INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 24-05-2021

Divisão e Conquista

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Divisão e Conquista

A técnica de divisão e conquista consiste basicamente em dividir a instância a ser resolvida em instâncias menores **do mesmo tipo de problema**, resolvê-las e depois usar as soluções das instâncias menores para obter uma solução da instância original.

Para que um problema possa ser resolvido por divisão e conquista ele precisa ter duas propriedades:

- Decomponibilidade, ou seja, deve ser possível decompor qualquer instância não trivial do problema em instâncias menores do mesmo tipo de problema;

- A partir das soluções das instâncias obtidas com a decomposição deve ser sempre possível obter uma solução da instância original

Exemplo:

Algoritmo Pot5

```
    Entrada: x ∈ ℕ
    Saída: 2^x
    se x = 0
        devolva 1
    se não
        aux = Pot5(⌊x/2⌋)
        se x for par
            devolva aux * aux
        se não
            devolva aux * aux * 2
```

Algoritmo de Karatsuba-Ofman

Considere o problema de multiplicar dois números de *n* dígitos. O algoritmo clássico de multiplicação requer n^2 multiplicações dígito a dígito.

Ex:

```
   324
   635
 -----
  1620
  972
1944
-------
205740
```

O Algoritmo de Karatsuba-Ofman, baseado em divisão e conquista, permite multiplicar números com mais eficiência.

Sejam *u* e *v* números de *n* dígitos (vamos supor *n* par). Vamos decompor *u* nos números *p* e *q* de modo que *p* é constituído dos primeiros *n*/2 dígitos de *u* e *q* é constituído dos últimos *n*/2 dígitos de *u*. De forma análoga, vamos decompor *v* nos números *r* e *s* de modo que *r* é constituído dos primeiros *n*/2 dígitos de *v* e *s* é constituído dos últimos *n*/2 dígitos de *v.* Note que:

$$u = p.10^{n/2} + q$$

$$v = r.10^{n/2} + s$$

Assim:

$$u.v = (p.10^{n/2} + q).(r.10^{n/2} + s)$$

$$u.v = p.r.10^{n} + p.s.10^{n/2} + q.\ r.10^{n/2} + q.s$$

$$u.v = p.r.10^{n} + (p.s + q.\ r).10^{n/2} + q.s$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

$u.v = p.r.10^n + (p.s + q.\ r).10^{n/2} + q.s$

Usando essa fórmula, precisaremos de quatro multiplicações de números de $n/2$ dígitos. O tempo requerido é dado por:

$$T(n) = 4T(n/2) + cn$$
$$T(1) = c$$

Vamos supor $n = 2^k$

Eq. 0 $\quad T(n) = \cancel{4T(n/2)} + cn$

Eq. 1 $\quad \cancel{4T(n/2)} = \cancel{16T(n/4)} + 2cn$

Eq. 2 $\quad \cancel{16T(n/4)} = \cancel{64T(n/8)} + 4cn$

$\quad ...$

Eq. k-1 $\quad \cancel{4^{k-1}T(n/2^{k-1})} = \cancel{4^kT(n/2^k)} + 2^{k-1}cn$

Eq. k $\quad \cancel{4^kT(n/2^k)} = 4^kc$

$$T(n) = cn + 2cn + ... + 2^{k-1}cn + cn^2 \quad = cn(1 + 2 + ... + 2^{k-1}) + cn^2 \quad = cn(2^k – 1) + cn^2 \quad = 2cn^2 – cn$$

Resolvendo essa fórmula, concluímos que o tempo requerido é $\Theta(n^2)$ 😔

No entanto, observe que:

$$(p + q).(r + s) = p.\text{r} + p.s + q.r + q.s$$
$$p.s + q.r = (p + q).(r + s) - p.r - q.s$$

Assim:

$$u.v = p.\text{r}.10^{n} + (p.s + q.\ r).10^{n/2} + q.s$$
$$u.v = p.\text{r}.10^{n} + ((p + q).(r + s) - p.r - q.s).10^{n/2} + q.s$$

Precisaremos então apenas 3 multiplicações de números de $n/2$ dígitos 😄

Ex: $u = 4815$, $v = 2952$

$n = 4$, $p = 48$, $q = 15$, $r = 29$, $s = 52$

$4815 \times 2952 = 48 \times 29 \times 10^4 + ((48 + 15) \times (29 + 52) - 48 \times 29 - 15 \times 52) \times 10^2 + 15 \times 52$

$4815 \times 2952 = 13920000 + (63 \times 81 - 1392 - 780) \times 10^2 + 780$

$4815 \times 2952 = 13920000 + 293100 + 780$

$4815 \times 2952 = 14213880$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

A complexidade temporal do Algoritmo de Karatsuba-Ofman é dada por:

$$T(n) = 3T(n/2) + cn$$
$$T(1) = c$$

Vamos supor $n = 2^k \Rightarrow k = \log_2 n$

Eq. 0 $\quad T(n) = \cancel{3T(n/2)} + cn$

Eq. 1 $\quad \cancel{3T(n/2)} = \cancel{9T(n/4)} + {}^{3}/_{2}\, cn$

Eq. 2 $\quad \cancel{9T(n/4)} = \cancel{27T(n/8)} + {}^{9}/_{4}\, cn$

...

Eq. k-1 $\quad \cancel{3^{k-1}T(n/2^{k-1})} = \cancel{3^{k}T(n/2^{k})} + ({}^{3}/_{2})^{k-1} cn$

Eq. k $\quad \cancel{3^{k}T(n/2^{k})} = 3^{k}c$

$$T(n) = cn + {}^{3}/_{2}cn + \ldots + ({}^{3}/_{2})^{k-1}cn + 3^{k}c = cn(1 + {}^{3}/_{2} + \ldots + ({}^{3}/_{2})^{k-1}) + 3^{k}c = 2(({}^{3}/_{2})^{k} - 1)cn + 3^{k}c$$

$$T(n) = 2cn({}^{3}/_{2})^{k} - 2cn + 3^{k}c = 2cn\, {}^{3^k}/_{2^k} - 2cn + 3^{k}c = 2c3^{k} - 2cn + 3^{k}c = 2c3^{\log_2 n} - 2cn + 3^{\log_2 n}c$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

$$T(n) = 2c3^{\log_2 n} - 2cn + 3^{\log_2 n}c$$

Lembre que:

