

Cristiano Coutinho Costa

22-11-2022

Controladores Digitais

Relembrando

Estrutura direta não-canônica

NÃO-CAUSAL

$$u_k = \sum_{j=0}^k a_j \cdot e_{k-j} - \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot u_{k-j}$$

Exemplo:

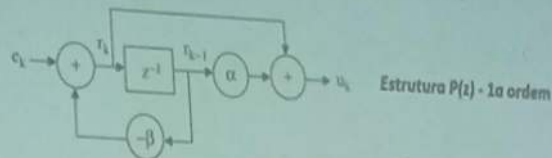
CONTROLADORES DIGITAIS

- Estruturas em cascata ou série;
- Menos sensível à variação dos coeficientes.

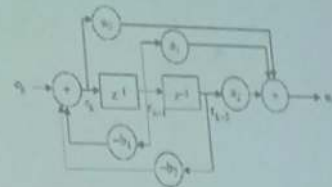
$$D(z) = P(z) \prod_{i=1}^n Q_i(z) \quad \text{for } n \text{ odd}$$

$$P(z) = \frac{1 + \alpha z^{-1}}{1 + \beta z^{-1}} \quad \begin{aligned} r_k &= e_k - \beta r_{k-1} \\ u_k &= r_k + \alpha r_{k-1} \end{aligned} \quad \text{primeira ordem da FT}$$

$$Q(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}, \quad \begin{aligned} r_k &= e_k - b_1 r_{k-1} - b_2 r_{k-2} \\ u_k &= a_0 r_k + a_1 r_{k-1} + a_2 r_{k-2} \end{aligned} \quad \text{segunda ordem da FT}$$



Estrutura de 2a ordem



Atenção que o 'n' total tem que ser ímpar

Exemplo

ORES

Exemplo para a seguinte FT:

$$D(z) = \frac{3(z+1)(z+2)}{z^2 + 0.4z + 0.03}$$

$$D(z) = \frac{3(z+1)(z+2)}{(z+0.1)(z+0.3)} = \frac{3(1+z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1+0.1z^{-1})(1+0.3z^{-1})} \quad \text{Fatorando}$$

cascata

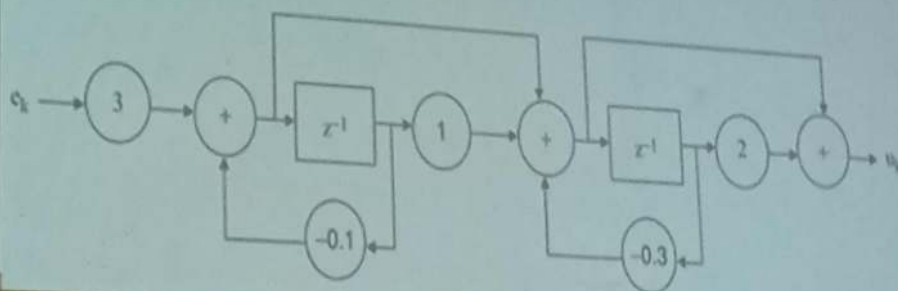
A FT pode ser determinada pela cascata das FTs de 1a ordem e 2a ordem:

$$r_k = e_k - \beta r_{k-1}$$

$$u_k = r_k + \alpha r_{k-1} \quad \text{1a ordem}$$

$$r_k = e_k - b_1 r_{k-1} - b_2 r_{k-2}$$

$$u_k = a_0 r_k + a_1 r_{k-1} + a_2 r_{k-2} \quad \text{2a ordem}$$



Pode representar somente em duas equações... jamais em 3 equações ou mais... exemplo: tenho uma de 5ª ordem e vou poder representar em uma de segunda e a outra de terceira, mas jamais em duas equações de segunda ordem e uma de primeira.

Estrutura direta Canônica

Estrutura em Cascata ou em série

STRUTURA EM CASCATA OU SÉRIE:

$$D(z) = \frac{3 \cdot (z+1) \cdot (z+2)}{z^2 + 0,4z + 0,03} \Rightarrow D(z) = \frac{3 \cdot (z+1) \cdot (z+2)}{(z+0,1) \cdot (z+0,3)}$$

$$P(z) = \frac{3 \cdot (z+1)}{z+0,1} \cdot \left(\frac{3}{z}\right) \quad P(z) = \frac{3 \cdot (1+z^{-1})}{1+0,1 \cdot z^{-1}}$$

$$Q(z) = \frac{z+2}{z+0,3} \Rightarrow Q(z) = \frac{1+2 \cdot z^{-1}}{1+0,3 \cdot z^{-1}}$$

Ps.

Representando o a_0 , a_1 e b_1 de $P(z)$

ou seja:

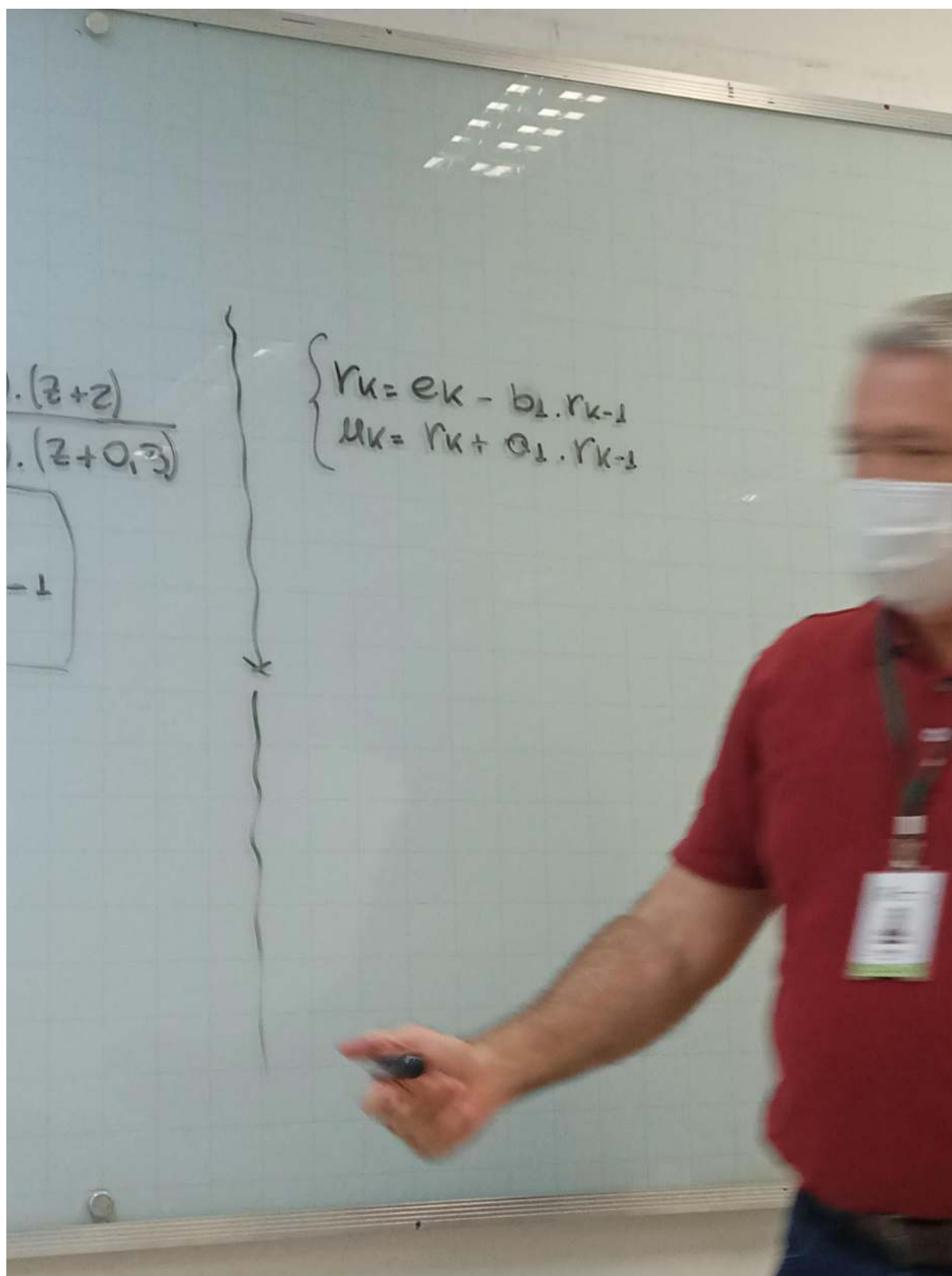
$$\frac{1}{0,03} \rightarrow D(z) = \frac{3(z+1)(z+2)}{(z+0,1)(z+0,3)}$$

$$\frac{1}{0,1} \div \left(\frac{z}{2}\right) P(z) = \frac{3(1+z^{-1})}{1+0,1z^{-1}} \quad \begin{cases} a_0=1 \\ a_1=1 \\ b_1=0,1 \end{cases}$$

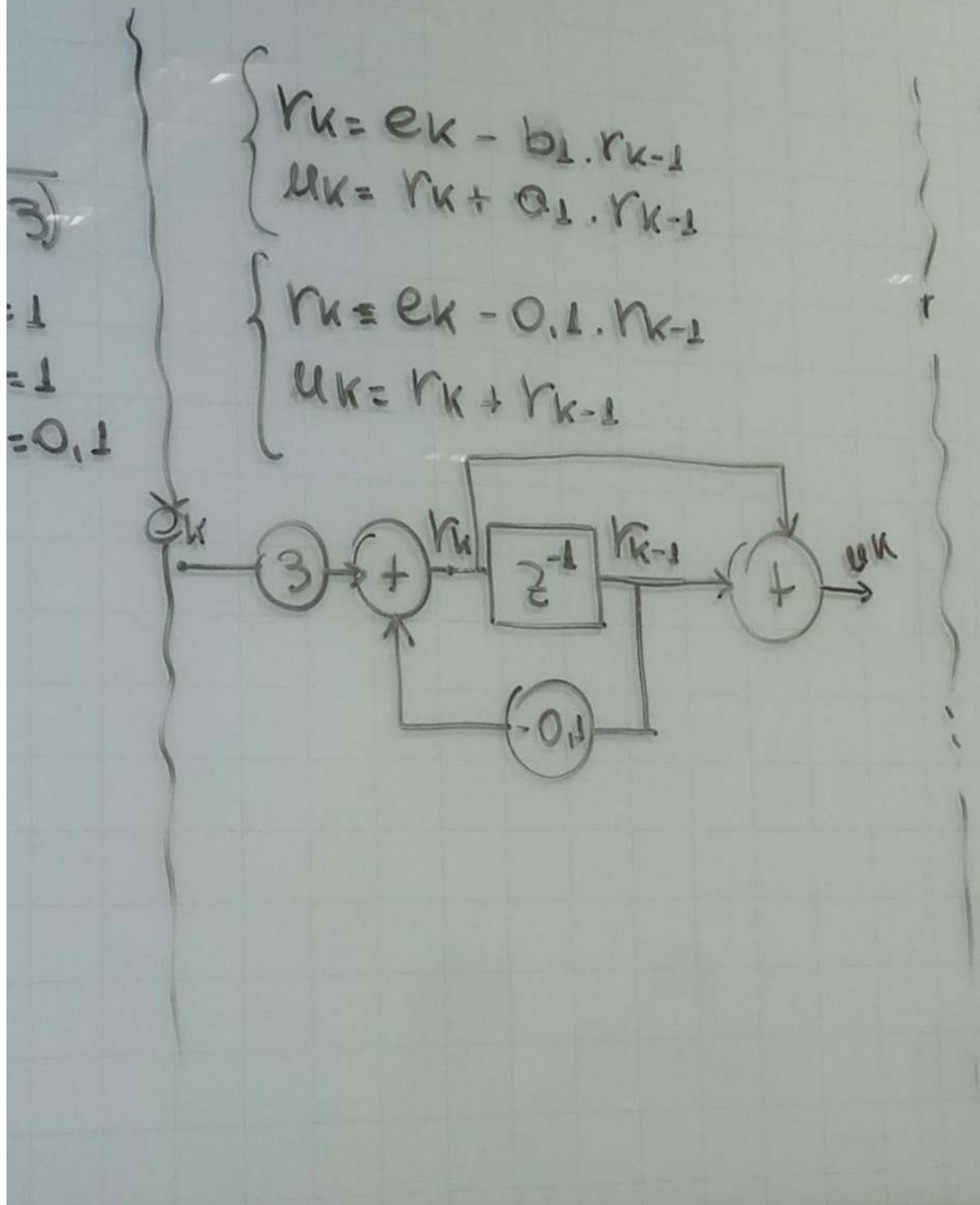
$$\Rightarrow Q(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+0,3z^{-1}}$$

