INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 15-03-2021

Apresentação da Disciplina

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Conteúdo – 1ª etapa

- Introdução
  - Sistemas numéricos posicionais
  - Erros de arredondamento e truncamento

- Sistemas lineares
  - Métodos diretos: Gauss, Jordan, Pivotação Completa
  - Métodos indiretos: Jacobi, Gauss-Seidel
  - Sistemas lineares complexos
  - Condicionamento de sistemas lineares

- Equações Algébricas e transcendentes
  - Preliminares
  - Método gráfico
  - Método da Bisseção
  - Método de Newton
  - Radiciação usando o Método de Newton

Conteúdo – 2ª etapa

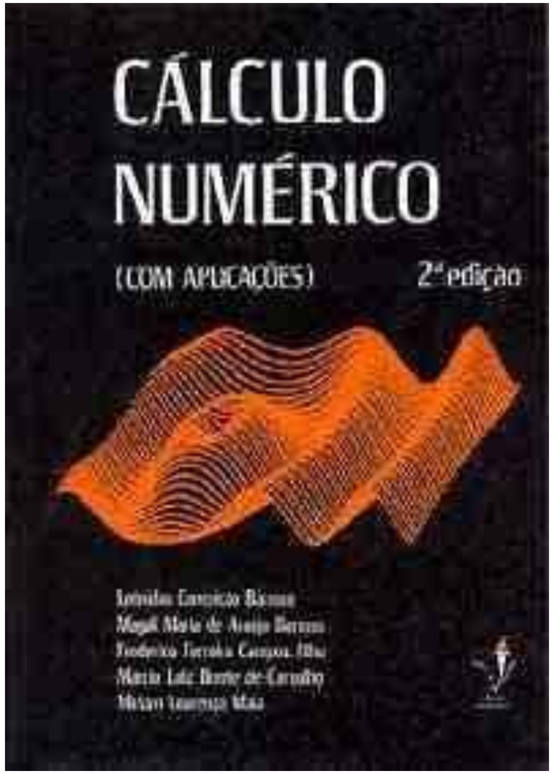
- Interpolação
  - Interpolação linear, quadrática, polinomial
  - Fórmula de Lagrange
  - Diferenças divididas e Fórmula de Newton
  - Diferenças finitas e Fórmula de Gregory-Newton

- Integração
  - Regra dos trapézios
  - Primeira regra de Simpson
  - Segunda regra de Simpson
  - Extrapolação de Richardson
  - Integração com pontos multiespaçados

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Bibliografia

Maia et Al, Cálculo numérico com aplicações



Frequência

Controle através do Meet Attendance

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 22-03-2021

Sistemas numéricos posicionais – Parte 1

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Sistemas numéricos posicionais

Num *sistema numérico posicional* (SNP) os números são representados por uma sequência de dígitos sendo que a posição que cada dígito ocupa na sequência determina a contribuição desse dígito para o valor do número.

O conjunto de símbolos usados num SNP para formar os números é chamado de *alfabeto* do SNP. A quantidade de símbolos do alfabeto determina a *base* do SNP. Alguns exemplos de SNP:

SNP	**Alfabeto**	**Base**
Decimal	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	10
Binário	0, 1	2
Octal	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8
Hexadecimal	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F	16

O *sistema numérico romano* é um exemplo de *sistema numérico não posicional*. Observe que no número romano XXIII cada ocorrência do dígito X equivale a 10 unidades e cada ocorrência do dígito I equivale a 1 unidade.

Num SNP as posições que os dígitos ocupam em um número possuem uma *significância*. O dígito mais à direita da parte inteira do número tem significância 0. A significância cresce para a esquerda e decresce para a direita.

A contribuição de um dígito *d* que está numa posição de significância *s* de um número representado num SNP de base *b* é:

$$d * b^s$$

Ex: Número decimal 353,7

Significância 2 1 0 -1
Dígitos 3 5 3 , 7

$353{,}7 = 3*10^2 + 5*10^1 + 3*10^0 + 7*10^{-1} = 3*100 + 5*10 + 3*1 + 7/10 = 300 + 50 + 3 + 0{,}7 = 353{,}7$

Conversão entre sistemas numéricos posicionais

Para converter um número *n* representado num SNP de base *b* para o sistema numérico decimal basta multiplicar cada dígito de *n* por *b* elevado à significância daquele dígito e somar os resultados das multiplicações.

Ex: Converter os números abaixo para decimal

$11000110{,}01_b = 1*2^7 + 1*2^6 + 0*2^5 + 0*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 + 0*2^{-1} + 1*2^{-2}$

$= 2^7 + 2^6 + 2^2 + 2^1 + 2^{-2} = 128 + 64 + 4 + 2 + 0{,}25 = 198{,}25$

$306{,}2_o = 3*8^2 + 0*8^1 + 6*8^0 + 2*8^{-1} = 3*64 + 6 + 2/8 = 192 + 6 + 0{,}25 = 198{,}25$

$C6{,}4_h = 12*16^1 + 6*16^0 + 4*16^{-1} = 12*16 + 6 + 4/16 = 192 + 6 + 0{,}25 = 198{,}25$

Para converter um número decimal *n* para um sistema numérico posicional de base *b* devemos primeiramente converter a parte inteira de *n*. Para isso devemos dividir a parte inteira de *n* por *b* (divisão inteira) e repetir esse procedimento com o resultado da divisão até obter quociente menor do que *b*. Devemos então concatenar o último quociente com os restos obtidos anteriormente, desde o último até o primeiro, obtendo assim a parte inteira da representação de *n* na base *b*.

Em seguida devemos multiplicar a parte fracionária de *n* por *b* e repetir esse procedimento com a parte fracionária do resultado da multiplicação até que a parte fracionária seja 0. Devemos então concatenar a parte inteira dos resultados das multiplicações, desde o primeiro até o último, obtendo assim a parte fracionária da representação de *n* na base *b*.

Ex: Converter 198,25 para binário, octal e hexadecimal

	198	99	49	24	12	6	3	0,25	0,5
	÷2	÷2	÷2	÷2	÷2	÷2	÷2	x 2	x 2
	99	49	24	12	6	3	1	0,5	1,0
Restos	(0)	(1)	(1)	(0)	(0)	(0)	(1)		

$198{,}25 = 11000110{,}01_b$

	198	24	0,25
	÷8	÷8	x 8
	24	3	2,0
Restos	(6)	(0)	

$198{,}25 = 306{,}2_o$

	198	0,25
	÷16	x 16
	12 = C	4,0
Restos	(6)	

$198{,}25 = C6{,}4_h$

Diversão para casa: converta o número decimal 8,1 para binário, octal e hexadecimal

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 26-03-2021

Sistemas numéricos posicionais – Parte 2

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Conversão entre sistemas numéricos posicionais

Para converter um número octal *n* para o sistema numérico binário basta substituir cada dígito octal de *n* pela sequência de três bits correspondentes, de acordo com a tabela a seguir.

Dígito Octal	Sequência de bits
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Ex: Converter o número octal abaixo para binário

$306{,}2_o = 011000110{,}010_b = 11000110{,}01_b$

Para converter um número binário *n* para o sistema numérico octal devemos agrupar os bits de *n* de 3 em 3, garantindo que os três bits mais à direita da parte inteira estejam no mesmo agrupamento, e depois substituir cada agrupamento pelo dígito octal correspondente, de acordo com a tabela abaixo. Se necessário, deve-se adicionar zeros à esquerda do agrupamento mais à esquerda da parte inteira e zeros à direita do agrupamento mais à direita da parte fracionária.

Dígito Octal	Sequência de bits
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Ex: Converter o número binário abaixo para octal

$11000110{,}01_b = \underline{011}\ \underline{000}\ \underline{110}{,}\underline{010}_b = 306{,}2_o$

Para converter um número hexadecimal *n* para o sistema numérico binário basta substituir cada dígito hexadecimal de *n* pela sequência de quatro bits correspondentes, de acordo com a tabela a seguir.

Dígito Hexadecimal	Sequência de bits
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

Dígito Hexadecimal	Sequência de bits
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Ex: Converter o número hexadecimal abaixo para binário

$C6{,}4_h = 11000110{,}0100_b = 11000110{,}01_b$

Para converter um número binário *n* para o sistema numérico hexadecimal devemos agrupar os bits de *n* de quatro em quatro, garantindo que os quatro bits mais à direita da parte inteira estejam no mesmo agrupamento, e depois substituir cada agrupamento pelo dígito hexadecimal correspondente, de acordo com a tabela abaixo. Se necessário, deve-se adicionar zeros à esquerda do agrupamento mais à esquerda da parte inteira e zeros à direita do agrupamento mais à direita da parte fracionária.

Dígito Hexadecimal	Sequência de bits
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

Dígito Hexadecimal	Sequência de bits
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Ex: Converter o número binário abaixo para hexadecimal

$11000110{,}01_b = \underline{1100}\ \underline{0110},\underline{0100}_b = C6{,}4_h$

Para converter um número octal para hexadecimal podemos primeiramente convertê-lo para binário e depois converter o binário para hexadecimal.

Ex: Converter o número octal abaixo para hexadecimal

$306{,}2_o = 011\ 000\ 110{,}010_b = 1100\ 0110{,}0100_b = C6{,}4_h$

Para converter um número hexadecimal para octal podemos primeiramente convertê-lo para binário e depois converter o binário para octal.

Ex: Converter o número hexadecimal abaixo para octal

$C6{,}4_h = 1100\ 0110{,}0100_b = 011\ 000\ 110{,}010_b = 306{,}2_o$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 29-03-2021

Erros de Arredondamento

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Erros

Uma estratégia frequentemente utilizada para resolver um problema do mundo real é ilustrada pela figura abaixo.