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

Assim:

$$T(n) = 2cn^{\log_2 3} - 2cn + n^{\log_2 3}c = \quad \mathbf{3cn^{\log_2 3} - 2cn}$$

Concluímos que o tempo requerido é $\Theta(n^{\log_2 3})$ 😀

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 28-05-2021

Mergesort e Quicksort

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

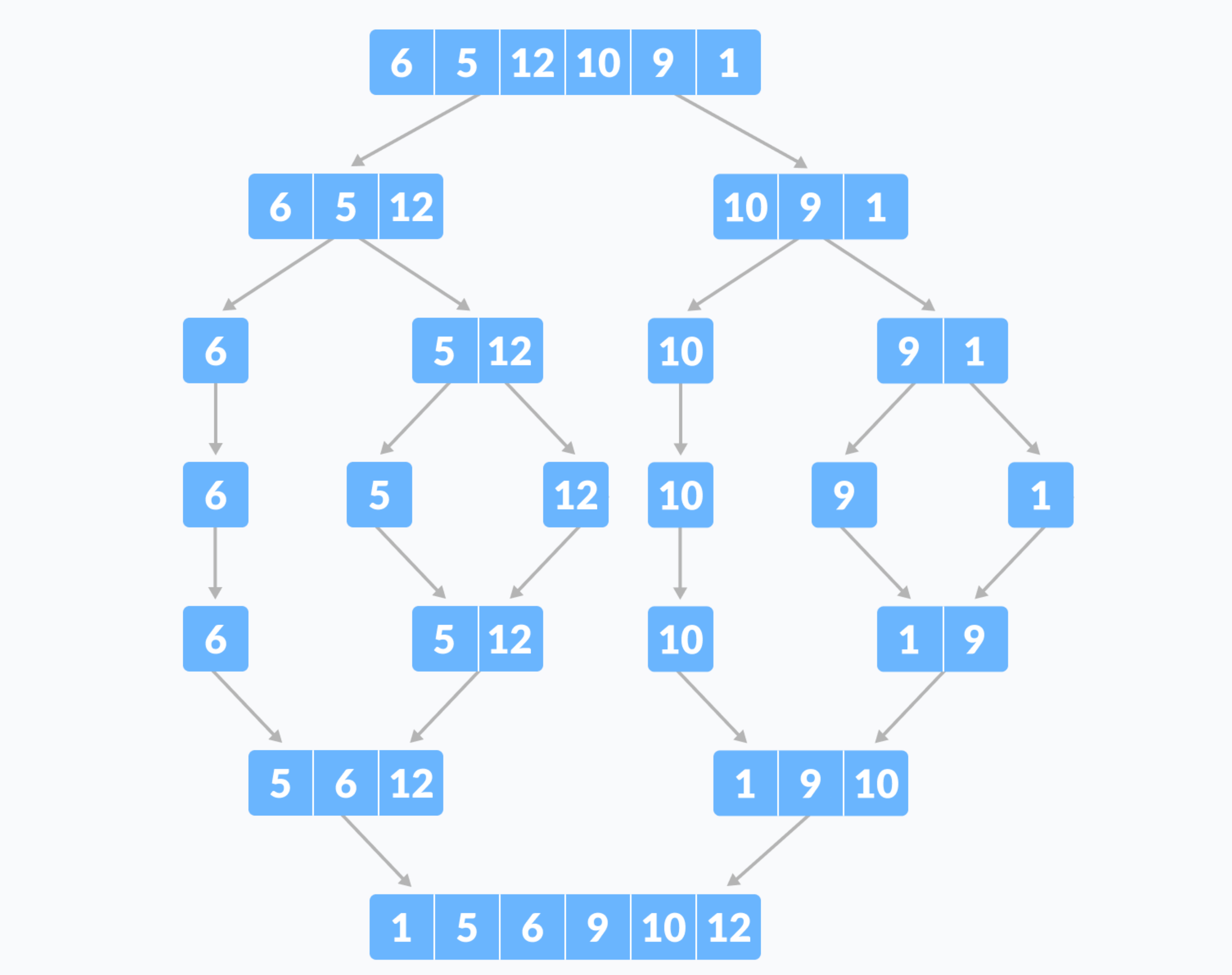
Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Algoritmo Mergesort

O Mergesort é um conhecido algoritmo de ordenação baseado em divisão e conquista. Ele divide a lista a ser ordenada em duas metades, recursivamente ordena as duas metades e depois intercala as duas metades.

```
Algoritmo Mergesort
        Entrada: Um vetor L e as posições início e fim
        Saída: O vetor L em ordem crescente da posição início até a posição fim
        Se início < fim
                meio = (início + fim) / 2            // divisão inteira
                se início < meio
                        mergesort(L, inicio, meio)
                se meio + 1 < fim
                        mergesort(L, meio + 1, fim)
                merge(L, inicio, meio, fim)
```



Simulação do Mergesort

A complexidade temporal do Mergesort é dada por:

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$
$$T(1) = c$$

Vamos supor $n = 2^k \Rightarrow k = \log_2 n$

Eq. 0 $\quad T(n) = 2T(n/2) + cn$

Eq. 1 $\quad 2T(n/2) = 4T(n/4) + cn$

Eq. 2 $\quad 4T(n/4) = 8T(n/8) + cn$

...

Eq. k-1 $\quad 2^{k-1}T(n/2^{k-1}) = 2^kT(n/2^k) + cn$

Eq. k $\quad 2^kT(n/2^k) = 2^kc$

$$T(n) = cnk + 2^kc = cn\log_2 n + cn$$

Concluímos que o tempo requerido é $\Theta(n \log_2 n)$.

