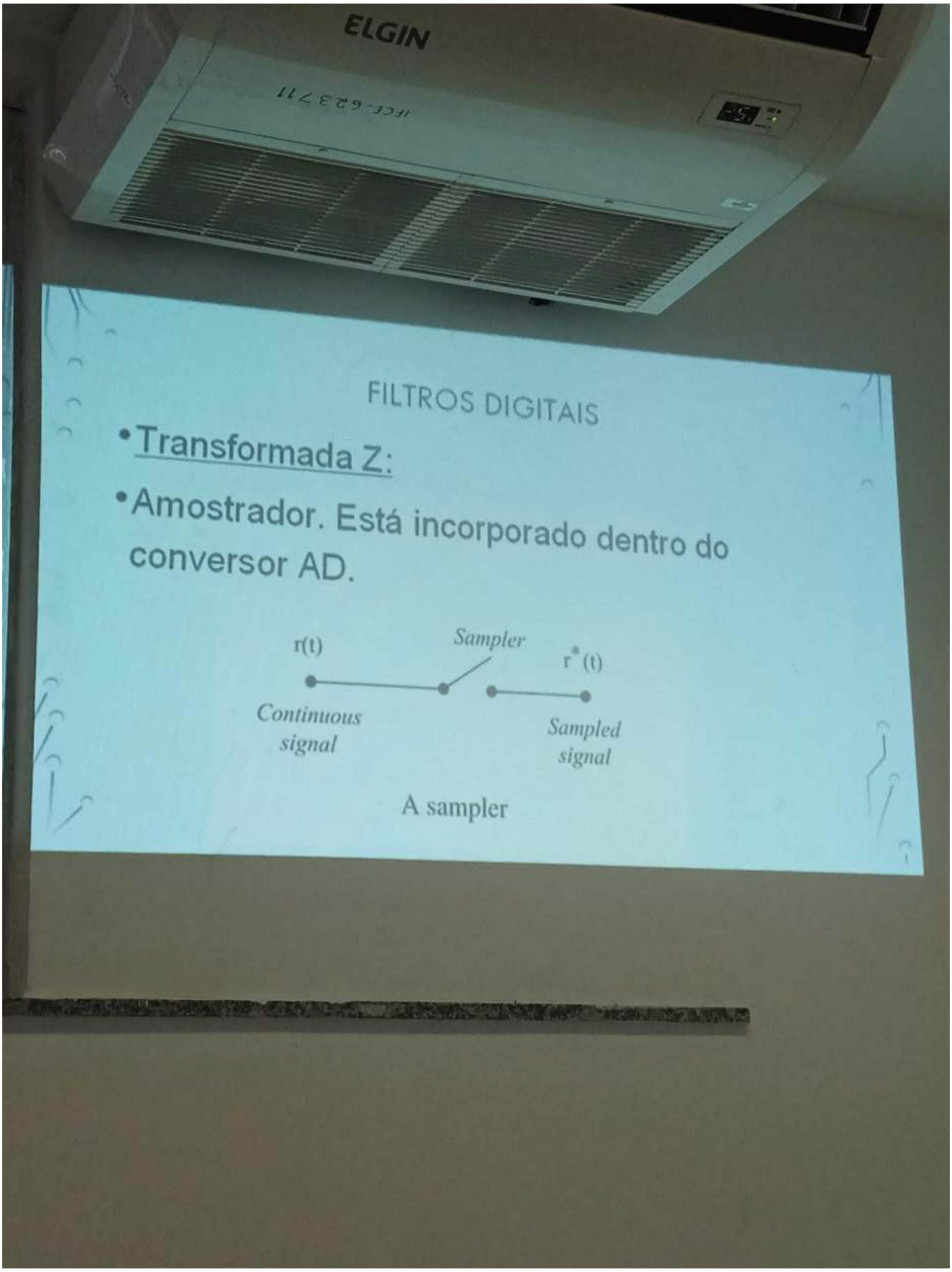
- Transformada Z:
- Muito utilizada em sistemas de tempo discreto.
- Utilizada para representar uma função em domínio do tempo ou da frequência no plano Z.
- Para explicar a transformada Z, iremos começar explicando o processo de amostragem.