Problema $\xrightarrow{\text{modelagem}}$ Modelo $\xrightarrow{\text{resolução}}$ Solução

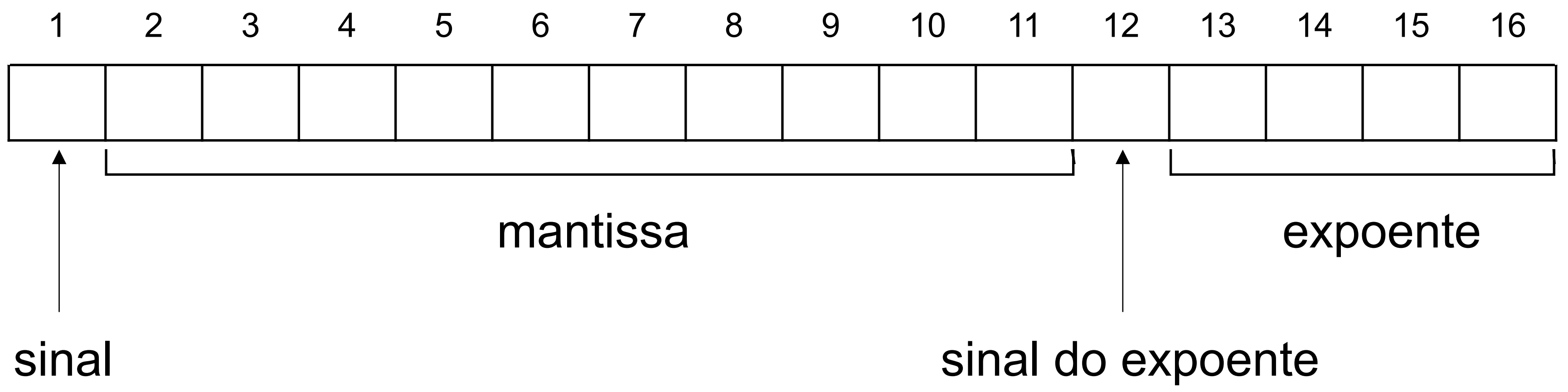
Na fase de modelagem alguns fatores que têm influência no problema podem ser desconsiderados. Isso dá origem a **erros de modelagem**. Em nosso estudo não iremos nos preocupar com erros de modelagem.

Na fase de resolução frequentemente é preciso alimentar o modelo com dados obtidos através de medição. Tais dados quase sempre são imprecisos. Vamos ignorar os **erros de medição**.

Erros de arrendondamento

Os erros de arredondamento decorrem basicamente da incapacidade de representar todos os números no computador. Para entender melhor esse fenômeno, considere um sistema de representação numérica usado numa calculadora hipotética.

Nessa calculadora os números são representados em notação científica normalizada na qual a parte inteira é sempre zero. São usados 16 bits para representar um número. O primeiro bit representa o sinal do número (0 para positivo, 1 para negativo), os 10 bits seguintes armazenam a mantissa (parte fracionária) do número, o próximo bit representa o sinal do expoente e os últimos quatro bits guardam o expoente.



Ex: representação de -36,25 na calculadora

$-36{,}25 = -100100{,}01_b = -0{,}10010001_b \times 10_b^{110_b}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0

O menor número positivo que pode ser representado nessa calculadora é:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

Que equivale a:

$0{,}1000000000_b \times 10_b^{-1111_b} = 0{,}0000000000000001_b = 2^{-16} = 0{,}0000152587890625$

Note que todos os números entre 0 e 2^{-16} não podem ser representados nessa calculadora 😔

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 05-04-2021

Erros de Truncamento

Prof: Glauber Cintra
glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Propagação de Erros

Um erro inicialmente insignificante pode propagar-se ao longo de um processo iterativo e atingir proporções problemáticas.

Como exemplo considere a medição da altura de um prédio utilizando a seguinte estratégia: um observador solta um objeto do topo do prédio e cronometra o tempo que ele leva para atingir o solo. Em seguida utiliza a seguinte fórmula:

$$\text{altura} = (g * t^2) / 2$$

onde g é a aceleração da gravidade e t é o tempo de queda que foi cronometrado. Usando $g = 9{,}8 m/s^2$, se $t = 3$ segundos, a altura calculada do prédio será $(9{,}8 * 3^2) / 2 = 44{,}1$ metros.

Suponha que foi realizada uma nova medição e foi cronometrado o tempo de queda de 3,6 segundos. Nesse caso, o cálculo da altura resultaria em $(9{,}8 * 3{,}6^2) / 2 = 63{,}504$ metros.

Observe que uma variação de 20% na medição do tempo resultou numa variação de 44% no resultado do cálculo 😳

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Os erros de arredondamento podem gerar resultados bastante inesperados. Considere que num sistema de representação numérica é possível representar até quatro dígitos da parte decimal, como na calculadora que descrevemos na aula anterior.

Sejam $x_1 = 0{,}3941 \times 10^4$ e $x_2 = 0{,}2345 \times 10^0$. A expressão $(x_2 + x_1) - x_1$ resulta em:

$$(0{,}2345 \times 10^0 + 0{,}3941 \times 10^4) - 0{,}3941 \times 10^4 = 0{,}3941 \times 10^4 - 0{,}3941 \times 10^4 = 0$$ 😳 😳

Observe que se calcularmos $x_2 + (x_1 - x_1)$ chegaremos no resultado correto:

$$0{,}2345 \times 10^0 + (0{,}3941 \times 10^4 - 0{,}3941 \times 10^4) = 0{,}2345 \times 10^0 + 0 = 0{,}2345 \times 10^0$$ 😀

Vejamos mais um exemplo. Considere o seguinte sistema:

$$
\begin{aligned}
0{,}003x_1 + 30x_2 &= 5{,}001 \\
x_1 + 4x_2 &= 1
\end{aligned}
$$

Multplicando a primeira equação por -1/0,003 temos:

$$
\begin{aligned}
-x_1 - 10000x_2 &= -1667 \quad (1) \\
x_1 + 4x_2 &= 1
\end{aligned}
$$

Somando essas duas equações temos $-9996x_2 = -1666$, logo $x_2 = 0{,}1667$.

Substituindo x_2 na equação (1) temos $-x_1 - 10000 \times 0{,}1667 = -1667$, que resulta em $x_1 = 0$.

Acontece que a solução exata é $x_1 = 1/3$ e $x_2 = 1/6$ 😱

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

$$0{,}003x_1 + 30x_2 = 5{,}001$$
$$x_1 + \quad 4x_2 = 1$$

Vamos resolver novamente, agora multiplicando a segunda equação por -0,003:

$$0{,}003x_1 + \quad 30x_2 = 5{,}01$$
$$-0{,}003x_1 - 0{,}012x_2 = -0{,}003 \ (2)$$

Somando essas duas equações temos $29{,}988x_2 = 4{,}998$, logo $x_2 = 0{,}1667$.

Substituindo x_2 na equação (2) temos $-0{,}003x_1 - 0{,}012x0{,}1667 = -0{,}003$, que resulta em $x_1 = 0{,}3332$ 😀

Erros de Truncamento

Os erros de truncamento são aqueles que resultam da interrupção de um processo de cálculo.

Por exemplo, podemos calculo o seno de um ângulo usando a seguinte fórmula que deriva da Série de Taylor:

seno(x) = $x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! - \ldots$

Ex:

seno($\pi/6$) $\cong \pi/6 \cong 0{,}523598775598299$

seno($\pi/6$) $\cong \pi/6 - (\pi/6)^3/3! \cong 0{,}499674179394364$

seno($\pi/6$) $\cong \pi/6 - (\pi/6)^3/3! + (\pi/6)^5/5! \cong 0{,}500002132588792$

seno($\pi/6$) $\cong \pi/6 - (\pi/6)^3/3! + (\pi/6)^5/5! - (\pi/6)^7/7! \cong 0{,}499999991869023$

seno($\pi/6$) $\cong \pi/6 - (\pi/6)^3/3! + (\pi/6)^5/5! - (\pi/6)^7/7! + (\pi/6)^9/9! \cong 0{,}500000000202 8$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 09-04-2021

Sistemas Lineares

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Sistemas Lineares

Um *sistema linear* (SL) é um conjunto de equações ou inequações lineares. Em nosso estudo, trabalharemos apenas com SL's constituídos somente de equações.

Dizemos que um SL é *quadrado* se ele tem a mesma quantidade de equações e de variáveis. Trabalharemos apenas com SL's quadrados.

A seguir está um exemplo de SL quadrado com duas equações:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

A forma geral de um SL quadrado com *n* variáveis é:

variável

coeficiente da variável

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1$$

termo independente

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n$$

Podemos escrever o SL na forma matricial da seguinte maneira: ***Ax* = *b*.** Nessa notação, *A* é a matriz de coeficientes, *x* é o vetor de variáveis e *b* é o vetor de termos independentes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A *matriz aumentada* de um SL é a matriz obtida concatenando-se a matriz de coeficientes com o vetor de termos independentes.

$$Matriz\ aumentada = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{bmatrix}$$

Ex:

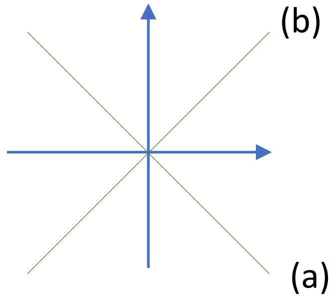
$x_1 + \ \ x_2 = 3$
$-x_1 + 3x_2 = 5$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad Matriz\ aumentada = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Os SL's podem ser classificados quanto à quantidade de soluções que possuem:

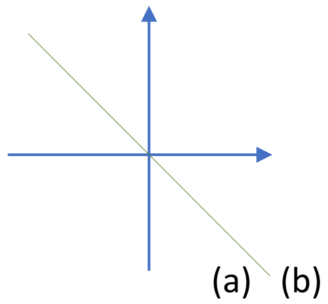
- **Compatível (possível) determinado**: possui uma única solução

Ex: $x + y = 0$ (a)
$x - y = 0$ (b)
solução: $x = 0, y = 0$



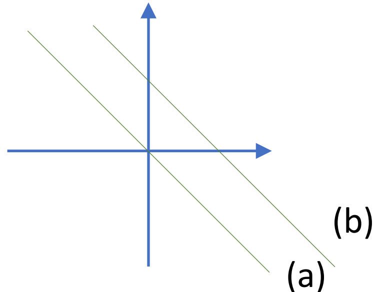
- **Compatível indeterminado**: possui infinitas soluções

Ex: $x + y = 0$ (a)
$2x + 2y = 0$ (b)
soluções: $x = -y$ ($x = 0, y = 0$; $x = 1, y = -1$; $x = 2, y = -2$; ...)



- **Incompatível (impossível)**: não possui solução

Ex: $x + y = 0$ (a)
$x + y = 1$ (b)



Uma matriz quadrada é dita *triangular superior* (TS) se todos os seus elementos abaixo da diagonal principal são *nulos*, ou seja, iguais a zero.

Ex:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Uma matriz quadrada é *triangular inferior* (TI) se todos os seus elementos acima da diagonal principal são *nulos*.

Ex:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Um SL é dito TS se a sua matriz de coeficientes é TS.

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Analogamente, um SL é TI se a sua matriz de coeficientes é TI.

Ex:

$$\begin{aligned} 3x_1 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por que SL's triangulares são *baaaaaaaacanas*?