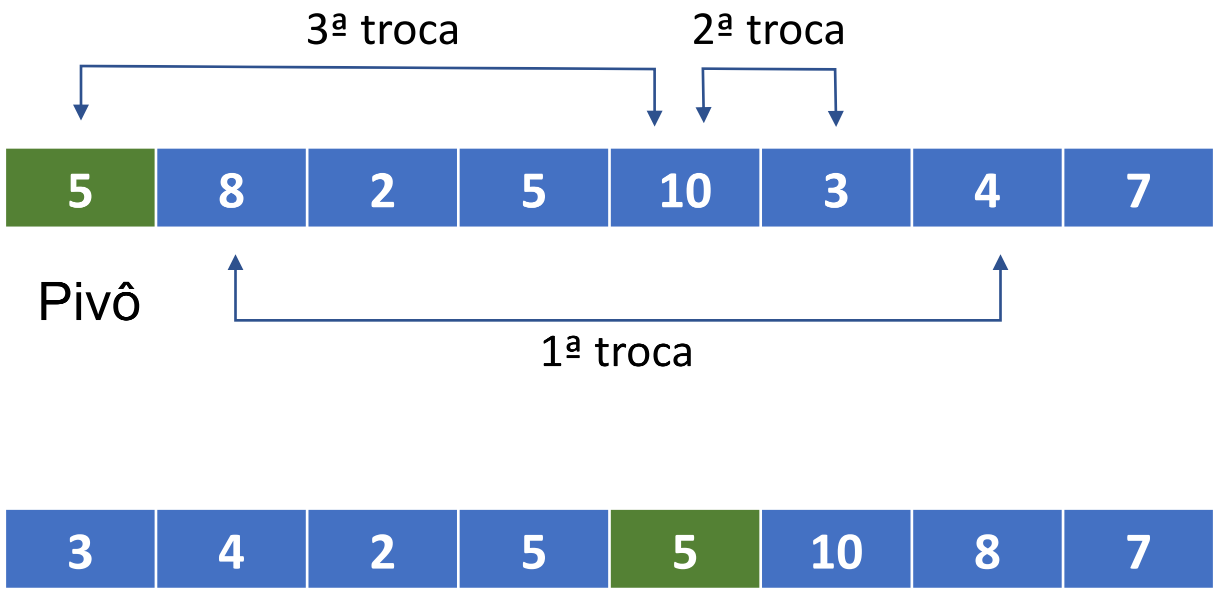
Algoritmo Quicksort

O Quicksort é um algoritmo de ordenação também baseado em divisão e conquista. No quicksort é escolhido um *pivô* e a lista é dividida em duas sublistas, a da esquerda com os elementos menores ou iguais ao pivô e a da direita com os elementos maiores que o pivô. O pivô é colocado entre as duas sublistas. Após isso, cada sublista é ordenada recursivamente.

Algoritmo Quicksort

```
    Entrada: Um vetor L e as posições início e fim
    Saída: O vetor L em ordem crescente da posição início até a posição fim
    Se início < fim
        j = partição(L, início, fim)
        se início < j – 1
            quicksort(L, inicio, j – 1)
        se j + 1 < fim
            quicksort(L, j + 1, fim)
```

INSTITUTO FEDERAL
Ceará



Simulação do
procedimento de partição

O melhor caso do Quicksort ocorre quando todas as escolhas do pivô recaem sobre a mediana do intervalo a ser particionado. Nesse caso, a complexidade temporal do Quicksort é dada por:

$T(n) = 2T(n/2) + cn$

$T(1) = c$

Concluímos que o tempo requerido no melhor caso é $\Theta(n \log_2 n)$.

O pior caso do Quicksort ocorre quando todas as escolhas do pivô recaem sobre um elemento extremo do intervalo a ser particionado. Nesse caso, a complexidade temporal do Quicksort é dada por:

$T(n) = T(n - 1) + cn$

$T(1) = c$

Concluímos que o tempo requerido no pior caso é $\Theta(n^2)$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 31-05-2021

Programação Dinâmica

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Programação Dinâmica

A *programação dinâmica* (PD) pode ser vista como uma generalização da técnica de divisão e conquista. A ideia básica da programação dinâmica é decompor a instância a ser resolvida de diversas maneiras, obtendo em instâncias menores **do mesmo tipo de problema**, resolvê-las e depois usar as soluções das instâncias menores para obter uma solução da instância original.

Para evitar que a mesma instância seja resolvida várias vezes, na PD resolvemos as instâncias começando pelas menores até as maiores, armazenando o resultado numa estrutura de dados.

Para que um problema possa ser resolvido por programação dinâmica ele precisa ter duas propriedades:

- *Decomponibilidade*, ou seja, deve ser possível decompor qualquer instância não trivial do problema em instâncias menores do mesmo tipo de problema;

- *Subestrutura ótima*, ou seja, deve existir alguma decomposição tal que a partir das soluções das instâncias obtidas com a decomposição deve ser sempre possível obter uma solução da instância original

Subsequência Crescente Máxima

Seja $S = (s_1, s_2, ..., s_n)$ uma sequência de números. Dizemos que *S'* é uma *subsequência* de *S* se é possível obter *S'* a partir de *S* removendo alguns dos elementos de *S*.

Ex: $S = (8, 4, 9, 3, 4, 7, 5, 10, 3)$

(4, 7, 1, 10)	Não é subsequência de *S*
(4, 4, 10, 5)	Não é subsequência de *S*
(8, 3, 7, 10, 3)	Subsequência de *S*

Uma subsequência é crescente se os seus elementos estão em ordem crescente.

Ex: (8, 9, 10) Subsequência crescente de *S*

No *Problema da Subsequência Crescente Máxima* (SCM) é dada uma sequência *S* e desejamos encontrar o comprimento de uma subsequência crescente de *S* que tenha a maior quantidade possível de elementos.

Ex: (4, 4, 7, 10) Subsequência crescente máxima de *S*?

O SCM não possui subestrutura ótima, no entanto um problema correlato tem: o *problema da subsequência crescente máxima com término fixo* (SCMTF).

No SCMTF é dada uma sequência de números $S = (s_1, s_2, ..., s_n)$ e um elemento da sequência s_i ($1 \leq i \leq n$). Desejamos encontrar a maior subsequência crescente de S que termine em s_i.

Para resolver o SCMTF vamos denotar por c_i o comprimento da maior subsequência crescente de S que termina em s_i. Note que:

$c_1 = 1$
$c_i = \max(\{c_j + 1 \mid s_j \leq s_i , j = 1, 2, ..., i - 1\}, 1)$

Se calcularmos $c_1, c_2, ..., c_n$, o maior desses valores será a solução do SCM.