Processo



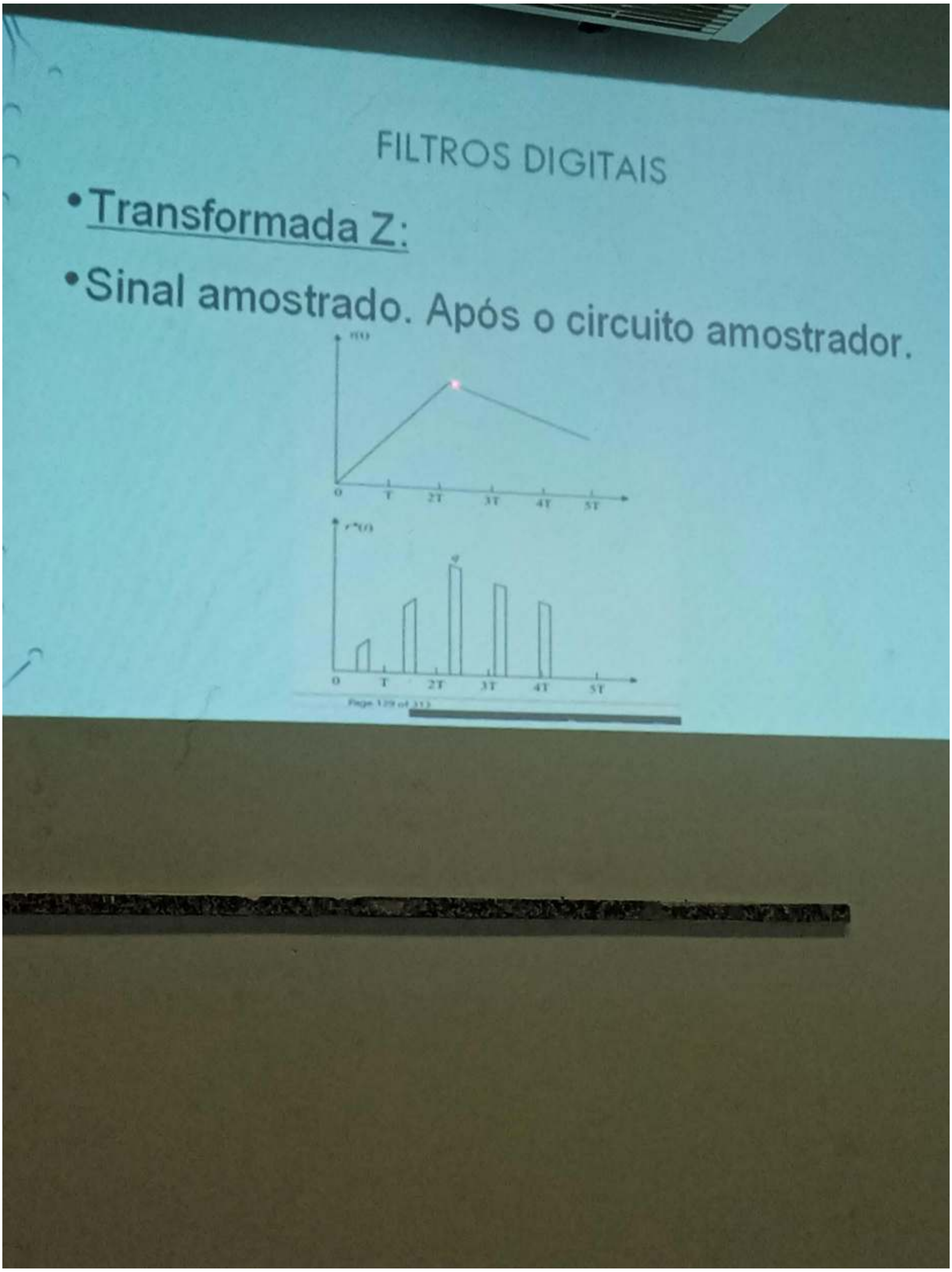
Obs: no mármore, está escrito Sensor

Sobre o amostrador da transformada Z



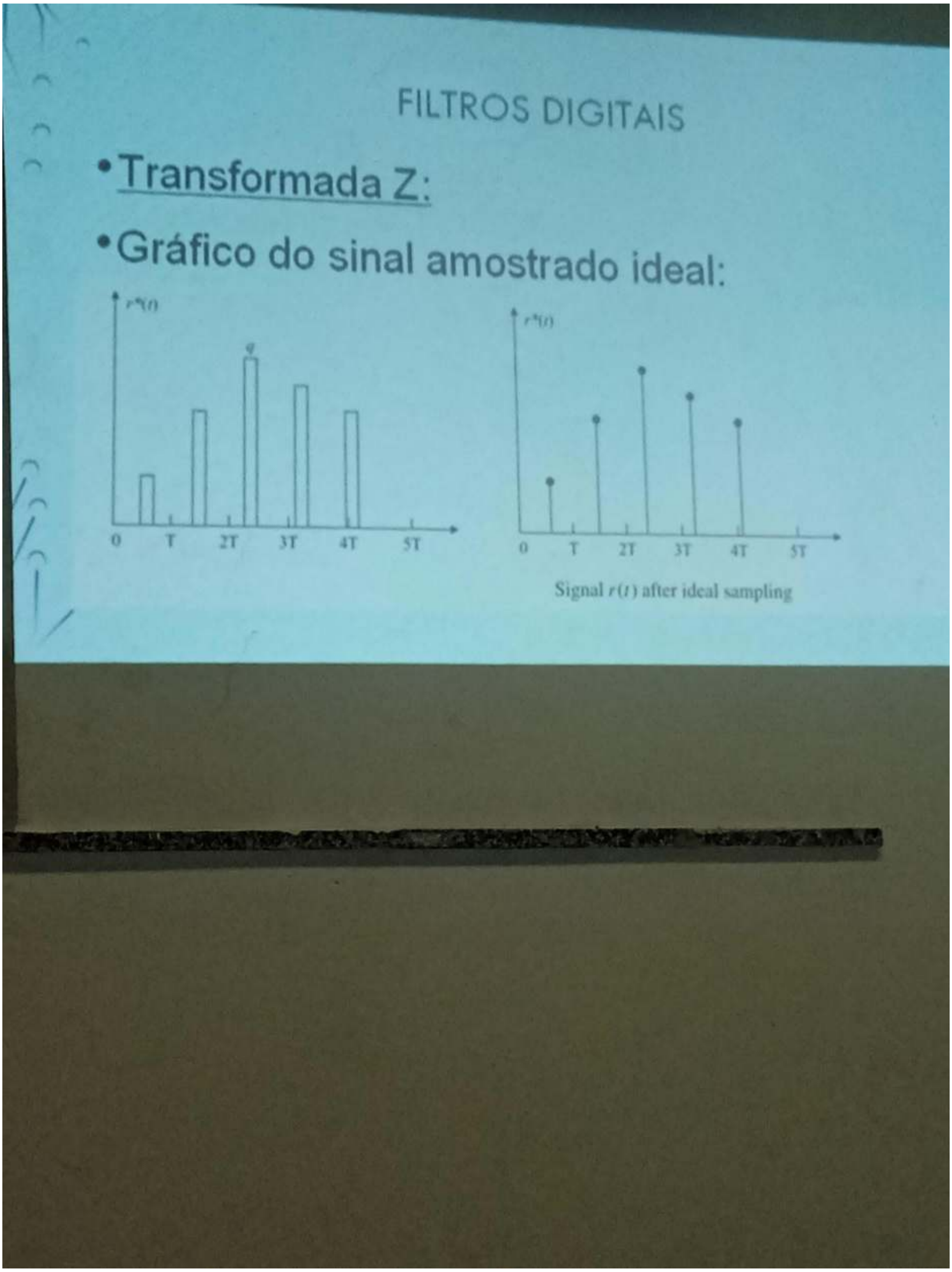
O Amostrador comuta um sinal periodicamente .

Exemplo de um sinal amostrado

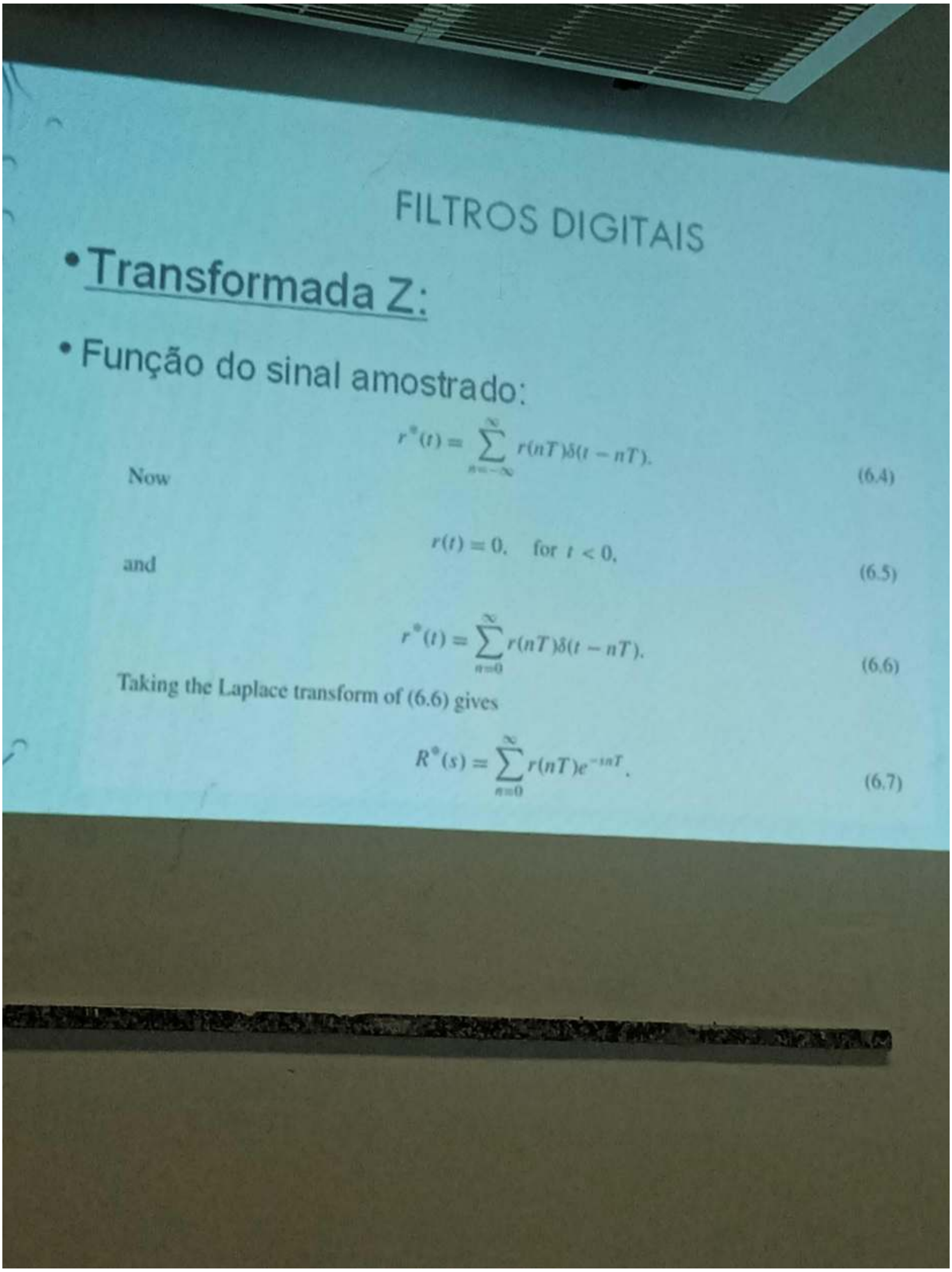


No eixo y é um período de tempo T

Exemplo de um gráfico de um sinal amostrado e na direita um gráfico de um sinal amostrado ideal



Função do sinal amostrado



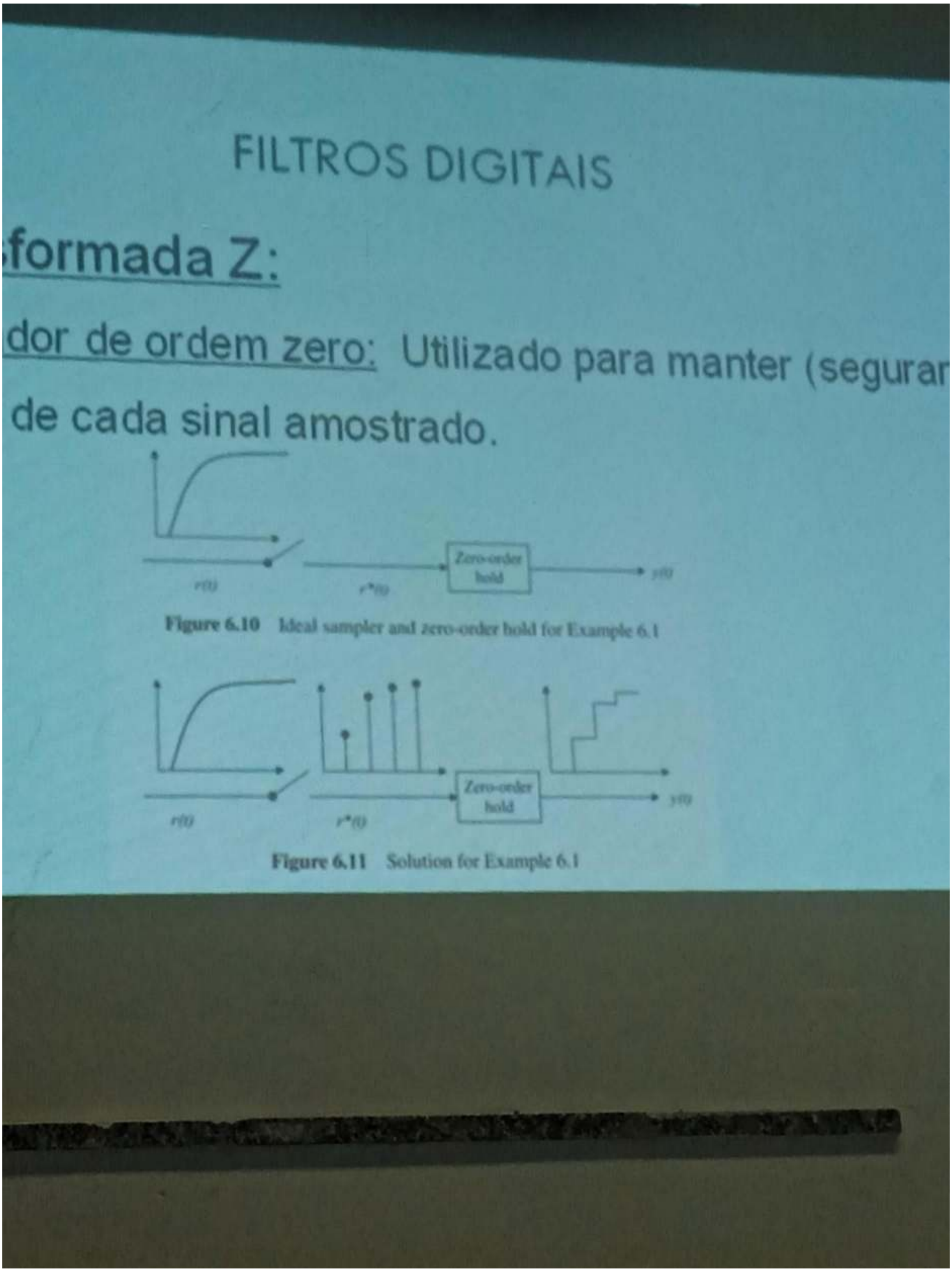
Sigma=> Delta de Dirac
Aplicando Laplace ao delta de Dirac