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 12-04-2021

Substituição retroativa e progressiva

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Substituição retroativa

A forma geral de um SL TS é:

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
\dots & \\
a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\
a_{n,n}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Podemos resolver facilmente um SL TS da seguinte maneira: utilizamos a última equação para calcular x_n. Em seguida, substituímos o valor de x_n na penúltima equação e calculamos x_{n-1}. Substituímos x_n e x_{n-1} na antepenúltima equação e calculamos x_{n-2}, e assim sucessivamente até obter o valor de todas as variáveis.

Esse procedimento é chamado de *substituição retroativa*.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Observe que o cálculo de cada variável x_i é feito usando a seguinte fórmula:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}}$$

Se $a_{i,i}$ for igual a 0 devemos verificar se $b_i = \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j$. Em caso afirmativo, temos a equação $0x_i = 0$. Note que qualquer valor de x_i satisfaz a equação. Dizemos que x_i é *variável livre*.

Vamos atribuir valor 0 às variáveis livres.

Se $a_{i,i}$ for igual a 0 mas $b_i \neq \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j$, temos a inequação $0x_i \neq 0$. Observe que nenhum valor de x_i satisfaz esta equação. Isso significa que o SL é *incompatível*.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Algoritmo sretro

Entrada: M, a matriz aumentada de um SL TS com n variáveis
Saída: se o SL for determinado, atribui a x a solução do SL e devolve 0; se for indeterminado, atribui a x uma solução de SL e devolve 1; se for incompatível, devolve 2

```
tipo = 0
para i = n até 1 (passo -1)
    soma = 0
    para j = i + 1 até n
        soma = soma + M[i][j] * x[j]
    se M[i][i] = 0
        se soma = M[i][n + 1]
            x[i] = 0              // variável livre
            tipo = 1
        se não
            devolva 2 e pare      // SL incompatível
    se não
        x[i] = (M[i][n + 1] – soma) / M[i][i]
devolva tipo e x
```

Obs: O Algoritmo sretro requer tempo $O(n^2)$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$x_3 = 3$
$x_2 = 2$
$x_1 = 1$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_3 &= 6 \\ 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$x_3 = 3$
$x_2 = 0$ (variável livre)
$x_1 = 3$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_3 &= 7 \\ 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$x_3 = 3$
SL incompatível

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Substituição progressiva

A forma geral de um SL TI é:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= b_2 \\ &\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Para resolver um SL TI utilizamos a primeira equação para calcular x_1. Em seguida, substituímos o valor de x_1 na segunda equação e calculamos x_2. Substituímos x_1 e x_2 na terceira equação e calculamos x_3, e assim por diante até obter o valor de todas as variáveis. Esse procedimento é chamado de *substituição progressiva*.

Note que o cálculo de cada variável x_i é feito usando a seguinte fórmula:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j}{a_{i,i}}$$

Se $a_{i,i}$ for igual a 0 devemos verificar se $b_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j$. Em caso afirmativo, temos a equação $0x_i = 0$. Neste caso x_i é *variável livre*. Vamos atribuir valor 0 às variáveis livres.

Se $a_{i,i}$ for igual a 0 mas $b_i \neq \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j$, nenhum valor de x_i satisfaz a equação. Isso significa que o SL é *incompatível*.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex:
$$\begin{aligned} 3x_1 \phantom{{}-x_2-x_3} &= 9 \\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}-x_3} &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 3$
$x_2 = 2$
$x_3 = 5$

$$\begin{aligned} 3x_1 &= 9 \\ 2x_1 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 3$
$x_2 = 0$ (variável livre)
$x_3 = 3$

$$\begin{aligned} 3x_1 &= 9 \\ 2x_1 &= 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 3$
SL incompatível

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 16-04-2021

Método de Gauss

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Métodos de resolução de SL’s

Os métodos de resolução de SL’s podem ser classificados em duas categorias: diretos e indiretos (ou iterativos). Nos métodos diretos são aplicadas transformações nos SL’s de modo que eles adquiram certas propriedades e depois a solução do SL é calculada. Nos métodos indiretos, a cada iteração é calculada uma solução aproximada e a resolução é finalizada quando estivermos “satisfeitos”.

O *Método de Gauss* é um método direto de resolução de SL’s. Antes de descrevê-lo, precisamos de algumas definições.

Dizemos que um SL S é *equivalente* a um SL S’ se ambos possuem *as mesmas soluções*.

Uma *transformação elementar* é uma operação que se aplicada a um SL S produz um SL S’ equivalente a S. As seguintes operações são transformações elementares:

- Alterar a ordem de duas equações do SL
- Alterar a ordem de duas variáveis numa equação do SL
- Multiplicar uma equação do SL por uma constante *não nula*
- Substituir uma equação do SL pela soma dessa equação com outra equação do SL

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Método de Gauss

A ideia básica do Método de Gauss é aplicar transformações elementares ao SL que se deseja resolver até obter um SL equivalente que seja TS e depois utilizar substituição retroativa.

Em cada iteração *i* do Método de Gauss utilizamos o elemento $a_{i,i}$ da matriz aumentada do SL como *pivô*. Para cada linha *j* da matriz aumentada que esteja abaixo da linha *i* calculamos o multiplicador m_j da seguinte maneira:

$$m_j = -\frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$$

e depois substituímos a linha *j* (L_j) por $L_j + m_j . L_i$. Note que o novo valor de $a_{j,i}$ será:

$$a_{j,i} = a_{j,i} + m_j . a_{i,i} = a_{j,i} - \frac{a_{j,i}}{a_{i,i}} . a_{i,i} = a_{j,i} - a_{j,i} = 0$$

Com isso garantimos que ao final da iteração todos os elementos abaixo do pivô sejam nulos. Após realizar $n - 1$ iterações teremos um SL TS.

Se o pivô ($a_{i,i}$) for nulo, devemos trocar a linha do pivô por uma linha abaixo na qual o elemento na coluna do pivô seja não nulo. Se não existir tal linha, podemos passar para a próxima iteração 😄

Método de Gauss

Entrada: M, a matriz aumentada de um SL com n variáveis
Saída: transforma M na matriz aumentada de um SL TS equivalente ao SL fornecido como entrada

```
para i = 1 até n – 1
    se M[i][i] = 0
        j = i + 1
        enquanto j ≤ n e M[j][i] = 0
            j++
        se j ≤ n
            troque as linhas i e j de M
    se M[i][i] ≠ 0
        para j = i + 1 até n
            mult = -M[j][i] / M[i][i]
            para k = 1 até n + 1
                M[j][k] = M[j][k] + mult * M[i][k]
```

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Método de Gauss

Entrada: M, a matriz aumentada de um SL com n variáveis

Saída: transforma M na matriz aumentada de um SL TS equivalente ao SL fornecido como entrada

```
para i = 1 até n – 1
    se M[i][i] = 0
        j = i + 1
        enquanto j ≤ n e M[j][i] = 0
            j++
        se j ≤ n
            troque as linhas i e j de M
    se M[i][i] ≠ 0
        para j = i + 1 até n
            mult = -M[j][i] / M[i][i]
            M[j][i] = 0
            para k = i + 1 até n + 1
                M[j][k] = M[j][k] + mult * M[i][k]
```

Obs: O Método de Gauss requer tempo $\Theta(n^3)$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 12 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} m_2 = -4 \\ m_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & 11 \end{bmatrix} m_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 22 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 22 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ m_2 = -4 \\ m_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} m_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 22 \\ -x_1 - \ \ x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 22 \\ -1 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ m_2 = -4 \\ m_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

(*variável livre*)

Ex: $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 22 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 &= 8 \end{aligned}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 22 \\ -1 & -1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ m_2 = -4 \\ m_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

incompatível

$x_3 = 3$

Um pouco sobre ponteiros... (na linguagem C)

Uma variável ponteiro armazena um endereço de memória (número inteiro).

Ex:
```
int *p;          /* ponteiro tipado */
void *q;         /* ponteiro puro, genérico, não tipado */
```

Operações envolvendo ponteiros:

Referência: o operador & (unário) devolve o endereço do operando
Derreferência: o operador * (unário) devolve o conteúdo da região apontada pelo operando

Ex:
```
int *p, x = 5;
p = &x;                 /* p recebe o endereço da variável x */
printf("%d", *p);       /* imprime 5 */
```

Derreferência de campo: o operador -> devolve o valor de um campo (segundo operando) de uma estrutura apontada pelo primeiro operando

Ex:
```
struct data {int dia, mes, ano;} nascimento, *d;
nascimento.dia = 13;
d = &nascimento;        /* d recebe o endereço da variável nascimento */
printf("%d", d->dia);   /* imprime 13 */
```

Aritmética de ponteiros

Regra 1: se p é um ponteiro, a expressão p + i resulta em p somado com i multiplicado pelo tamanho do tipo de dados que p aponta, ou seja:

p + i equivale a **p + i * sizeof(p)**

Obs: sizeof(p) resulta na quantidade de bytes do tipo para onde p aponta. Se p é um ponteiro puro, sizeof(p) = 1.

Ex:
```
double *p = 1000;
printf("%d", p + 2);    /* imprime 1016 */
```

Regra 2: **p + i** equivale a **i + p**

Regra 3: Se v é um vetor, a expressão v resulta no endereço base do vetor.

Ex:
```
int v[4] = {3, 8, 7, 1};
printf("%d", v);        /* imprime o endereço base do vetor */
```

Regra 4: A expressão **v[i]** equivale a ***(v + i)**

Ex:
```
int v[4] = {3, 8, 7, 1};
printf("%d", v[2]);        /* imprime 7 */
printf("%d", *(v + 2));    /* imprime 7 */
printf("%d", *(2 + v));    /* imprime 7 */
printf("%d", 2[v]);        /* imprime 7 */
```

Alocação dinâmica de vetores

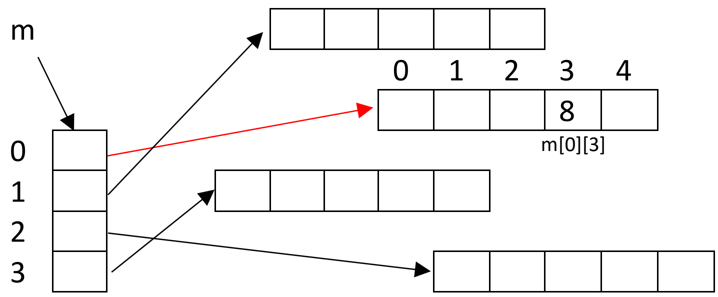
```
double *v;
v = malloc(sizeof(v) * 5); /* se for possível, aloca um bloco de memória com a quantidade de bytes equivalente à expressão fornecida como parâmetro e devolve o endereço desse bloco, caso contrário devolve um ponteiro nulo */
if (v == NULL){ /* falta de memória */ }

*(v + 1) = 5;    /* equivale a v[1] = 5 */
```

Alocação dinâmica de matrizes bidimensionais

Para alocar dinamicamente uma matriz bidimensional devemos alocar um vetor de ponteiros com uma posição para cada linha da matriz e em seguida alocar as linhas da matriz. Cada posição do vetor de ponteiros deverá apontar para uma linha da matriz, como ilustrado na figura abaixo.