Algoritmo SCM_PD

Entrada: uma sequência de números $S = (s_1, s_2, ..., s_n)$

Saída: o comprimento de uma SCM de S

para i = 1 até n

$c_i = 1$

para j = 1 até $i - 1$

se $s_j \leq s_i$ e $c_j + 1 > c_i$

$c_i = c_j + 1$

devolva o maior valor entre $c_1, c_2, ..., c_n$

O Algoritmo SCM_PD requer tempo $\Theta(n^2)$ e espaço $\Theta(n)$.

Ex: $S = (8, 4, 9, 3, 4, 7, 5, 10, 3)$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s_i	8	4	9	3	4	7	5	10	3
c_i	1	1	2	1	2	3	3	4	2

Diversão para casa

Adaptar o Algoritmo SCM_PD para que ele devolva uma SCM.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 07-06-2021

Problema da Mochila

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Problema da Mochila

A *Problema da Mochila* é um problema que aparece em diversas situações práticas e possui diversas variantes.

Uma dessas variantes é chamada de *Problema da Mochila Binária* (PMB). No PMB temos uma mochila de capacidade C e n itens. Cada item i possui peso p_i e valor v_i.

Precisamos decidir quais itens devem ser colocados na mochila de modo que a soma dos pesos dos itens colocados na mochila não exceda sua capacidade e que a soma dos valores desses itens seja a maior possível.

Se a capacidade da mochila e os pesos dos itens forem todos inteiros, podemos resolver o PMB usando programação dinâmica.

Para isso, vamos denotar por $v(i, j)$ o maior valor que pode ser obtido numa mochila de capacidade i se podemos colocar nela os itens de 1 a j. Note que:

$$v(0, j) = 0$$
$$v(i, 0) = 0$$
$$v(i, j) = \max(v_j + v(i - p_j, j - 1), v(i , j - 1))$$

Podemos usar PD para calcular $v(C, n)$

Algoritmo PMB_PD

Entrada: $C, p_1, p_2, ..., p_n, v_1, v_2, ..., v_n$
Saída: $v(C, n)$
para $i = 0$ até C
    $v(i, 0) = 0$
para $j = 1$ até n
    para $i = 0$ até C
        se $p_j \leq i$ e $v_j + v(i - p_j, j - 1) > v(i, j - 1)$
            $v(i, j) = v_j + v(i - p_j, j - 1)$
        se não
            $v(i, j) = v(i, j - 1)$
devolva $v(C, n)$

O Algoritmo PMB_PD requer tempo e espaço $\Theta(nC)$.

Ele é pseudo-polinomial.

Ex: $C = 10$, $n = 4$

i	1	2	3	4
p_i	5	3	7	4
v_i	52	28	66	43

V	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	28	28	28
4	0	0	28	28	43
5	0	52	52	52	52
6	0	52	52	52	52
7	0	52	52	66	71
8	0	52	80	80	80
9	0	52	80	80	95
10	0	52	80	94	95

Diversão para casa

Adaptar o Algoritmo PBM_PD para que ele indique quais itens devem ser colocados na mochila.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 11-06-2021

Enumeração Explícita

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Enumeração Explícita

A técnica de *enumeração explícita* (EE), às vezes chamada de *força bruta*, consiste basicamente em enumerar todos os candidatos a solução e dentre eles encontrar uma solução para a instância a ser resolvida.

Um problema cuja solução pode ser adaptada para resolver vários outros problemas por EE é, dado um conjunto $C = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, enumerar todos os subconjuntos de C.

Observe que cada um dos subconjuntos de C pode ser representado por um conjunto de n bits no qual um bit 1 significa que o elemento correspondente a esse bit pertence ao subconjunto e 0 significa que não pertence.

Por exemplo, seja $C = \{4, 8, 5\}$. A sequência de bits 101 representa o subconjunto $\{4, 5\}$.

Note que o próprio C é representado pela sequência de n bits todos iguais a 1, que equivale ao número decimal $2^n - 1$. Já o conjunto vazio é representado pela sequência de n bits todos iguais a 0. Assim, as representações binárias dos números de 0 a $2^n - 1$ codificam todos os subconjuntos de C.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Algoritmo imprime_subconjuntos

Entrada: $C = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$

Saída: imprime todos os subconjuntos de C

para i = 0 até $2^n - 1$

imprime_subconjunto(C, i)

Procedimento imprime_subconjunto

Entrada: $C = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ e um valor i

Saída: imprime o subconjunto de C codificado pelos bits de i

para j = 1 até n

Se i % 2 = 1

imprima e_j

$i = i / 2$ // divisão inteira

O procedimento imprime_subconjunto requer tempo $\Theta(n)$.

O algoritmo imprime_subconjuntos requer tempo $\Theta(n2^n)$ 😕

Apesar de ineficiente, este algoritmo é de cota inferior 🙂

Procedimento imprime_subconjunto

Entrada: $C = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ e um valor i

Saída: imprime o subconjunto de C codificado pelos bits de i

para $j = 1$ até n

Se $i \% 2 = 1$

imprima e_j

$i = i / 2$ // divisão inteira

Ex: $C = \{4, 8, 5\}$, $i = 5$

$j = 1$, $i = 5$, $i \% 2 = 1 \rightarrow$ imprime $e_1 = 4$

$j = 2$, $i = 2$, $i \% 2 = 0 \rightarrow$ não imprime $e_2 = 8$

$j = 3$, $i = 1$, $i \% 2 = 1 \rightarrow$ imprime $e_3 = 5$

Subconjunto impresso: $\{4, 5\}$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Algoritmo imprime_subconjuntos

***Entrada**:* $C = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$

***Saída**:* imprime todos os subconjuntos de C

para $i = 0$ até $2^n - 1$

imprime_subconjunto(C, i)

Ex: $C = \{4, 8, 5\}$, $n = 3$

i	binário	subconjunto
0	000	{}
1	001	{4}
2	010	{8}
3	011	{4, 8}
4	100	{5}
5	101	{4, 5}
6	110	{8, 5}
7	111	{4, 8, 5}

Diversão para casa

Adapte o Algoritmo imprime_subconjuntos para resolver o problema da subsequência crescente máxima.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 14-06-2021