$$L[\delta[t-nT]] = e^{-snt}$$

t => é o tempo de amostragem

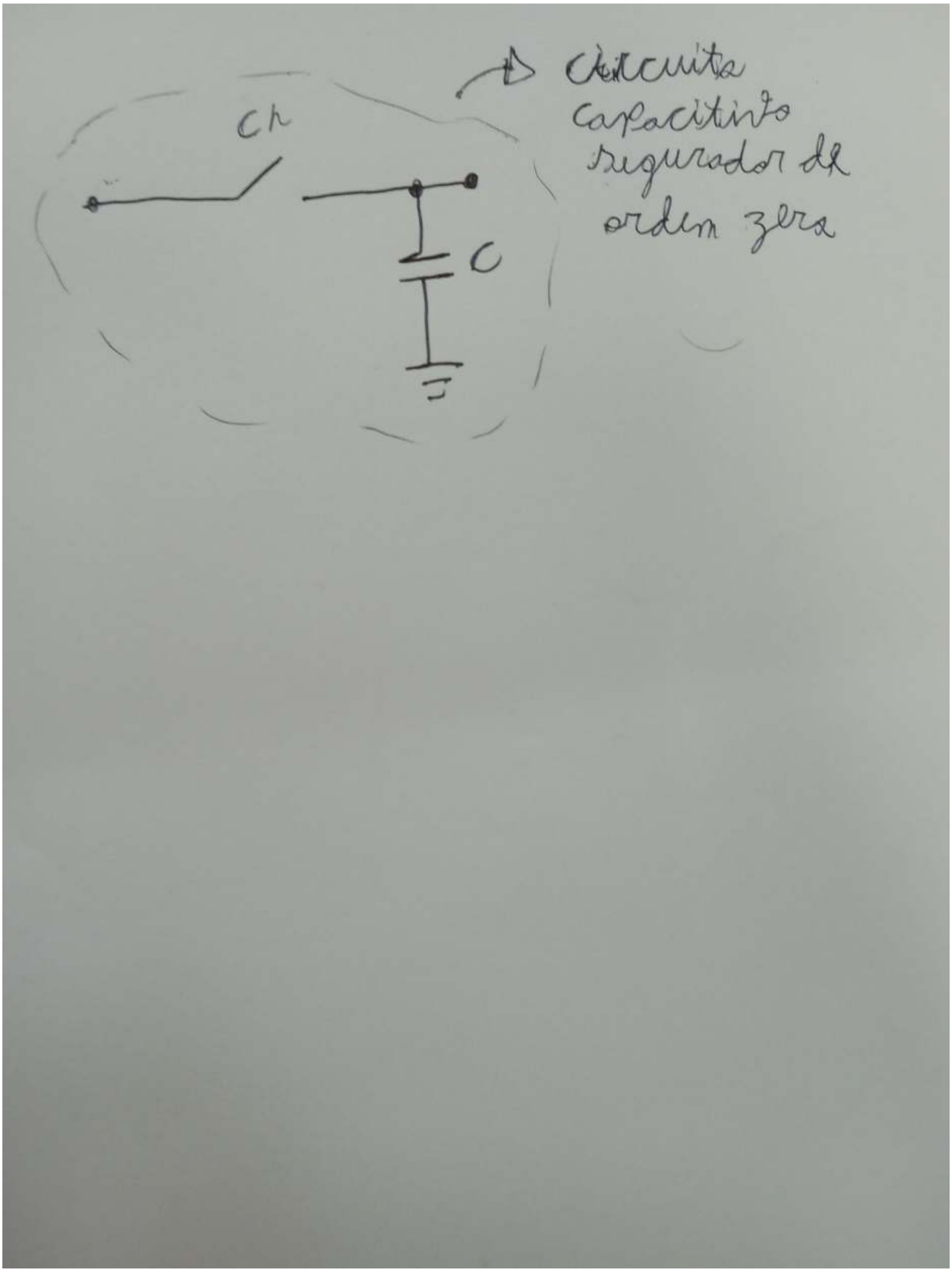
Segurador de ordem zero:

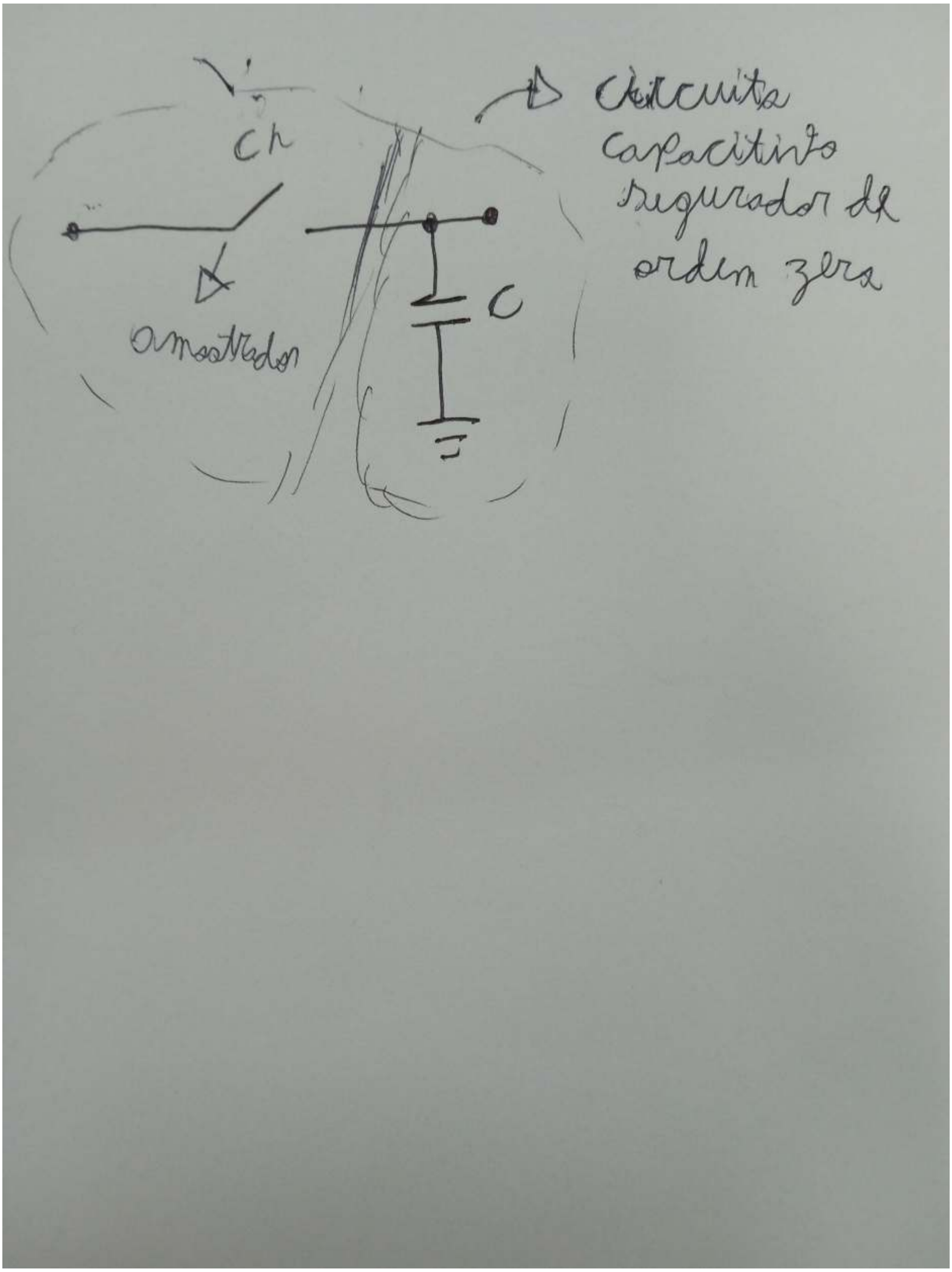
É utilizado para manter(ou segurar) o valor de cada sinal amostrado