Ex: double **m;



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 30-04-2021

Método de Jordan

Prof: Glauber Cintra
glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Sistemas Lineares Diagonais

Uma matriz quadrada é dita *diagonal* se todos os seus elementos fora da diagonal principal são *nulos*, ou seja, iguais a zero. Uma matriz diagonal é ao mesmo tempo TS e TI.

Ex:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Um SL é diagonal se sua matriz de coeficientes é diagonal.

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 2 \\ -x_2 \qquad &= 4 \\ 3x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

solução: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 3$

Método de Jordan

A ideia básica do Método de Jordan é aplicar transformações elementares ao SL que se deseja resolver até obter um SL equivalente que seja diagonal.

Em cada iteração *i* do Método de Jordan utilizamos o elemento $a_{i,i}$ da matriz aumentada do SL como *pivô*. Para cada linha *j* da matriz aumentada ($j \neq i$) calculamos o multiplicador m_j da seguinte maneira:

$$m_j = -\frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$$

e depois substituímos a linha *j* (L_j) por $L_j + m_j.L_i$. Note que o novo valor de $a_{j,i}$ será:

$$a_{j,i} = a_{j,i} + m_j.a_{i,i} = a_{j,i} - \frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}.a_{i,i} = a_{j,i} - a_{j,i} = 0$$

Com isso garantimos que ao final da iteração todos os elementos abaixo e acima do pivô sejam nulos. Após realizar *n* iterações teremos um SL diagonal.

Se o pivô ($a_{i,i}$) for nulo, devemos trocar a coluna do pivô por uma coluna da matriz de coeficientes que esteja à direita e na qual o elemento na linha do pivô seja não nulo. Se não existir tal coluna, podemos preencher a coluna do pivô com zeros 😄

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 12 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ m_2 = -4 \\ m_3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{array}{l} m_1 = {}^{1}/_{5} \\ \\ m_3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & {}^{1}/_{5} & {}^{16}/_{5} \\ 0 & -5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} m_1 = {}^{-1}/_{35} \\ m_2 = {}^{-6}/_{7} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 22 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 22 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} m_2 = -4 \\ m_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 = {}^{1}/_{6} \\ \\ m_3 = {}^{-1}/_{6} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 = {}^{-1}/_{5} \\ m_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 & x_2 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 16 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 & 16 \\ -1 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ m_2 = -4 \\ m_3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} m_1 = {}^1/_4 \\ m_2 = 0 \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 5$
$x_2 = 0$ (*variável livre*)
$x_3 = 1$

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 22 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \color{red}{1} & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 & 22 \\ -1 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} m_2 = -4 \\ m_3 = 1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \color{red}{0} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & \color{red}{4} & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} m_1 = 1/4 \\ m_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

SL incompatível

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 03-05-2021

Método da Pivotação Completa

Prof: Glauber Cintra
glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Método da Pivotação Completa

O Método da Pivotação Completa é semelhante ao Método de Gauss, com apenas uma diferença significativa. Em cada iteração usamos como pivô o maior elemento (em módulo) dentre os elementos das linhas da matriz de coeficientes que ainda não foram linhas pivotais. Como 0 é o menor de todos os números, em módulo, não usaremos pivôs nulos.

Após realizar as iterações devemos reorganizar as linhas e colunas de modo a obter uma matriz TS e depois utilizar substituição retroativa. Para isso devemos dispor as linhas na mesma ordem em que elas foram linhas pivotais (primeira linha pivotal deve ser primeira linha da matriz TS, segunda linha pivotal deve ser segunda linha da matriz TS e assim por diante). A mesma reordenação deve ser feita com as colunas.

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 12 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 = -1/4 \\ m_2 = 1/4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} \\ \frac{15}{4} & 0 & \frac{5}{2} & \frac{55}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -6 & 9 \\ 15 & 0 & 10 & 55 \end{bmatrix} m_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -28/3 & -28/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 7 \\ 15 & 0 & 10 & 55 \\ 0 & 0 & -28 & -28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_1 & x_3 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 15 & 10 & 55 \\ 0 & 0 & -28 & -28 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{matrix}$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 07-05-2021

Método de Jacobi e Método de Gauss-Seidel

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Método de Jacobi

O *Método de Jacobi* é um método indireto (iterativo) de resolução de SL’s. A partir de uma solução aproximada inicial, a cada iteração calculamos uma nova solução aproximada até ficarmos *satisfeitos*.

Inicialmente utilizamos cada equação *i* do SL para explicitar a variável x_i.

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}}$$

Em seguida, a partir de uma solução inicial, em cada iteração calculamos uma nova solução aproximada usando as fórmulas obtidas com a explicitação das variáveis e a solução calculada na iteração anterior.

Vamos usar a solução trivial, $x_i = 0$ ($i = 1, 2, ..., n$) como solução inicial.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Ex:
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= -7 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x_1 = (6 - x_2 + x_3)/4}$$

$$x_2 = (-7 - x_1 - x_3)/-3$$

$$\boldsymbol{x_2 = (7 + x_1 + x_3)/3}$$

$$\boldsymbol{x_3 = (7 + x_1 - x_2)/5}$$

x_1	x_2	x_3
0,00000	0,00000	0,00000
1,50000	2,33333	1,40000
1,26667	3,30000	1,23333
0,98333	3,16667	0,99333
0,95667	2,99222	0,96333
0,99278	2,97333	0,99289
1,00489	2,99522	1,00389
1,00217	3,00293	1,00193
0,99975	3,00137	0,99985
0,99962	2,99987	0,99968
0,99995	2,99977	0,99995
1,00005	2,99997	1,00004
1,00002	3,00003	1,00002
1,00000	3,00001	1,00000

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Método de Gauss-Seidel

O *Método de Gauss-Seidel* é quase idêntico ao Método de Jacobi. A única diferença é que no Método de Gauss-Seidel usamos nos cálculos sempre o valor atual de cada variável.

Ex:
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= -7 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 &= 7 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x_1 = (6 - x_2 + x_3)/4}$$

$$\boldsymbol{x_2 = (7 + x_1 + x_3)/3}$$

$$\boldsymbol{x_3 = (7 + x_1 - x_2)/5}$$

x_1	x_2	x_3
0,00000	0,00000	0,00000
1,50000	2,83333	1,13333
1,07500	3,06944	1,00111
0,98292	2,99468	0,99765
1,00074	2,99946	1,00026
1,00020	3,00015	1,00001
0,99996	2,99999	0,99999
1,00000	3,00000	1,00000

Infelizmente o Método de Jacobi e o Método de Gauss-Seidel podem não convergir para a solução do problema 😳

Ex: $x_1 + 4x_2 = 5$
$5x_1 + x_2 = 6$

$\boldsymbol{x_1 = 5 - 4x_2}$

$\boldsymbol{x_2 = 6 - 5x_1}$

x_1	x_2
0	0
5	-19
81	-399
1601	-7999
32001	-159999
640001	-3199999
12800001	-63999999
256000001	-1279999999
5120000001	-25599999999
102400000001	-511999999999
2048000000001	-10239999999999

😔

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

No entanto, é possível mostrar que se o SL satisfizer o critério das linhas ou o critério das colunas, o Método de Jacobi e o Método de Gauss-Seidel irão convergir para a solução do problema 😀

Critério das linhas: $|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \ (i = 1, 2, \ldots, n)$

Critério das colunas: $|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{j,i}| \ (i = 1, 2, \ldots, n)$

Uma matriz que satisfaz o critério das linhas ou o critério das colunas é dita *diagonal dominante*. O Método de Jacobi e o Método de Gauss-Seidel irão convergir se a matriz de coeficientes do SL for diagonal dominante.

Ex:
$$x_1 + 4x_2 = 5$$
$$5x_1 + x_2 = 6$$

Este SL não satisfaz o critério das linhas nem o critério das colunas.

Se invertermos a ordem das equações deste SL ele irá satisfazer o critério das linhas e o critério das colunas.

Ex: $5x_1 + x_2 = 6$
$x_1 + 4x_2 = 5$

$\boldsymbol{x_1 = (6 - x_2)/5}$

$\boldsymbol{x_2 = (5 - x_1)/4}$

x_1	x_2
0,00000	0,00000
1,20000	0,95000
1,01000	0,99750
1,00050	0,99988
1,00003	0,99999
1,00000	1,00000

😀

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 10-05-2021

Sistemas Lineares Complexos

Condicionamento de Sistemas Lineares

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Sistemas Lineares Complexos

Seja $Ax = b$ um SL com números complexos:

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + (1 + 3i)\, x_2 &= 2 + 4i \\ (1 - i)\, x_1 + \qquad 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Vamos definir:
Matriz M: parte real dos coeficientes de A
Matriz N: coeficiente da parte imaginária dos coeficientes de A

$$\boldsymbol{A = M + Ni}$$

Vetor c: parte real dos termos independentes
Vetor d: coeficiente da parte imaginária dos termos independentes

$$\boldsymbol{b = c + di}$$

Vetor s: parte real das variáveis
Vetor t: coeficiente da parte imaginária das variáveis

$$\boldsymbol{x = s + ti}$$

Note que:

$Ax = b$

Como $\mathbf{A = M + Ni, x = s + ti, b = c + di}$

$(M + Ni)(s + ti) = c + di$

$Ms + Mti + Nsi - Nt = c + di$

$Ms - Nt + Nsi + Mti = c + di$

Desmembrando a equação acima:

$Ms - Nt = c$

$Nsi + Mti = di$

Obtemos assim um SL sem números complexos

$Ms - Nt = c$

$Ns + Mt = d$

A matriz aumentada desse SL é : $\begin{bmatrix} M & -N & c \\ N & M & d \end{bmatrix}$

Ex:

$$x_1 + (1 + 3i)\, x_2 = 2 + 4i$$
$$(1 - i)\, x_1 + 3x_2 = 5$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & t_1 & t_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} m_2 = -1 \\ m_3 = 0 \\ m_4 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} m_3 = -3/2 \\ m_4 = -1/2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1/2 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} m_4 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1/2 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$s_1 = 1$, $s_2 = 1$, $t_1 = 1$, $t_2 = 0$

Solução: $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Verificando:

Solução: $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1$

$$\begin{aligned} x_1 + (1 + 3i)\, x_2 &= 2 + 4i \\ (1 - i)\, x_1 + \quad 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$1 + i + (1 + 3i) = 2 + 4i$ ✅

$(1 - i)(1 + i) + 3 = 1 + 1 + 3 = 5$ ✅

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Condicionamento de Sistemas Lineares

Se x' é uma solução aproximada para o SL $Ax = b$ então $Ax' = b + r$, onde r é o *resíduo* da solução x'.