a0= 1
a1= 1
b0= 0,1

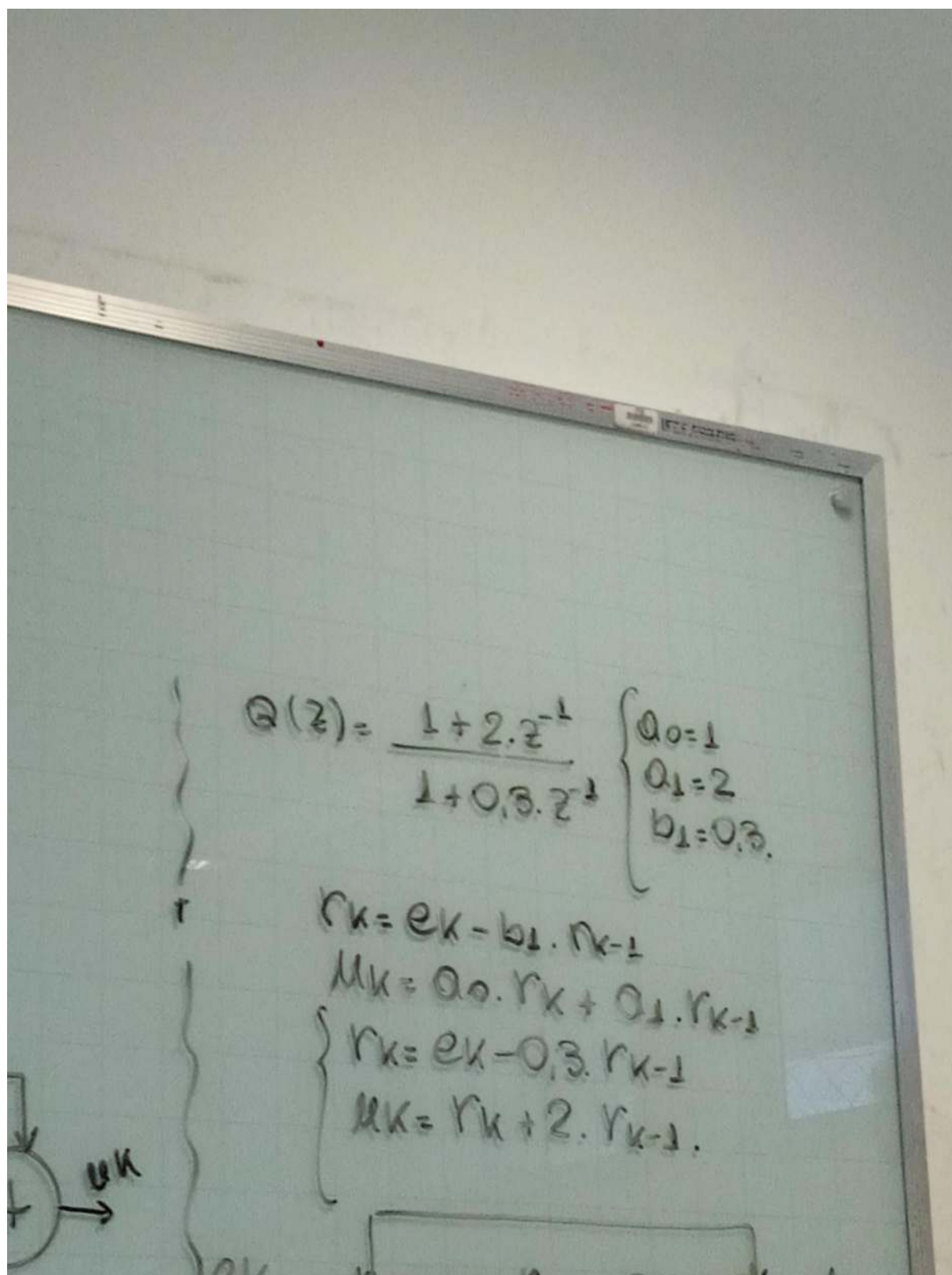
Organizando em estrutura direta Canônica



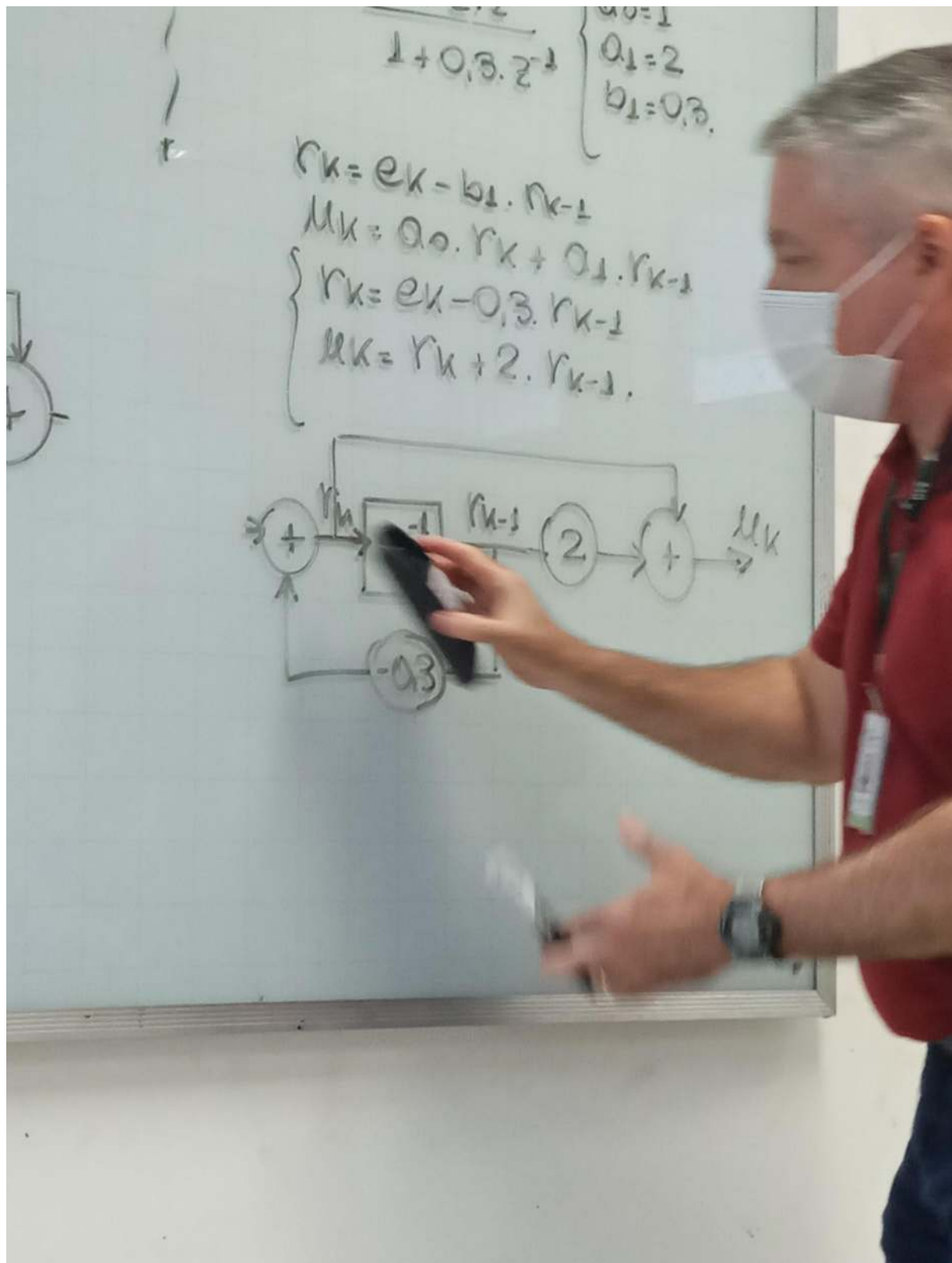
Substituindo o a_0 , a_1 e b_1 na equação canônica $P(z)$



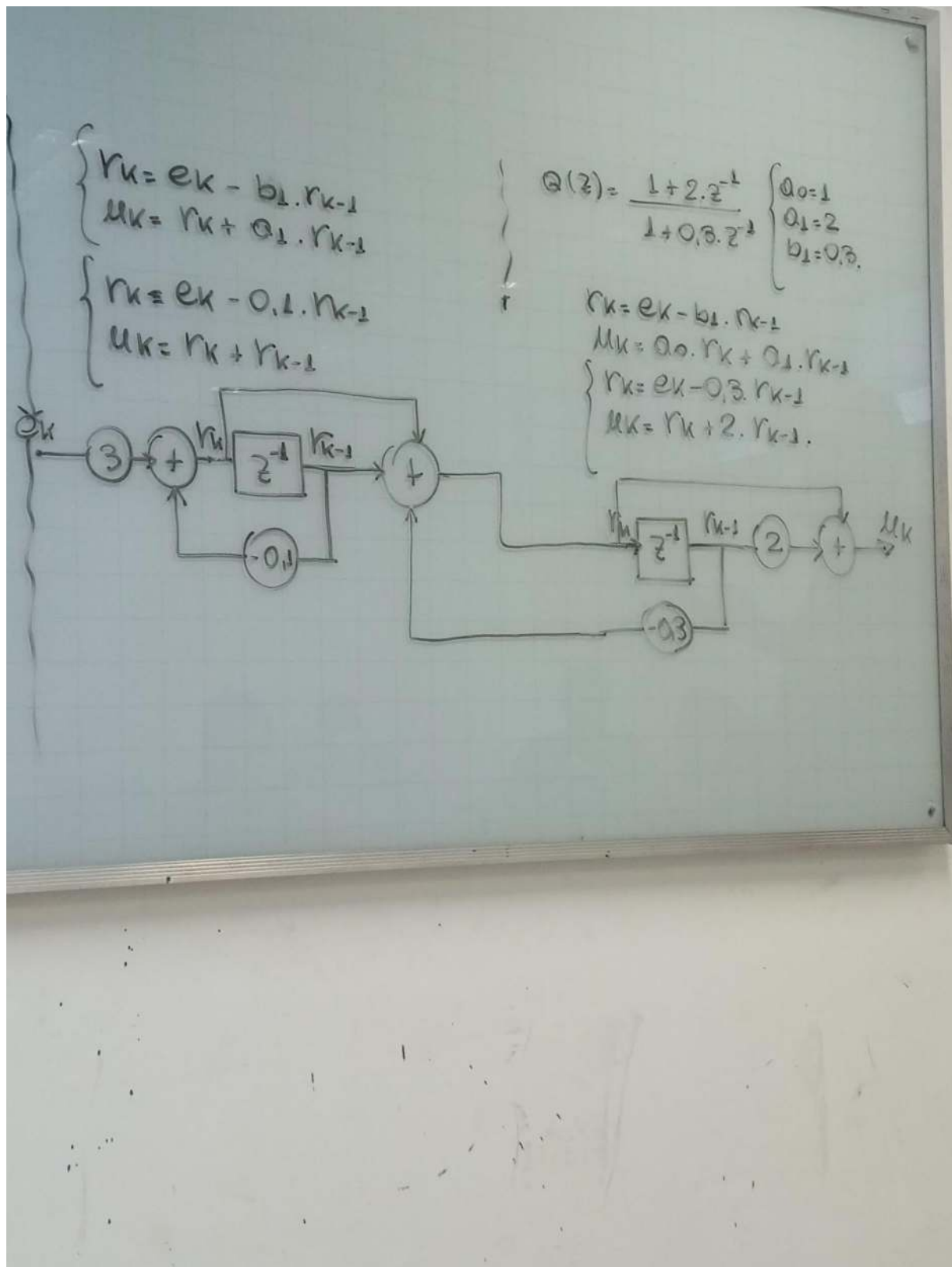
Montando a_0 , a_1 e b_1 de $Q(z)$ na equação canônica $Q(z)$



Montando o diagrama de blocos de $Q(z)$



Cascadeando os dois circuitos



Outro exemplo de uma função de transferência de ordem maior

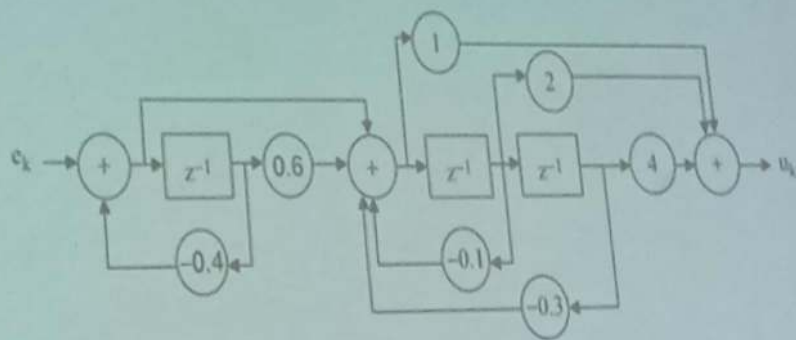
ES

FT de um controlador

$$D(z) = \frac{(1 + 0.6z^{-1})(1 + 2z^{-1} + 4z^{-2})}{(1 + 0.4z^{-1})(1 + 0.1z^{-1} + 0.3z^{-2})}$$

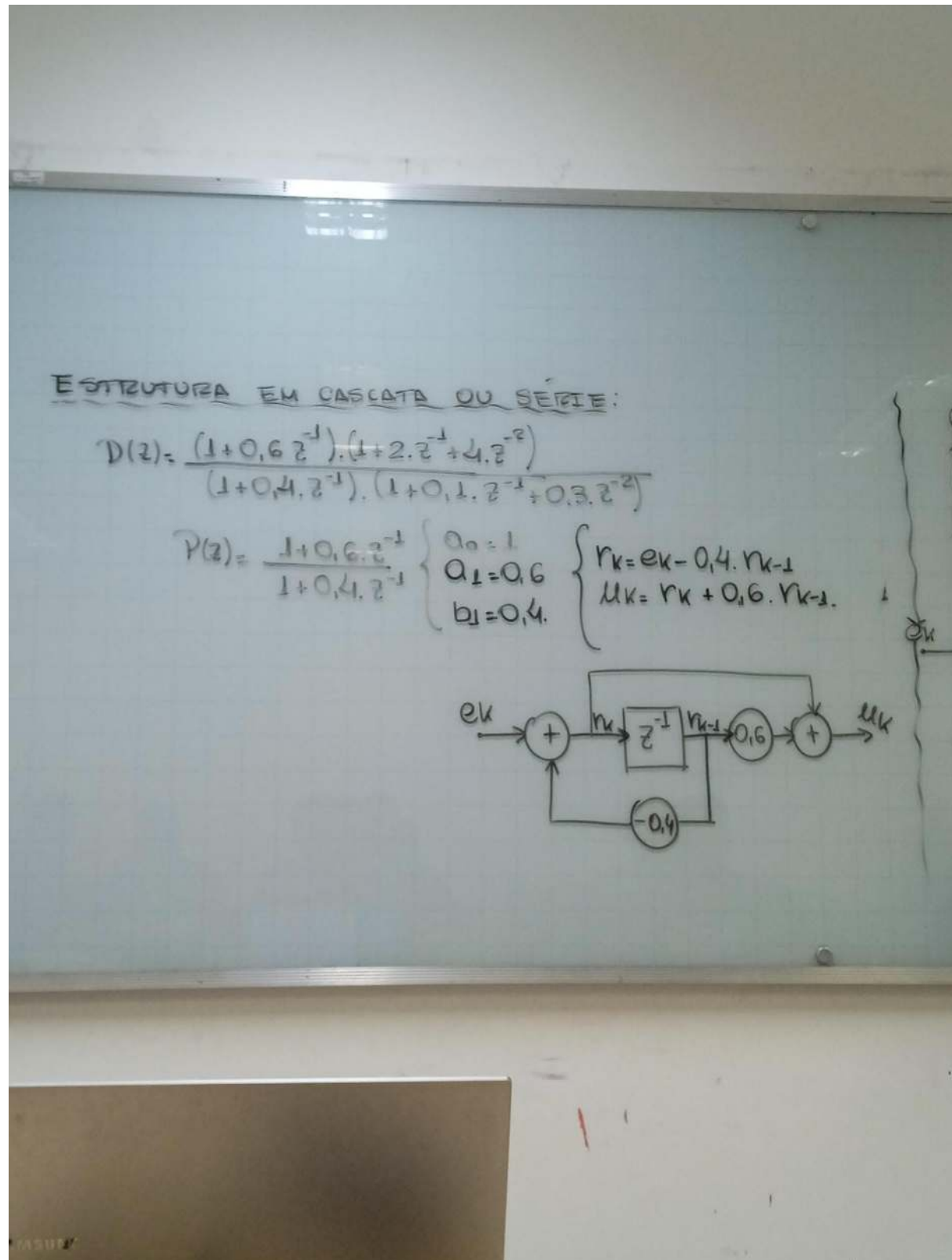
scata

Estrutura em cascata ou série



Exemplo 2:

Representando o $P(z)$ com a_0 , a_1 e b_1 . Além disso, representado em diagrama de blocos



Representando o $Q(z)$ com a_0 , a_1 e b_1 . Além disso, representado em diagrama de blocos

$$Q(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 4z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} + 0.3z^{-2}}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4 \\ b_1 = 0.1, b_2 = 0.3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_k = e_k - 0.1r_{k-1} - 0.3r_{k-2} \\ u_k = r_k + 2r_{k-1} + 4r_{k-2} \end{cases}$$

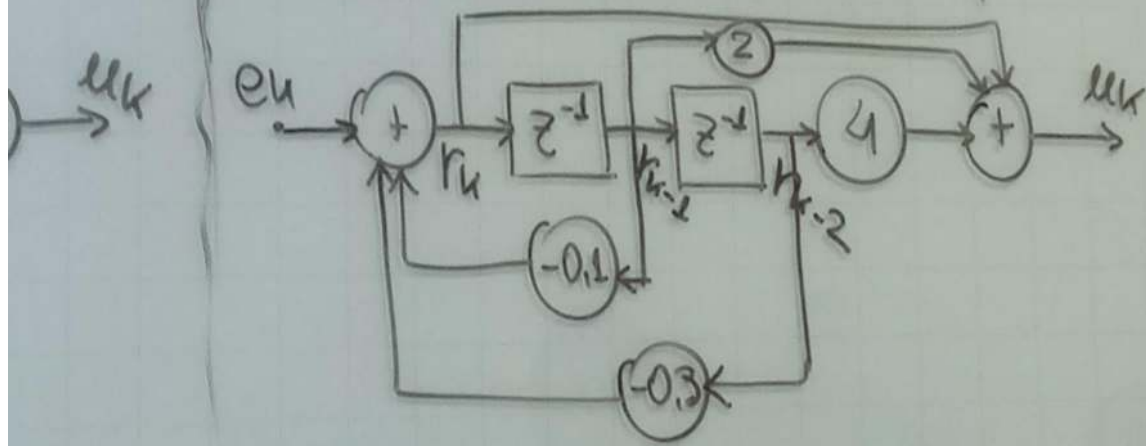
$$Q(z) = \frac{r_k}{u_k}$$

$$r_k = e_k - 0.1r_{k-1} - 0.3r_{k-2}$$

$$u_k = r_k + 2r_{k-1} + 4r_{k-2}$$

$$r_k = e_k - 0.1r_{k-1} - 0.3r_{k-2}$$

$$u_k = r_k + 2r_{k-1} + 4r_{k-2}$$



Cascadeando os dois diagramas de $P(z)$ e $Q(z)$

OU SÉRIE:

$$\frac{1 + 4z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} + 0.3z^{-2}}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0.6 \\ b_1 &= 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} r_k = e_k - 0.4 \cdot r_{k-1} \\ u_k = r_k + 0.6 \cdot r_{k-1} \end{cases}$$

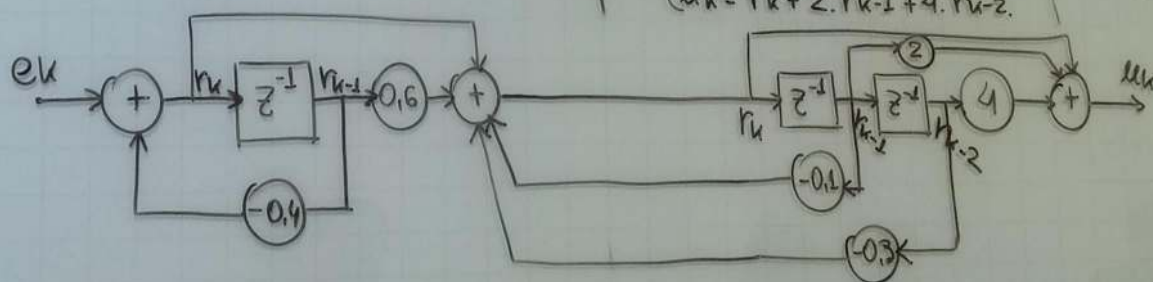
$$Q(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 4z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} + 0.3z^{-2}}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4 \\ b_1 = 0.1, b_2 = 0.3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_k = e_k - 0.1 \cdot r_{k-1} - 0.3 \cdot r_{k-2} \\ u_k = r_k + 2 \cdot r_{k-1} + 4 \cdot r_{k-2} \end{cases}$$

$$Q(z) = \frac{1}{1}$$

$$\begin{cases} r_k = e \\ u_k = r_k \end{cases}$$



Outro exemplo, usando fatorando

ESTRUTURA EM CASCATA OU SÉRIE:

$$D(z) = \frac{(z+2) \cdot (z^2 + 3z + 7)}{z^3 + 6z^2 + 11z + 12}$$

Pegando um múltiplo de 12, consideramos 4. Chamaremos $(z+4)$

ESTRUTURA EM CASCATA OU SÉRIE:

$$D(z) = \frac{(z+2) \cdot (z^2 + 3z + 7)}{z^3 + 6z^2 + 11z + 12}$$

$$z^3 + 6z^2 + 11z + 12 \overline{) z + 4}$$

Então, efetuando a divisão

ESTRUTURA EM CASCATO OU SÉRIE:

$$D(z) = \frac{(z+2)(z^2+3z+7)}{z^3+6z^2+11z+12}$$

$$\begin{array}{r|l} z^3+6z^2+11z+12 & z+4 \\ - z^3+4z^2 & \underline{z^2+2z+3} \\ \hline 2z^2+11z+12 & \\ - 2z^2+8z & \\ \hline 3z+12 & \\ - 3z+12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Agora representando a função de transferência (FT), em:

$$D(z) = \frac{(z+2) \cdot (z^2 + 3z + 7)}{(z+4) \cdot (z^2 + 2z + 3)}$$

$$P(z) = \frac{z+2}{z+4} \div \left(-\frac{z}{z} \right)$$

$$\begin{cases} a_0 = 1; a_1 = 2 \\ b_1 = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} r_k = \\ u_k \end{cases}$$

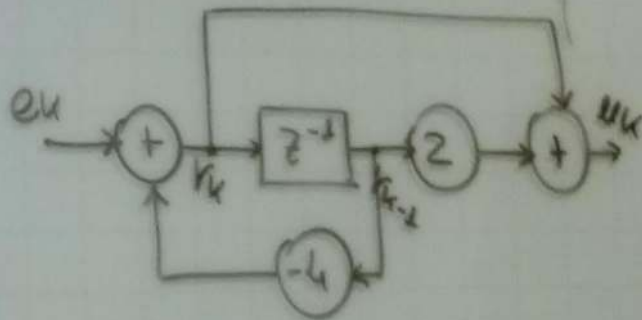
Representando o $P(z)$ com a_0 , a_1 e b_1 . Além disso, representado em diagrama de blocos

$$D(z) = \frac{(z+2) \cdot (z^2+3z+7)}{(z+4) \cdot (z^2+2z+3)}$$

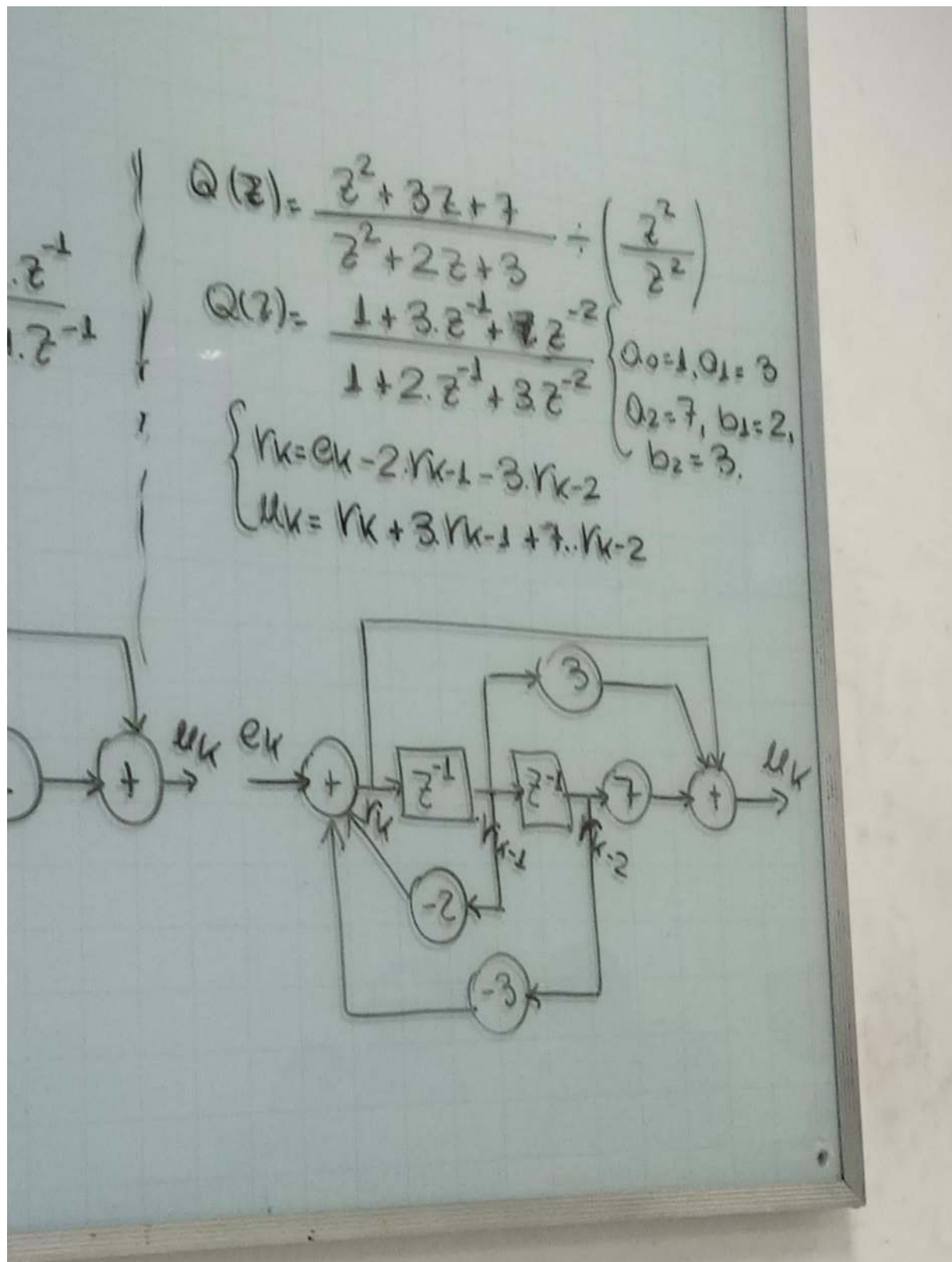
$$P(z) = \frac{z+2}{z+4} \div \left(\frac{z}{z} \right) \Rightarrow P(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+4z^{-1}}$$

$$\begin{cases} a_0=1; a_1=2 \\ b_1=4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_k = e_k - 4 \cdot r_{k-1} \\ u_k = r_k + 2 \cdot r_{k-1} \end{cases}$$



Representando o $Q(z)$ com a_0 , a_1 e b_1 . Além disso, representado em diagrama de blocos

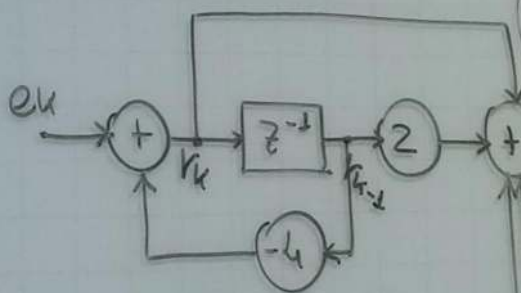


Cascadeando $P(z)$ e $Q(z)$

$$\frac{z^2 + 3z + 7}{z^2 + 2z + 3}$$

$$\div \left(-\frac{z}{z} \right) \Rightarrow P(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 4z^{-1}}$$

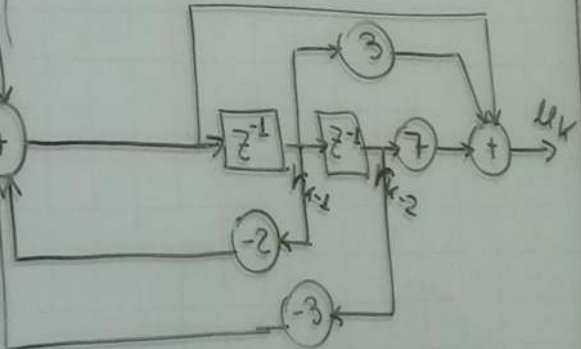
$$= 2 \begin{cases} r_k = e_k - 4 \cdot r_{k-1} \\ u_k = r_k + 2 \cdot r_{k-1} \end{cases}$$



$$Q(z) = \frac{z^2 + 3z + 7}{z^2 + 2z + 3} \div \left(\frac{z^2}{z^2} \right)$$

$$Q(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + 7z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}} \begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 3 \\ a_2 = 7, b_1 = 2, \\ b_2 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_k = e_k - 2 \cdot r_{k-1} - 3 \cdot r_{k-2} \\ u_k = r_k + 3 \cdot r_{k-1} + 7 \cdot r_{k-2} \end{cases}$$



Estrutura ou programação paralela

$$D(z) = \alpha_0 + D_1(z) + D_2(z) + \dots + D_m(z), \quad 1 < m < n.$$

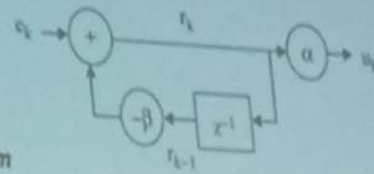
Dado pela soma dos termos de 1a e 2a ordens da FT

$$D_1(z) = \frac{\alpha}{1 + \beta z^{-1}},$$

$$r_k = e_k - \beta r_{k-1}$$

$$u_k = \alpha r_k.$$

Termo de 1a ordem

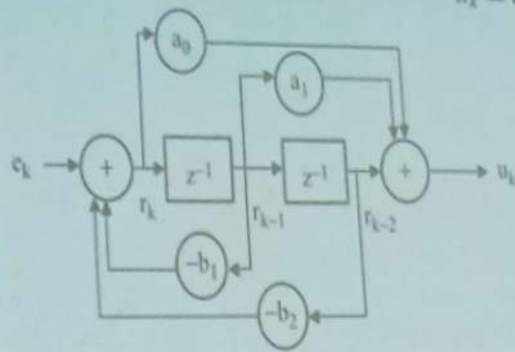


$$D_2(z) = \frac{a_1 + a_2 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}},$$

$$r_k = e_k - b_1 r_{k-1} - b_2 r_{k-2}$$

$$u_k = a_0 r_k + a_1 r_{k-1} + a_2 r_{k-2}.$$

Termo de 2a ordem



Recomendação usar a expansão por frações parciais

Quando o numerador for de mesma ordem do denominador, sempre haverá um termo residual,

Exemplo

Resolvendo

l) dividindo por $1+3z^{-1}$ e $z^{-1} = -\frac{1}{3}$ para encontrar o termo A

→ ESTRUTURA PARALELA:

$$D(z) = \frac{(1+z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1+3z^{-1})(1+4z^{-1})} = \frac{A}{1+3z^{-1}} + \frac{B}{1+4z^{-1}} + C$$

$$A = \frac{(1+z^{-1})(1+2z^{-1})}{1+4z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = -\frac{1}{3}}$$

$$A = \frac{(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{2}{3})}{1 - \frac{4}{3}} \Rightarrow A = \frac{(\frac{2}{3}) \cdot (\frac{1}{3})}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow A = -\frac{2}{3}$$

II) dividindo por $1+4z^{-1}$ e $z^{-1} = -\frac{1}{4}$ para encontrar o termo B

ESTRUTURA PARALELA:

$$D(z) = \frac{(1+z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1+3z^{-1})(1+4z^{-1})} = \frac{A}{1+3z^{-1}} + \frac{B}{1+4z^{-1}} + C$$

$$A = \frac{(1+z^{-1})(1+2z^{-1})}{1+4z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = -\frac{1}{3}}$$

$$A = \frac{(1-\frac{1}{3})(1-\frac{2}{3})}{1-\frac{4}{3}} \Rightarrow A = \frac{(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow A = -\frac{2}{3}$$

$$B = \frac{(1+z^{-1})(1+2z^{-1})}{1+3z^{-1}} \Big|_{z^{-1} = -\frac{1}{4}} \Rightarrow B = \frac{(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{2})}{1-\frac{3}{4}}$$

$$B = \frac{(\frac{3}{4})(\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}} \Rightarrow B = \frac{3}{2}$$

III) Encontrando o termo C, substituir no valor de A e B e adotar $z^{-1} = 0$

$$B = \frac{\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{B = \frac{3}{2}}$$

$D(z)$

$$\frac{(1+z^{-1})(1+2z^{-1})}{(1+3z^{-1})(1+4z^{-1})} = \frac{-\frac{2}{3}}{1+3z^{-1}} + \frac{\frac{3}{2}}{1+4z^{-1}} + C$$

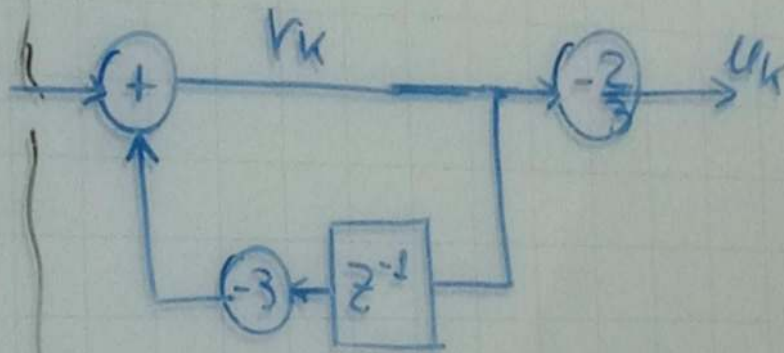
$$1 = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + C$$

$$C = 1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{6}}$$

IV) Agora representando $D(z)$ encontrado e representando em diagrama de blocos

$$D(z) = \frac{-\frac{2}{3}}{1+3z^{-1}} + \frac{\frac{3}{2}}{1+4z^{-1}} + \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} r_k = e_k - 3 \cdot r_{k-1} \\ u = -\frac{2}{3} \cdot r_k \end{cases} \begin{cases} a_0 = -\frac{2}{3} \\ b_1 = 3 \end{cases}$$



Próxima terça concluí