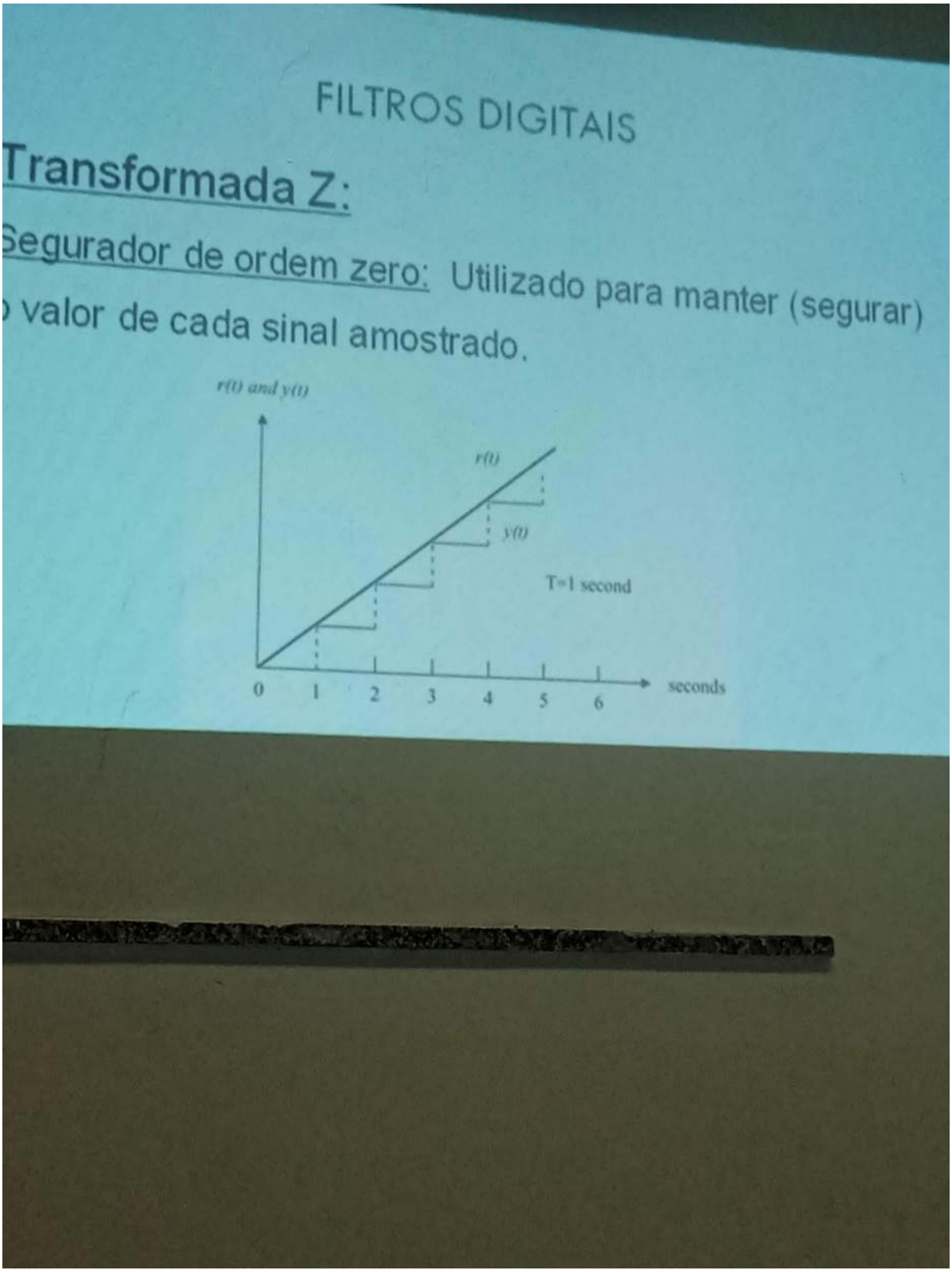
Zero-order hold => Segurador de ordem zero

É um circuito capacitivo




Ch
amostrador
C
Circuito
capacitivo
segurador de
ordem zero

Gráfico



r(t)
y(t)
T= 1 second

Encontrando a transformada Z

FILTROS DIGITAIS

- **Transformada Z:**
- Encontrando a transformada Z:

THE z-TRANSFORM

The z-transform is defined so

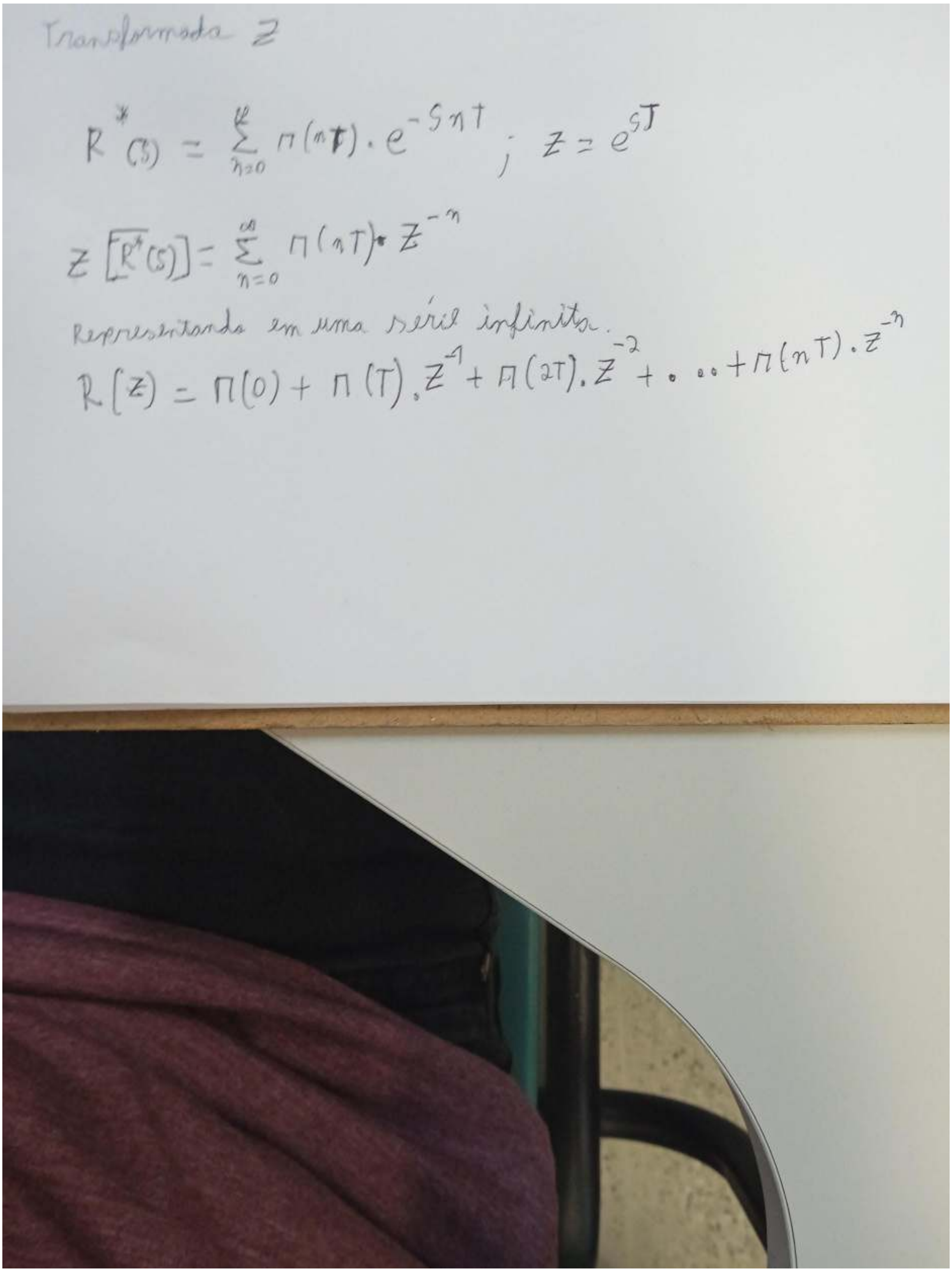
$$Z = e^{sT};$$

$Z[r(t)] = R(z)$ which, from (6.7), is given by

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)z^{-n}.$$

the z-transform consists of an infinite series in the complex variable z, and

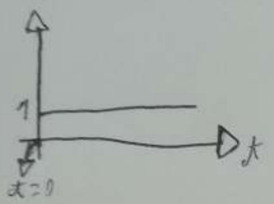
$$R(z) = r(0) + r(T)z^{-1} + r(2T)z^{-2} + r(3T)z^{-3} + \dots.$$



Transformada Z para a função degrau unitário

$$\bullet\ R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT).z^{-n} \Rightarrow r(0) + r(T).z^{-1} + r(2T).z^{-2} + \dots + r(nT).z^{-n}$$