Em geral, se os valores de r são muito próximos de zero, x' é uma boa solução aproximada.

No entanto, isso nem sempre é verdade! 😳

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + 1{,}001x_2 &= 2{,}001 \\ 0{,}999x_1 + x_2 &= 1{,}999 \end{aligned}$$

O resíduo da solução aproximada $x' = [2 \quad 0{,}001]$ é: $r = [-0{,}000001 \quad 0]$ (🧐 x' parece ser uma boa aproximação)

No entanto a solução exata é: $x = [1 \quad 1]$ 😔

Quando isso ocorre, dizemos que o SL é ***mal condicionado***.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Podemos estimar o condicionamento de um SL através do *determinante normalizado* de sua matriz de coeficientes.

$$\det(norm\ A) = \frac{|\det(A)|}{\alpha_1.\alpha_2.\cdots.\alpha_n}$$

Onde: $\alpha_i = \sqrt{{a_{i,1}}^2 + {a_{i,2}}^2 + \cdots + {a_{i,n}}^2}$

Quanto mais próximo de 1 for o determinante normalizado, melhor o condicionamento do SL.

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + 1{,}001x_2 &= 2{,}001 \\ 0{,}999x_1 + x_2 &= 1{,}999 \end{aligned}$$

$\det(A) = 1\text{x}1 - 0{,}999\text{x}1{,}001 = 0{,}000001$

$\alpha_1 = \sqrt{1^2 + 1{,}001^2} = \sqrt{2{,}002001}$ e $\alpha_2 = \sqrt{0{,}999^2 + 1^2} = \sqrt{1{,}998001}$

$$\det(norm\ A) = \frac{0{,}000001}{\sqrt{2{,}002001} \cdot \sqrt{1{,}998001}} = 0{,}0000005$$

Concluímos que esse SL é ***mal condicionado***

Esse conteúdo e exercícios encontram-se nas páginas 72 a 82 do livro

Exercício: utilizando a estratégia explicada na aula de hoje, resolva o SL abaixo.

$$\begin{aligned} (1 + 2i)\, x_1 + 3x_2 &= -5 + 4i \\ -x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned}$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 14-05-2021

Equações Algébricas

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

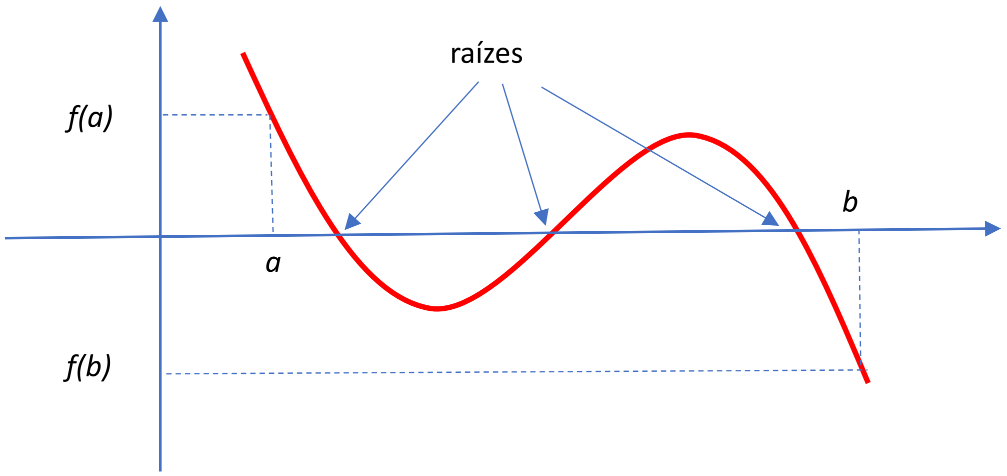
Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Equações Algébricas

Um problema de grande importância prática é, dada uma função *f*, determinar um valor *x* tal que *f(x)* = 0. Tal valor *x* é chamado de ***raiz*** ou ***zero*** da função *f*. Um esquema frequentemente utilizado para encontrar uma raiz de *f* é:

- Isolar uma raiz de *f*, ou seja, determinar um intervalo [*a, b*] que contenha uma raiz de *f*;
- Calcular sucessivas aproximações para uma raiz de *f* contida no intervalo [*a, b*]

Teorema: Seja *f* uma função contínua num intervalo [*a, b*]. Se *f(a)*f(b)* < 0 então existe pelo menos uma raiz de *f* no intervalo [*a, b*].



A forma geral de uma equação algébrica de grau n é:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Teorema Fundamental da Álgebra: Uma equação algébrica de grau n possui exatamente n raízes, reais ou complexas, se contadas de acordo com suas multiplicidades.

Obs: uma raiz ε de p tem multiplicidade m se: $p(\varepsilon) = p'(\varepsilon) = p''(\varepsilon) = \dots = p^{m-1}(\varepsilon) = 0$ e $p^{m}(\varepsilon) \neq 0$.

Ex: $p(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$
$p(2) = 2^4 - 5*2^3 + 6*2^2 + 4*2 - 8 = 0$
$p'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4 \Rightarrow p'(2) = 4*2^3 - 15*2^2 + 12*2 + 4 = 0$
$p''(x) = 12x^2 - 30x + 12 \Rightarrow p''(2) = 12*2^2 - 30*2 + 12 = 0$
$p'''(x) = 24x - 30 \Rightarrow p'''(2) = 24*2 - 30 = 18$

2 é uma raiz de p que tem multiplicidade 3

Obs: $p(x) = (x - 2)^3 (x + 1)$

Teorema: Se os coeficientes de uma equação algébrica *p* são todos reais então as raízes complexas de *p* são *conjugadas em pares*, ou seja, se $\alpha + \beta i$ é raiz de *p* então $\alpha - \beta i$ também é raiz de *p*.

Ex: $p(x) = x^2 - 6x + 10$

$\Delta = (-6)^2 - 4*1*10 = -4$

As raízes são $\frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = 3 + i \text{ e } 3 - i$

Corolário: Se os coeficientes de uma equação algébrica de grau *ímpar* são todos reais então ela possui pelo menos uma raiz real.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Método de Briot-Ruffini

Seja p uma equação algébrica de grau n. Podemos calcular com eficiência o valor de $p(c)$ calculando os valores de $b_n, b_{n-1}, ..., b_0$, nessa ordem, sendo:

$$b_n = a_n$$

$$b_i = cb_{i+1} + a_i$$

É possível mostrar que $p(c) = b_0$.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
c		cb_n	cb_{n-1}		cb_2	cb_1
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}		b_1	$p(c)= b_0$

Ex: $p(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 10$

	1	-7	16	-10
$c = 2$		2	-10	12
	1	-5	6	$p(2) = 2$

Exercícios: aplique o Método de Briot-Ruffini para calcular $p(1)$ e $p(-3)$

	1	-7	16	-10
c = 1		1	-6	10
	1	-6	10	p(1) = 0

	1	-7	16	-10
c = -3		-3	30	-138
	1	-10	46	p(-3) = -148

Método de Horner

Esse método consiste em reescrever o polinômio numa forma especial chamada de *Forma de Horner*.

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$
$p(x) = (a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + a_{n-2}x^{n-3} + \ldots + a_1)x + a_0$
$p(x) = ((a_n x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + a_{n-2}x^{n-4} + \ldots + a_2)x + a_1)x + a_0$
...
$p(x) = (\ldots (a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_2)x + a_1)x + a_0$ $\Leftarrow$ Forma de Horner

Ex: $p(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 10$
$p(x) = ((x - 7)x + 16)x - 10$
$p(2) = ((2 - 7)2 + 16)2 - 10 = 2$

Exercícios: aplique o Método de Horner para calcular $p(1)$ e $p(-3)$

$p(1) = ((1 - 7)1 + 16)1 - 10 = 0$
$p(-3) = ((-3 - 7)-3 + 16)-3 - 10 = -148$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Regra de Sinais de Descartes: O número de raízes reais positivas de uma equação algébrica *p*, denotado por n^+, é igual ao número de *variações* de sinal na sequência de coeficientes de *p*, ignorando-se os coeficientes iguais a zero, menos um número par (contando as raízes de acordo com suas multiplicidades).

Corolário: O número de raízes reais negativas de uma equação algébrica *p*, denotado por n^-, é igual ao número de *permanências* de sinal na sequência de coeficientes de *p*, ignorando-s os coeficientes iguais a zero, menos um número par (contando as raízes de acordo com suas multiplicidades).

Ex: $p(x) = x^4 – 5x^3 – 7x^2 + 29x + 30$

Variações de sinal: 2
Permanências de sinal: 2

$n^+ = 2$ ou 0
$n^- = 2$ ou 0

Obs: as raízes de *p* são -2, -1, 3 e 5 😀

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 17-05-2021

Teorema de Lagrange

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Teorema de Lagrange: Seja *p* uma equação algébrica de grau *n* com $a_n > 0$ e $a_0 \neq 0$, *k* o maior índice dentre os índices dos coeficientes negativos de *p* e *B* o módulo do menor coeficiente negativo de *p*. Então

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{B/a_n}$$

é um limite superior para as raízes reais positivas de *p*.

Ex: $p(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$

$n = 4$, $k = 3$, $B = 7$, $a_n = 1$

$$L = 1 + \sqrt[4-3]{7/1} = 8$$

As raízes reais positivas de *p* são menores ou iguais a 8.

Podemos calcular um limite inferior para as raízes reais positivas de *p* usando o polinômio

$$p_1(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$$

$p_1(x) = x^n(a_n(1/x)^n + a_{n-1}(1/x)^{n-1} + \dots + a_1(1/x) + a_0)$
$p_1(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_1x^{n-1} + a_0x^n = \boldsymbol{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}$

Note que se $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i$ são raízes reais positivas de *p* então $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, \cdots, 1/\alpha_i$ são raízes reais positivas de p_1. Se L_1 é um limite superior para as raízes reais positivas de p_1 então $1/\alpha_j \leq L_1$, logo $\alpha_j \geq 1/L_1$ $(j = 1, \cdots, i)$. Concluímos que $1/L_1$ é um limite inferior para as raízes reais positivas de *p.* Assim, se x^+ é uma raiz real positiva de *p* temos que:

$$1/L_1 \leq x^+ \leq L$$

Ex: $p(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$

$p_1(x) = 30x^4 + 29x^3 - 7x^2 - 5x + 1$

$n = 4$, $k = 2$, $B = 7$, $a_n = 30$

$$L_1 = 1 + \sqrt[4-2]{7/30} \cong 1{,}4830$$

Concluímos que as raízes reais positivas de *p* estão entre 0,6742 e 8.