Exemplos de Algoritmos de Enumeração Explícita

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Algoritmo SCM_EE

Entrada: $S = (s_1, s_2, ..., s_n)$
Saída: uma SCM de *S* e o seu tamanho

```
maximo = -1
para i = 0 até 2^n – 1
        tamanho = tamanho_subsequencia(S, i)
        se tamanho > maximo
                maximo = tamanho, scm = i
devolva scm e maximo        // o bits de scm codificam uma SCM de S
```

Procedimento tamanho_subsequencia

Entrada: $S = (s_1, s_2, ..., s_n)$ e um valor *i*
Saída: se a subsequência de *S* codificada pelos bits de *i* for crescente devolve o tamanho dessa subsequência; caso contrário, devolve -1

```
tamanho = 0
para j = 1 até n
        se i % 2 = 1
                se tamanho > 0 e s_j < anterior
                        devolva -1 e pare
                tamanho++, anterior = s_j
        i = i / 2     // divisão inteira
devolva tamanho
```

O procedimento tamanho_subsequencia requer tempo $\Theta(n)$.
O algoritmo SCM_EE requer tempo $\Theta(n2^n)$ 😔

Algoritmo PMB_EE

Entrada: $C, p_1, p_2, ..., p_n , v_1, v_2, ..., v_n$

Saída: uma solução ótima para a instância e o valor dessa solução

```
maximo = 0, sol = 0
para i = 1 até 2^n – 1
        valor = valor_mochila(C, p1, p2, ..., pn , v1, v2, ..., vn, i)
        se valor > maximo
                maximo = valor, sol = i
devolva sol e maximo        // o bits de sol codificam uma solução da instância
```

Procedimento valor_mochila

Entrada: $C, p_1, p_2, ..., p_n , v_1, v_2, ..., v_n$ e um valor i

Saída: se a forma de preencher a mochila codificada pelos bits de *i* não exceder a capacidade da mochila devolve o valor obtido com essa solução; caso contrário, devolve -1

```
valor = 0, peso = 0
para j = 1 até n
        se i % 2 = 1
                se pj + peso > C
                        devolva -1 e pare
                peso = peso + pj, valor = valor + vj
        i = i / 2    // divisão inteira
devolva valor
```

O procedimento valor_mochila requer tempo O(n).

O algoritmo PMB_EE requer tempo $\Theta(n2^n)$ 😕

Diversões para casa

1) Implemente e teste os algoritmos abordados na aula de hoje.

2) Escreva um algoritmo baseado em enumeração explícita que receba uma coleção de números e devolva uma partição dessa coleção em duas subcoleções tais que a soma dos números em cada subcoleção seja a mesma (*problema da 2-partição*). Informe a complexidade temporal do seu algoritmo.

Ex: C = (9, 3, 2, 5, 1, 2, 3, 7)

Uma solução: (9, 3, 1, 3) e (2, 5, 2, 7)

Outra solução: (9, 7) e (3, 2, 5, 1, 2, 3)

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 18-06-2021

Enumeração Implícita para o Problema da Mochila

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Enumeração Implícita

Na *enumeração implícita* em vez de enumerarmos todos os candidatos a solução, enumeramos apenas os candidatos *promissores*, aqueles que têm chance de ser solução. Se o conjunto de candidatos promissores for bem menor que o conjunto de todos os candidatos, a enumeração implícita será muito mais eficiente do que a enumeração explícita.

Existem diversas técnicas de enumeração implícita: *branch-and-bound, branch-and-cut, branch-and-price, branch-and-cut-and-price* etc. Tais técnicas costumam ser bem sofisticadas. Veremos um exemplo de algoritmo de branch-and-bound (BB) para o PMB.

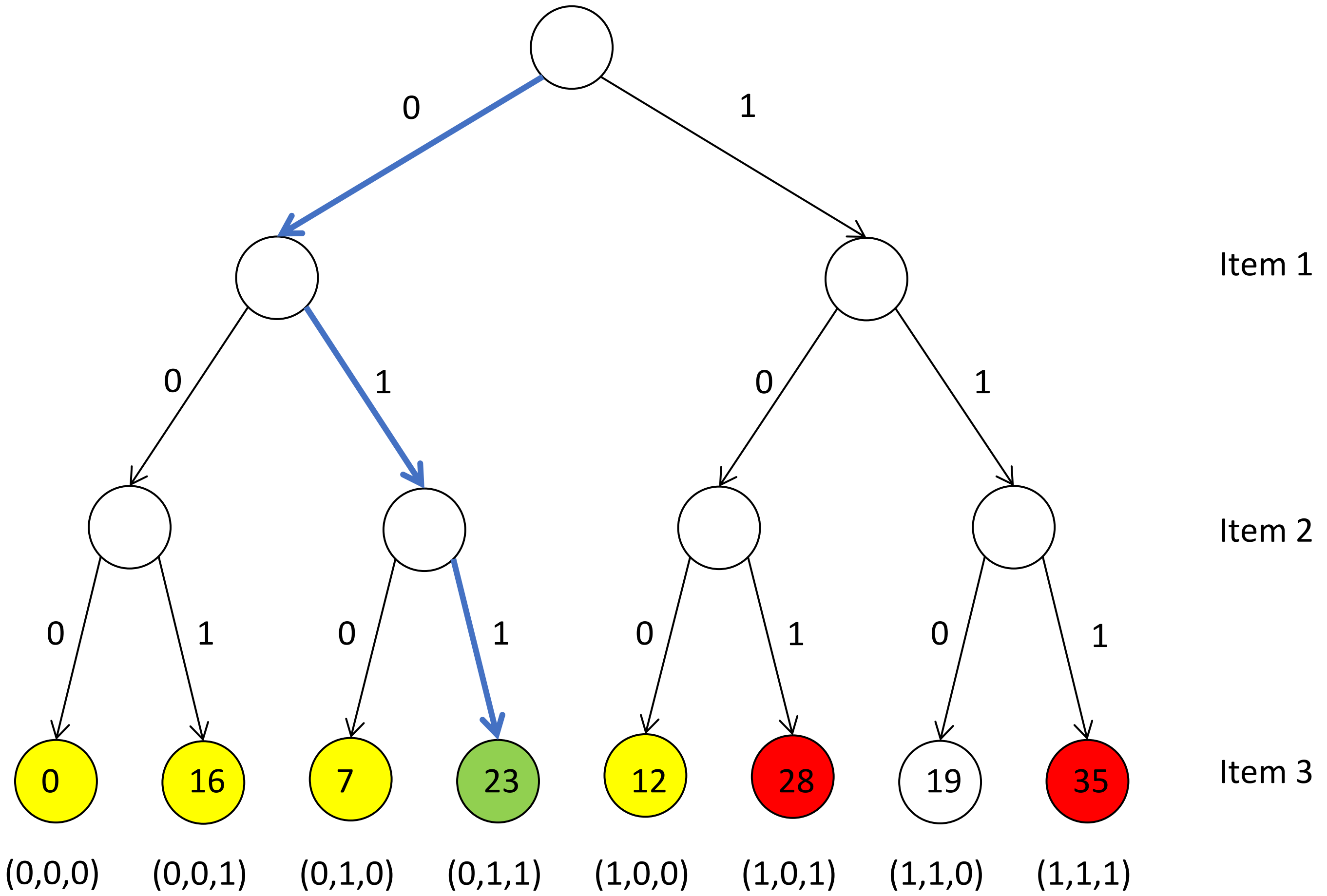
Seja *X* uma solução viável (que não excede a capacidade da mochila) para uma instância do PMB. Se a capacidade remanescente na mochila ao aplicar a solução *X* for maior do que o peso de algum dos itens que não foram colocados na mochila, dizemos que *X* é uma solução *insensata*, pois não pode ser uma solução ótima.