• Função degrau unitário



$$\begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

I) $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT).z^{-n}$

$$R(z) = 1.z^{-0} + 1.z^{-1} + 1.z^{-2} + \dots + 1.z^{-n}$$

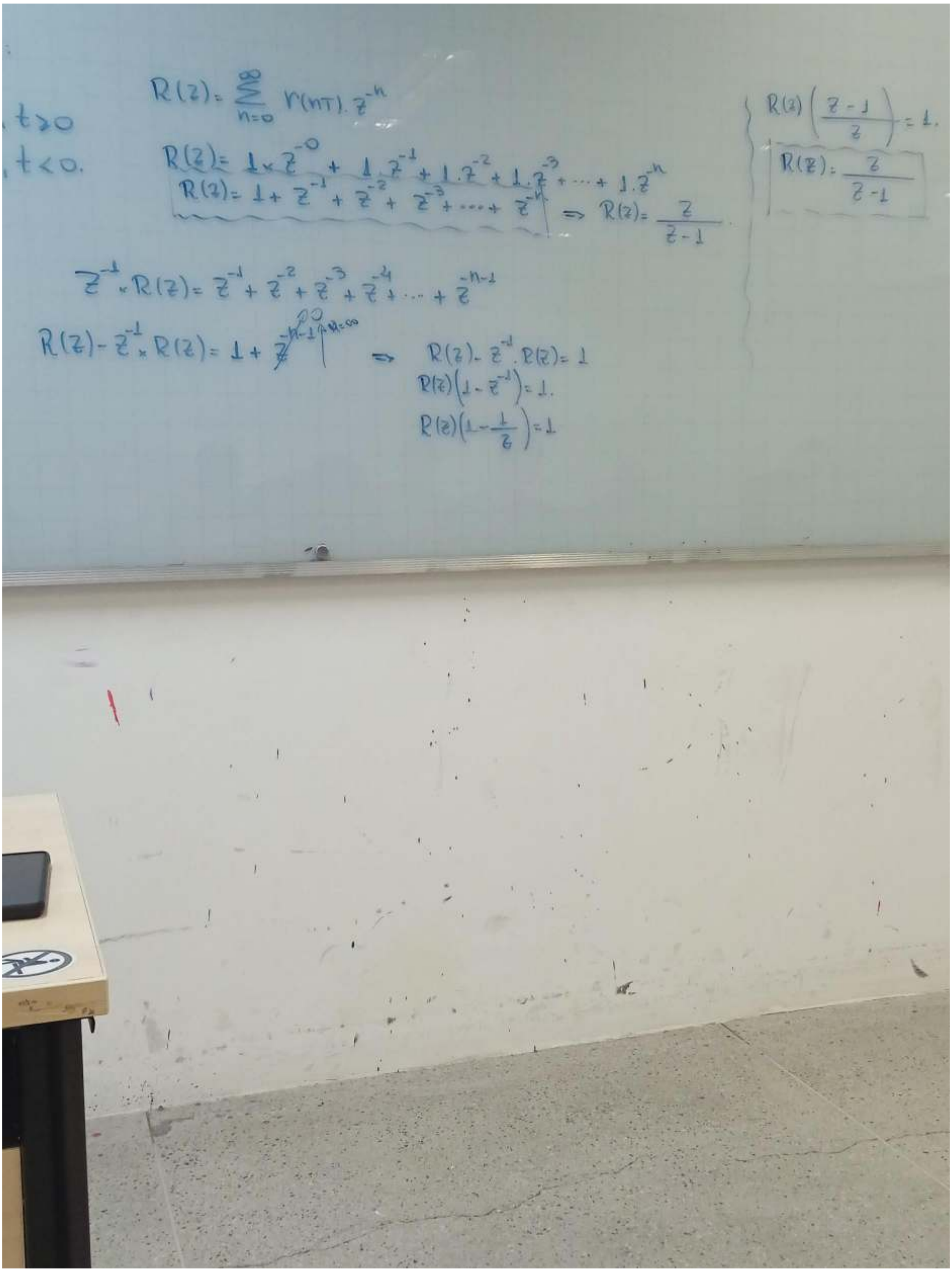
$$R(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n}$$ → Série infinita

ou

$$\boxed{R(z) = \frac{z}{z-1}}$$ → Forma Reduzida.

Série infinita só serve para tirar a representação, enquanto a forma reduzida é utilizado para fins de cálculo

Exemplo de demonstração de uma série Infinita para uma forma reduzida



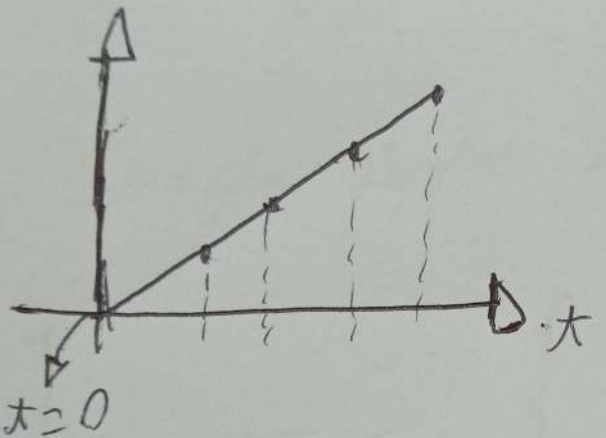
Obs: n=infinito

Função Rampa(transformada Z)

Anotação do professor

30/08/22

- Função Rampa (Transformada Z)



$$\begin{cases} 0, & t < 0 \\ nT, & t \geq 0 \end{cases}$$

Anotação do professor

$z^{-n} \Rightarrow r(0) + r(T).z^{-1} + r(2T).z^{-2} + \dots + r(nT).z^{-n}.$

ADA z):

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT).z^{-n}$$

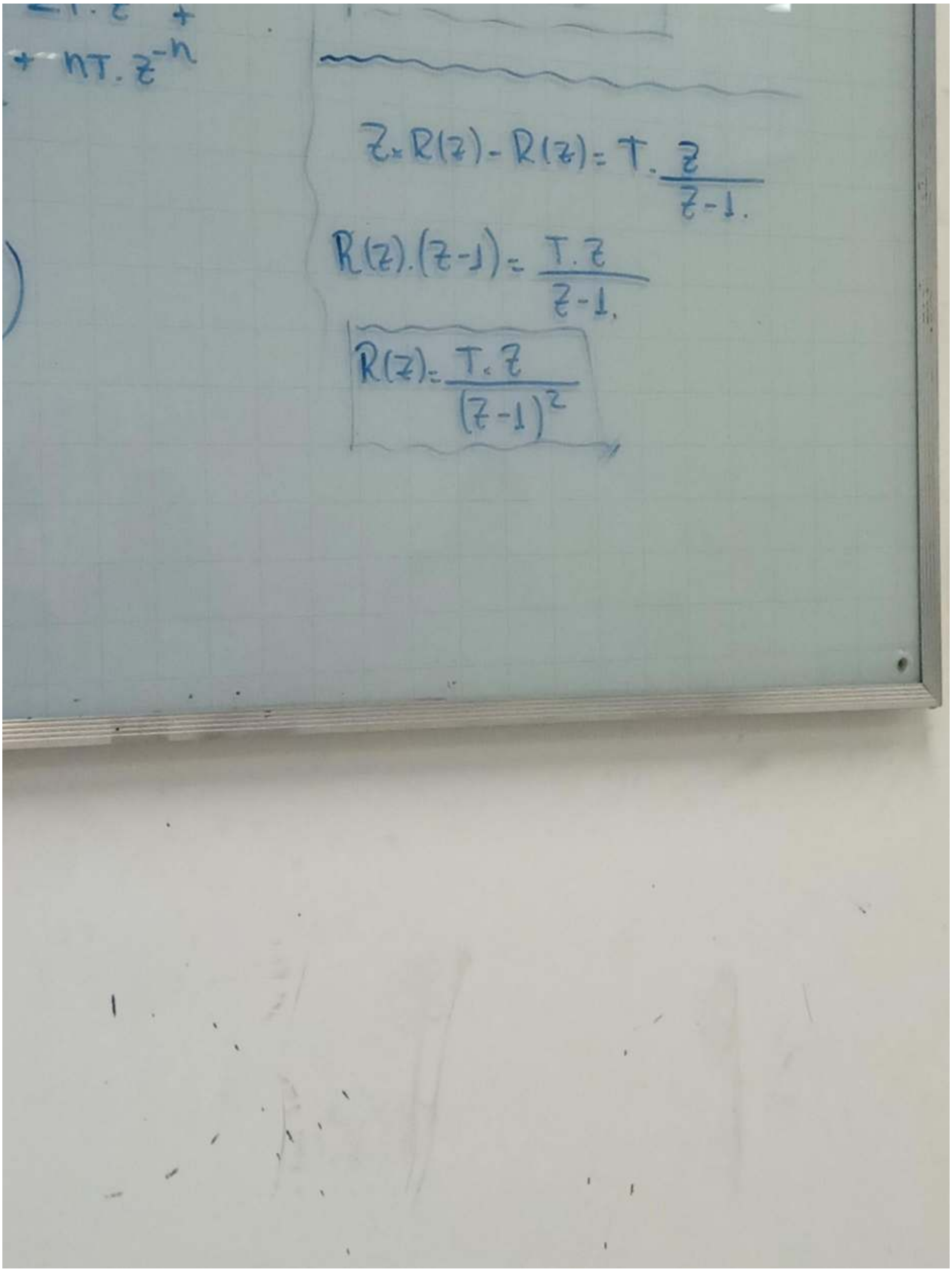
$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nT.z^{-n} \Rightarrow R(z) = 0.T.z^{-0} + T.z^{-1} + 2T.z^{-2} + 3T.z^{-3} + 4T.z^{-4} + \dots + nT.z^{-n}$$

$$R(z) = T.z^{-1} + 2T.z^{-2} + 3.T.z^{-3} + \dots + nT.z^{-n}$$

$$\boxed{R(z) = T.\left(z^{-1} + 2.z^{-2} + 3.z^{-3} + \dots + n.z^{-n}\right)}$$