Podemos calcular um limite inferior para as raízes reais negativas de p usando o polinômio

$$p_2(x) = p(-x)$$

$p_2(x)$ = $\mathbf{a_n(-x)^n + a_{n-1}(-x)^{n-1} + \ldots + a_1(-x) + a_0}$

Note que se $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i$ são raízes reais negativas de p então $-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots, -\alpha_i$ são raízes reais positivas de p_2. Se L_2 é um limite superior para as raízes reais positivas de p_2 então $-\alpha_j \leq L_2$, logo $\alpha_j \geq -L_2 (j = 1, \cdots, i)$. Concluímos que $-L_2$ é um limite inferior para as raízes reais negativas de p.

Ex: $p(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$
$p_2(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30$

$n = 4$, $k = 2$, $B = 29$, $a_n = 1$

$$L_2 = 1 + \sqrt[4-2]{29/_1} \cong 6{,}3851$$

Concluímos que as raízes reais negativas de p são maiores ou iguais a -6,3851.

Podemos calcular um limite superior para as raízes reais negativas de p usando o polinômio

$$p_3(x) = x^n p(-1/x)$$

Note que se $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i$ são raízes reais negativas de p então $^{-1}/_{\alpha_1}, ^{-1}/_{\alpha_2}, \cdots, ^{-1}/_{\alpha_i}$ são raízes reais positivas de p_3. Se L_3 é um limite superior para as raízes reais positivas de p_3 então $^{-1}/_{\alpha_j} \leq L_3$, logo $\alpha_j \leq ^{-1}/_{L_3}$ $(j = 1, \cdots, i)$. Concluímos que $^{-1}/_{L_3}$ é um limite superior para as raízes reais negativas de p. Assim, se x^- é uma raiz real negativa de p temos que:

$$-L_2 \leq x^- \leq ^{-1}/_{L_3} \quad \text{e} \quad ^{1}/_{L_1} \leq x^+ \leq L$$

Ex: $p(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$

$p_3(x) = 30x^4 - 29x^3 - 7x^2 + 5x + 1$

$n = 4$, $k = 3$, $B = 29$, $a_n = 30$

$$L_3 = 1 + \sqrt[4-3]{^{29}/_{30}} \cong 1{,}9667$$

Concluímos que as raízes reais negativas de p estão entre -6,3851 e -0,5085 e as raízes reais positivas de p estão entre 0,6742 e 8.

Obs: as raízes de p são -2, -1, 3 e 5 😀

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 21-05-2021

Método Gráfico

Método da Bisseção

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

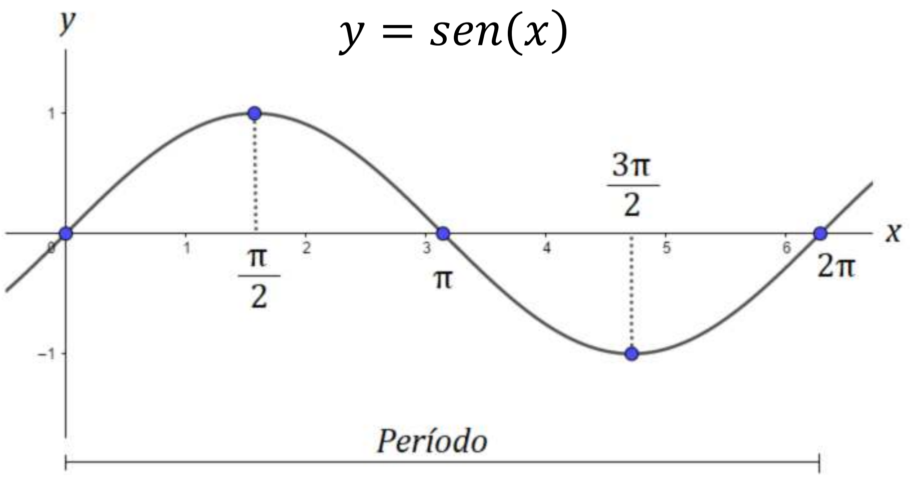
Prepare-se para a aula virtual

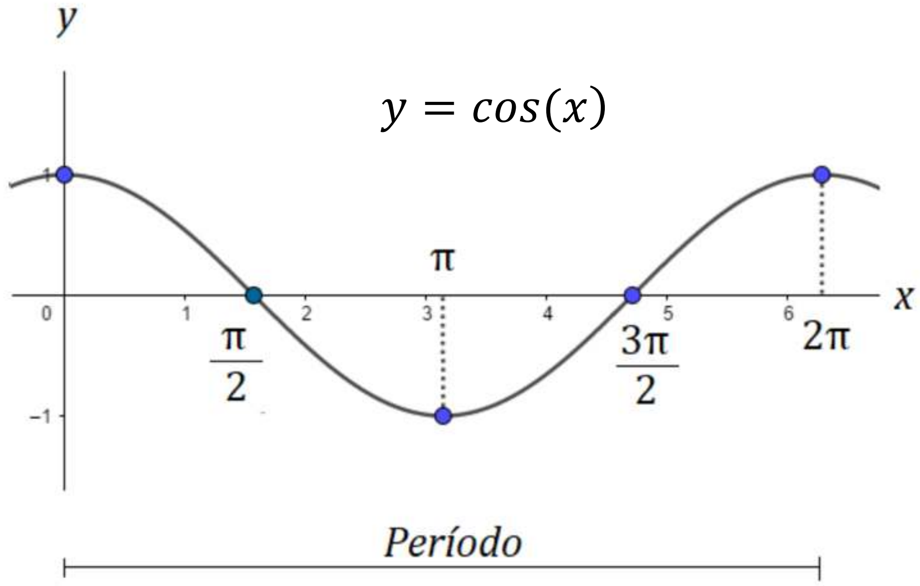
Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

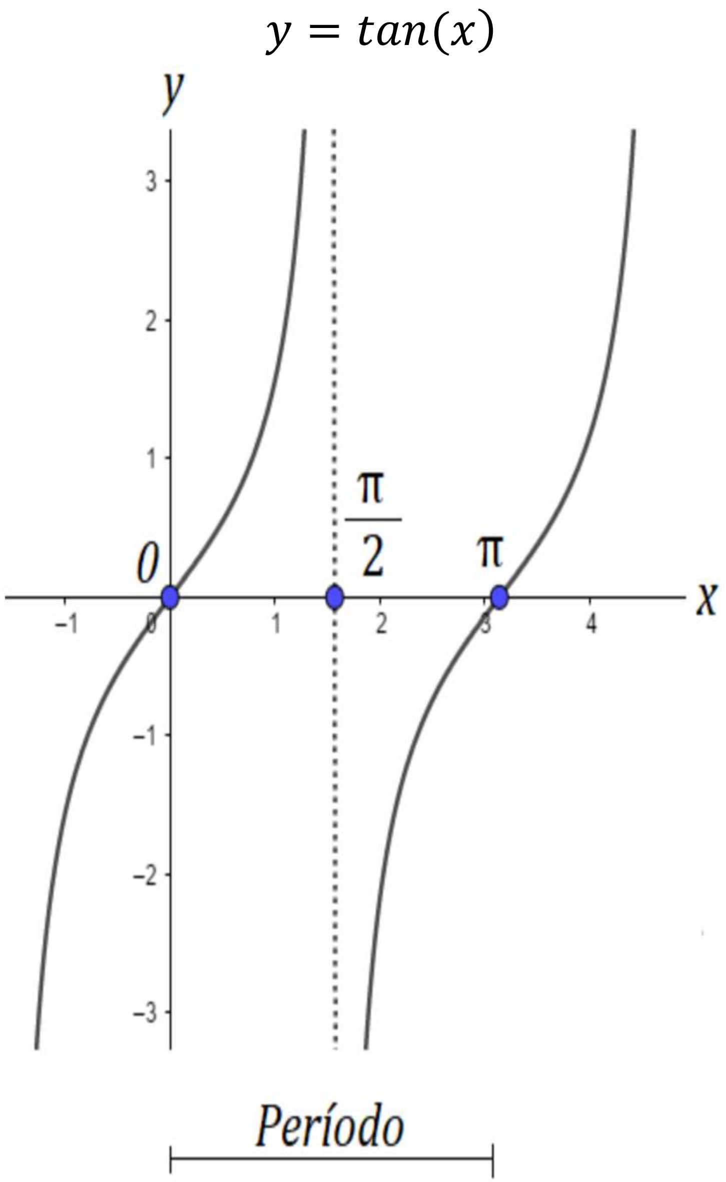
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Funções Trigonométricas

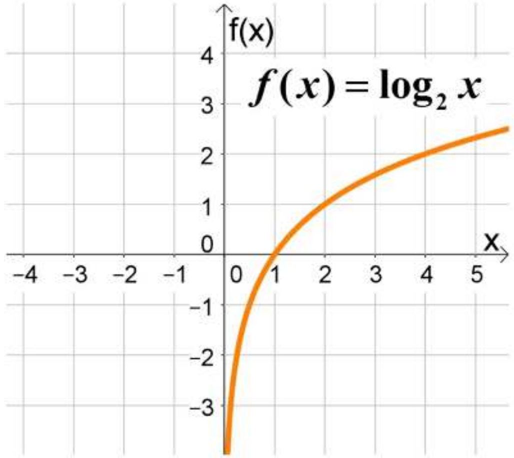




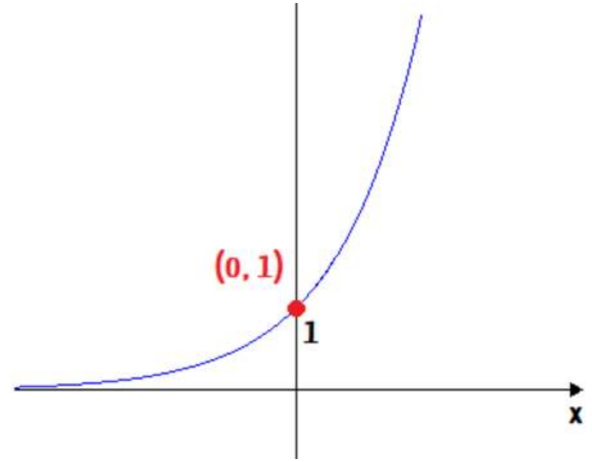


Funções Logarítmicas e Exponenciais

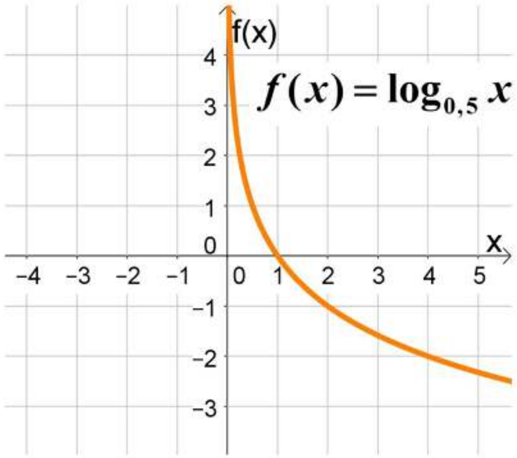
$y = \log_a x \ (a > 1)$



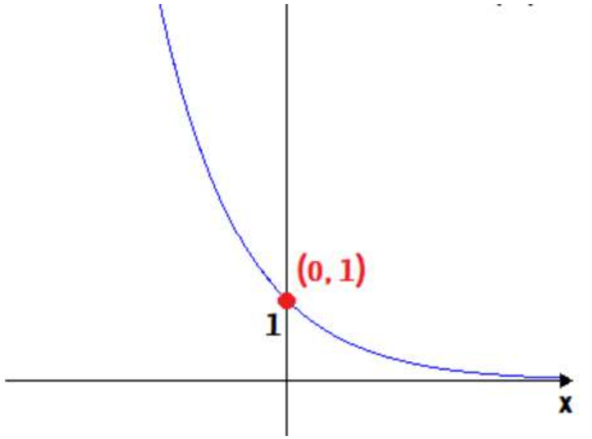
$y = e^{ax}(a > 0)$



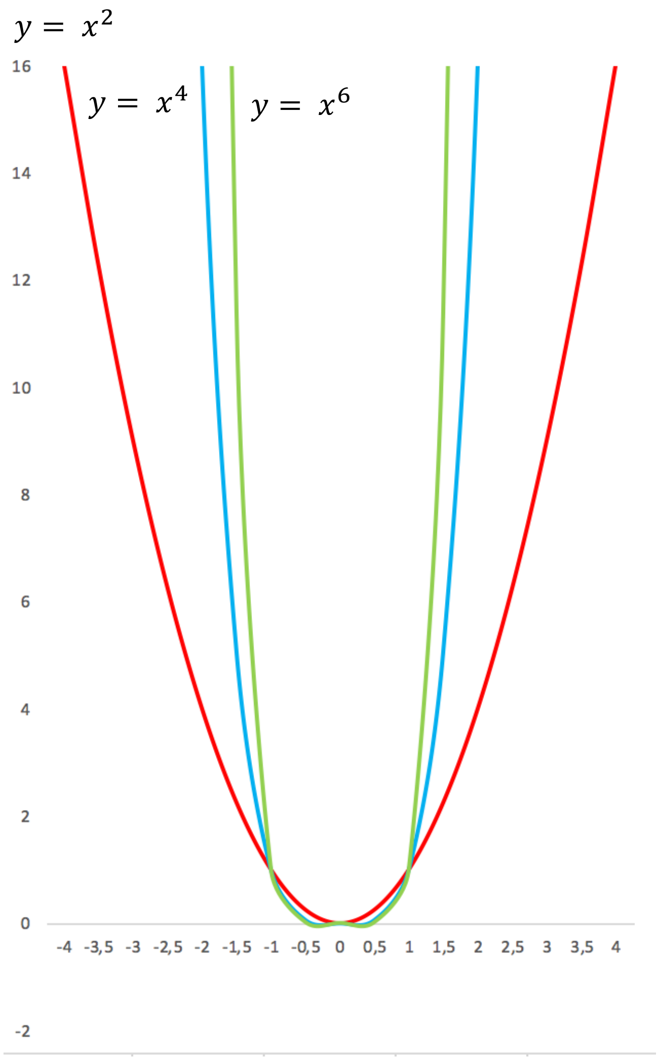
$y = \log_a x \ (0 < a < 1)$

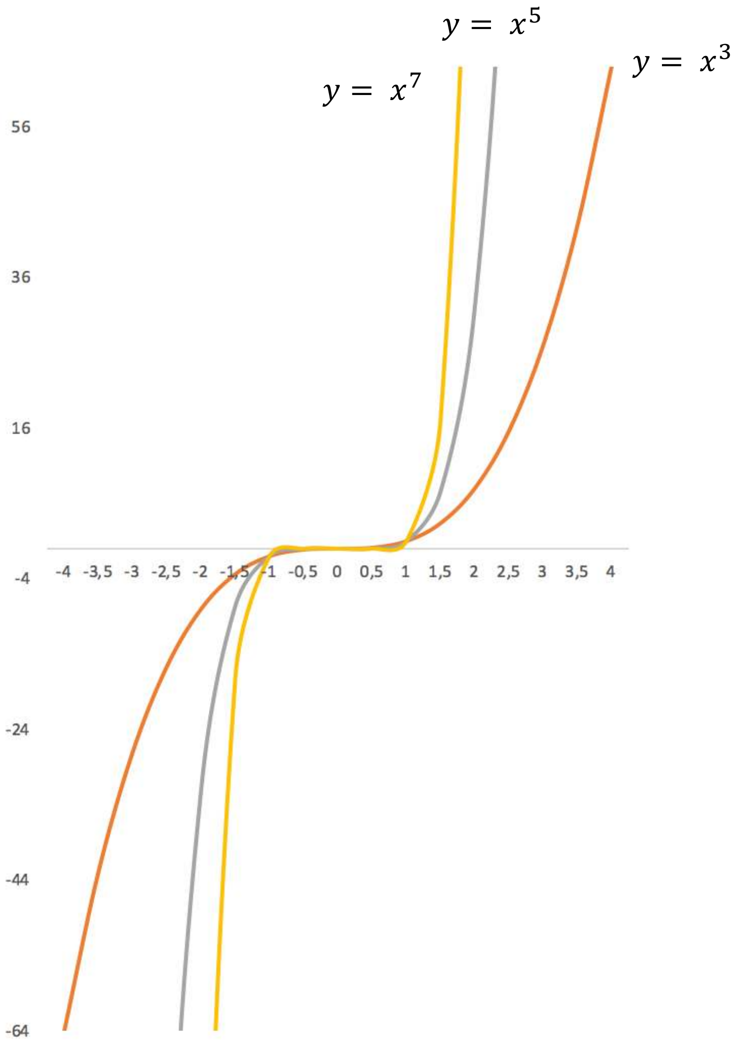


$y = e^{ax}(a < 0)$



Funções Polinomiais



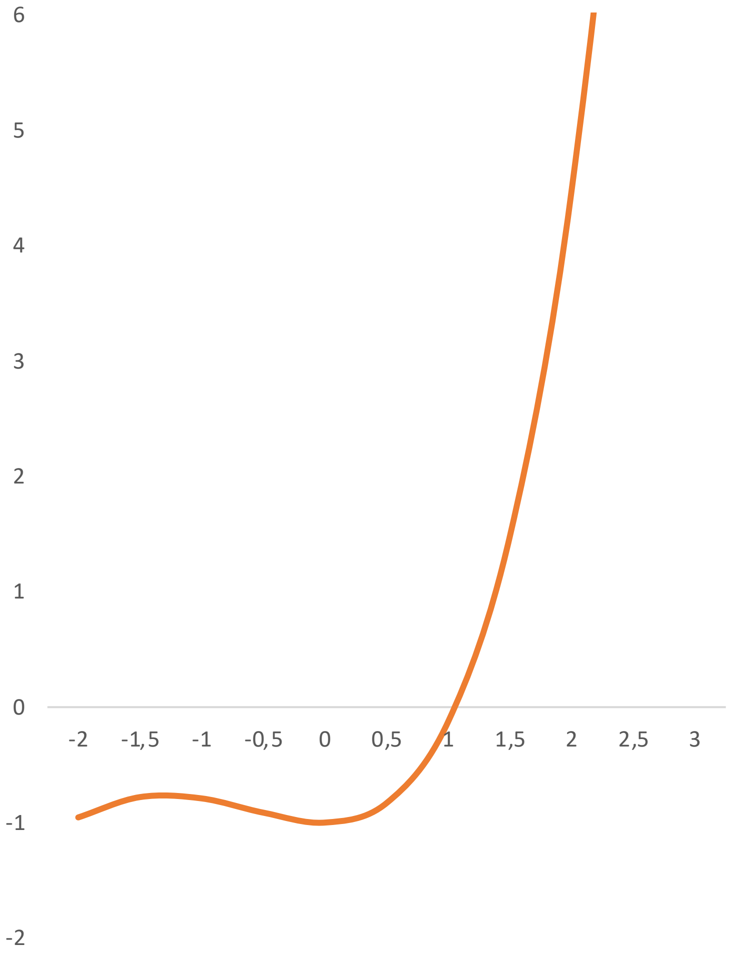


INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Método Gráfico

Podemos isolar uma raiz de uma função fazendo o esboço do gráfico da função.

x	$f(x) = e^x - \operatorname{sen} x - 2$
-2	-0,9553673
-1,5	-0,7793748
-1	-0,7906496
-0,5	-0,9140438
0	-1
0,5	-0,8307043
1	-0,1231892
1,5	1,48419401
2	4,47975852
2,5	9,5840215
3	17,9444163



A função *f* possui uma raiz entre 1 e 1,5.

Método da Bisseção

O método inicia com um intervalo [*a, b*] tal que *f(a)*f(b)* < 0. A cada iteração calculamos $m = \frac{a+b}{2}$. Se *f(m)* = 0, *m* é uma raiz exata de *f* e o método para. Se *f(a)*f(m)* < 0 fazemos *b* = *m*, caso contrário fazemos *a* = *m*. Após isso, iniciamos uma nova iteração. Quando atingirmos a precisão desejada o método devolve *m* como uma aproximação para uma raiz de *f*. Note que a distância de *m* para uma raiz é de no máximo $\frac{b-a}{2}$.

Ex: $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x - 2$

a	*b*	*m*	*f(a)*	*f(b)*	*f(m)*	*erro máximo*
1	1,5	1,25	-0,1231892	1,48419401	0,54135829	0,25
1	1,25	1,125	-0,1231892	0,54135829	0,17794922	0,125
1	1,125	1,0625	-0,1231892	0,17794922	0,02002098	0,0625
1	1,0625	1,03125	-0,1231892	0,02002098	-0,0533725	0,03125
1,03125	1,0625	1,046875	-0,0533725	0,02002098	-0,0171292	0,015625
1,046875	1,0625	1,0546875	-0,0171292	0,02002098	0,00133172	0,0078125
1,046875	1,0546875	1,05078125	-0,0171292	0,00133172	-0,0079272	0,00390625
1,05078125	1,0546875	1,05273438	-0,0079272	0,00133172	-0,0033049	0,001953125
1,05273438	1,0546875	1,05371094	-0,0033049	0,00133172	-0,0009884	0,000976563

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Cálculo Numérico

Aula 24-05-2021

Método de Newton

Radiciação

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

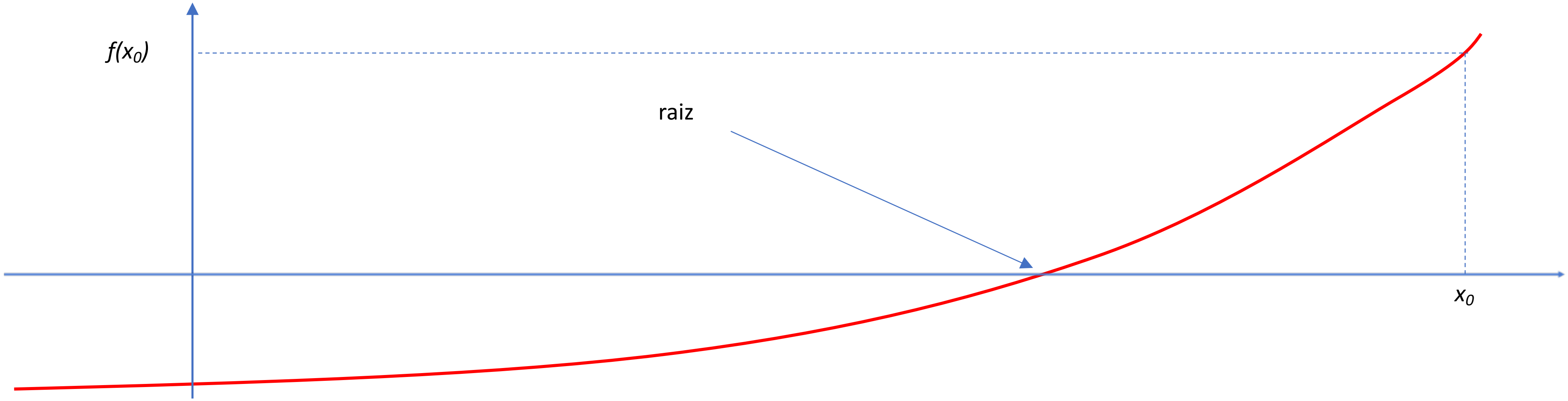
Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

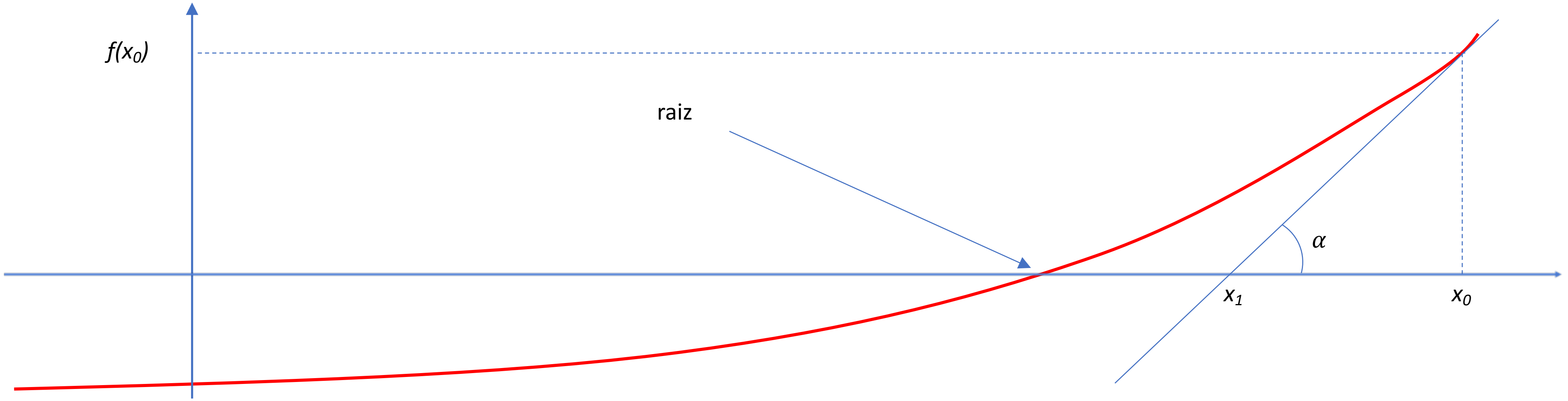
Método de Newton

O Método de Newton calcula aproximações para a raiz de uma função usando a reta tangente, como ilustrado na figura abaixo:



Método de Newton

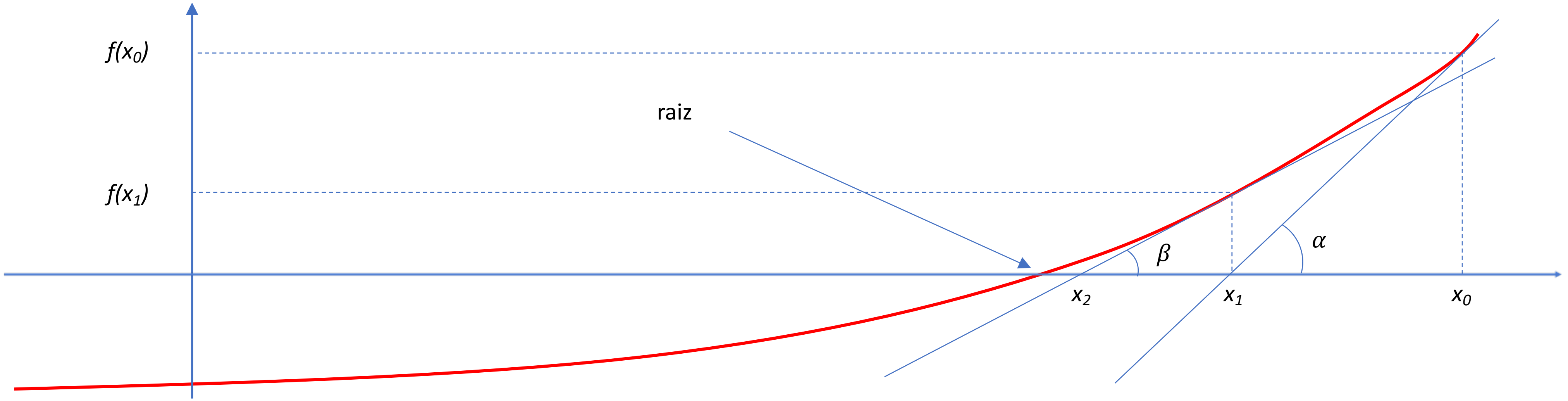
O Método de Newton calcula aproximações para a raiz de uma função usando a reta tangente, como ilustrado na figura abaixo:



$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_o)}{x_o - x_1} \qquad \Longrightarrow f'(x_o) = \frac{f(x_o)}{x_o - x_1} \qquad \Longrightarrow x_o - x_1 = \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} \qquad \Longrightarrow x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$$

Método de Newton

O Método de Newton calcula aproximações para a raiz de uma função usando a reta tangente, como ilustrado na figura abaixo:



$$\tan(\beta) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \quad \Longrightarrow f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} \quad \Longrightarrow x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \Longrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Generalizando:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Ex: $p(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$

$p'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 14x + 29$

i	x_i	$p(x_i)$	$p'(x_i)$
0	8	1350	1005
1	6,656716418	401,545914	451,0141706
2	5,766398685	111,4158004	216,4623626
3	5,25168657	25,69237197	121,1437228
4	5,039604826	3,434400575	89,45708927
5	5,001213229	0,102011331	84,16506535
6	5,00000119	9,99481E-05	84,00016182
7	5	9,62643E-11	84
8	5	0	84

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Convergência do Método de Newton

É possível mostrar que se $f'(x)$ e $f''(x)$ são não nulas e preservam o sinal no intervalo $[a, b]$ e $a \leq x_0 \leq b$ é tal que $f(x_0).f''(x_0) > 0$ então o Método de Newton irá convergir para uma raiz no intervalo $[a, b]$.

Ex: $p(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$
$p'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 14x + 29$
$p''(x) = 12x^2 - 30x - 14$

Observe que p' e p'' são sempre positivas no intervalo [4,5; 8], pois para $x \geq 4,5$ temos:

$p'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 14x + 29 \geq 4.4,5^3 - 15.4,5^2 - 14.4,5 + 29 = 26,75$
$p''(x) = 12x^2 - 30x - 14 \geq 12.4,5^2 - 30.4,5 - 14 = 94$

Observe ainda que $p(8).p''(8) = 1350 \times 514 > 0$.

Logo, se usarmos $x_0 = 8$ o Método de Newton irá convergir.

Radiciação

Podemos adaptar o Método de Newton para calcular $\sqrt{c}$. Considere o polinômio $p(x) = x^2 - c$. Note que $\sqrt{c}$ é uma das raízes de p (a outra raiz é $-\sqrt{c}$). Observe que $p'(x) = 2x$. Aplicando o método de Newton a p temos:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{p'(x_i)} = x_i - \frac{{x_i}^2 - c}{2x_i} = x_i - \frac{{x_i}^2}{2x_i} + \frac{c}{2x_i} = x_i - \frac{x_i}{2} + \frac{c}{2x_i} = \frac{x_i}{2} + \frac{c}{2x_i} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{c}{x_i}\right)$$

Para garantir a convergência do método podemos definir $x_0 = c$, se $c > 1$; caso contrário fazemos $x_0 = 1$.

Ex: Calcule a raiz quadrada de 9 e de 0,25

i	x_i
0	9
1	5
2	3,4
3	3,023529412
4	3,000091554
5	3,000000001
6	3

i	x_i
0	1
1	0,625
2	0,5125
3	0,500152439
4	0,500000023
5	0,5
6	0,5

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Diversão para casa

Adaptar o Método de Newton para calcular $\sqrt[k]{c}$.