

Análise em Frequência

IFCe – Instituto Federal do Ceará
Departamento de Telemática

Prof. Dr. Regis C. P. Marques
regismarques@ifce.edu.br

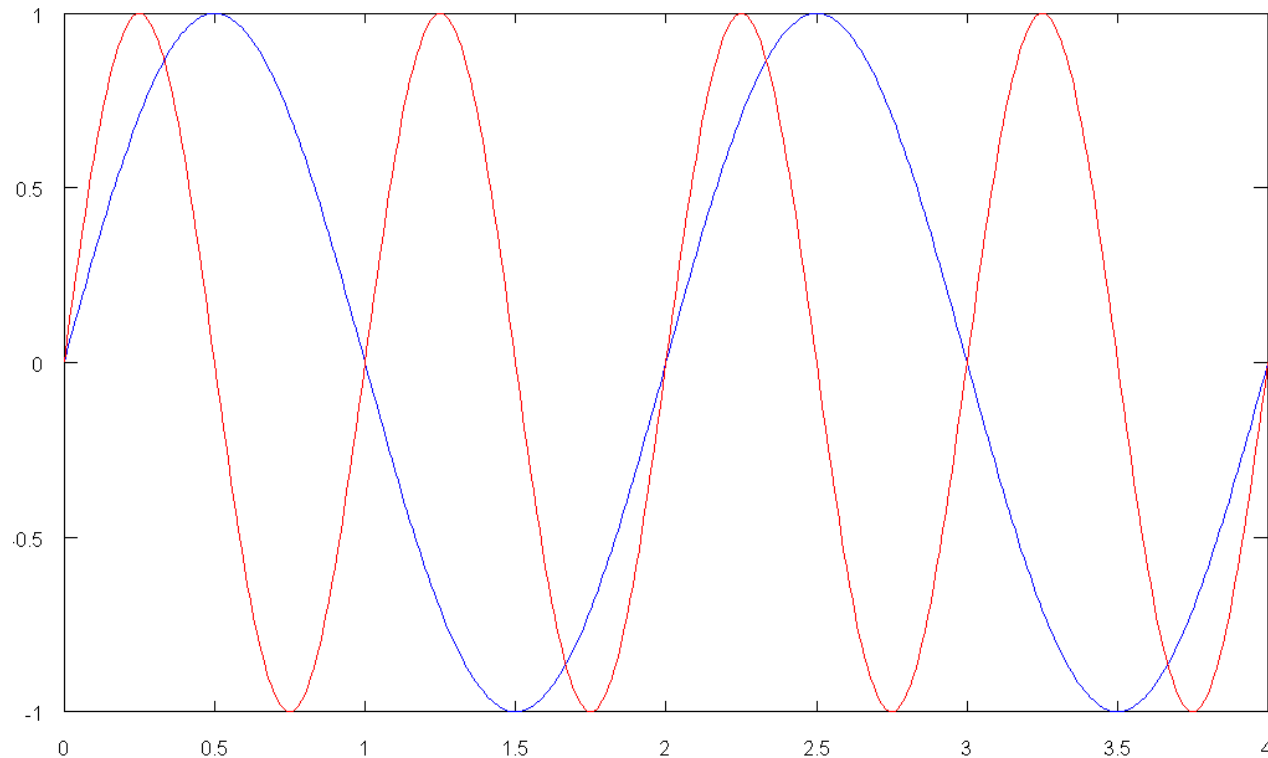


Série de Fourier



- Análise em frequência -

- ❖ **O que é frequência:** a frequência de um sinal pode ser vista como a “velocidade” com a qual a amplitude deste sinal varia.



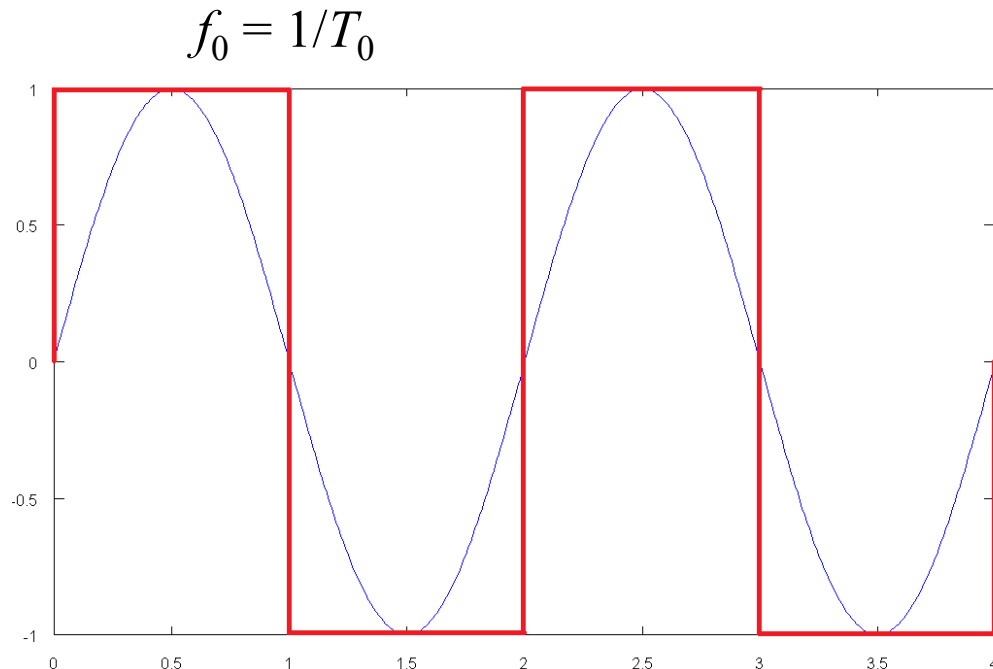
- ❖ A frequência de sinais contínuos é medida em $[\text{Hz} = 1/\text{s}]$ ou $[\text{rad/s}]$.
- ❖ A frequência de sinais discretos é medida em $[\text{rad}]$.

- Análise em frequência -

- ❖ **Período e frequência fundamentais:** em sinais periódicos podemos definir o seu período fundamental e a partir desse, sua frequência fundamental.

Onda quadrada de período $T_0=2$.

Seno de mesmo período.



- ❖ Este seno é a componente fundamental desta onda quadrada.
- ❖ Podemos concluir que senos e cossenos possuem uma única (componente de) frequência, outros sinais são compostos também de harmônicos.

- Série de Fourier -

- ❖ A combinação de senos e cossenos pode ser utilizada para representar sinais periódicos. Este resultado é conhecido como série de Fourier.

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

Em que

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$a_0 = (1/2)a_{n=0}$; é chamada componente dc ou média de $x(t)$.



- Série de Fourier -

- ❖ A partir dos termos a_n e b_n , são obtidos os espectros de amplitude e fase. Também chamados de espectros de Fourier

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Espectro de amplitude

$$\theta_n = \operatorname{tg} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right)$$

Espectro de fase

Ex: calcular a série de Fourier para a onda quadrada de período 2 e amplitude $[-1,1]$.



- Série de Fourier -

- ❖ Sabemos que $x(t)$ pode ser representado por componentes pares e ímpares, e que cossenos são funções pares e senos são funções ímpares. Assim, a série também provê uma decomposição em sinais pares e ímpares:

$$x(t) = a_0 + x(t)_{par} + x(t)_{ímpar}$$

$$x(t)_{par} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$$

$$x(t)_{ímpar} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

- ❖ Esse resultado é útil, pois se $x(t)$ é par, $b_n=0$. Se $x(t)$ é ímpar $a_n=0$. Lembre que $x(t)$ pode não ser par nem ímpar, neste caso $a_n \neq 0$ e $b_n \neq 0$.



❖ Série exponencial complexa:

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por ser um número complexo D_n carrega em um único coeficiente a informação dos espectros de amplitude e fase. Assim sendo, esta série minimiza os cálculos matemáticos.

Ex: Repita o cálculo da série de Fourier para a onda quadrada de período 2 e amplitude $[-1,1]$.



- Série de Fourier -

❖ Relações

$$a_0 = C_0 = D_0$$

$$a_n - jb_n = C_n e^{j\theta_n} = 2D_n$$

$$a_n + jb_n = C_n e^{-j\theta_n} = 2D_{-n}$$

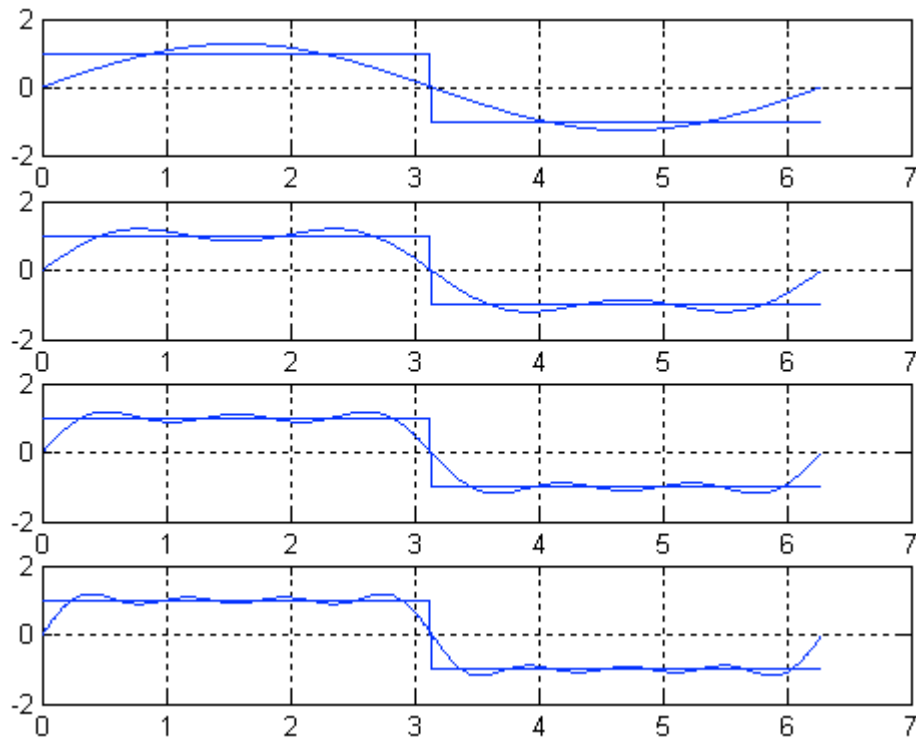
$$C_n = 2|D_n|$$

$$\theta_n = \angle D_n$$



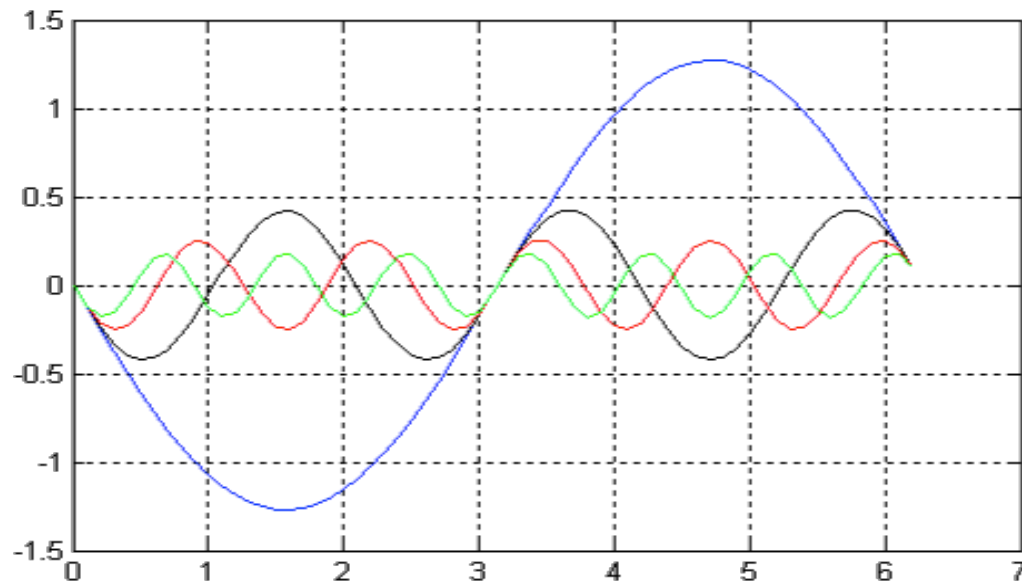
- Série de Fourier -

❖ Exemplo: onda quadrada



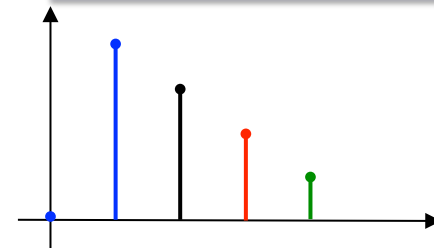
- Série de Fourier -

❖ Exemplo: onda quadrada



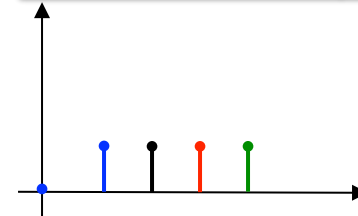
Espectro de amplitude

$$|D_n| = \sqrt{\Re(D_n)^2 + \Im(D_n)^2}$$



Espectro de fase

$$\angle D_n = \text{tg}^{-1} \left(\frac{-\Im(D_n)}{\Re(D_n)} \right)$$



- Série de Fourier -

- ❖ Exemplos: solucionar utilizando a série exponencial os exemplos 6.1 da pg. 533, 6.2 da página 536, E6.1 da página 542. (sinais e sistemas lineares - Lathi)
- ❖ Com o uso do Octave, plotar os 30 primeiros termos de cada série e visualizar os sinais reconstruídos.



Transformada de Fourier



- Transformada de Fourier -

- ❖ A transformada de Fourier é definida a partir da série exponencial, desde que $T_0 \rightarrow \infty$. Como a série a transformada é definida por um par de equações.
- ❖ A transformada direta, ou decomposição, é dada por

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

- ❖ A transformada inversa, ou síntese, é dada por

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$



- Transformada de Fourier -

- ❖ A transformada de Fourier fornece uma ferramenta importante para a análise de sinais no domínio da frequência. Ao contrário da série, a transformada fornece um espectro contínuo, uma vez que sinais não periódicos não possuem apenas componentes harmônicas (com frequência múltipla da fundamental $n\omega_0$). A própria frequência fundamental ($\omega_0 = 2\pi/T_0$) não é mais definida, uma vez que não se pode definir um período fundamental (T_0).

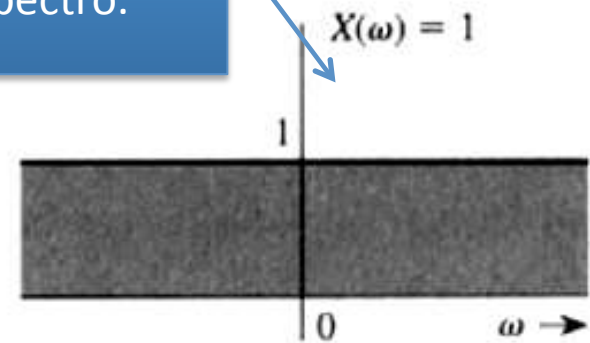
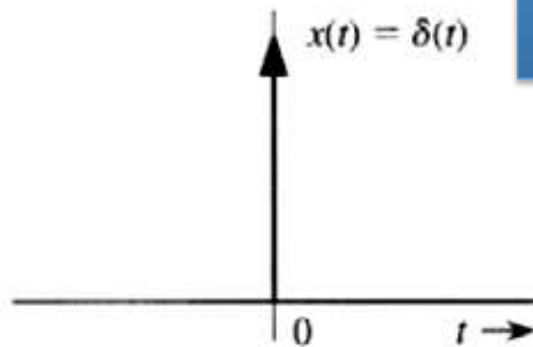


- Transformada de Fourier -

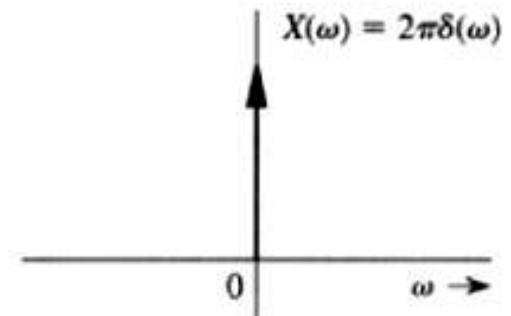
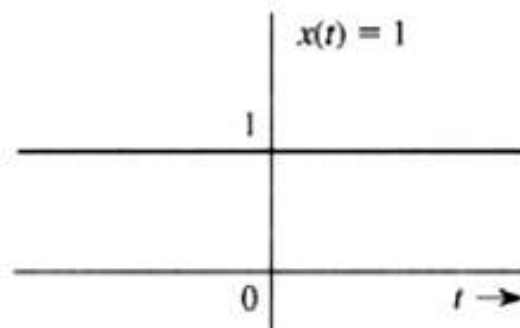
❖ Impulso

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

O impulso possui componentes em todo o espectro.



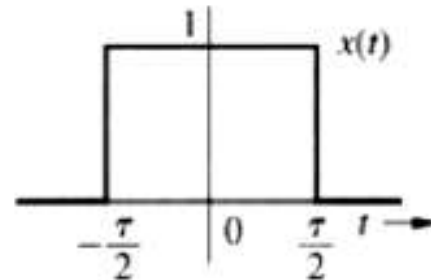
$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$



- Transformada de Fourier -

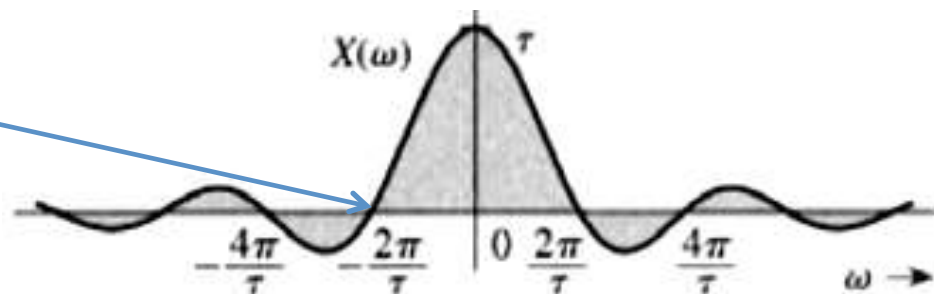
❖ Função portão (pulso retangular)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt$$



$$X(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}) = \frac{2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} = \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)} = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

O pulso retangular tem largura de banda de aproximadamente $2\pi/\tau$.



- Transformada de Fourier -

❖ Exponencial

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - \omega_0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

Uma exponencial complexa tem uma única componente em ω_0 .

$$\frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \iff \delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 t} \iff 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

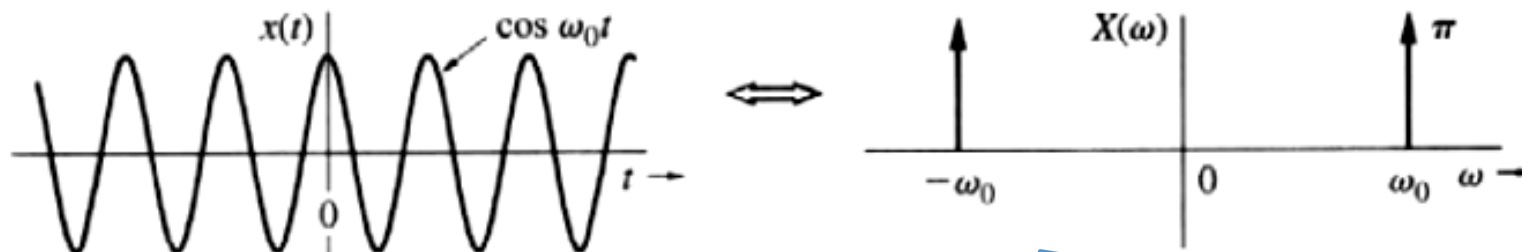
$$e^{-j\omega_0 t} \iff 2\pi \delta(\omega + \omega_0)$$

- Transformada de Fourier -

❖ Cosseno

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$\cos \omega_0 t \iff \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$



Funções senoidais possuem apenas uma componente de frequência, sua fundamental.

- Transformada de Fourier -

❖ Trem de impulsos

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

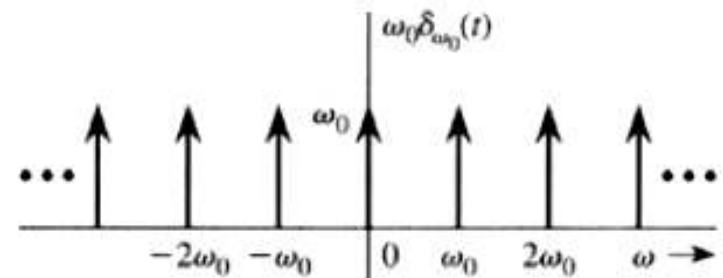
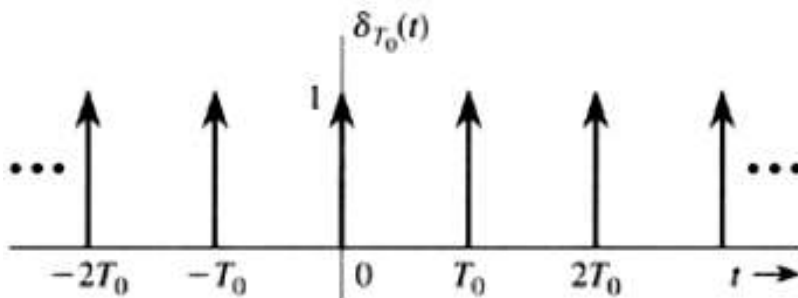
Como é um sinal periódico, devemos utilizar a série (exponencial) de Fourier.

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \end{aligned}$$



- Transformada de Fourier -

No.	$x(t)$	$X(\omega)$	
1	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$	$a > 0$
2	$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{a - j\omega}$	$a > 0$
3	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$a > 0$
4	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	$a > 0$
5	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$	$a > 0$
6	$\delta(t)$	1	
7	1	$2\pi\delta(\omega)$	
8	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	



- Transformada de Fourier -

No.	$x(t)$	$X(\omega)$	
9	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	
10	$\sin \omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$	
11	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
12	$\text{sgn } t$	$\frac{2}{j\omega}$	
13	$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
14	$\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$	
15	$e^{-at} \sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	$a > 0$
16	$e^{-at} \cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	$a > 0$



- Transformada de Fourier -

No.	$x(t)$	$X(\omega)$	
16	$e^{-at} \cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$	$a > 0$
17	$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	
18	$\frac{W}{\pi} \text{sinc}(Wt)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$	
19	$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$	
20	$\frac{W}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{Wt}{2}\right)$	$\Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$	
21	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
22	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2\omega^2/2}$	



- Exercícios -

- ❖ Reproduzir os resultados discutidos utilizando o Octave.

Exemplo:

```
fo = 10000;           %frequencia máxima (Hz)
Fs = 1000*fo;         %frequência de amostragem (Hz)

Tmax = 5/fo;          %tempo máximo a ser simulado (s)
dt=1/Fs;              %passo de tempo(s)
t = dt:dt:Tmax;       %eixo de tempo
N = length(t);        %numero de pontos simulados

df = Fs/N;            %passo de frquência
f = -Fs/2:df:Fs/2-df; %eixo de frequência

%% Exemplo da simulação de um seno
wo = 2*pi*fo;         %frequência em rad/s
x=sin(wo.*t);
figure,plot(t,x);
X=fftshift(fft(x));
figure,plot(f,abs(X));
```



- Exercícios -

- ❖ Utilizar o código anterior para analisar a soma de senoides e outras funções, como portão e trem de pulsos.



- Propriedades da Transformada de Fourier -

❖ Linearidade

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \iff a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$$

❖ Conjugado

$$x^*(t) \iff X^*(-\omega)$$

❖ Simétrico conjugado (se $x(t)$ é real)

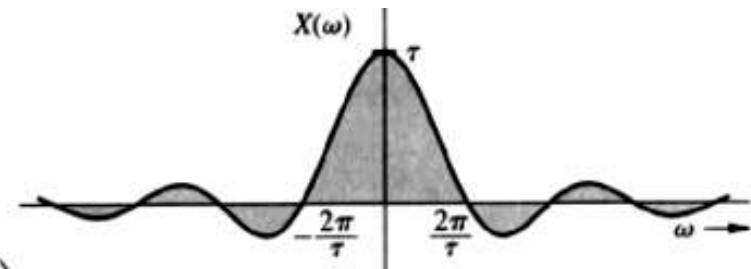
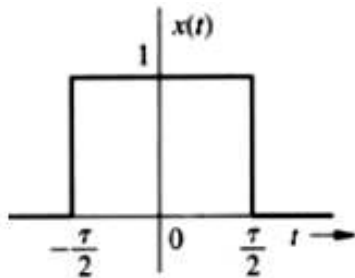
$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$



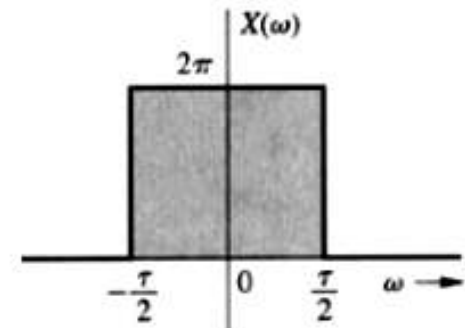
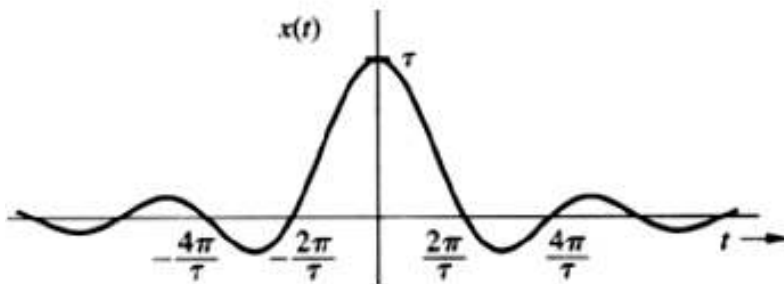
- Propriedades da Transformada de Fourier -

❖ Dualidade

$$X(t) \Longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$



$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Longleftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

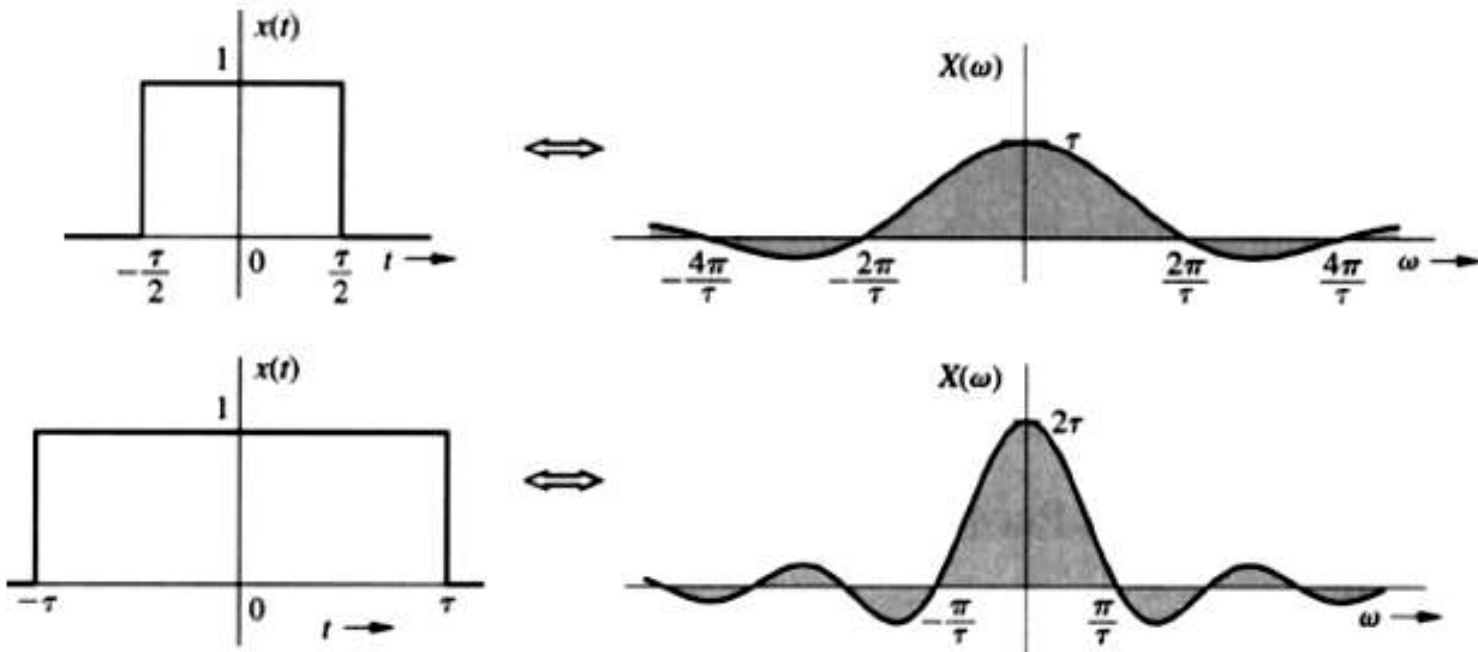


$$\tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Longleftrightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{-\omega}{\tau}\right) = 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

- Propriedades da Transformada de Fourier -

❖ Escalonamento

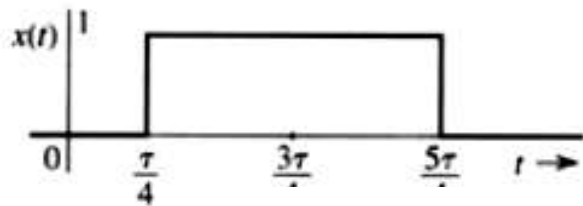
$$x(at) \iff \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



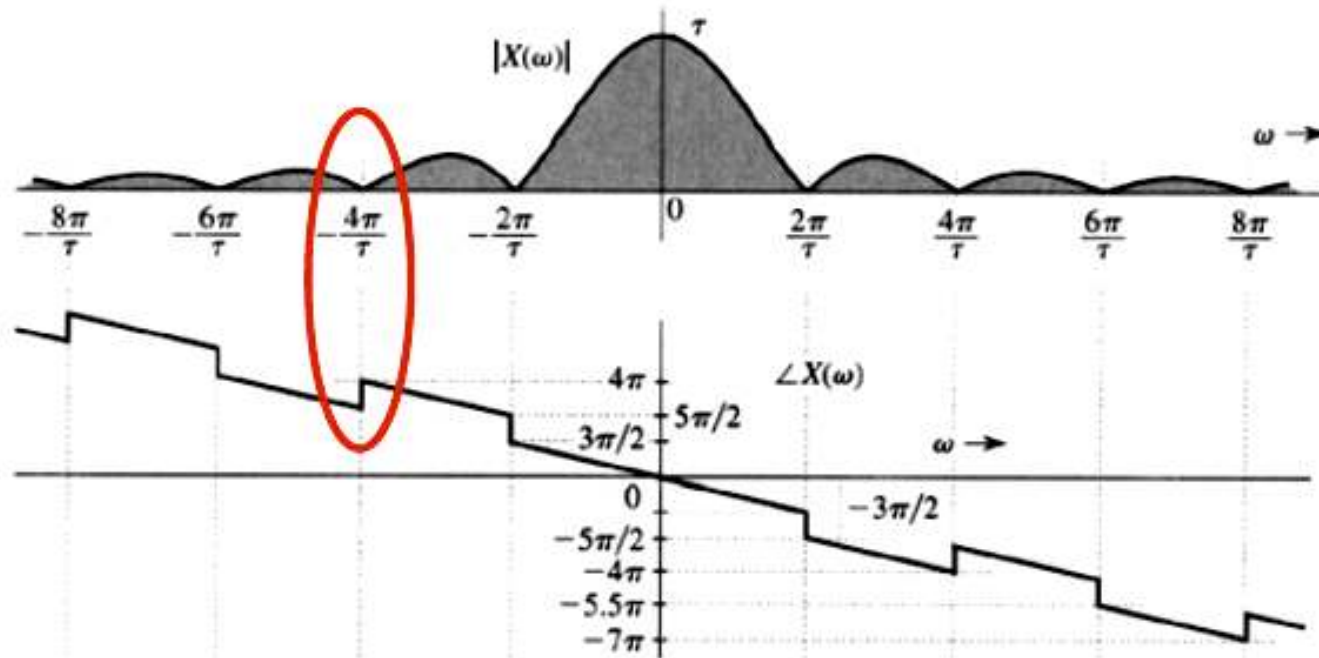
- Propriedades da Transformada de Fourier -

❖ Deslocamento no tempo

$$x(t - t_0) \iff X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$



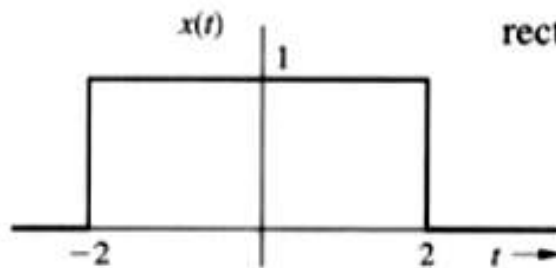
$$X(\omega) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega(3\tau/4)}$$



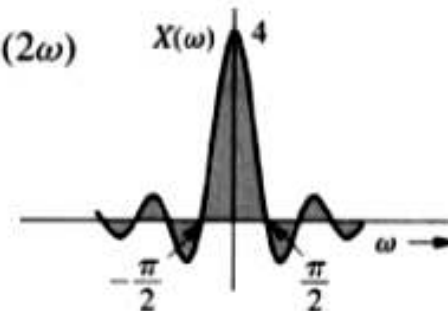
- Propriedades da Transformada de Fourier -

❖ Deslocamento na frequência

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \iff X(\omega - \omega_0)$$

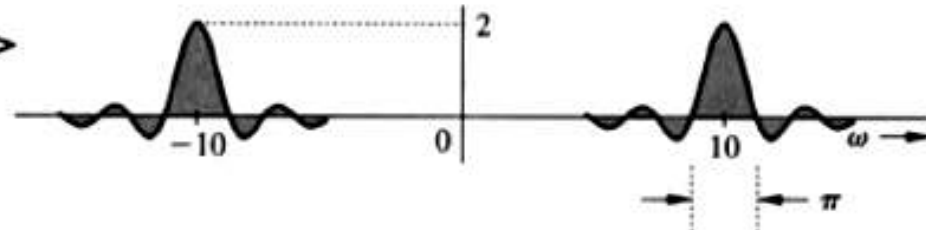
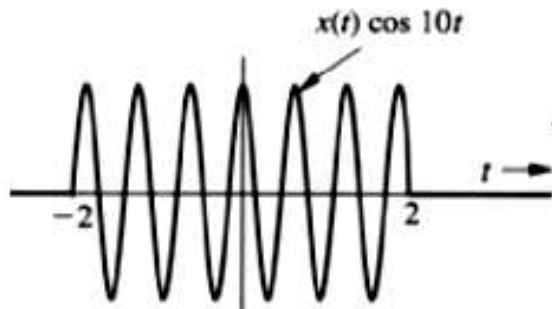


$$\text{rect}(t/4) \iff 4 \text{sinc}(2\omega)$$



$$x(t) \cos 10t \iff \frac{1}{2}[X(\omega + 10) + X(\omega - 10)]$$

$$x(t) \cos 10t \iff 2 \text{sinc}[2(\omega + 10)] + 2 \text{sinc}[2(\omega - 10)]$$



- Propriedades da Transformada de Fourier -

❖ Convolução

$$x_1(t) * x_2(t) \iff X_1(\omega) X_2(\omega)$$

$$x_1(t)x_2(t) \iff \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

Se

$$h(t) \iff H(\omega)$$

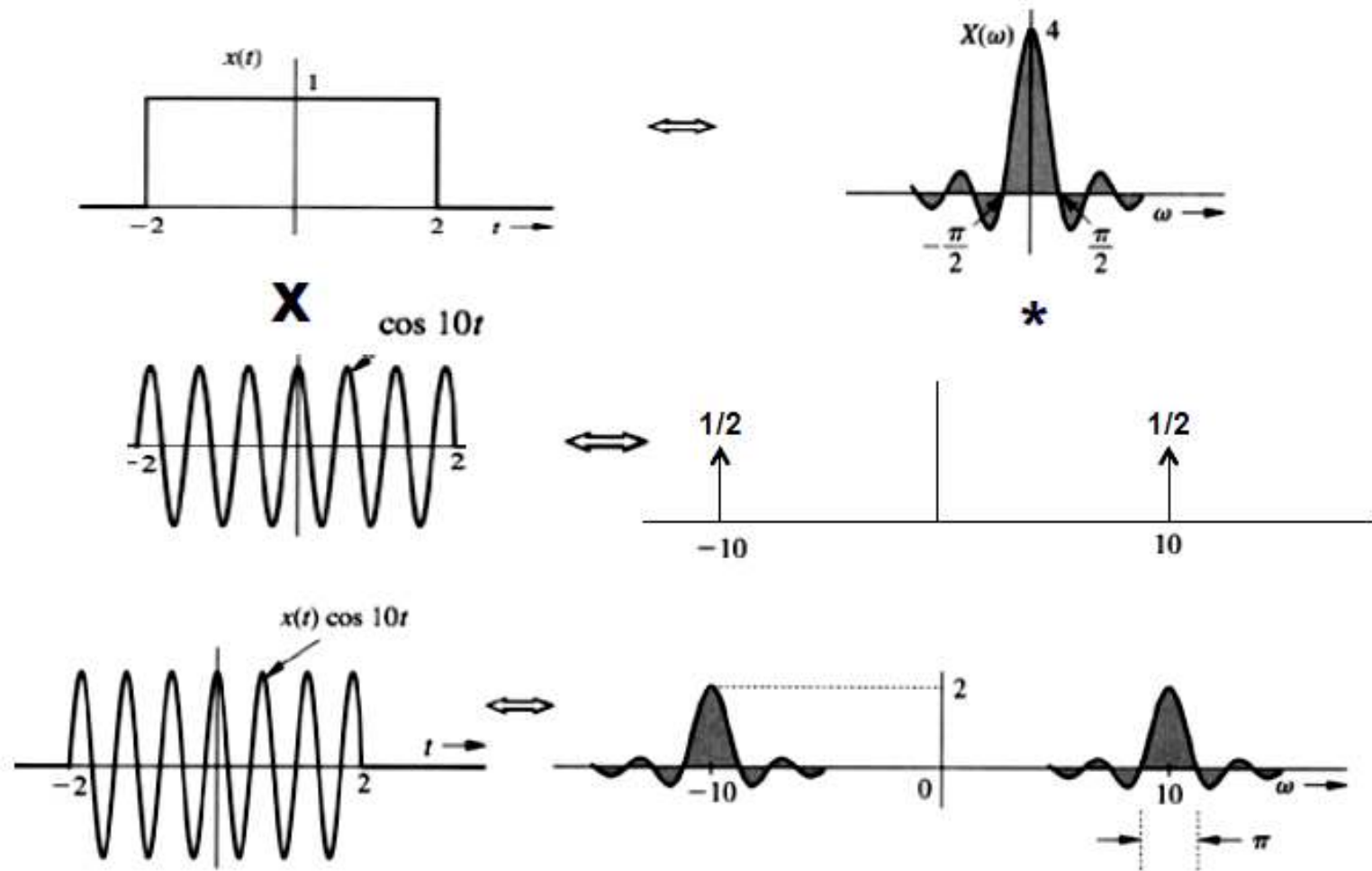
então

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$



- Propriedades da Transformada de Fourier -

❖ Convolução



- Propriedades da Transformada de Fourier -

❖ Diferenciação e integração

$$\frac{dx}{dt} \Longleftrightarrow j\omega X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$



- Propriedades da Transformada de Fourier -

- ❖ Exercício: com base nas propriedades da dualidade e escalonamento no tempo, explique o comportamento de um filtro passa-baixas, nos casos em que sua resposta impulsiva seja representada por: (a) uma função ret; (b) uma função sinc.

Ver o Exemplo 7.11, página 618 (livro Sinais e Sistemas Lineares – Lathi).



Resposta em Frequência de Sistemas LTI



- Resposta em Frequência -

- ❖ Considere um sistema com resposta impulsiva $h(t)$. À entrada deste sistema é submetido um sinal $x(t)=e^{j\omega_0 t}$. Assim:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega_0(t-\tau)}d\tau$$

$$y(t) = e^{j\omega_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega_0 \tau}d\tau}$$

Transformada de Fourier

$y(t)$ será uma exponencial complexa de amplitude $H(\omega_0)$ e fase linear.

$$y(t) = e^{j\omega_0 t}H(\omega_0)$$

$$|y(t)| = H(\omega_0)$$

$$\angle y(t) = \angle H(\omega_0) + \omega_0 t$$

- Resposta em Frequência -

- ❖ Resultado similar pode ser obtido para uma entrada cossenoidal e assim, por inspeção, podemos conseguir uma aproximação da resposta em frequência, para diferentes valores de ω_0 .



- ❖ Exercício computacional: considere um sistema cuja resposta impulsiva é dada por uma função $\text{rect}(t/\tau)$. Obtenha sua resposta em frequência por meio do experimento descrito acima.

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \longrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

- Resposta em Frequência -

- ❖ Segundo a propriedade da convolução a relação entrada-saída de um sistema com resposta impulsiva $h(t)$ é:

$$h(t) \Longleftrightarrow H(\omega)$$
$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

- ❖ Exercício : determine a resposta $y(t)$ a uma entrada $e^{-t}u(t)$, de um sistema cuja resposta em frequência é $H(\omega)=1/j\omega+2$.

Qual seria a resposta deste sistema se considerarmos que ele apresenta um atraso de resposta de 0.05 s? Qual a saída neste caso?



Resposta em Frequência de Sistemas LTI

Caso de Estudo: Transmissão Através de Sistemas LTI



- Transmissão sem distorção -

❖ Sabemos que:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

❖ Se $h(t)$ é a resposta de um canal não ruidoso, sem interferências, reflexões ou outros fenômenos. Este canal é dito sem distorções, sendo aceitável que apresente um atraso t_d e um ganho (ou atenuação) G_0 . Tal que,

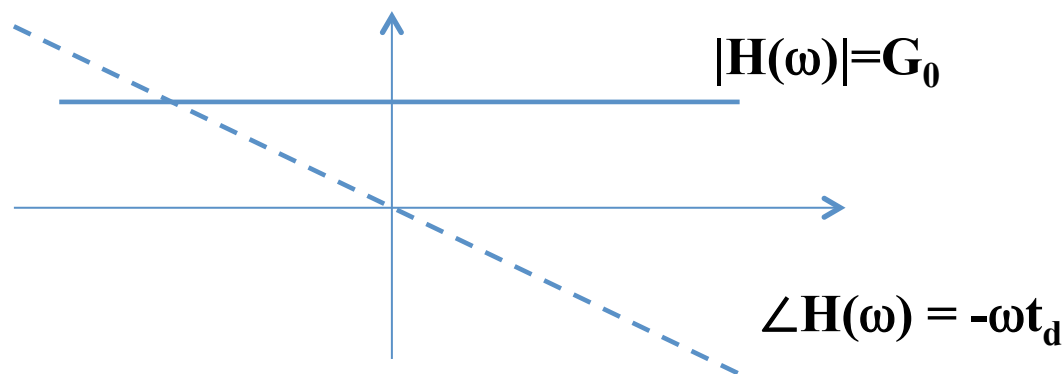
$$y(t) = G_0 x(t - t_d)$$

Com base na propriedade do deslocamento no tempo, mostre os efeitos deste sistema na frequência.



- Fase linear e atraso de grupo-

- ❖ O sistema sem distorção do exemplo anterior tem resposta em frequência $H(\omega)$ e espectros de amplitude e fase mostrados na figura abaixo:



- ❖ Se o espectro de fase é uma reta, sua angulação (atraso de grupo)

$$t_g = -\frac{d}{d\omega} \angle H(\omega)$$

é constante.

- Fase linear e atraso de grupo-

- ❖ Assim um sistema sem distorção tem atraso de grupo constante. Se o espectro de fase não é linear a derivada

$$t_g = -\frac{d}{d\omega} \angle H(\omega)$$

é uma função de ω e portanto não será constante. Implicação:

O atraso das componentes não será constante, causando distorções no sinal.