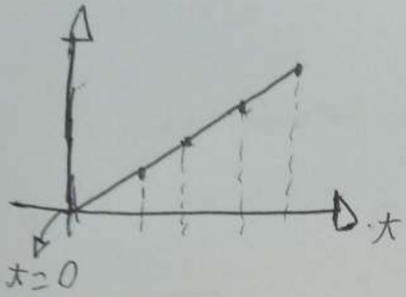
$$z.R(z) = T.\left(1 + 2.z^{-1} + 3.z^{-2} + 4.z^{-3} + \dots + n.z^{-n+1}\right)$$

$$z.R(z) - R(z) = \left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-n}\right).T$$



Anotação do Cristiano

• Função Rampa (Transformada Z)



$$\begin{cases} 0, & t < 0 \\ nT, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$R(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT) \cdot Z^{-n}$$

$$R(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} nT \cdot Z^{-n}$$

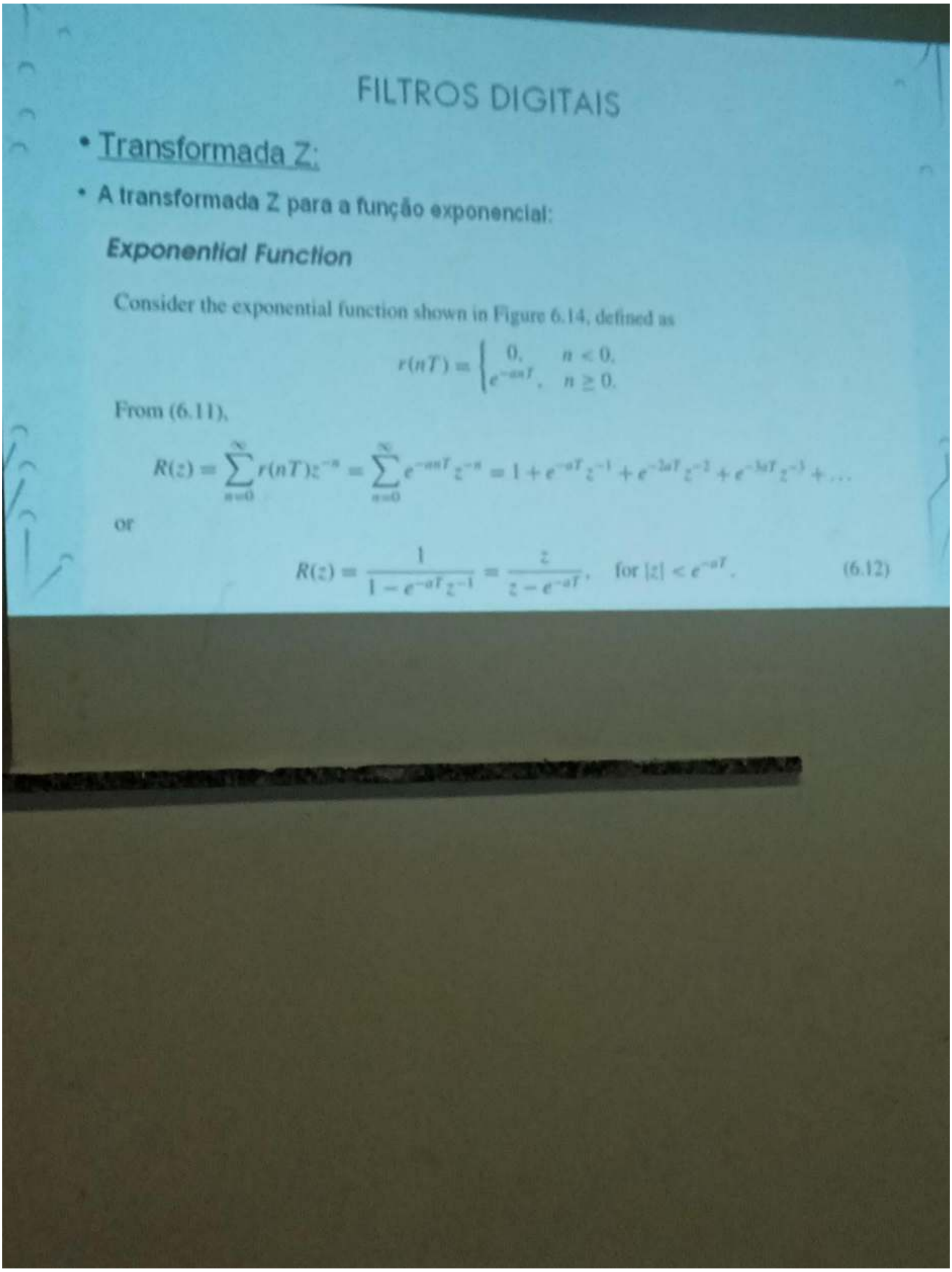
$$R(Z) = \cancel{0T \cdot Z^{-0}} + T Z^{-1} + 2T \cdot Z^{-2} + \ldots + nT \cdot Z^{-n}$$

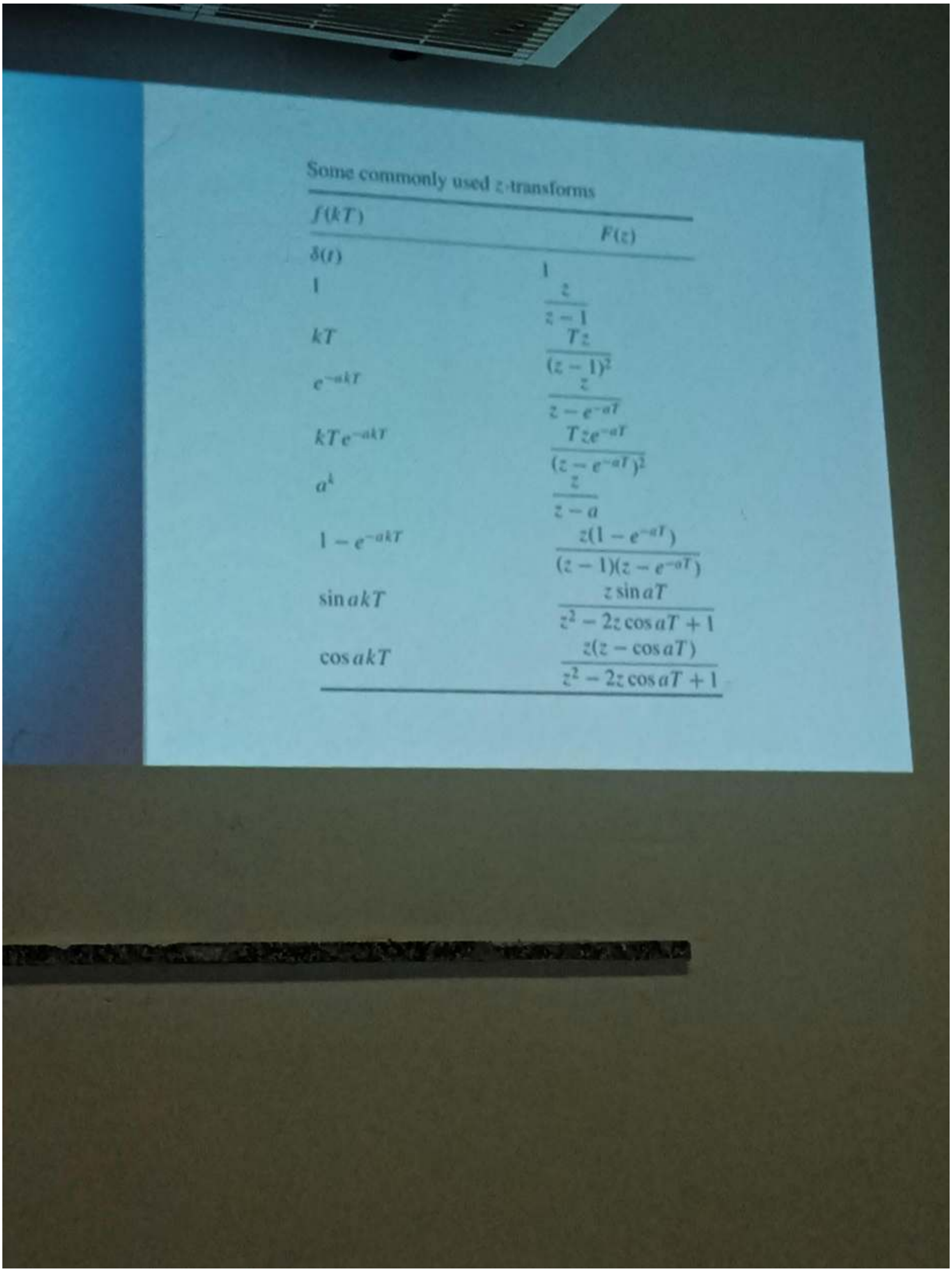
$$\boxed{R(Z) = T \cdot (Z^{-1} + 2 \cdot Z^{-2} + 3Z^{-3} + \ldots + nZ^{-n})}$$ → Série infinita

ou

$$\boxed{R(Z) = \frac{T \cdot Z}{(Z-1)^2}}$$ → Forma Reduzida (Função Rampa).