O algoritmo de BB que iremos apresentar enumera apenas soluções viáveis procurando evitar soluções insensatas. Além disso, se já enumeramos uma solução de valor *V*, devemos evitar enumerar soluções que tenham valor menor ou igual a *V*.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex: C = 10, n = 3

i	1	2	3
p_i	5	3	7
v_i	12	7	16



Essa árvore enumera todas as possíveis formas de preencher uma mochila para a instância descrita acima. Na árvore, após o nível da raiz, temos um nível para cada item. A ramificação à esquerda indica que o item não deve ser colocado mochila e a ramificação à direita indica que o item deve ser colocado. Cada ramo da árvore, desde a raiz até uma folha, representa uma forma de preencher a mochila. O ramo destacado de azul representa a solução em que apenas itens 2 e 3 são colocados na mochila. Note que essa solução é ótima e tem valor 23. Observe ainda que os nós amarelos correspondem a solução *insensatas* e os nós vermelhos correspondem a soluções *inviáveis*.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Branch-and-bound para o PMB

Considere uma instância $I = (C, p_1, p_2, ..., p_n, v_1, v_2, ..., v_n)$ do PMB sendo que os itens estão em ordem decrescente de *valor relativo* (valor/peso).

Seja $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ uma solução viável codificada por um vetor de bits onde $x_i = 1$ indica que o item i deve ser colocado na mochila e $x_i = 0$ indica que o item i não deve ser colocado na mochila.

Note que o valor dessa solução X é $\sum_{j=1}^{n} x_j v_j$. Além disso, a capacidade remanescente na mochila é $C - \sum_{j=1}^{n} x_j p_j$.

Suponha que uma solução $X' = (x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ tenha $x'_i = x_i$ ($i = 1, 2, ..., k - 1$) e $x'_k = 0$. Observe que a valor dessa solução X' será no máximo:

$$M = \sum_{j=1}^{k-1} x_j v_j + \left(C - \sum_{j=1}^{k-1} x_j p_j\right) \frac{v_{k+1}}{p_{k+1}}$$

Se M for menor ou igual ao valor da melhor solução já encontrada então X' não precisa ser enumerada. Isso significa que podemos deixar de enumerar **todas** as soluções que começam com $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$ e tenham $x_k = 0$. Temos assim uma *condição de poda*, ou seja, uma condição que pode ser usada para limitar a enumeração. 😀

Algoritmo PMB_BB

***Entrada**: C, p_1, p_2, ..., p_n , v_1, v_2, ..., v_n*

***Saída**:* uma solução ótima x^*

$M = 0$, $k = 0$

coloque os itens em ordem decrescente de valor relativo

faça

para $i = k + 1$ até n

se $p_i \leq C - \sum_{j=1}^{i-1} x_j p_j$

$x_i = 1$

se não

$x_i = 0$

se $\sum_{j=1}^{n} x_j v_j > M$

$M = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, $x^* = x$

$k = \max(\{i \mid i < n, x_i = 1 \text{ e } \sum_{j=1}^{i-1} x_j v_j + (C - \sum_{j=1}^{i-1} x_j p_j)\frac{v_{i+1}}{p_{i+1}} > M\}, \{0\})$

se $k > 0$

$x_k = 0$

enquanto k > 0

devolva x^*

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex: $C = 20$, $n = 6$

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
p_i	5	3	7	6	10	8
v_i	12	7	16	13	20	14

M = 0, 35, 39, 41, 42, 43

k = 0, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 1, 4, 2, 0

A melhor solução tem valor 43 e é obtida inserindo os itens 2, 3 e 5 na mochila.

Obs: Os números em vermelho indicam os casos em que a condição de poda foi usada para restringir a enumeração

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**valor**	**peso**
1	1	**1**	0	0	0	35	15
1	1	0	**1**	0	0	32	14
1	1	0	0	**1**	0	39	18
1	**1**	0	0	0	1	33	16
1	0	1	**1**	0	0	41	18
1	0	**1**	0	0	1	42	20
1	0	0	1	0	1	39	19
0	1	1	**1**	0	0	36	16
0	**1**	1	0	1	0	43 x*	20
0	0	1	1	0	0	29	13

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 02-07-2021

Estratégia Gulosa – Parte 1

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Estratégia Gulosa

Alguns problemas podem ser resolvidos usando a técnica conhecida como *estratégia gulosa*. Tal estratégia tem algumas características.

A solução da instância a ser resolvida é calculada iterativamente, sendo que a cada iteração é feita uma *escolha gulosa*, ou seja, entre todas as decisões possíveis é escolhida aquela que é mais *apetitosa*, segundo algum critério. Tal escolha jamais precisará ser desfeita.