Transformada. Z para função exponencia





Some commonly used z-transforms

$f(kT)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1
1	$\frac{z}{z-1}$
kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin akT$	$\frac{z\sin aT}{z^2-2z\cos aT+1}$
$\cos akT$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z\cos aT+1}$

Funções em tempo discreto

Exemplo

• Lembrete •

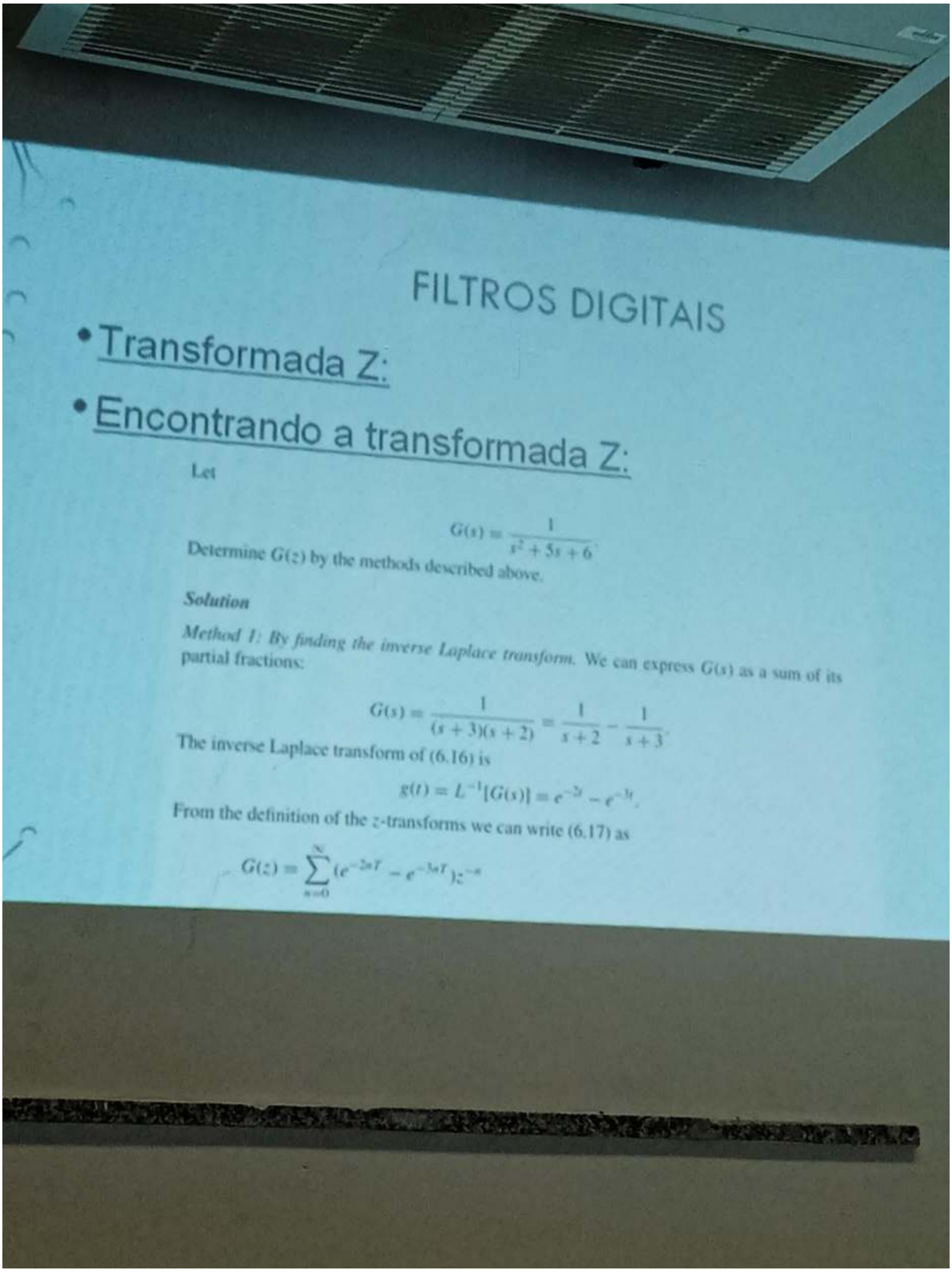
Função Exponencial

$$e^{-at} \underset{L}{\Rightarrow} \frac{1}{s+a} \underset{Z}{\Rightarrow} \frac{z}{z-e^{-aT}} \underset{Z^{-1}}{\Rightarrow} e^{-anT} \;//$$

Transformada Z

Transformada Inversa de Z

Ex



Exemplo G(s)
Aplicar a transformada Z na seguinte função de transferência:

Anotação do professor

APLICAR A TRANSFORMADA Z NA SEGUINTE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA.

$$G(s) = \frac{1}{s^2+5s+6} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+2).(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

$$\frac{\cancel{s+2}}{(\cancel{s+2}).(s+3)} = \frac{A.(\cancel{s+2})}{\cancel{s+2}} + \overset{0}{\cancel{\frac{B.(s+2)}{s+3}}}\Bigg|_{s=-2}$$

$$A = \frac{1}{s+3}\Bigg|_{s=-2} \Rightarrow \boxed{A=1}$$

e^{-at}

$$\frac{\cancel{S}+3}{(S+2).(\cancel{S+3})} = \frac{A.(\cancel{S+3})}{\cancel{S+2}} + \frac{B.(\cancel{S+3})}{\cancel{S+3}} \Bigg|_{S=-}$$

$$B = \frac{1}{S+2}\Bigg|_{S=-3}$$

$$\boxed{B = -1}$$

$$G(S) = \frac{A}{S+2} + \frac{B}{S+3}$$

$$G(S) = \frac{1}{S+2} - \frac{1}{S+3}$$

$$\frac{(\cancel{s+3})}{\cancel{s+3}}\Bigg|_{s=-3}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{z}{z-e^{-2T}} - \frac{z}{z-e^{-3T}}}$$

$$G(z) = \frac{z.(z-e^{-3T}) - z.(z-e^{-2T})}{(z-e^{-2T}).(z-e^{-3T})}$$

$$G(z) = \frac{\cancel{z^2} - ze^{-3T} - \cancel{z^2} + z.e^{-2T}}{(z-e^{-2T}).(z-e^{-3T})}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{z(-e^{-3T} + e^{-2T})}{(z-e^{-2T}).(z-e^{-3T})}}$$

Anotação do Cristiano

$$e^{-at} \underset{L}{\Rightarrow} \frac{1}{s+a} \underset{Z}{\Rightarrow} \frac{z}{z-e^{-aT}} \underset{Z^{-1}}{\Rightarrow} e^{-anT} //$$

Transformada Z

Transformada Inversa de Z

Exemplo

⇒ Aplicar a Transformada Z na seguinte Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}$$ → Aplicando soma e produto (Ensino médio) ⇒

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+2)\cdot(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

I) $A = ?\ ;\ \times(s+2)$

$$\frac{\cancel{s+2}}{\cancel{(s+2)}\cdot(s+3)} = \frac{A\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}} + \frac{B(\cancel{s+2})^{0}}{(s+3)}\Bigg|^{s=-2}$$

$$\boxed{A=1}$$

II) $B = ?\ ;\ \times(s+3)$

$$\frac{\cancel{(s+3)}}{(s+2)\cdot\cancel{(s+3)}} = \frac{A\cancel{(s+3)}^{0}}{(s+2)} + \frac{B\cancel{(s+3)}}{\cancel{(s+3)}}\Bigg|^{s=-3}$$

$$B = \frac{1}{s+2}\Bigg|^{s=-3} \rightarrow \boxed{B=-1}$$

III) $$G(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \underset{Z}{\rightarrow} G(z) = \frac{z}{z-e^{-2T}} - \frac{z}{z-e^{-3T}}$$

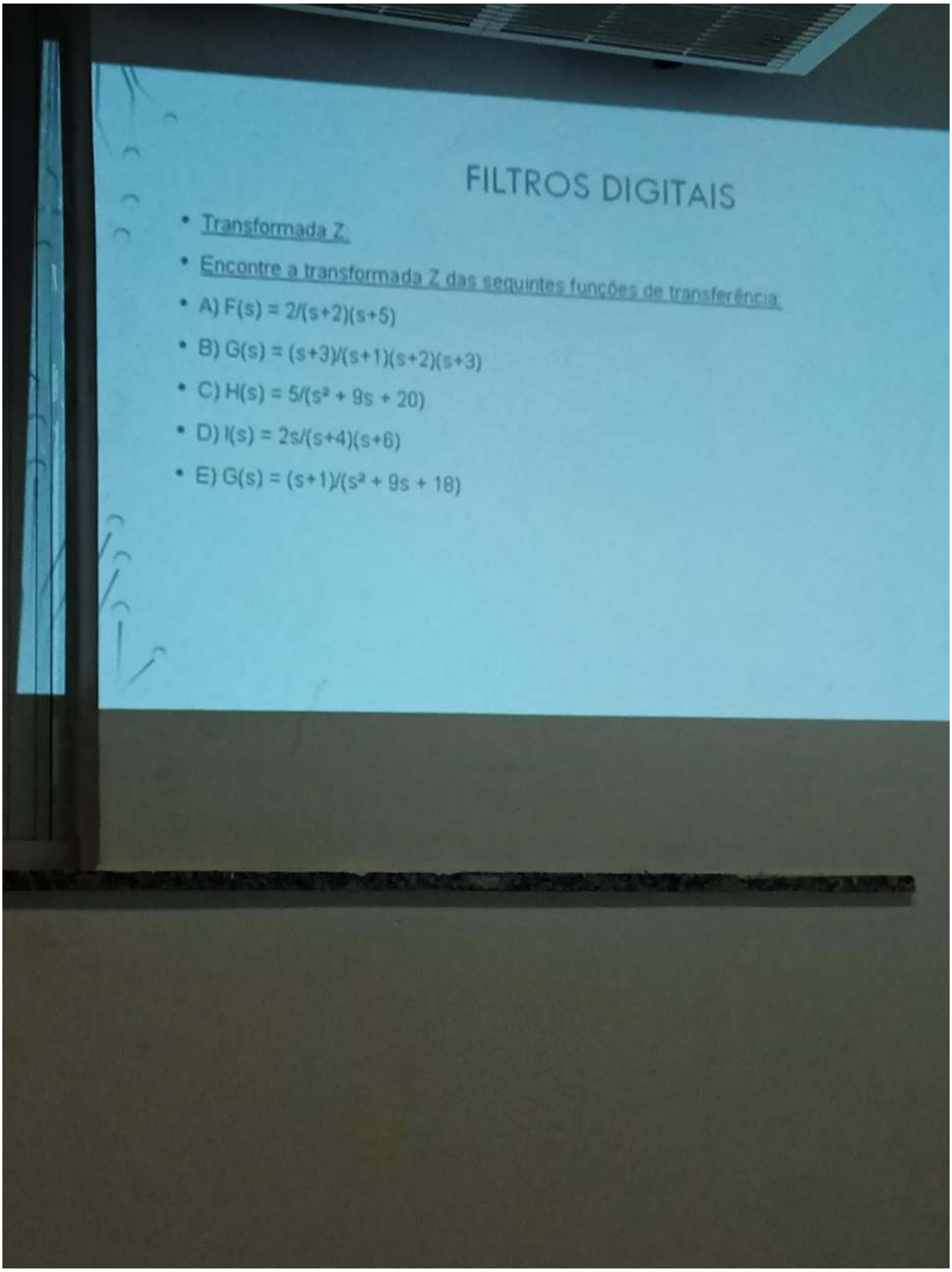
IV)

IV) Aplicando MMC

$$G(z) = \frac{z \cdot (z - e^{-3T}) - z(z - e^{-2T})}{(z - e^{-2T}) \cdot (z - e^{-3T})}$$

$$G(z) = \frac{\cancel{z^2} - z e^{-3T} - \cancel{z^2} + z e^{-2T}}{(z - e^{-2T}) \cdot (z - e^{-3T})}$$

$$G(z) = \frac{z \cdot (-e^{-3T} + e^{-2T})}{(z - e^{-2T}) \cdot (z - e^{-3T})}$$ //



Exemplo 2 F(s)(item A)

Aplicar a transformada Z na seguinte função de transferência

Anotação do professor

APLICAR A TRANSFORMADA Z NA
SEGUINTE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA:

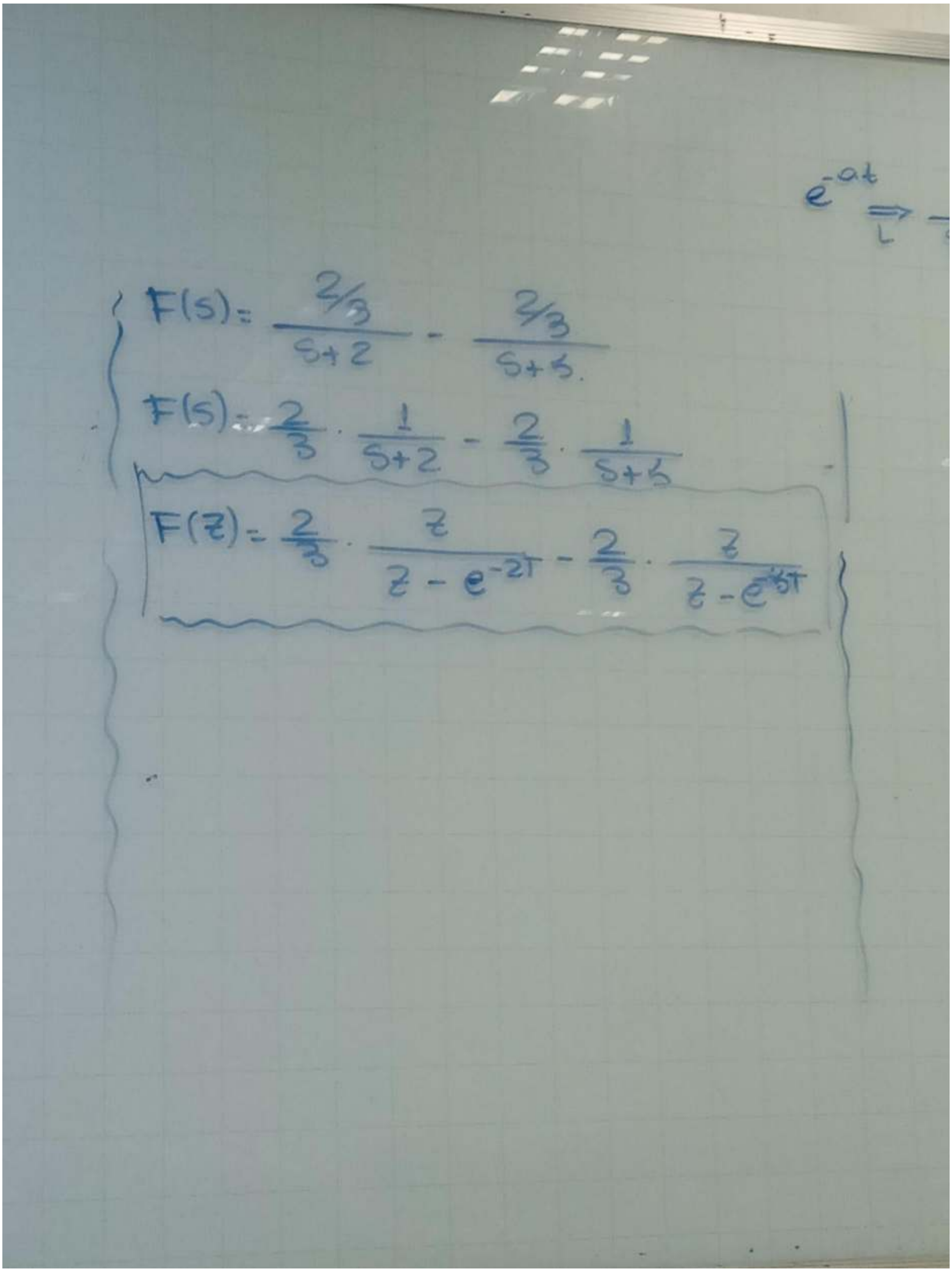
$$F(s) = \frac{2}{(s+2).(s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+5}$$

$$A = ? \Rightarrow \frac{2.\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}.(s+5)} = \frac{A.\cancel{(s+2)}}{\cancel{s+2}} + \left.\frac{B.\overbrace{\cancel{(s+2)}}^{0}}{s+5}\right|_{s=-2}$$

$$A = \left.\frac{2}{s+5}\right|_{s=-2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{2}{3}}$$

$$B = ? \Rightarrow \frac{2.\cancel{(s+5)}}{(s+2).\cancel{(s+5)}} = \frac{A.\overbrace{\cancel{(s+5)}}^{0}}{(s+2)} + \left.\frac{B.\cancel{(s+5)}}{\cancel{s+5}}\right|_{s=-5}$$

$$B = \left.\frac{2}{s+2}\right|_{s=-5} \quad \boxed{B = -\frac{2}{3}}$$



Anotação do Cristiano

30/08/22

Exemplo 2

Lembrando: $e^{-at} \underset{L}{\Rightarrow} \frac{1}{s+a} \underset{Z}{\Rightarrow} \frac{Z}{Z-e^{-aT}}$

$$F(s) = \frac{2}{(s+2).(s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+5)}$$

I) $A = ?; \times (s+2)$

$$A = ? = \frac{2.\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}.(s+5)} = \frac{A\cancel{(s+2)}}{\cancel{s+2}} + \frac{B\cancel{(s+2)}^{\,0}}{s+5}\Bigg|^{s=-2}$$

$$\boxed{A = \frac{2}{3}}$$

II) $B = ?; \times (s+5)$

$$B = \frac{2.\cancel{(s+5)}}{(s+2).\cancel{(s+5)}} = \frac{A.\cancel{(s+5)}^{\,0}}{(s+2)} + \frac{B\cancel{(s+5)}}{\cancel{(s+5)}}\Bigg|^{s=-5}$$

$$B = \frac{2}{s+2}\Big|^{s=-5} \Rightarrow B = -\frac{2}{3}$$

III)

$$F(s) = \frac{2/3}{s+2} - \frac{2/3}{s+5}$$

$$F(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+5}$$

$$F(Z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{Z}{Z-e^{-2T}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{Z}{Z-e^{-5T}}$$