Um algoritmo baseado nessa estratégia é chamado de *algoritmo guloso*. Os algoritmos gulosos costumam ser simples e rápidos, mas a prova de sua corretude costuma ser complicada.

Um problema pode ser corretamente resolvido usando-se a estratégia gulosa se ele possui a *propriedade gulosa*. Em essência, essa propriedade estabelece que as escolhas gulosas levam necessariamente a uma solução correta, qualquer que seja a instância do problema.

Infelizmente, poucos problemas têm a propriedade gulosa. 😔

Vejamos um exemplo de problema que possui a propriedade gulosa: dada uma coleção de números $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ e um número k, encontrar a maior subcoleção de C cuja soma dos elementos seja menor ou igual a k.

Ex: $C = (6, 8, 10, 2, 4, 5, 7, 2, 8)$, $k = 15$

Solução: (6, 2, 4, 2)

Podemos resolver esse problema usando uma estratégia gulosa:

A cada iteração escolha o menor elemento de C que ainda não tiver sido escolhido.
Repita esse procedimento até que não seja possível escolher mais nenhum elemento.
Devolva a subcoleção formada pelos elementos escolhidos.

Seguindo essa estratégia para o exemplo acima chegaríamos à seguinte solução:

(2, 2, 4, 5)

Vejamos mais um exemplo: precisamos passar um troco de valor *t* usando a menor quantidade possível de moedas.

Podemos resolver esse problema usando a seguinte estratégia: use as moedas de maior valor.

Ex: Troco de R$ 3,71

3 moedas de 1 real
1 moeda de 50 centavos
2 moedas de 10 centavos
1 moeda de 1 centavo

Obs: se tivéssemos moedas de 20 centavos a estratégia gulosa acima não funcionaria 😳

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Em alguns casos, quando um problema não possui a propriedade gulosa, podemos usar a estratégia gulosa para encontrar uma “boa” solução do problema, mas não necessariamente a melhor solução.

Por exemplo, podemos aplicar a seguinte estratégia gulosa para o PMB: 😂

Coloque na mochila os itens em ordem decrescente de valor relativo, até que não seja possível colocar mais nenhum item.

Ex: C = 20, n = 6

$\boldsymbol{i}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{p_i}$	5	3	7	6	10	8
$\boldsymbol{v_i}$	12	7	16	13	20	14
valor relativo	2,4	2,333	2,286	2,167	2	1,75

Solução gulosa: colocar na mochila os itens 1, 2 e 3. Valor: 35

Solução ótima: colocar na mochila os itens 2, 3 e 5. Valor: 43

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 05-07-2021

Estratégia Gulosa – Parte 2

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

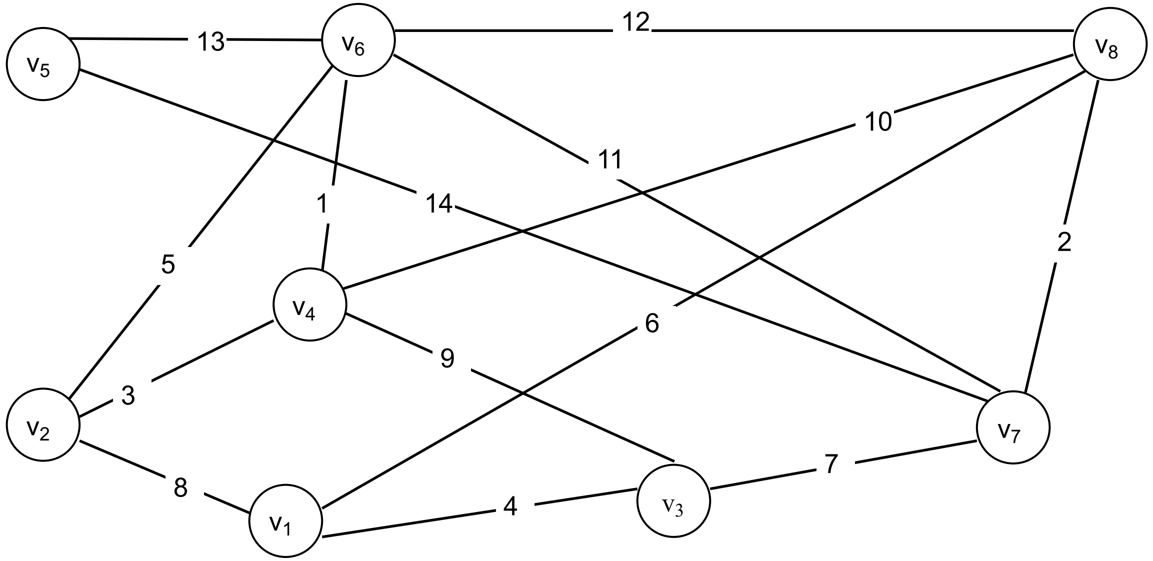
Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

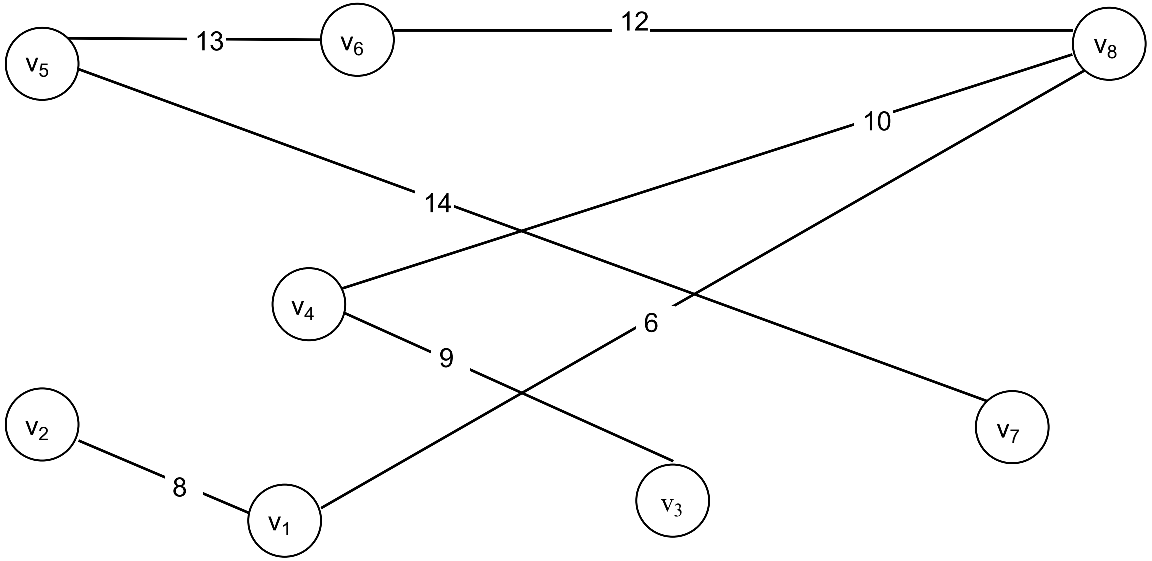
Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Árvore Geradora Mínima

Seja G um grafo conexo no qual cada aresta tem um custo. Uma árvore geradora de G é um subgrafo de G que é conexo, acíclico e contém todos os vértices de G.



G



Árvore geradora de G

O custo de uma árvore geradora é a soma dos custos das arestas que a compõem. O Problema da Árvore Geradora Mínima (AGM) consiste em, dado um grafo conexo no qual cada aresta tem um custo, encontrar uma AGM do grafo.

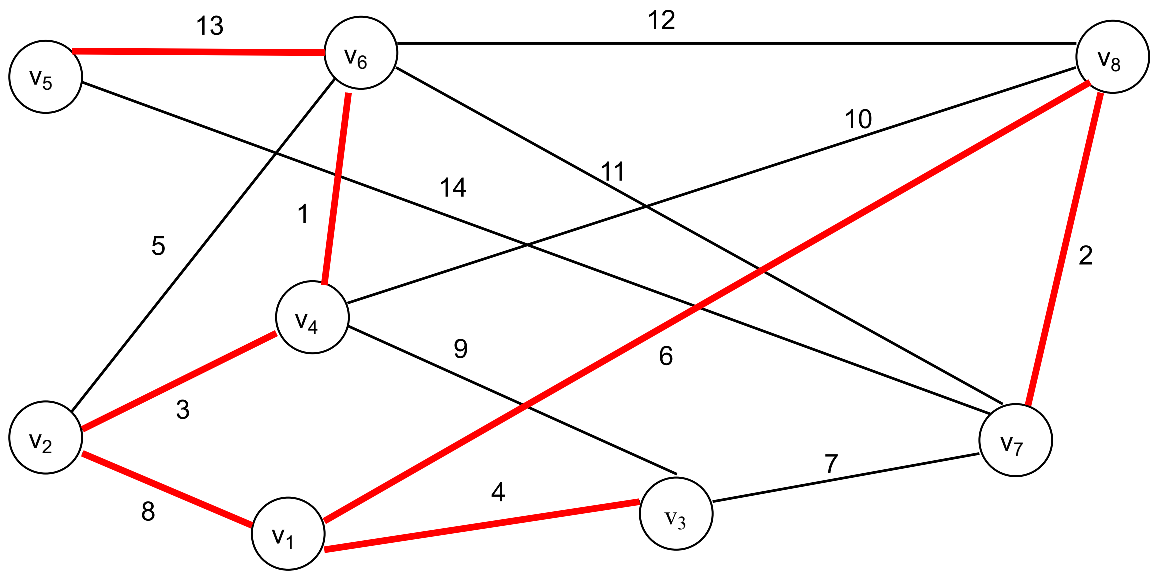
Esse problema possui a propriedade gulosa e portanto podemos resolvê-lo usando algoritmos gulosos.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Algoritmo de Kruskal

O Algoritmo de Kruskal utiliza a seguinte estratégia gulosa: construa a AGM escolhendo as arestas em ordem crescente de custo, sem permitir a formação de ciclos.

Ex:



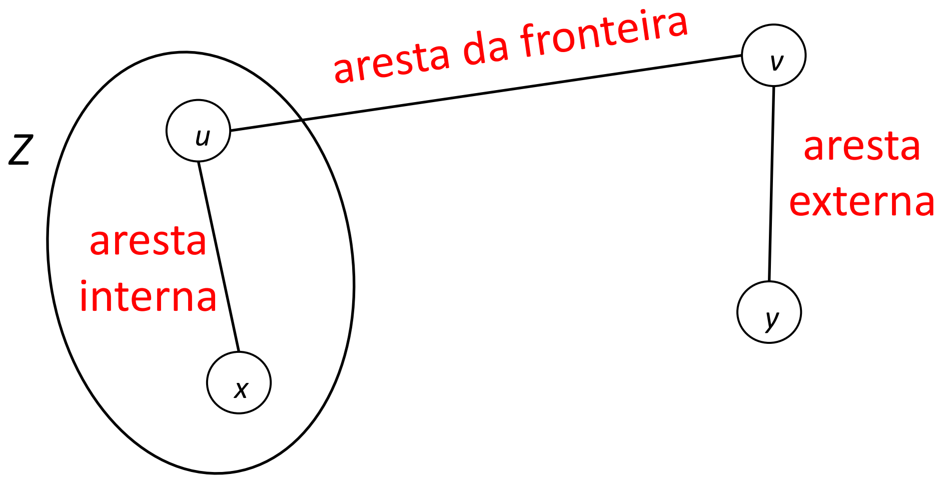
Custo: 37

Algoritmo de Prim

Podemos resolver o problema da AGM usando o *Algoritmo de Prim*. Tal algoritmo também é guloso, simples e rápido. Antes de descrevê-lo, precisamos de uma definição.

Seja Z um conjunto de vértices. Dizemos que uma aresta uv está na fronteira de Z se $u \in Z$ e $v \notin Z$ ou $v \in Z$ e $u \notin Z$.

Ex:



Iniciamos o Algoritmo de Prim com um conjunto Z de vértices contendo um único vértice. A cada iteração escolhemos uma aresta da fronteira de Z que possua o menor custo para fazer parte da AGM. Seja uv a aresta escolhida, com $u \in Z$ e $v \notin Z$. Incluímos o vértice v em Z e iniciamos uma nova iteração.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex: