



**Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará**  
**PPGER – PPGCC**

# Aula 7: Morfologia Matemática

## **Visão Computacional**

Prof. Dr. Pedro Pedrosa

**[pedrosarf@ifce.edu.br](mailto:pedrosarf@ifce.edu.br)**



**Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará**  
**PPGER – PPGCC**

# Parte 1 – imagens binárias

Processamento Digital de Imagens

Prof. Dr. Paulo César Cortez

Prof. Dr. Pedro Pedrosa

**[pedrosarf@ifce.edu.br](mailto:pedrosarf@ifce.edu.br)**

**[professorpedrosa.com](http://professorpedrosa.com)**

# Introdução

- Definição de Morfologia na Biologia
  - Estudo das formas e estruturas dos organismos animais e vegetais
- Definição de Morfologia Matemática
  - Ferramenta matemática para extração de componentes de imagens baseados na forma.
- Útil para a representação e descrição de :
  - Cantos
  - Bordas
  - Esqueletos
  - Componente envolvente
- A morfologia é um processo não linear, baseado na teoria de conjuntos.



# Aplicações em PDI

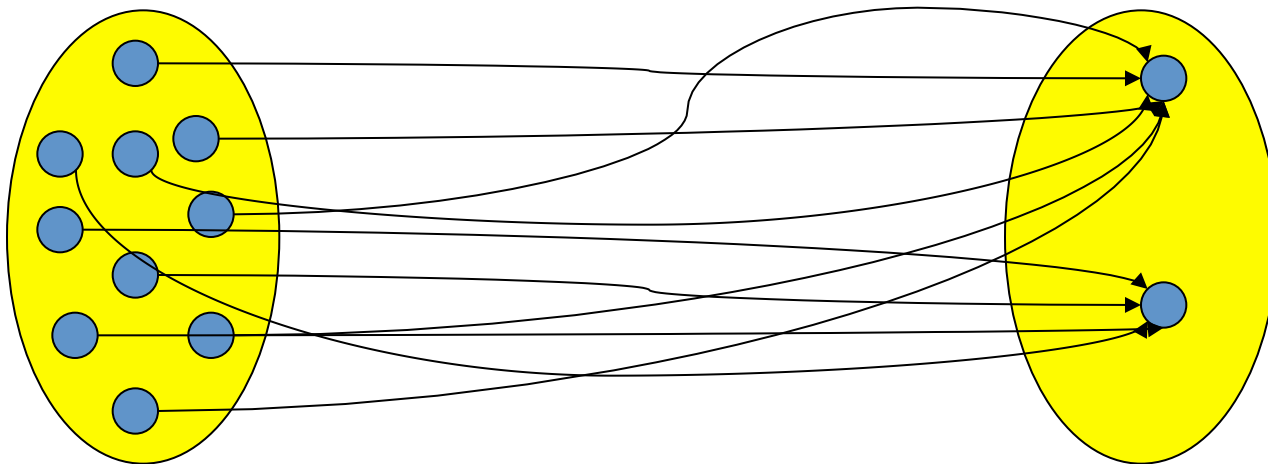
---

- Realce
- Segmentação
- Restauração
- Detecção de Bordas
- Análise de Textura
- Análise de Partículas
- Geração de Características
- Esqueletonização
- Análise de formas
- Compressão
- Análise de Componentes
- Preenchimento de Buracos
- Afinamento
- Detecção de características
- Redução de ruído
- Filtragem espaço/tempo.



# Introdução

- A morfologia é baseada na teoria de conjuntos.
- Os conjuntos representam objetos na imagem.
  - Um conjunto de pontos pretos de uma imagem forneceria uma descrição da morfologia da imagem.
- Uma imagem é definida como um mapeamento  $I$  de um conjunto das coordenadas dos pixels ( $S_p \subseteq \mathbb{Z}^2$ ), chamado plano de imagem, em um conjunto de valores  $G$ .



# Introdução

- Uma imagem binária é definida como um conjunto das coordenadas de pontos pretos  $(x,y)$  pertencentes ao plano  $Z^2$ .
- Uma imagem em nível de cinza pode ser representada por componentes  $(x,y,g)$  pertencentes ao plano  $Z^3$ .
  - $(x,y)$  representa as coordenadas
  - $g$  representa os níveis de cinza
- Pode-se representar uma imagem em planos superiores ( $Z^n$ ), em que a imagem possui vários atributos, como cor, pigmentação, iluminação, etc.
  - RGB:  $Z^5 (x,y,r,g,b)$ .
  - CMYK:  $Z^6 (x,y,c,m,y,k)$



# Processamento Digital de Imagens

## Unidade 9: Morfologia Matemática

# Conceitos Básicos

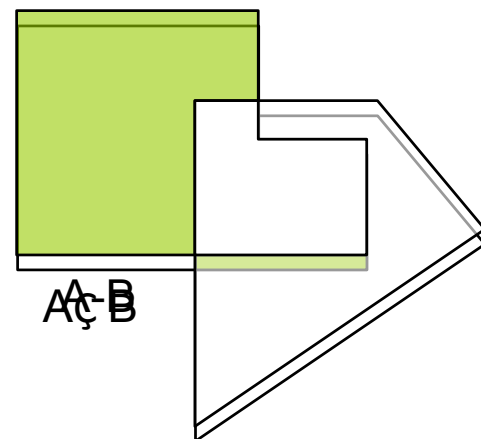
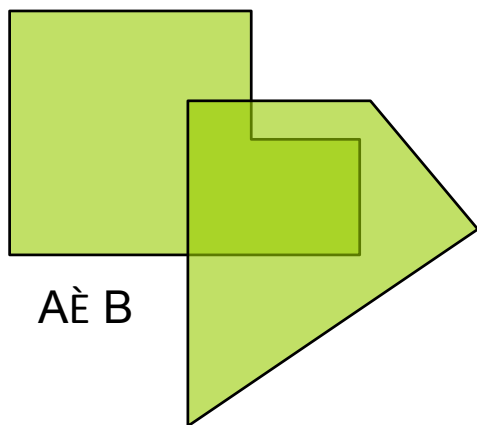
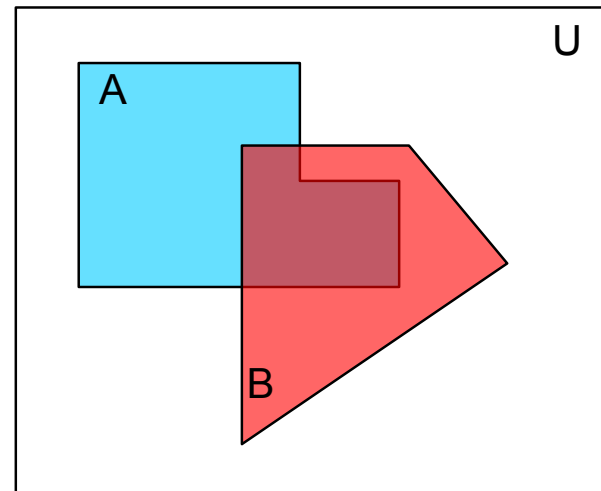
- Conjunto é uma coleção de objetos sem repetição.
- Seja  $A$  um conjunto contido em  $\mathbb{Z}^2$ .
- Quando  $a = (a_1, a_2)$  é um elemento de  $A$ , escreve-se:
  - $a \in A$
- Quando  $a$  não é elemento de  $A$ , escreve-se
  - $a \notin A$
- Quando um conjunto não possui elementos é definido como conjunto nulo ou vazio, definido por  $\emptyset$ .
- Um conjunto é especificado por dois colchetes  $\{ \}$ 
  - $C = \{(9,3), (3,7), (5,4), (2,2)\}$
  - $D = \{x \mid x_1 \in [10,30] \text{ e } x_2 \in [50, 70]\}$





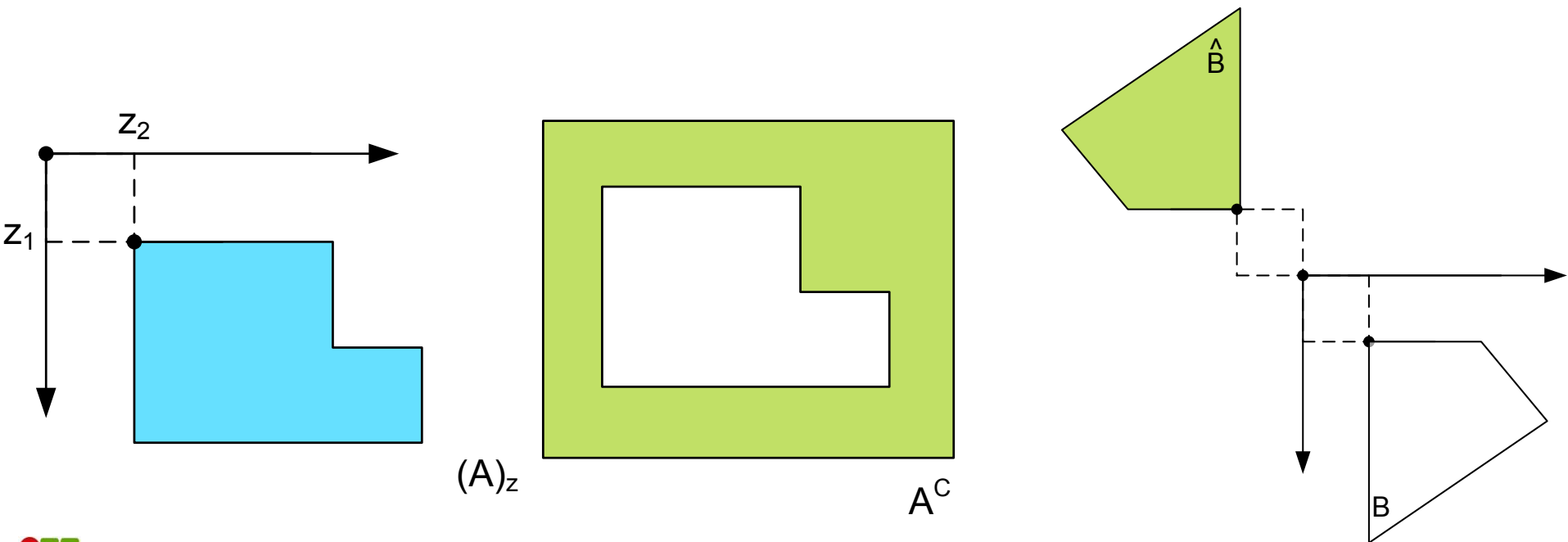
# Principais Operações:

- Sub-conjunto:  $A \subseteq U$
- União:  $A \cup B$
- Interseção:  $A \cap B$
- Diferença:  $A - B = \{ w \mid w \in A \text{ e } w \notin B \}$



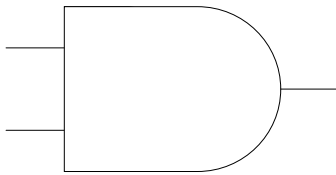
# Principais Operações:

- Complemento:  $A^c = \{ w \mid w \notin A \}$
- Reflexão:  $\hat{A} = \{ w \mid w = -a, \text{ para } a \in A \}$
- Translação por um vetor  $z (z_1, z_2)$  :
- $(A)_z = \{ c \mid c = a + z, \text{ para } a \in A \}$

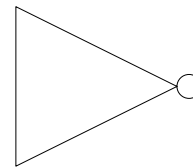


# Operações Lógicas em imagens binárias:

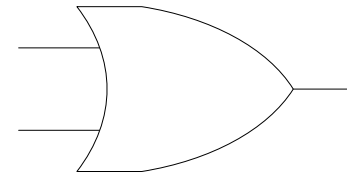
- A aplicação mais simples e que terá a maior parte das aplicações mostradas no livro texto é realizada em imagens binárias.
- Operações lógicas são simples e fornecem um conjunto completo que auxilia a implementação da morfologia binária.
- As principais operações lógicas utilizadas em processamento de imagens entre uma ou mais imagens são o AND, OR e NOT.



AND



NOT

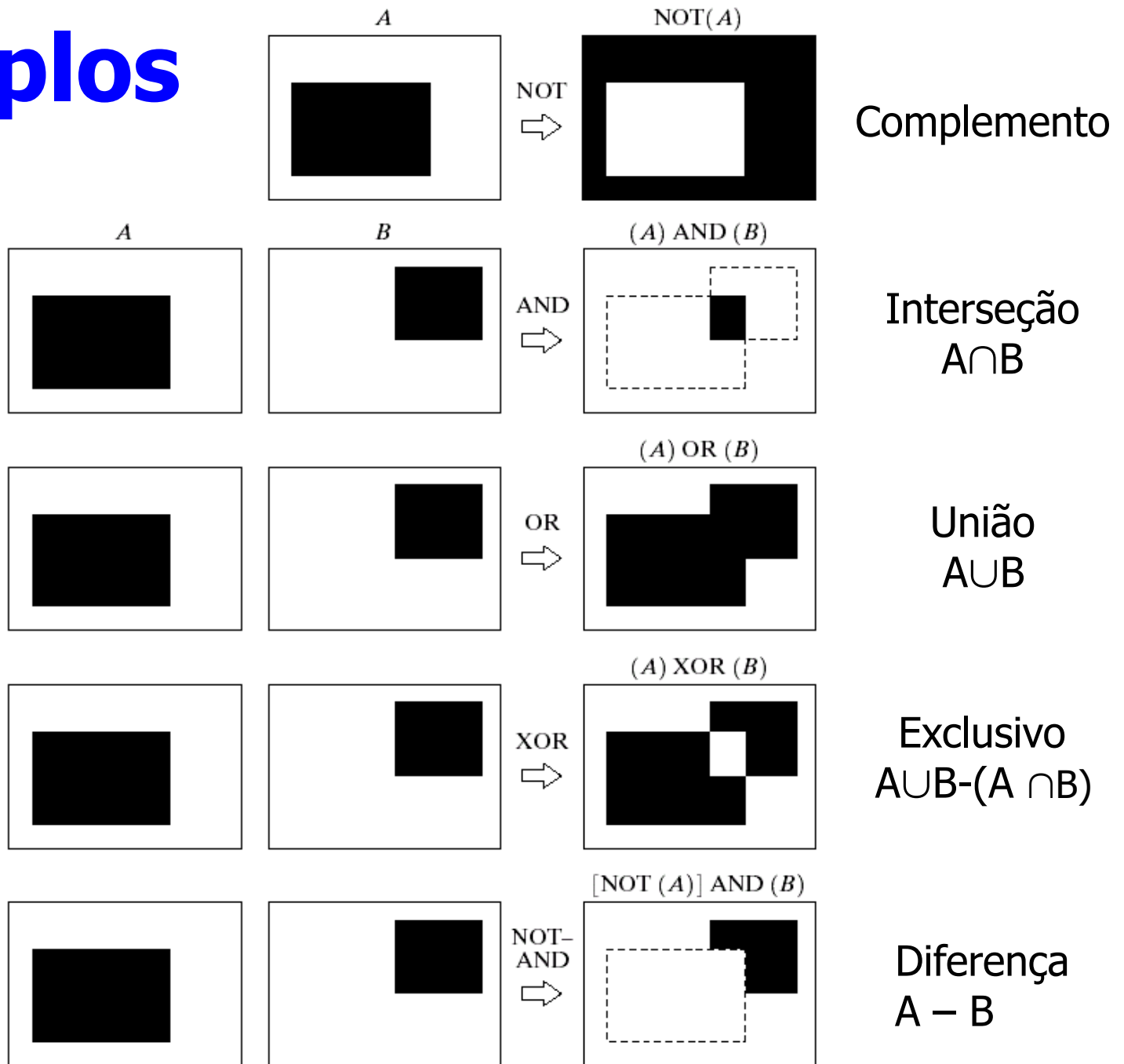


OR

- Estas podem formar qualquer outro tipo de operação lógica.



# Exemplos



# Processamento Digital de Imagens

## Morfologia Matemática

Operadores Morfológicos em Imagens Binárias  
Erosão e Dilatação  
Abertura e Fechamento  
Transformação Toca ou Não Toca

# Introdução

- A erosão e a dilatação são operadores considerados elementares, pois a maior parte dos operadores morfológicos utilizados podem ser implementados a partir dos mesmos.
- Operadores Elementares
  - Dilatação
  - Erosão
  - Anti-dilatação
  - Anti-erosão



# Processamento Digital de Imagens

## Morfologia Matemática

Erosão e Dilatação

# Dilatação

- Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos, em que  $A \subseteq \mathbb{Z}^2$  e  $B \subseteq \mathbb{Z}^2$ .
- A dilatação do conjunto  $A$  pelo conjunto  $B$  é expresso por:  $A \oplus B = \{Z \mid (B)_Z \cap A \neq \emptyset\}$ .
- A dilatação é definida como um conjunto de coordenadas ( $z$ ) em que  $B$  possui pelo menos um ponto que sobreposto à  $A$ .  
Podendo ser re-escrito como:

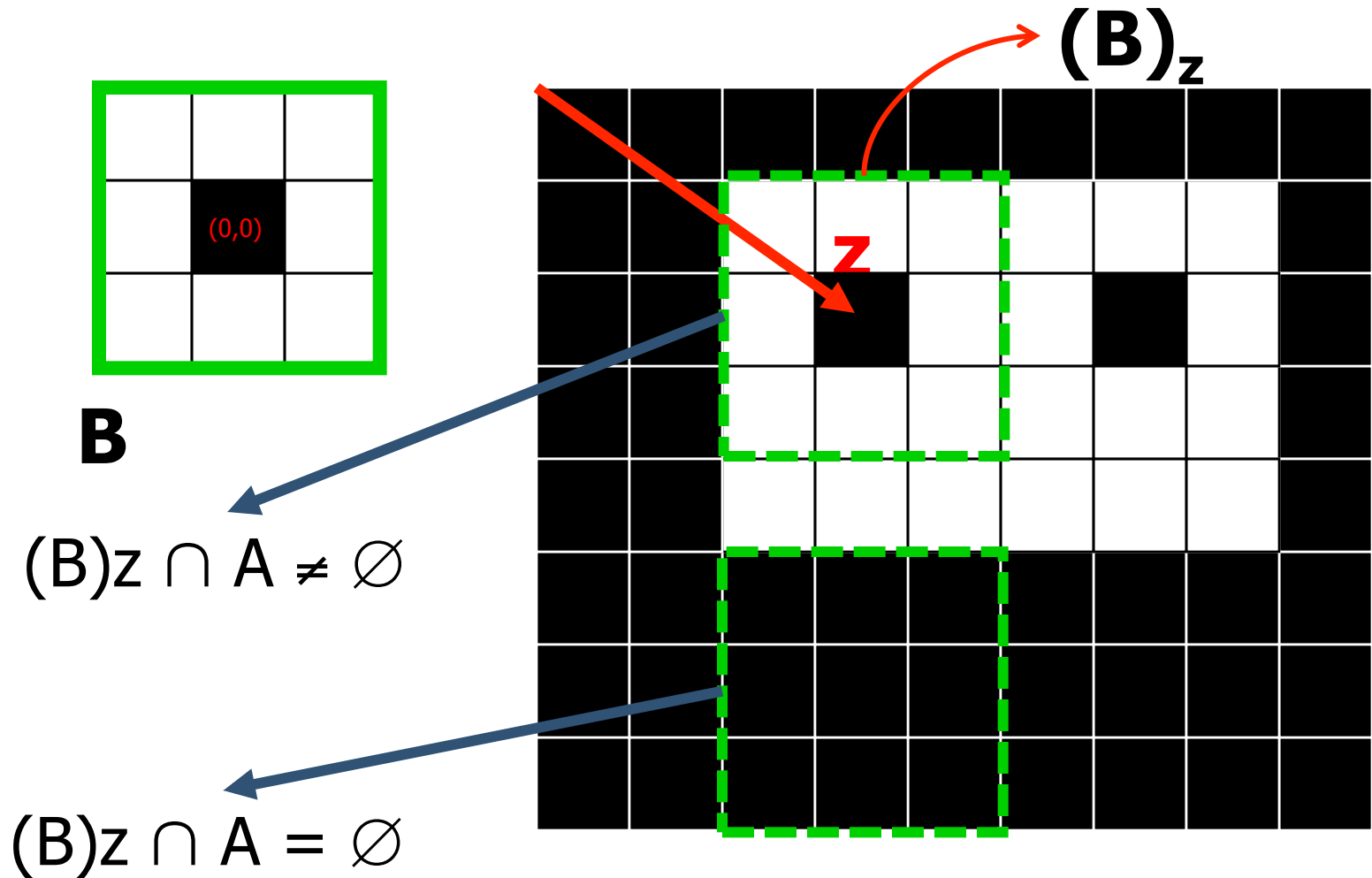
$$A \oplus B = \{Z \mid [(B)_Z \cap A] \subseteq A\}.$$

- Geralmente, refere-se o conjunto  $B$  como elemento estruturante. Estas não são as únicas maneiras de se definir esta operação. A definição apresentada possui uma grande vantagem para o entendimento da teoria, podendo ver o processo como uma máscara convoluída.



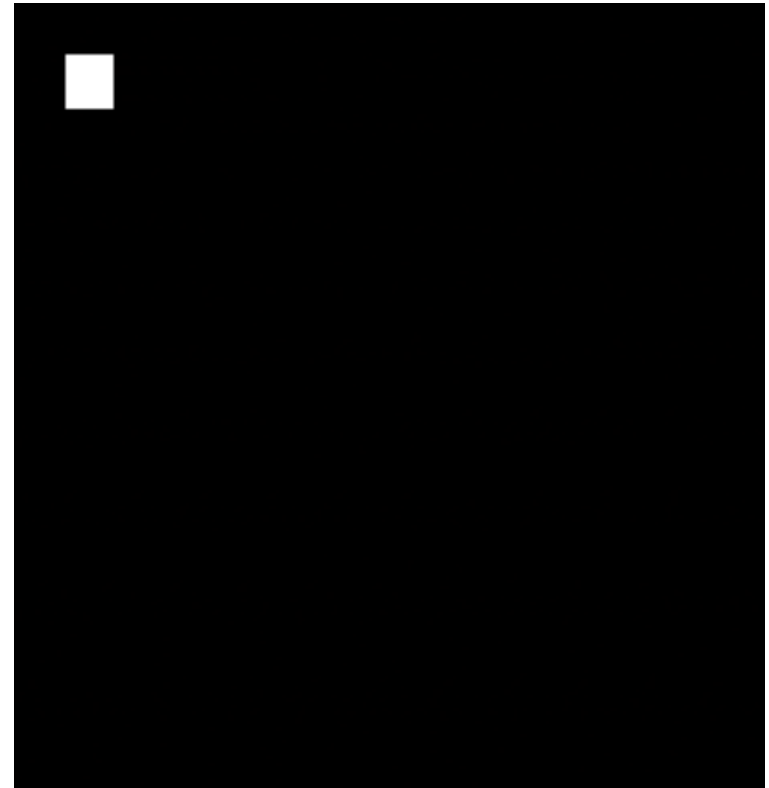
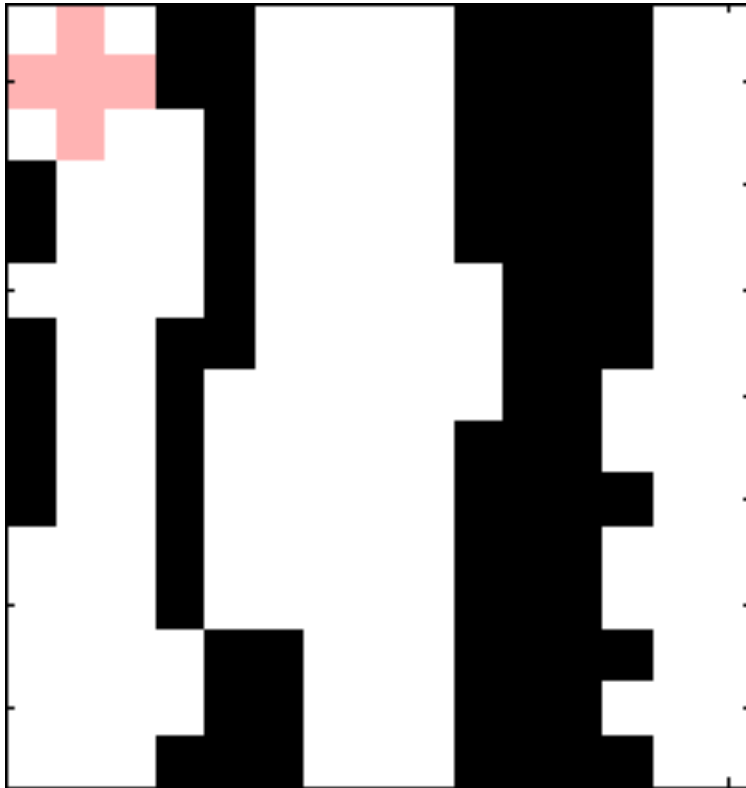


# Exemplo

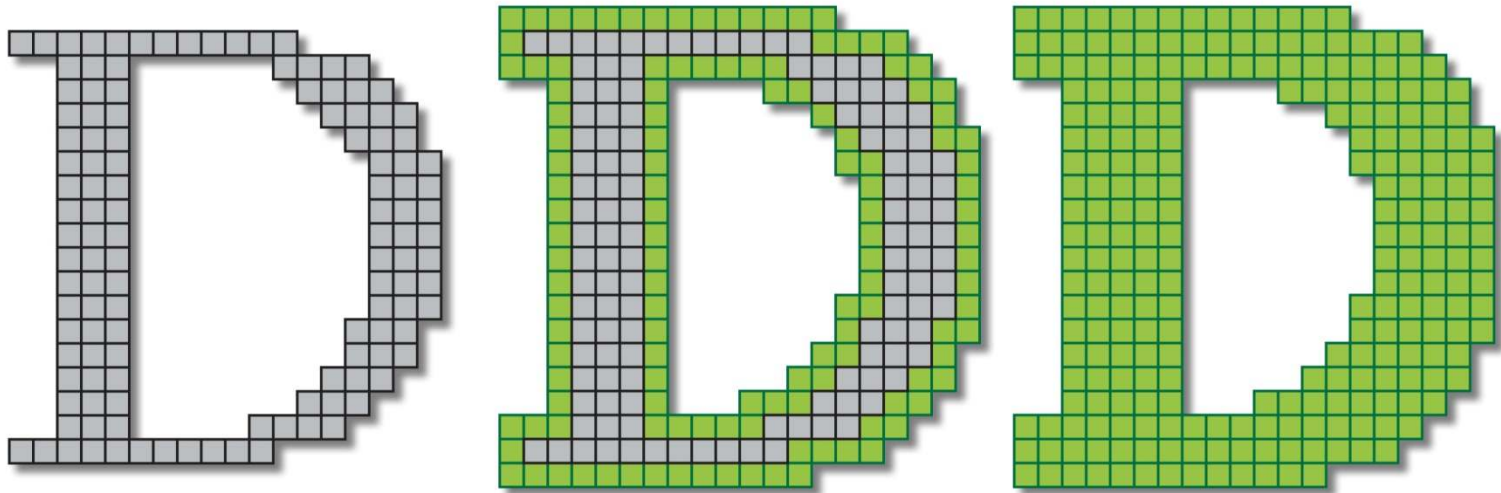


# Dilatação Didática

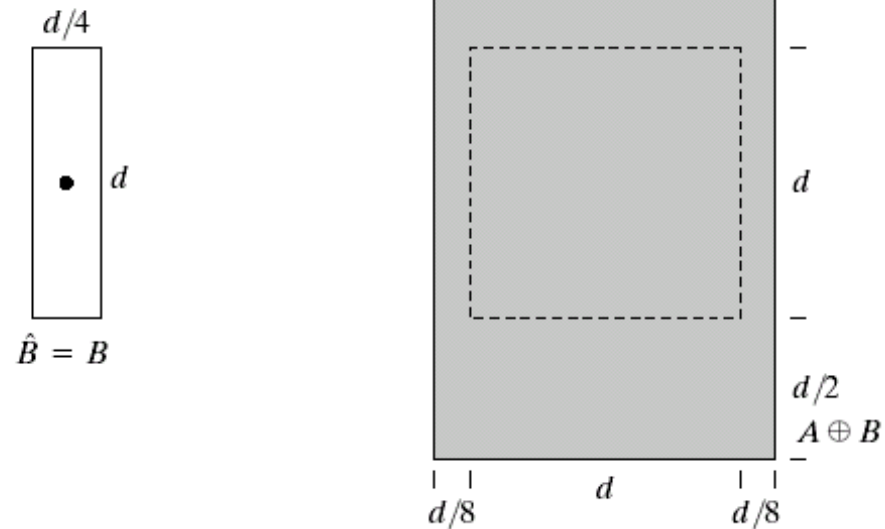
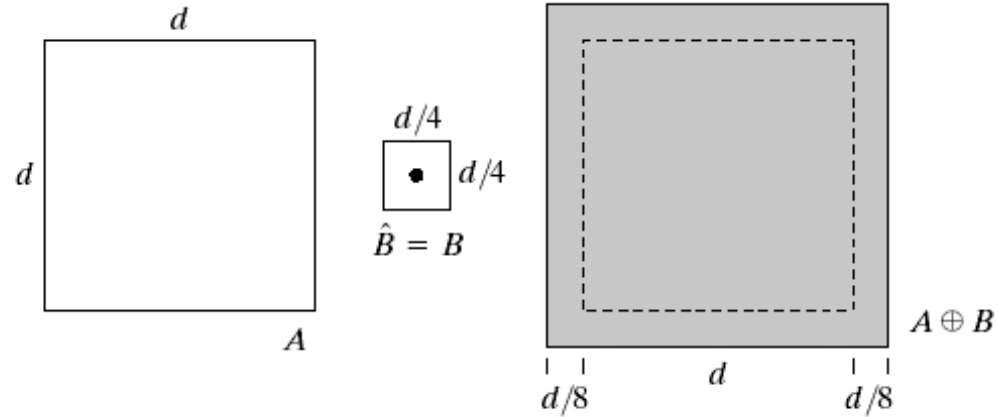
- Esta animação ilustra esta definição. Quando há sobreposição entre o elemento estruturante e a imagem, o elemento fica de cor vermelha.



# Exemplo

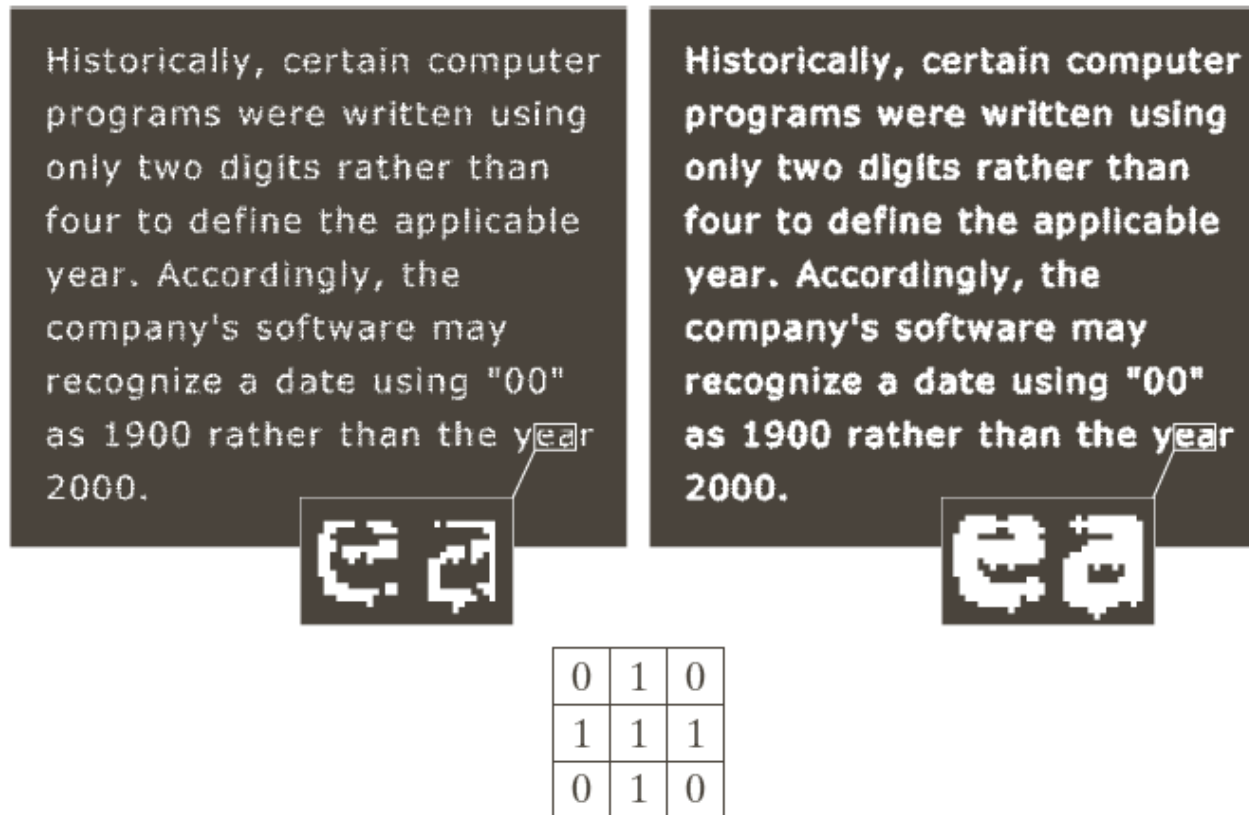


# Dilatação binária



# Exemplo de Aplicação

- Uma aplicação da dilatação é o preenchimento de buracos. A figura a seguir mostra um caso em que os caracteres possui falhas com tamanho de 2 pixels.



a b c

**FIGURE 9.7**  
(a) Sample text of poor resolution with broken characters (see magnified view).  
(b) Structuring element.  
(c) Dilation of (a) by (b). Broken segments were joined.

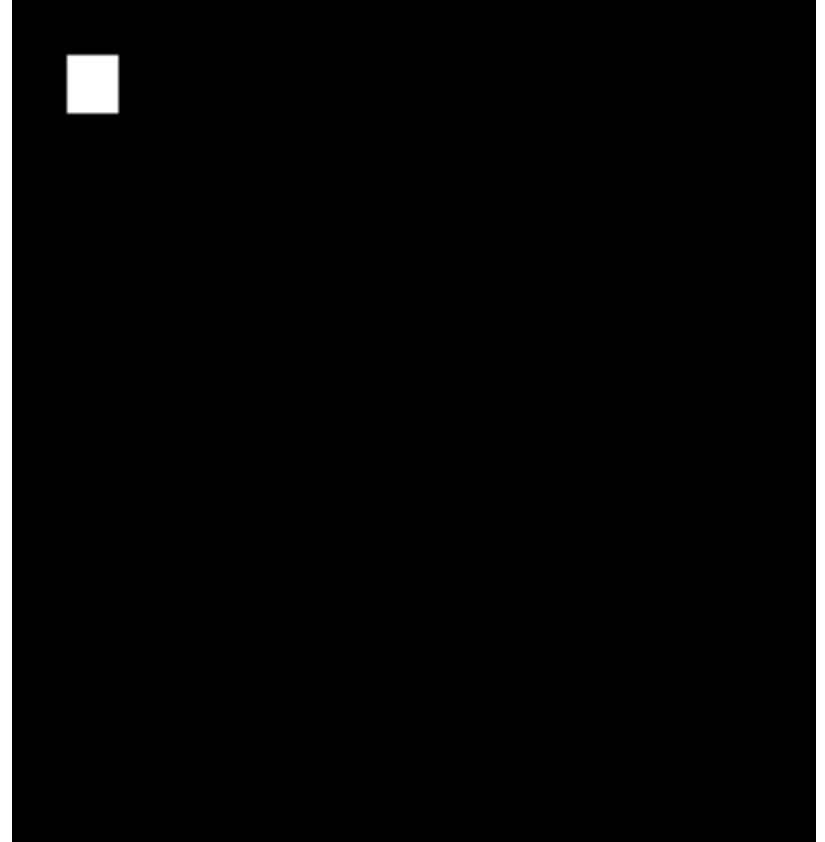
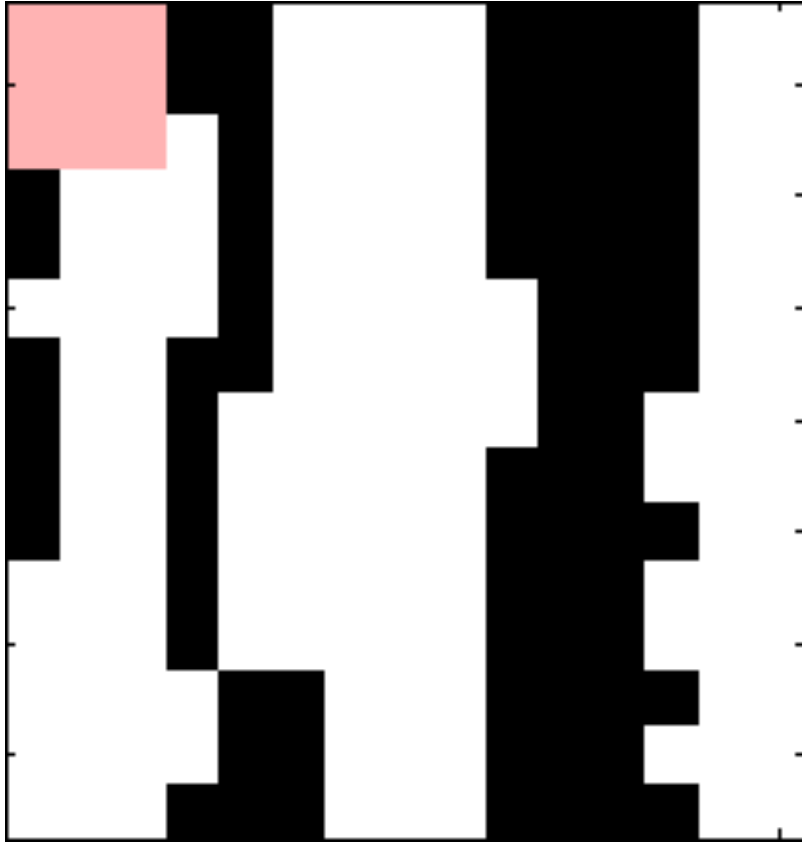
# Erosão

- Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos, em que  $A \subseteq \mathbb{Z}^2$  e  $B \subseteq \mathbb{Z}^2$ .
- A erosão do conjunto  $A$  pelo conjunto  $B$  é expresso por:  $A \ominus B = \{Z \mid (B)_z \subseteq A\}$ .
- A erosão pode ser vista como o conjunto de pontos  $z$  em que  $B$  transladado por  $z$  está completamente contido em  $A$ .
- Da mesma forma que a dilatação, existem diversas formas de definir a dilatação. Este tipo de erosão foi mostrada devido a sua facilidade de entendimento.
- Devido a propriedade de dualidade, pode-se implementar uma erosão a partir de uma dilatação:

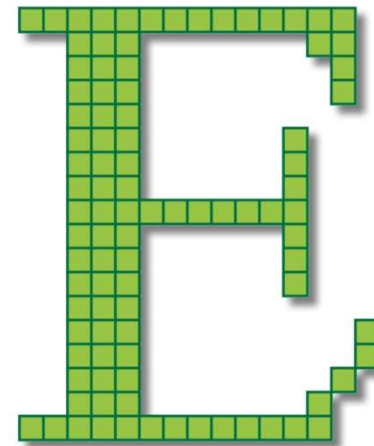
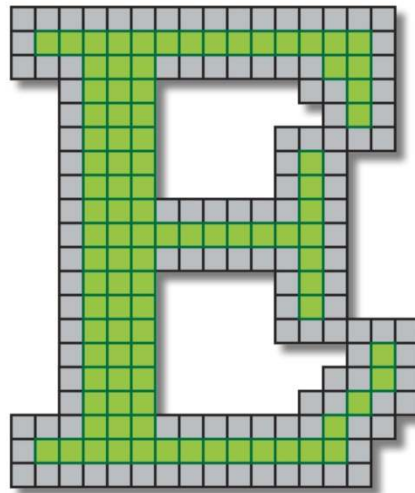
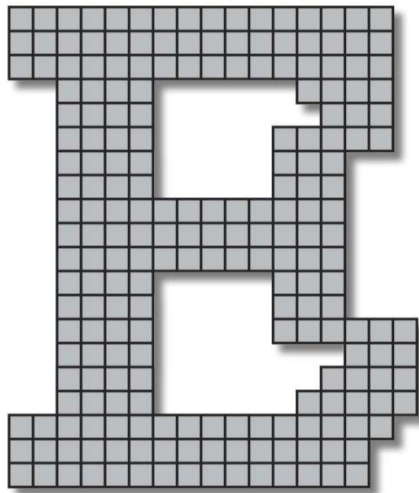
$$A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$$



# Exemplo de erosão

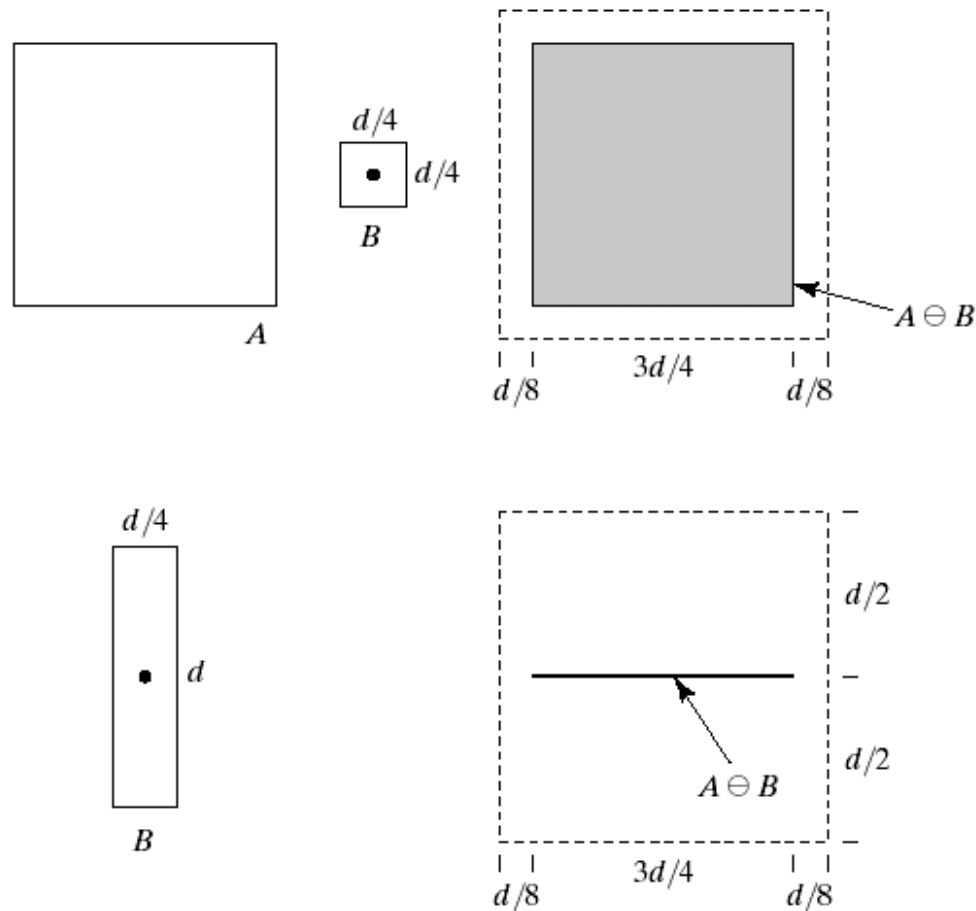


# Exemplo





# Exemplo de Erosão



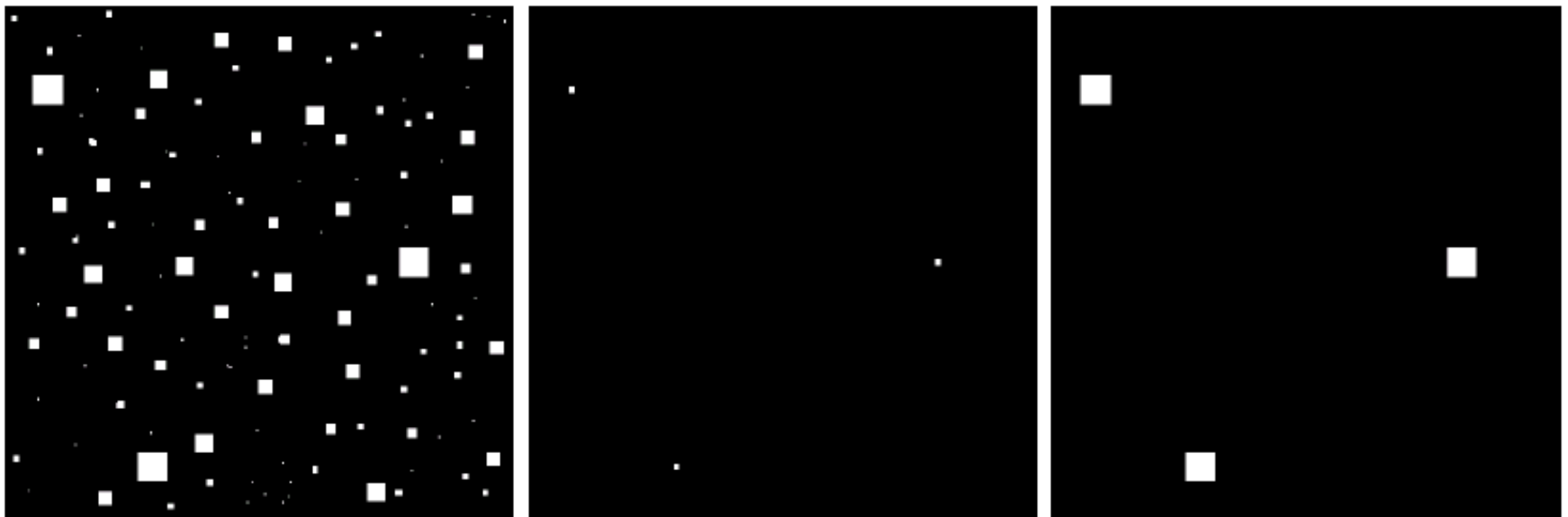
a	b	c
d		e

**FIGURE 9.6** (a) Set A. (b) Square structuring element. (c) Erosion of A by B, shown shaded. (d) Elongated structuring element. (e) Erosion of A using this element.



# Aplicações da erosão

- Remoção de detalhes pequenos (irrelevantes).
- Todas as estruturas que forem menores que o elemento estruturante são removidas da imagem.

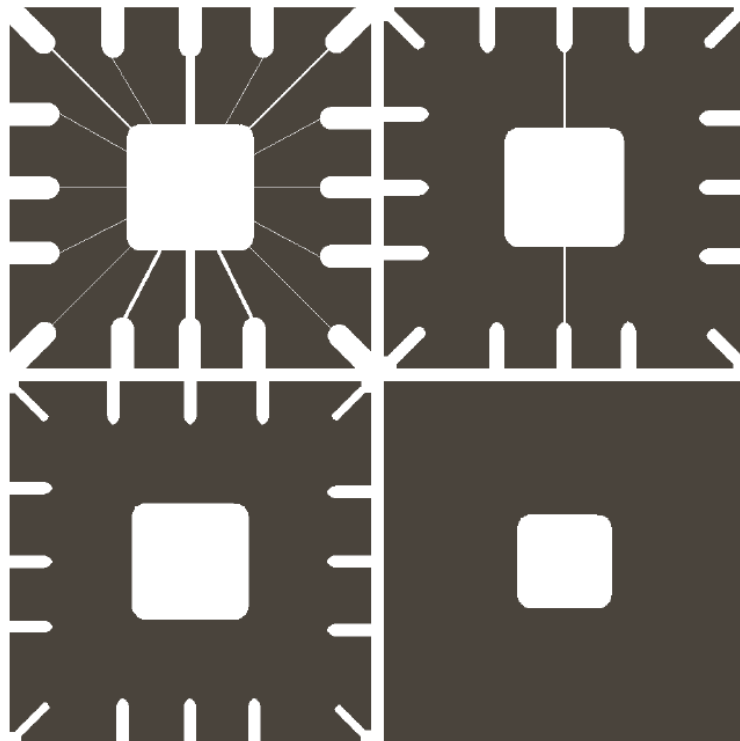


a b c

**FIGURE 9.7** (a) Image of squares of size 1, 3, 5, 7, 9, and 15 pixels on the side. (b) Erosion of (a) with a square structuring element of 1's, 13 pixels on the side. (c) Dilation of (b) with the same structuring element.



# Exemplo de Erosão



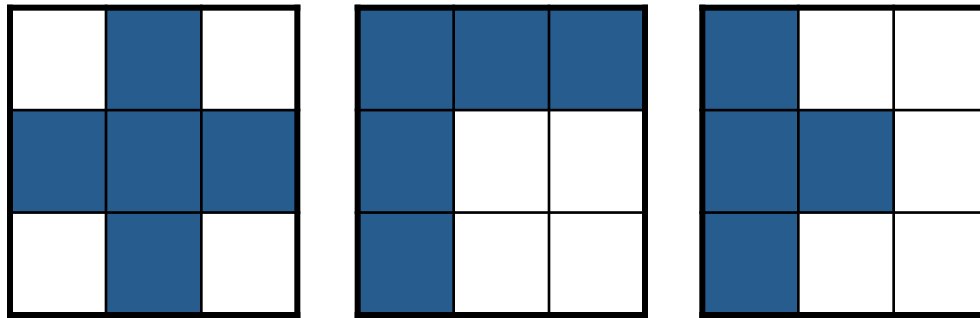
a	b
c	d

**FIGURE 9.5** Using erosion to remove image components. (a) A  $486 \times 486$  binary image of a wire-bond mask. (b)–(d) Image eroded using square structuring elements of sizes  $11 \times 11$ ,  $15 \times 15$ , and  $45 \times 45$ , respectively. The elements of the SEs were all 1s.



# Elementos Estruturantes

- Pode variar de acordo com dois critérios
  - Quanto ao tamanho
    - $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ , ...  $N \times N$ ,  $N \times M$
    - Porém importante ter um ponto central
  - Quando à disposição dos *pixels*



- A grande questão é encontrar o EE ideal ao caso
- Podendo ainda tender a formatos internos diversos
  - Redondos, triangulares, quadrados etc...

# Processamento Digital de Imagens

## Morfologia Matemática

Abertura e Fechamento

# Abertura

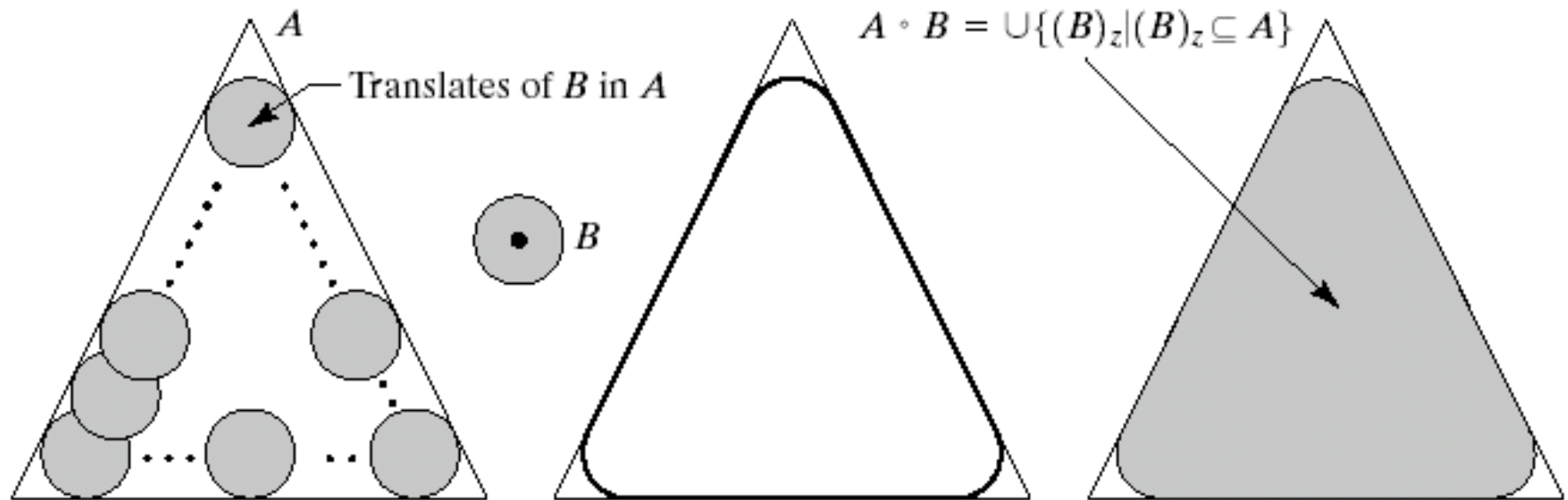
- A erosão realiza um encolhimento das regiões.
- A dilatação realiza um alarguecimento das regiões.
- Através da combinação destes dois operadores pode-se definir procedimentos de filtragem.
- Define-se abertura de um conjunto A por B como a erosão de A por B seguida de uma dilatação:

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

- A abertura realiza uma suavização do contorno, retira intruzões, tornando menos agudos os cantos.



# Exemplo



a b c d

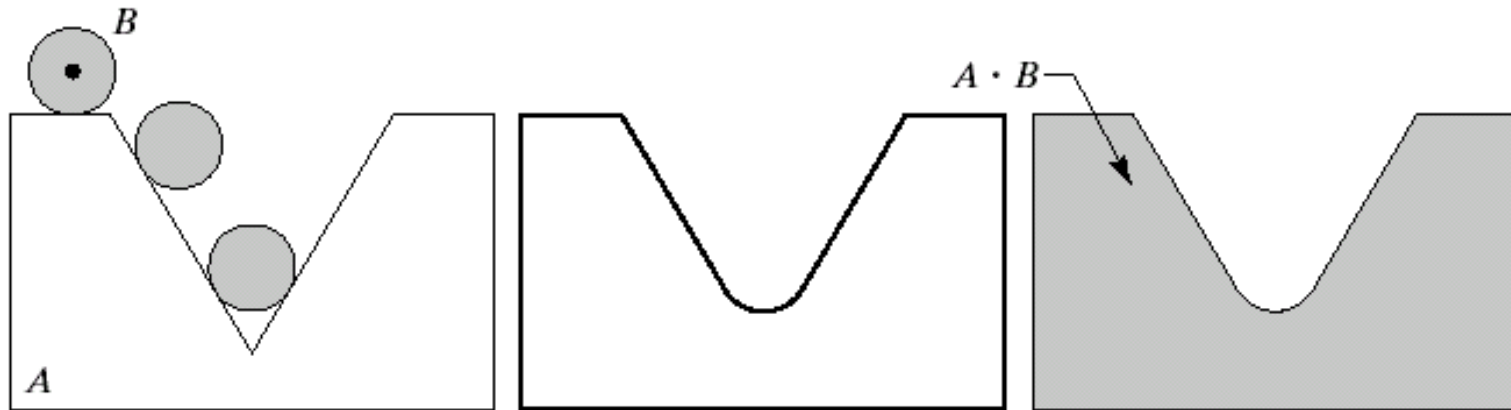
**FIGURE 9.8** (a) Structuring element  $B$  “rolling” along the inner boundary of  $A$  (the dot indicates the origin of  $B$ ). (c) The heavy line is the outer boundary of the opening. (d) Complete opening (shaded).

# Fechamento

- Define-se fechamento de um conjunto  $A$  por  $B$  como a dilatação de  $A$  por  $B$  seguida de uma erosão:

$$A \cdot B = (A \oplus B) \ominus B$$

- Aplicações do fechamento:
  - Suaviza seções do contorno
  - Preenchimento de buracos
  - União de furos e falhas do contorno.



a b c

**FIGURE 9.9** (a) Structuring element  $B$  “rolling” on the outer boundary of set  $A$ . (b) Heavy line is the outer boundary of the closing. (c) Complete closing (shaded).





# Propriedades

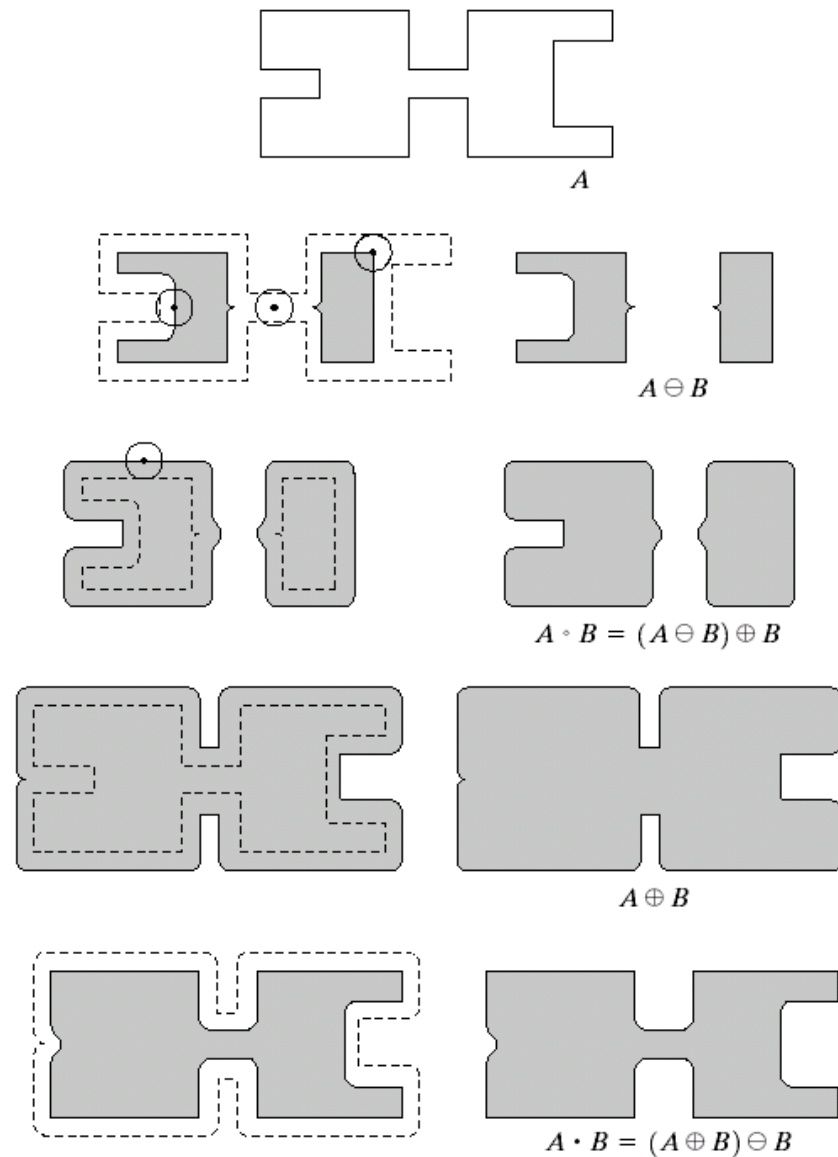
- Abertura
  - $A \circ B$  é um subconjunto (subimagem) de  $A$
  - Se  $C$  é um subconjunto de  $D$ , então  $C \circ B$  é um subconjunto de  $D \circ B$
  - $(A \circ B) \circ B = A \circ B$ .
- Fechamento
  - $A$  é um subconjunto de  $A \cdot B$ .
  - Se  $C$  é um subconjunto de  $D$ , então  $C \cdot B$  é subconjunto de  $D \cdot B$
  - $(A \cdot B) \cdot B = A \cdot B$
- Observa-se que em ambos os casos, aplicar multiplas aberturas ou fechamentos, possuem o mesmo efeito de aplicar uma vez o operador.



# Exemplos

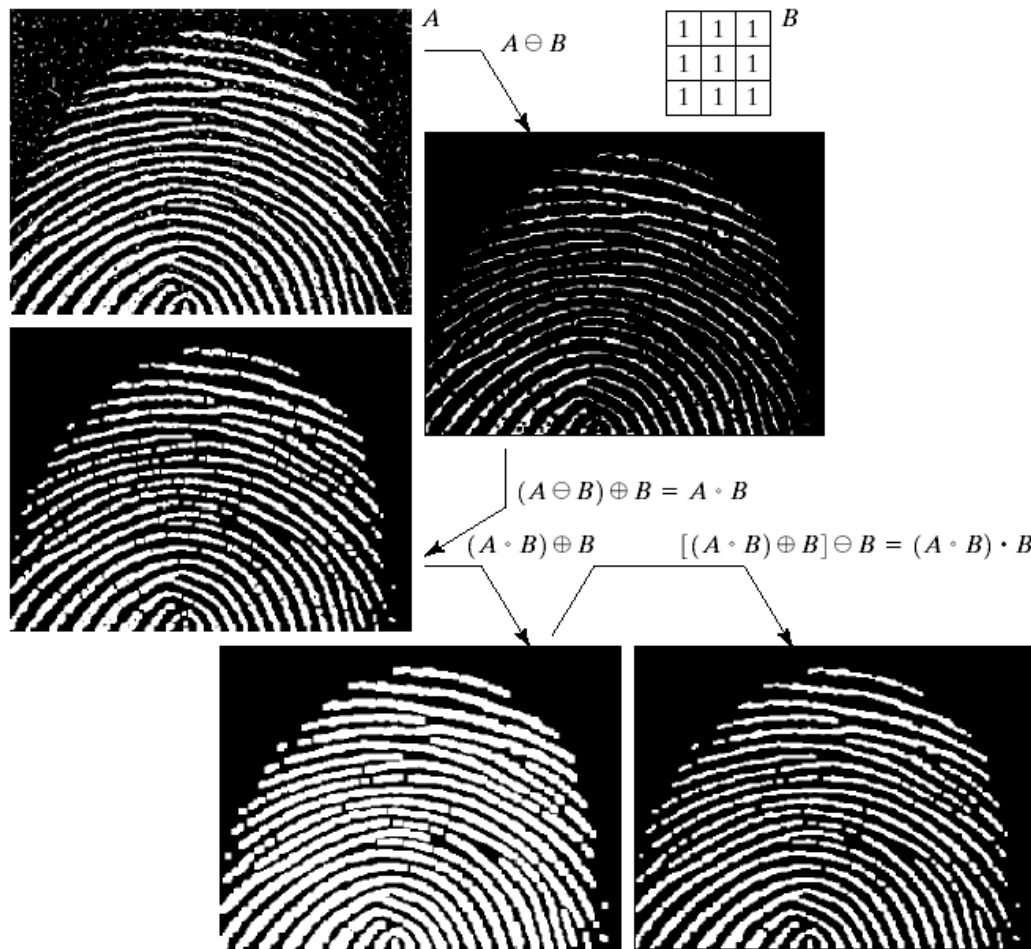
a
b c
d e
f g
h i

**FIGURE 9.10**  
Morphological opening and closing. The structuring element is the small circle shown in various positions in (b). The dark dot is the center of the structuring element.



# Filtragem

- Operadores morfológicos são capazes de realizar filtragem espacial.



a b  
d c  
e f

**FIGURE 9.11**

(a) Noisy image.  
(c) Eroded image.  
(d) Opening of  $A$ .  
(d) Dilation of the opening.  
(e) Closing of the opening. (Original image for this example courtesy of the National Institute of Standards and Technology.)

**Ruído quase todo removido**



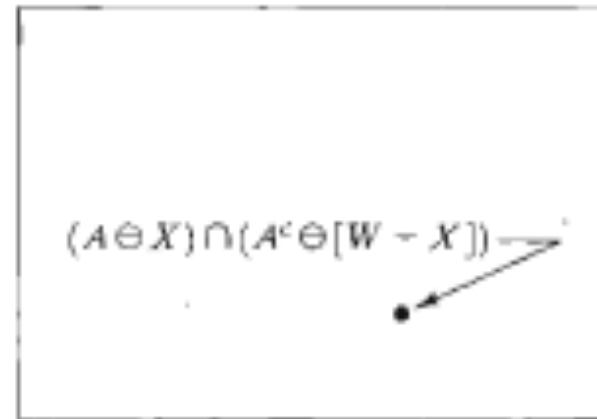
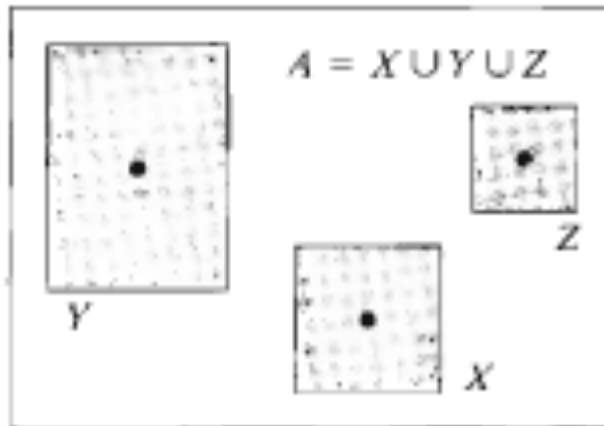
# Processamento Digital de Imagens

## Morfologia Matemática

Transformação “toca” ou “não toca”  
Hit or miss

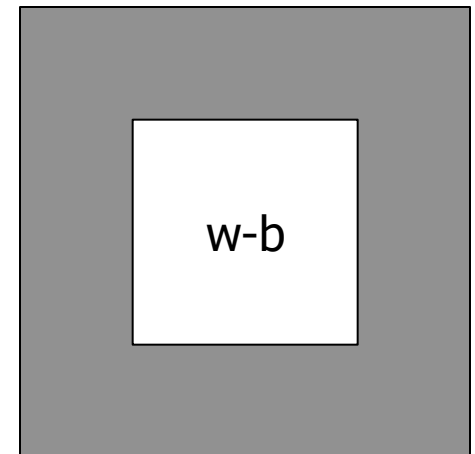
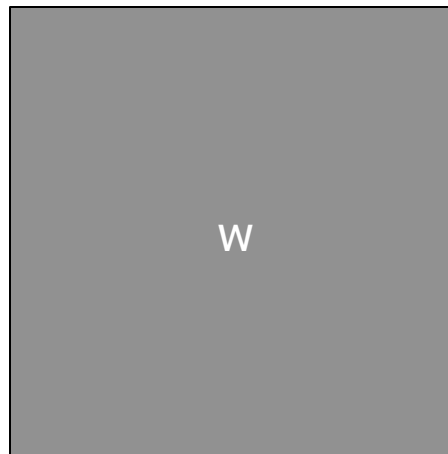
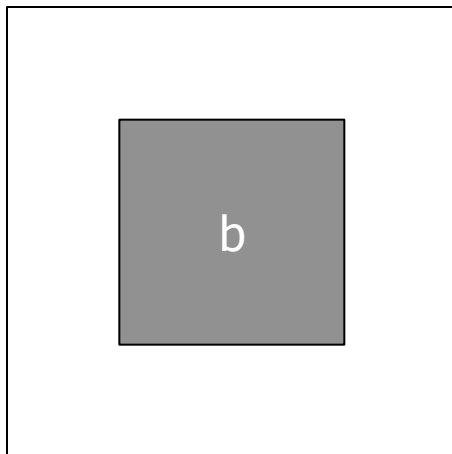
# Operador Hit-or-miss Binário

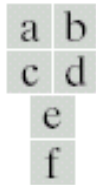
- O Hit-or-miss binário é uma ferramenta de detecção de formas baseada em morfologia matemática.
- A imagem a seguir mostra três objetos X,Y,Z. Através do Hit-or-miss, encontrar um destes padrões.



# Operador Hit-or-miss Binário

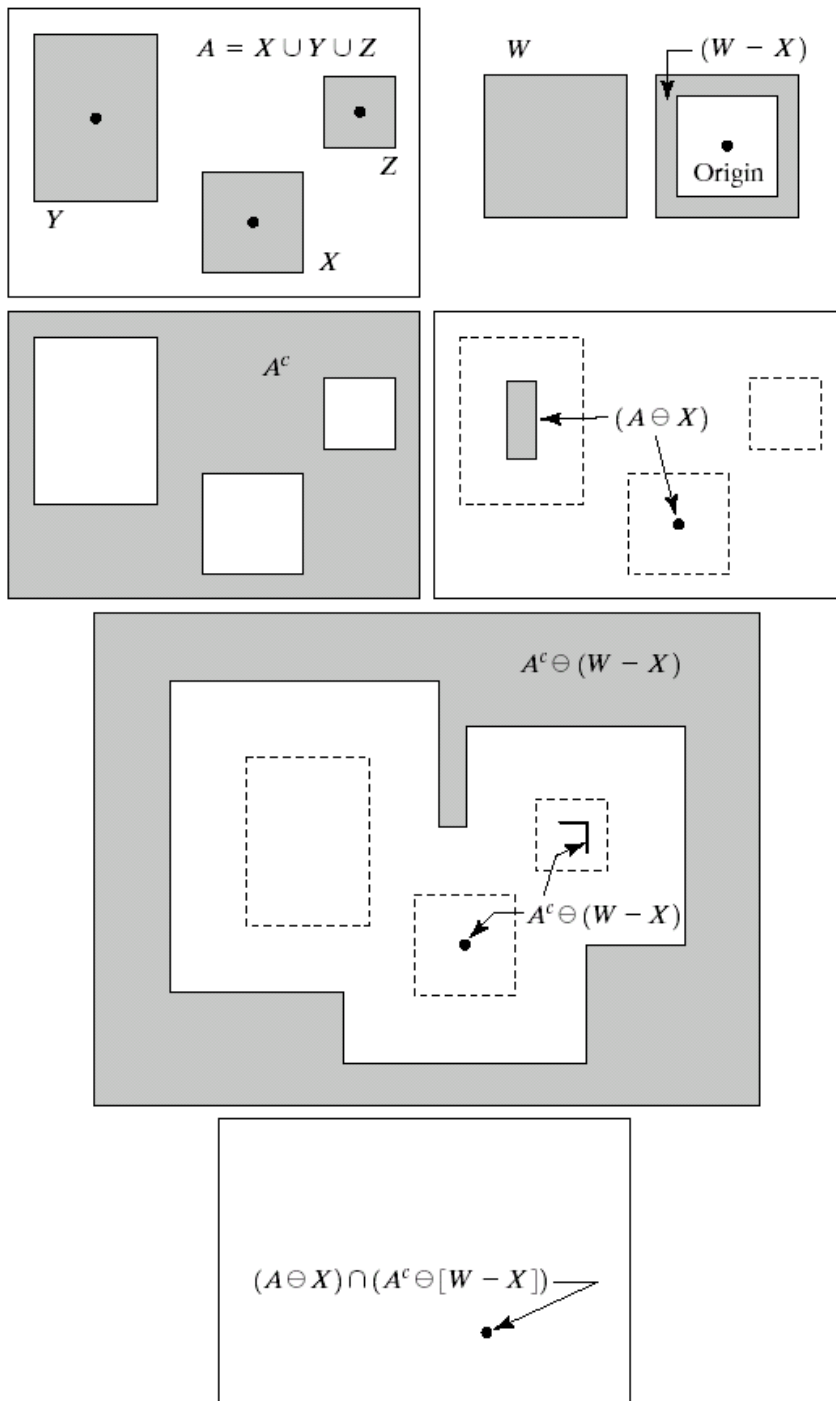
- A operação de Hit-or-miss binária é definida como:
$$a * b = (a \ominus b) \cap [a^c \ominus (w - b)]$$
- A partir desta definição geramos duas imagens :
  - Erodida
  - Anti-dilatada
- E para realizar o hit-or-miss, fizemos a interseção das duas imagens (erodida e anti-dilatada)



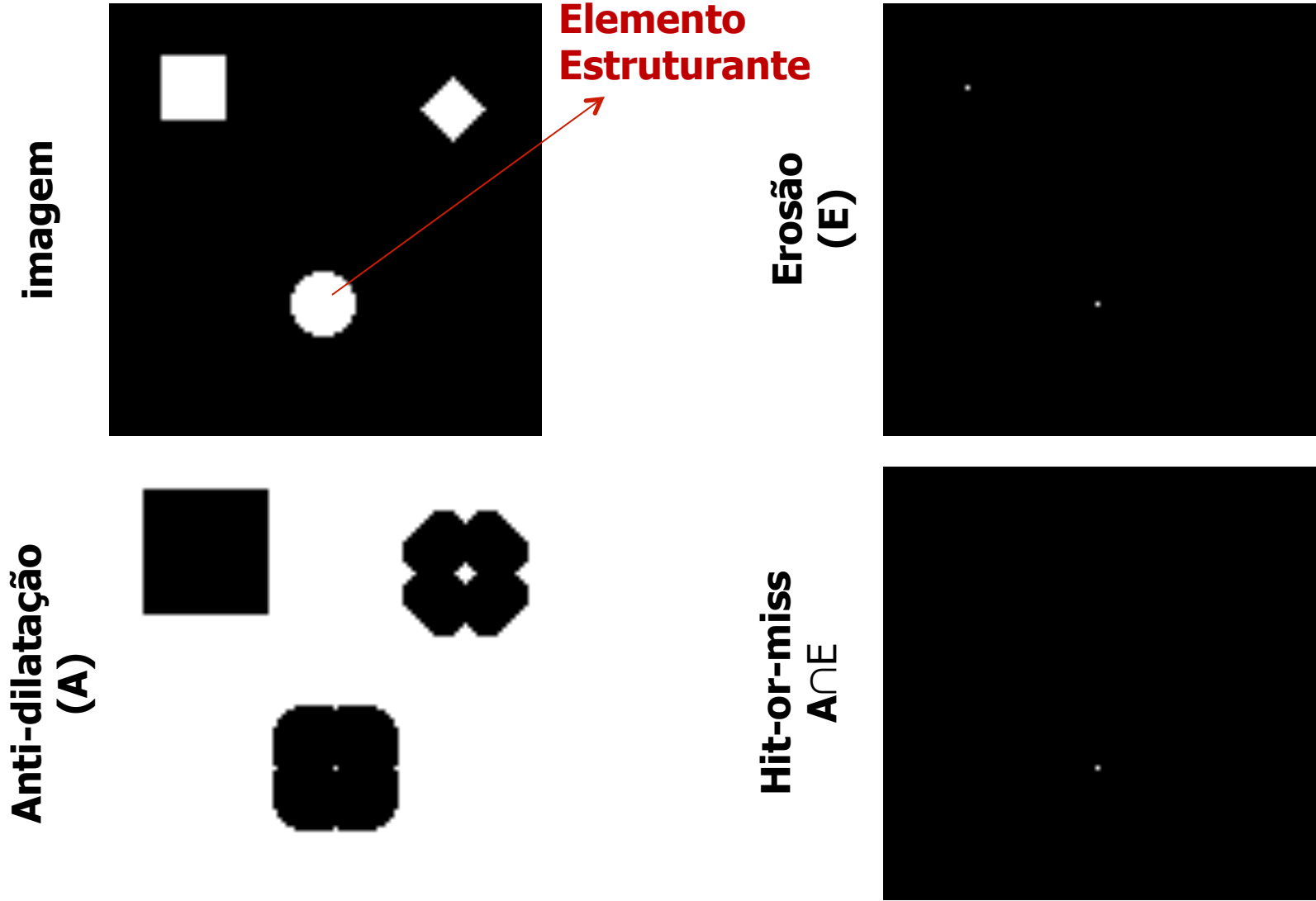


**FIGURE 9.12**

(a) Set  $A$ . (b) A window,  $W$ , and the local background of  $X$  with respect to  $W$ ,  $(W - X)$ . (c) Complement of  $A$ . (d) Erosion of  $A$  by  $X$ . (e) Erosion of  $A^c$  by  $(W - X)$ . (f) Intersection of (d) and (e), showing the location of the origin of  $X$ , as desired.



# Exemplos





# Hit-or-miss Binário

- A notação original, pode ser re-expressa utilizando um conjunto  $B = (B_1, B_2)$ 
  - $B_1$  está associado com o objeto ( $B_1 = D$ )
  - $B_2$  está associado ao fundo ( $B_2 = W-D$ )
- Re-escrevendo a equação como:

$$A \otimes B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$$

- O Hit-or-miss contém os pontos que satisfazem as duas condições simultâneas:
  - Os pontos de  $B_1$  que tocam  $A$ .
  - Os pontos de  $B_2$  que tocam  $A^c$ . Isto pode ser visto como os pontos que não tocam  $A$ .



# Hit-or-miss binário

- Utilizando estas condições, a equação do hit-or-miss pode ser escrita como:

$$A \otimes B = (A \ominus B_1) - (A \oplus \hat{B}_2)$$

- A razão de utilizar dois elementos estruturantes, um para o fundo e outro para o objeto é garantir que dois ou mais objetos possam ser distinguidos apenas se forem conjuntos desconectados.
- Isto é garantido pela existência de uma fundo com largura de pelo menos um pixel.



# Processamento Digital de Imagens

## Morfologia Matemática

Algoritmos Morfológicos

# Introdução

- A morfologia matemática é utilizada em extrair componentes da imagem que são úteis para representação e descrição de formas.
- Os algoritmos principais são
  - Extração de bordas
  - Extração de componentes conectados
  - Componente Envolvente (Convex-hull)
  - Esqueletização
  - Preenchimento de regiões
  - Afinamento

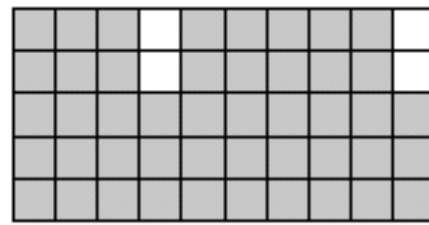


# Extração de bordas

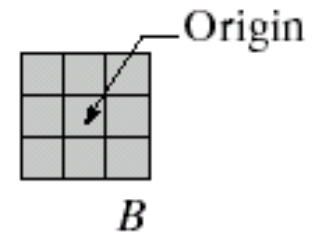
- Uma borda de um conjunto  $A$ , denotada por  $\beta(A)$  pode ser obtida por:
$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$
- Em que  $B$  é o elemento estruturante.

a	b
c	d

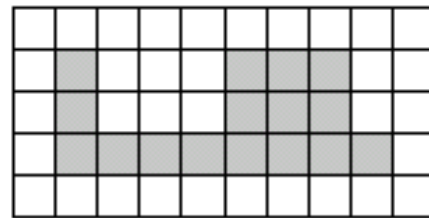
**FIGURE 9.13** (a) Set  $A$ . (b) Structuring element  $B$ . (c)  $A$  eroded by  $B$ . (d) Boundary, given by the set difference between  $A$  and its erosion.



$A$



$B$

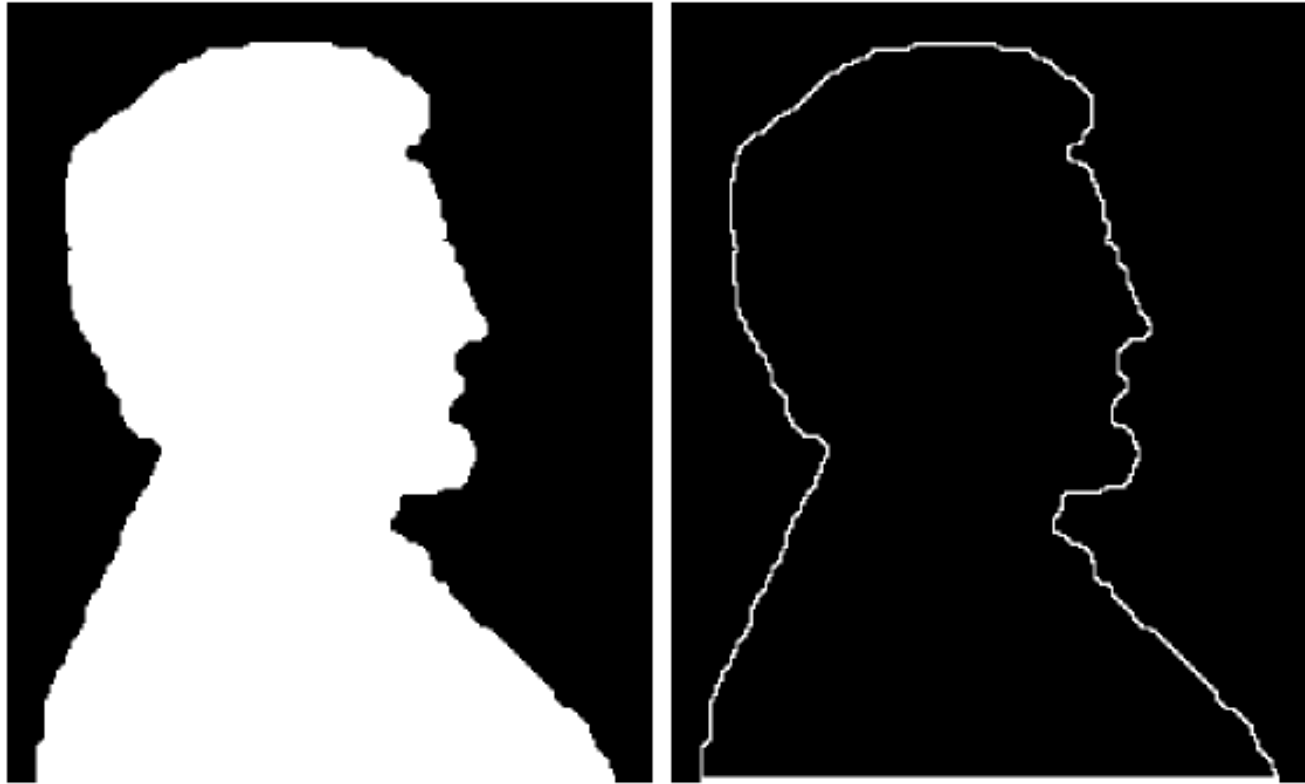


$A \ominus B$



$\beta(A)$

# Exemplo



a b

**FIGURE 9.14**

(a) A simple binary image, with 1's represented in white. (b) Result of using Eq. (9.5-1) with the structuring element in Fig. 9.13(b).

---



# Preenchimento de buracos

- Um buraco é definido como um fundo circunscrito por um conjunto de pixels do objeto.
- É possível realizar este processo através de uma série de dilatações.
- Seja A um conjunto de elementos contendo bordas 8-conectadas, circunscrita por uma região de fundo (buraco):
  - $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c$
- O algoritmo finaliza o procedimento quando  $X_{k-1} = X_k$



# Exemplo

a	b	c
d	e	f
g	h	i

**FIGURE 9.15**

Region filling.

(a) Set  $A$ .

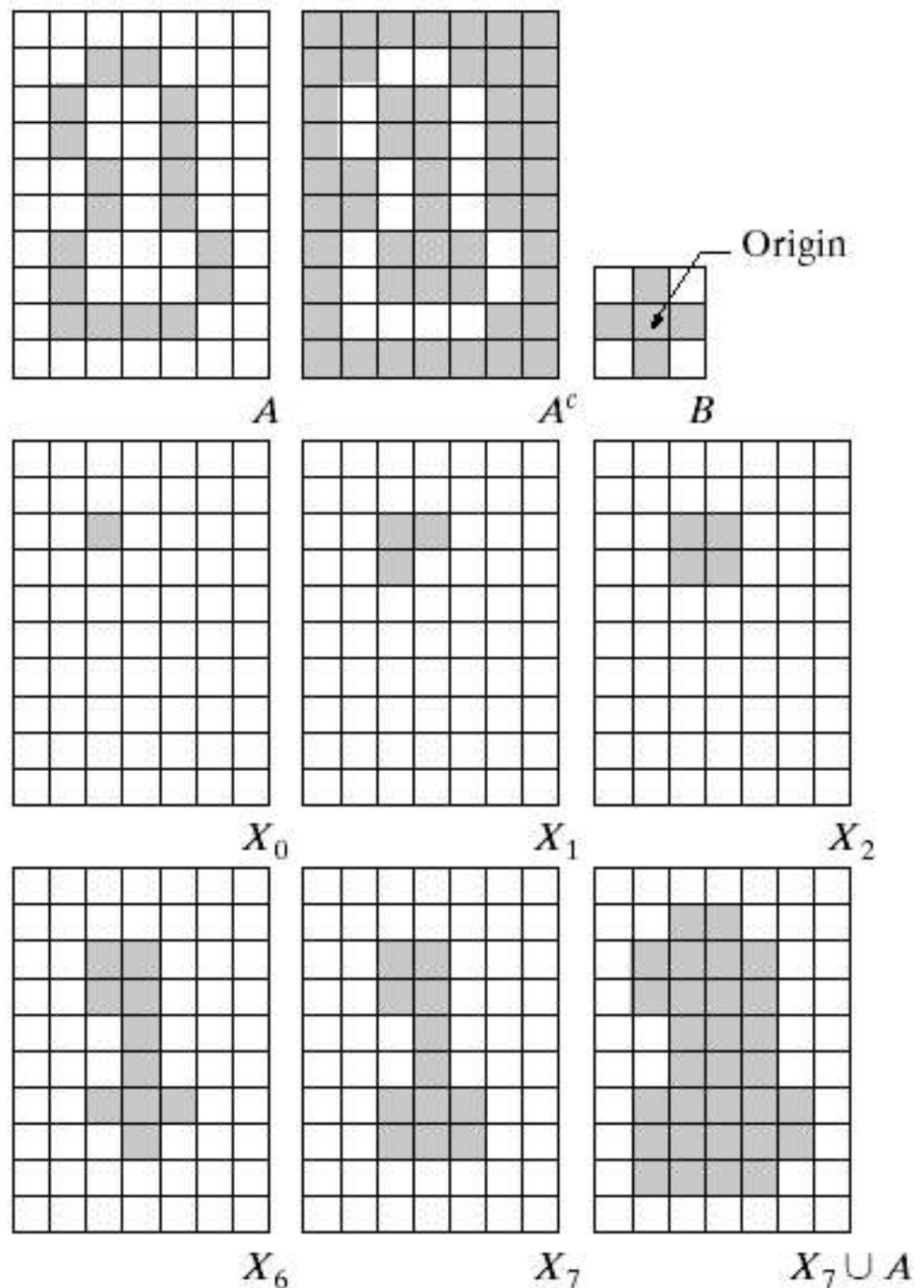
(b) Complement of  $A$ .

(c) Structuring element  $B$ .

(d) Initial point inside the boundary.

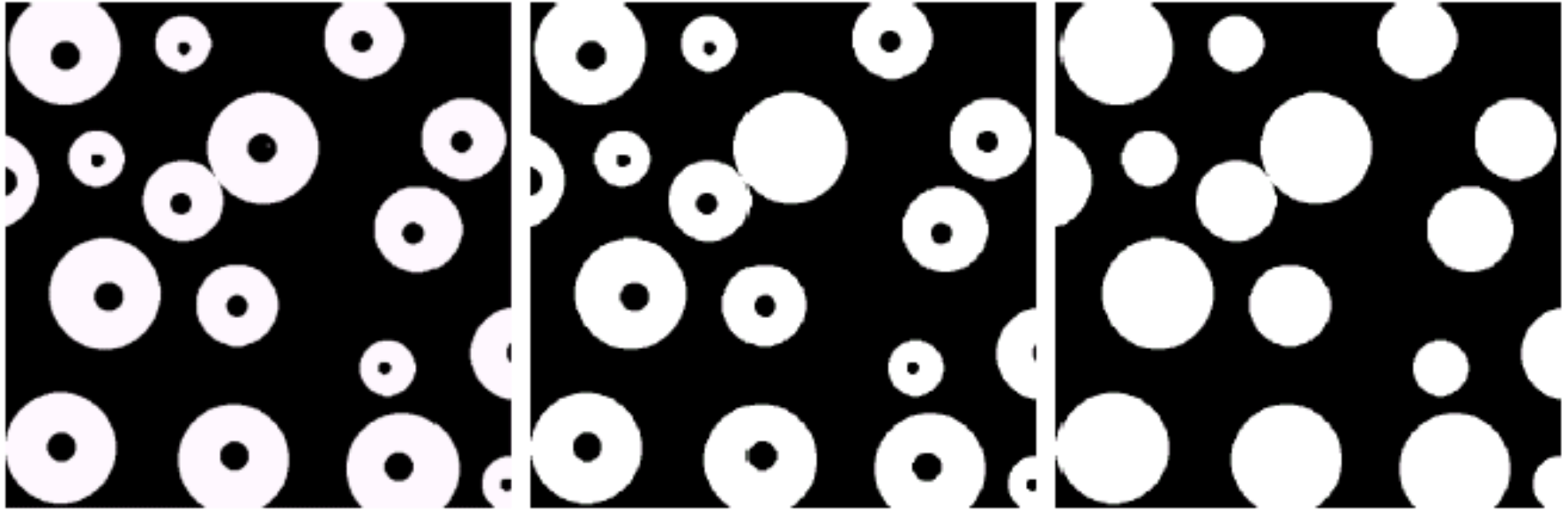
(e)–(h) Various steps of Eq. (9.5-2).

(i) Final result [union of (a) and (h)].





# Exemplo



a b c

**FIGURE 9.16** (a) Binary image (the white dot inside one of the regions is the starting point for the region-filling algorithm). (b) Result of filling that region (c) Result of filling all regions.

# Extração de Componentes Conectados

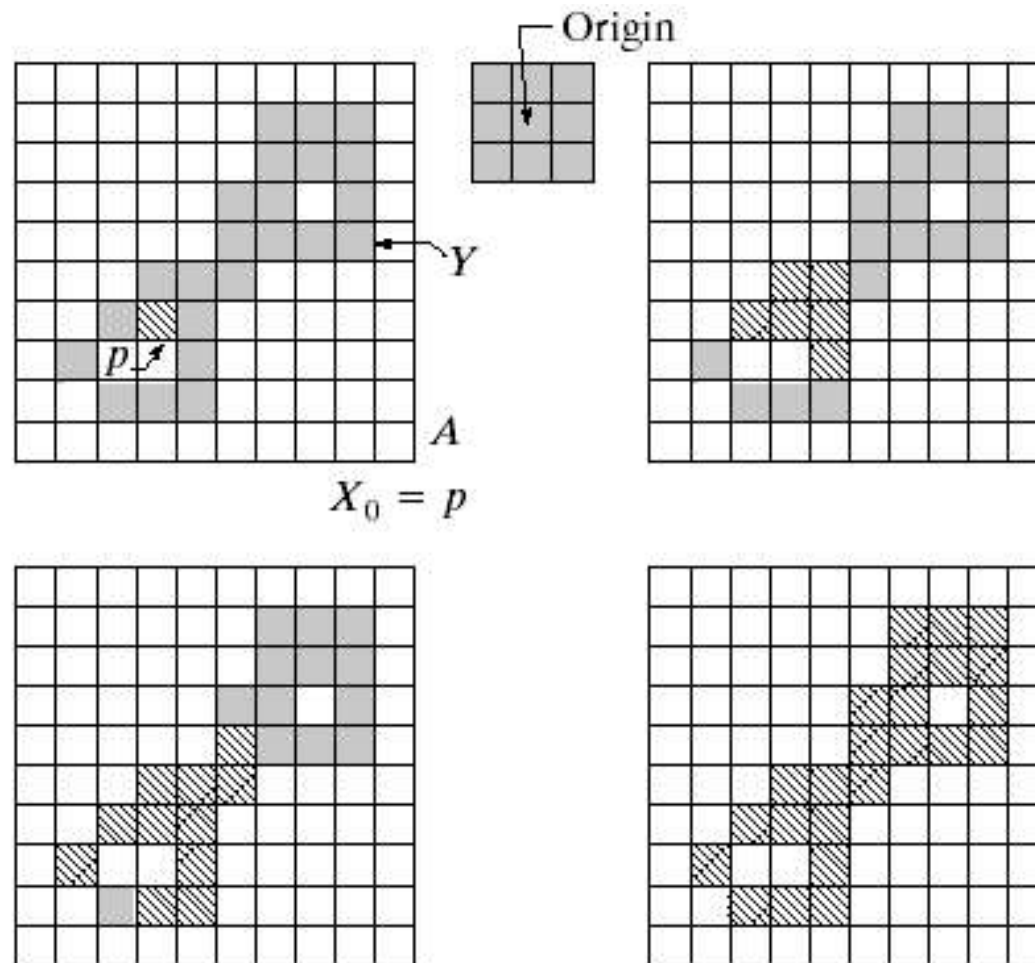
- A extração de componentes conectados é útil para várias aplicações em análise de imagens.
- Seja  $A$  um conjunto contendo um ou mais componentes conectados.
- A partir de  $A$ , forma-se um conjunto  $X_0$  do mesmo tamanho da imagem  $A$ , exceto por um único ponto conectado em  $A$ .
- O objetivo é encontrar a partir de  $X_0$  todos os elementos conectados através de:

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A$$

- O procedimento é repetido até  $X_k = X_{k-1}$ .



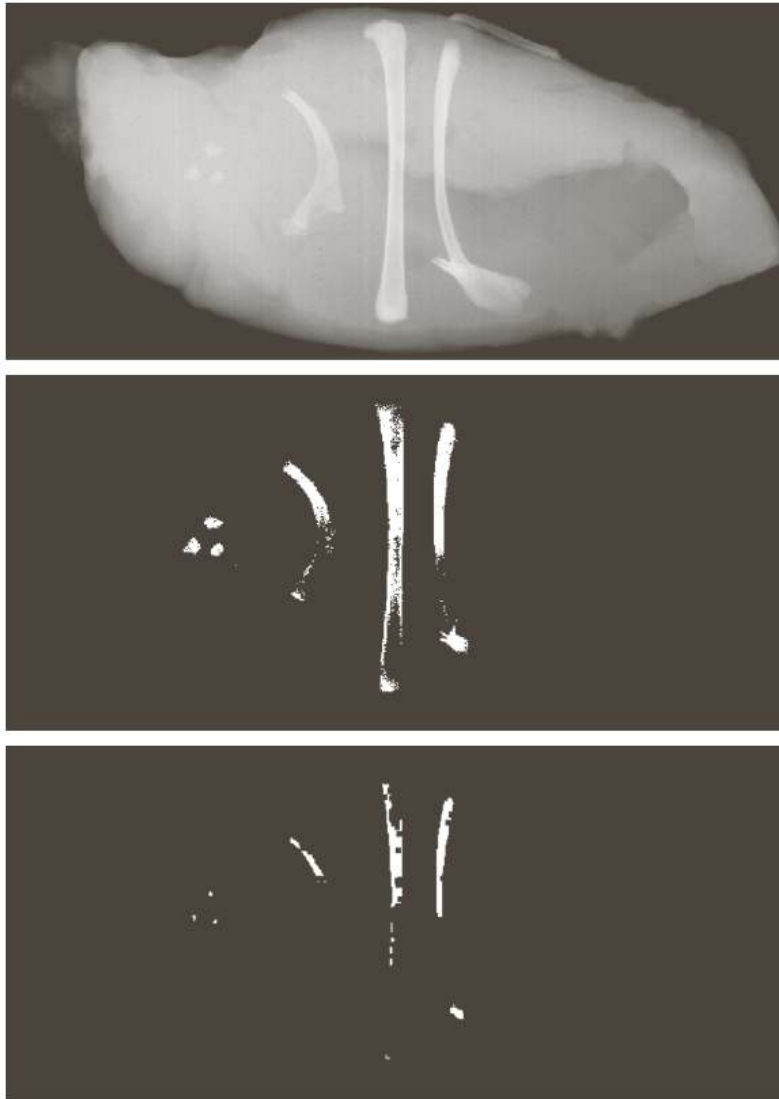
# Exemplo



**FIGURE 9.17** (a) Set  $A$  showing initial point  $p$  (all shaded points are valued 1, but are shown different from  $p$  to indicate that they have not yet been found by the algorithm). (b) Structuring element. (c) Result of first iterative step. (d) Result of second step. (e) Final result.



# Exemplo



Connected component	No. of pixels in connected comp
01	11
02	9
03	9
04	39
05	133
06	1
07	1
08	743
09	7
10	11
11	11
12	9
13	9
14	674
15	85

a  
b  
c d

**FIGURE 9.18**

(a) X-ray image of chicken file with bone fragments.

(b) Thresholded image. (c) Image eroded with a  $5 \times 5$  structuring element of 1s.

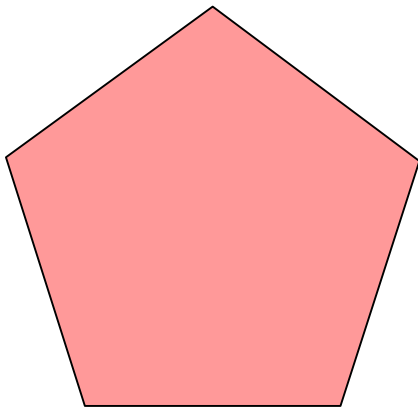
(d) Number of pixels in the connected components of (c).

(Image courtesy of NTB

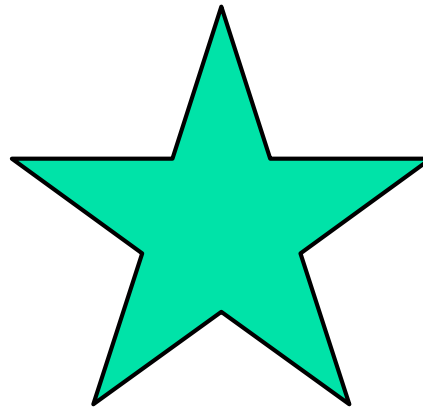
Elektronische Geraete GmbH, Diepholz, Germany, [www.ntbxray.com](http://www.ntbxray.com).)

# Convex Hull

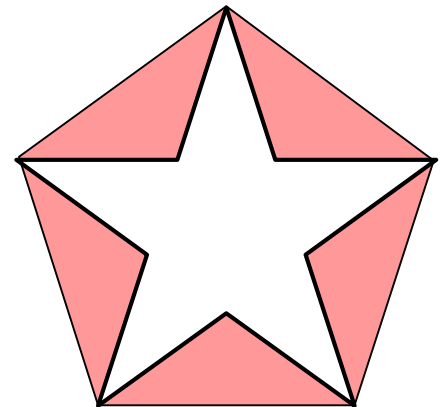
- $A$  é um componente convexo se uma linha unindo qualquer dois pontos em  $A$  está contida em  $A$ .
- O convex hull  $H$  de um conjunto  $S$  é o menor conjunto convexo que contém  $S$ .
- A diferença  $H-S$  é chamada de deficiência convexa de  $S$ .



H



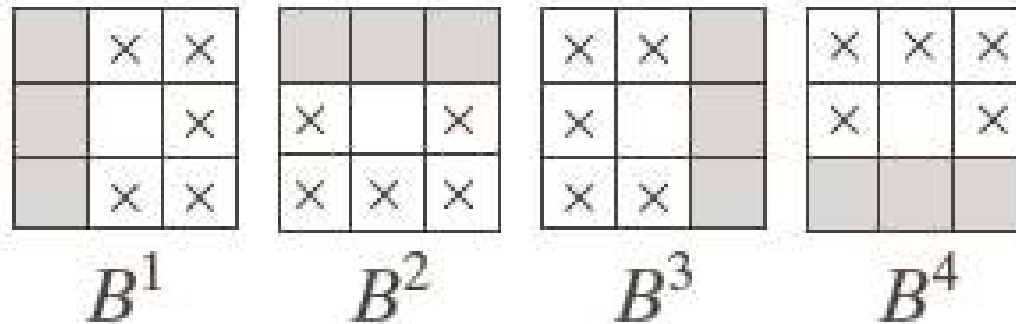
S



H-S

# Convex Hull

- Seja  $B^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  representam quatro elementos estruturantes.



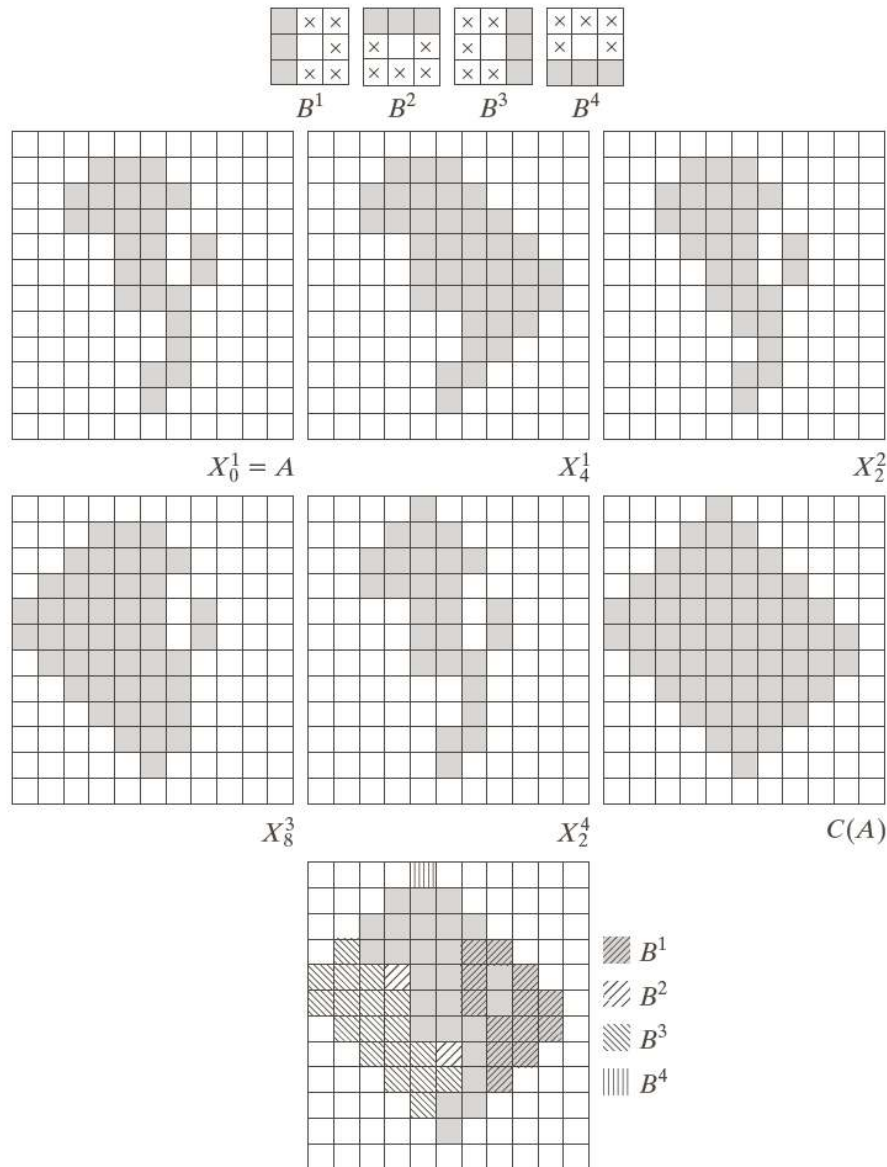
- O procedimento consiste na seguinte equação:

$$X_k^i = (X_{k-1} * B_i) \quad i = 1, 2, 3, 4 \text{ e } k = 1, 2, 3, \dots$$

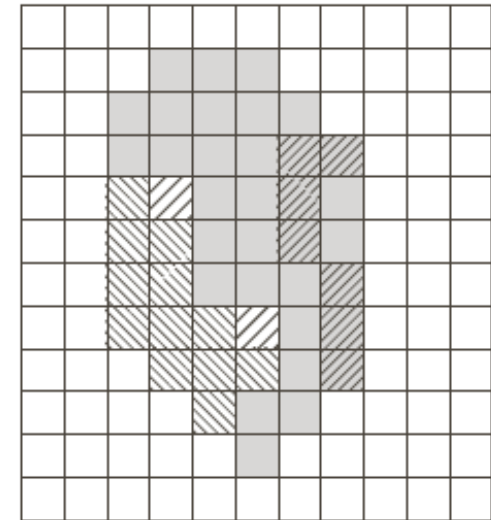
- Com  $X_0^i = A$ . Quando o procedimento converge  $(X_k^i = X_{k-1}^i)$ . Considerando  $D_i = X_k^i$ . O convex hull de A é:

$$C(A) = \bigcup D_i$$

# Exemplo



**FIGURE 9.19**  
(a) Structuring elements. (b) Set  $A$ . (c)–(f) Results of convergence with the structuring elements shown in (a). (g) Convex hull. (h) Convex hull showing the contribution of each structuring element.



**FIGURE 9.20**  
Result of limiting growth of the convex hull algorithm to the maximum dimensions of the original set of points along the vertical and horizontal directions.

# Afinamento

- O afinamento de um conjunto A por um elemento estruturante B, é denotado:

$$A \otimes B = A - (A * B) = A \cap (B * C)$$

- Utiliza-se um conjunto de elementos estruturante para formado pela rotação ( $B_i$ ) de um elemento estruturante B realizar o procedimento:

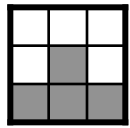
$$B = \{ B_1, B_2, B_3, \dots, B_n \}$$

- Re-escrevendo a expressão por:
  - $A \otimes \{B\} = (((A \otimes B_1) \otimes B_2) \otimes \dots) \otimes B_n$

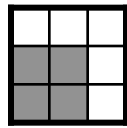




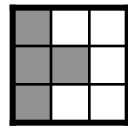
# Exemplo



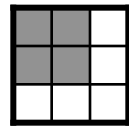
$B^1$



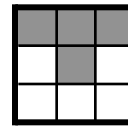
$B^2$



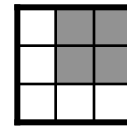
$B^3$



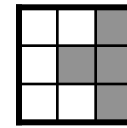
$B^4$



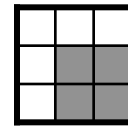
$B^5$



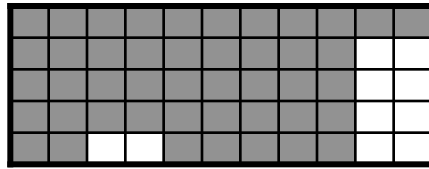
$B^6$



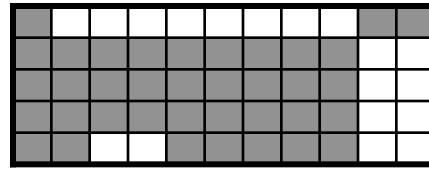
$B^7$



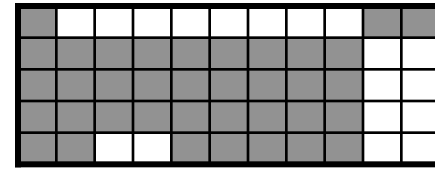
$B^8$



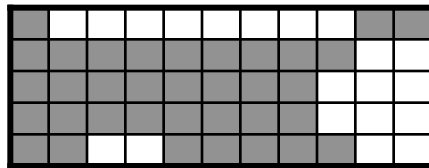
$A$



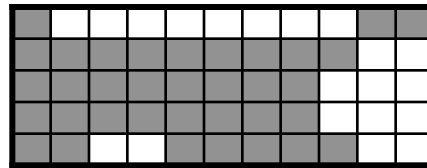
$A_1 = A \otimes B^1$



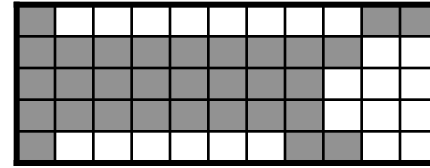
$A_2 = A_1 \otimes B^2$



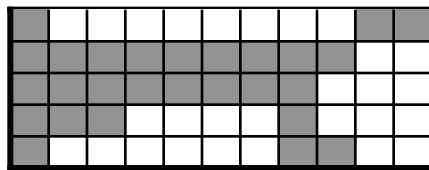
$A_3 = A_2 \otimes B^3$



$A_4 = A_3 \otimes B^4$



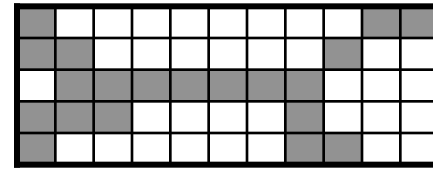
$A_5 = A_4 \otimes B^5$



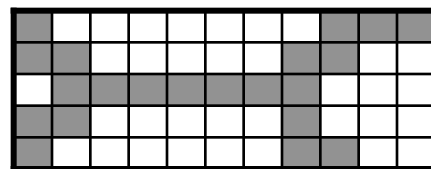
$A_6 = A_5 \otimes B^6$



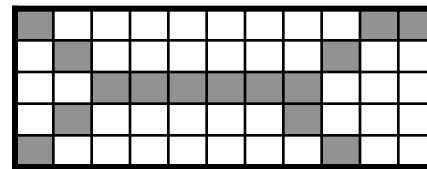
$A_8 = A_6 \otimes B^{7,8}$



$A_{8,4} = A_8 \otimes B$



$A_{8,5} = A_{8,4} \otimes B^5$



$A_{8,6} = A_{8,5} \otimes B^6$



# Exemplo

---

## PDF Afinamento

<https://www.dropbox.com/s/5gqgaqywh9hekm/PDI%20-%20Aula%209%20-%20Parte%201%20-Afinamento.pdf?dl=0>



# Enlarguemento

- É a operação inversa do afinamento, definida por:

$$A \odot B = A \cup (A * B)$$

- Similarmente ao afinamento, utiliza-se um conjunto com vários elementos estruturantes rotacionados:

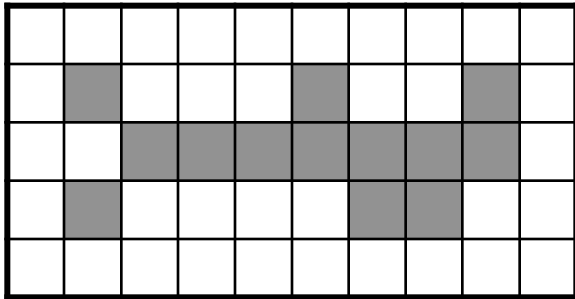
$$B = \{ B_1, B_2, B_3, \dots, B_n \}$$

- O que difere estes elementos estruturantes dos utilizados no afinamento é que estes são o negativo dos utilizados no processo de afinamento de bordas.
- O que torna a expressão:

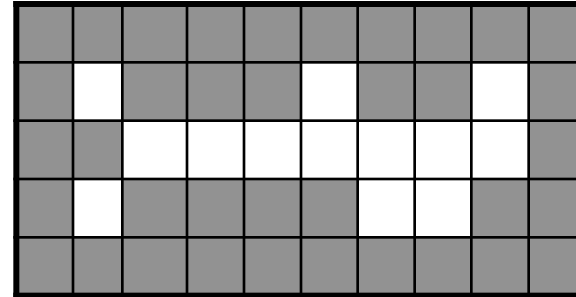
$$A \odot \{B\} = (((((A \odot B_1) \odot B_2) \odot \dots) \odot B_n)$$



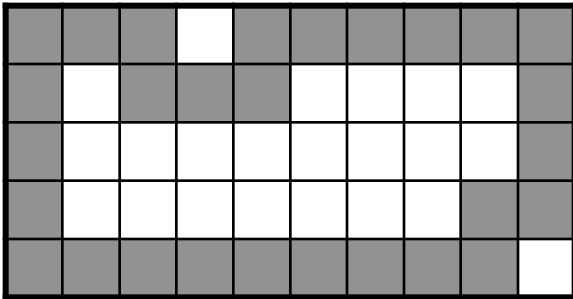
# Exemplo



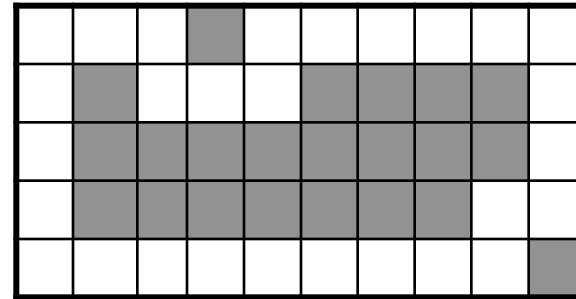
**A**



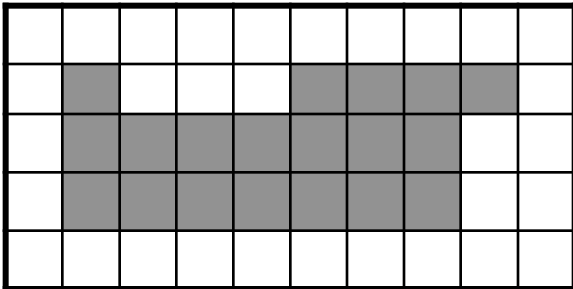
**A<sup>c</sup>**



**A<sup>c</sup>  $\otimes$  B**



**D  $\odot$  B**



**Componentes Desconectados**



# Esqueletonização

- A esqueletonização também é chamada de transformada do eixo medial.
- O eixo medial de uma região é definido como:
  - Para todo ponto  $r$ , calcule o ponto mais próximo do contorno do objeto.  $r$  é definido como parte do esqueleto, se este ponto possuir mais de uma borda com esta mínima distância.
- Utilizando conceitos de Morfologia para realizar este processo, define-se:
  - Dado um conjunto  $A$ , a esqueletização do mesmo é denotada  $S(A)$ .
  - Se  $z$  é um ponto de  $S(A)$ , ou seja, faz parte do esqueleto de  $A$ , e  $(D)z$  é o mais largo disco centrado em  $z$  e contido em  $A$ , dizemos que  $(D)z$  é o máximo disco
  - O disco  $(D)z$  toca as bordas de  $A$  em dois ou mais lugares.

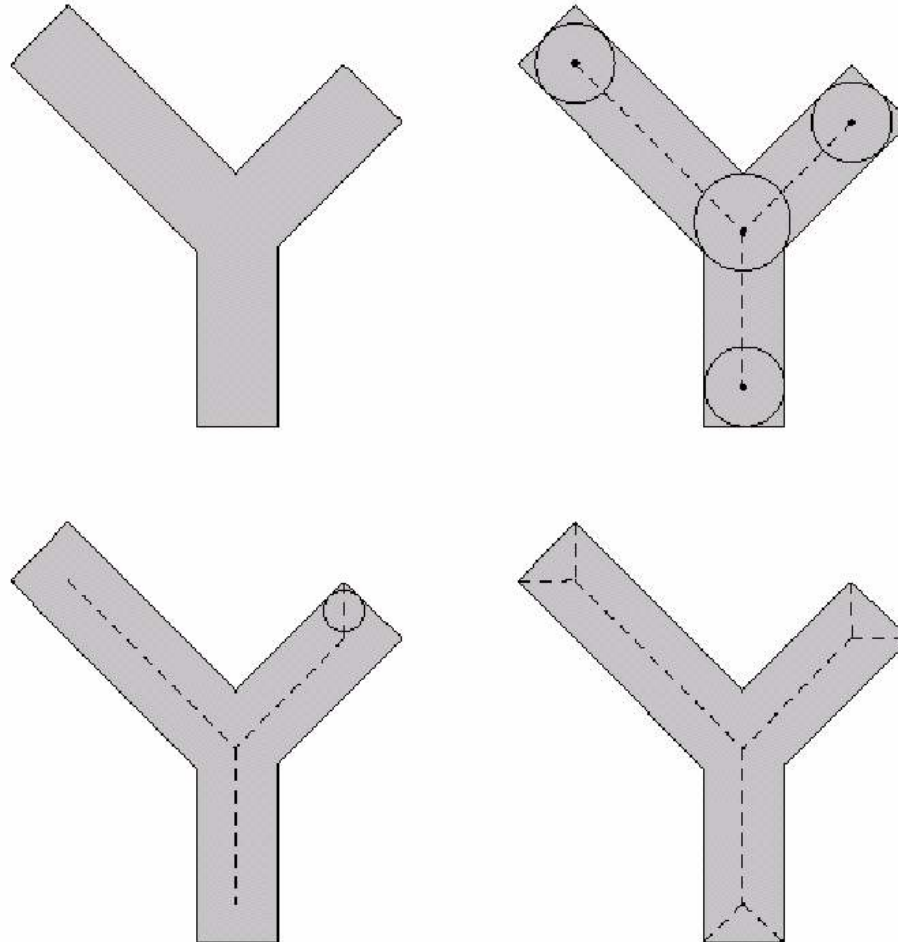


# Esqueletonização

a	b
c	d

**FIGURE 9.23**

- (a) Set  $A$ .
- (b) Various positions of maximum disks with centers on the skeleton of  $A$ .
- (c) Another maximum disk on a different segment of the skeleton of  $A$ .
- (d) Complete skeleton.



# Esqueletonização

- O esqueleto de A pode ser expresso através de erosões e aberturas:

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A)$$

- Com:

$$S_k(A) = (A \ominus kB) - (A \ominus (k+1)B)$$

- Em que :

- B é o elemento estruturante e
- $(A \ominus kB)$  são k sucessivas erosões de A por B:
$$(A \ominus kB) = (... ((A \ominus B) \ominus B) \ominus B)$$
- Repetido até que o último momento em que a próxima erosão resultará em um conjunto vazio.



# Esqueletonização

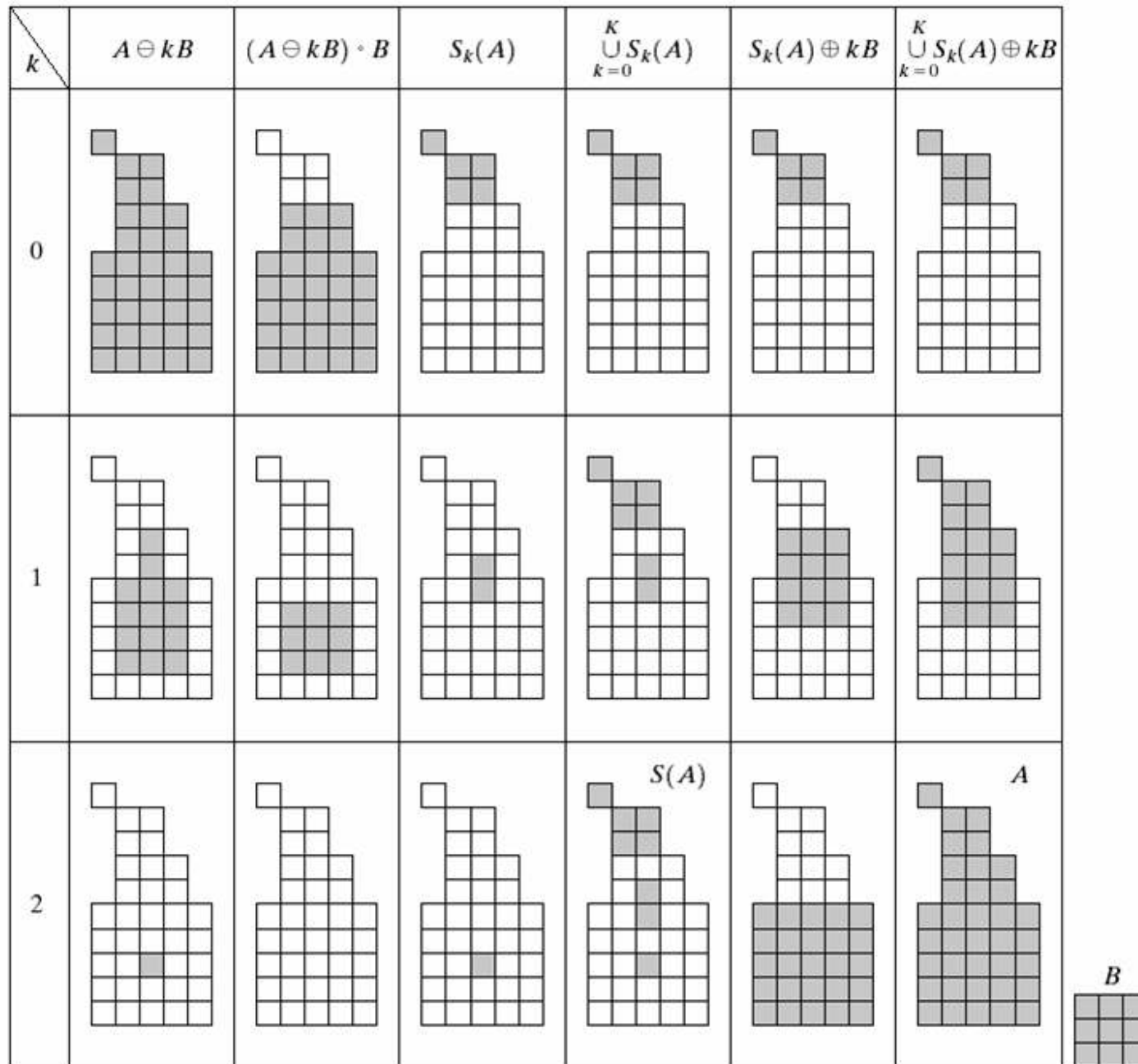
- Através desta formulação é possível a partir do esqueleto, reconstruir o objeto.

$$A = \bigcup_{k=0}^K (S_k(A) \oplus kB)$$

- Em que:
  - $(A \oplus kB)$  são k sucessivas dilatações de A por B



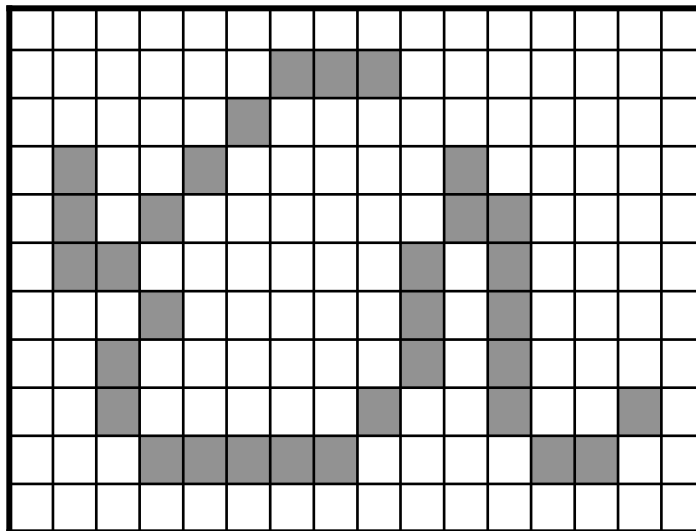




**FIGURE 9.24** Implementation of Eqs. (9.5-11) through (9.5-15). The original set is at the top left, and its morphological skeleton is at the bottom of the fourth column. The reconstructed set is at the bottom of the sixth column.

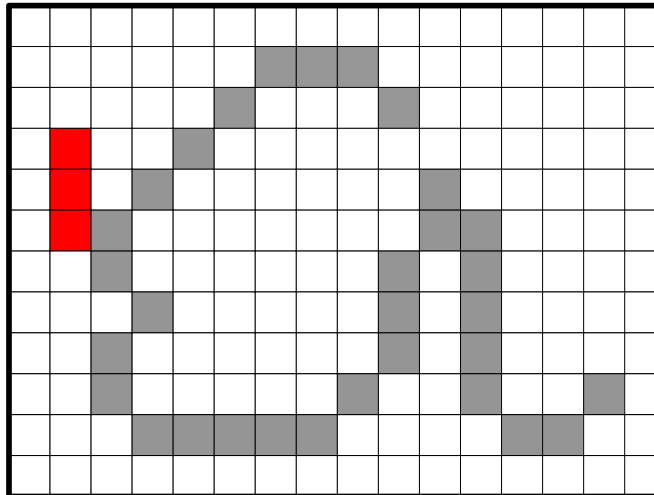
# Pruning

- Este método é essencial para corrigir falhas geradas pelo processo de afinamento e esqueletonização.
- Estes procedimentos tendem a deixar alguns componentes desconectados, também chamados de componentes parasitas.
- Uma aplicação comum é realizada para o reconhecimento de caracteres escritos em punho através análise da forma dos esqueletos dos caracteres



# Pruning

- Definições
  - Os esqueletos são caracterizados por espúrios (parasitas).
  - Estes componentes são gerados durante o processo de erosão devido a não uniformidades nos pixels que compõem o objeto.
  - Assume-se que o comprimento de um componente parasita não deve exceder um número específico de pixels.
- Objetivo: remover os 3 pixels marcados de vermelho:

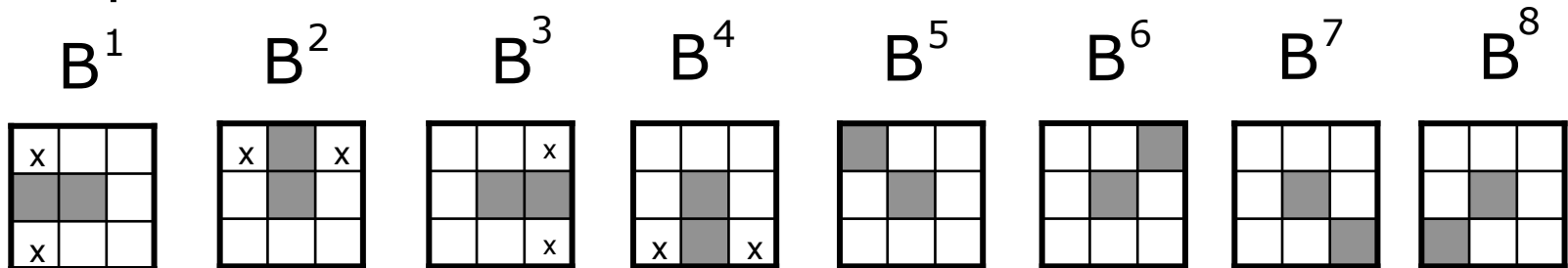


# Pruning

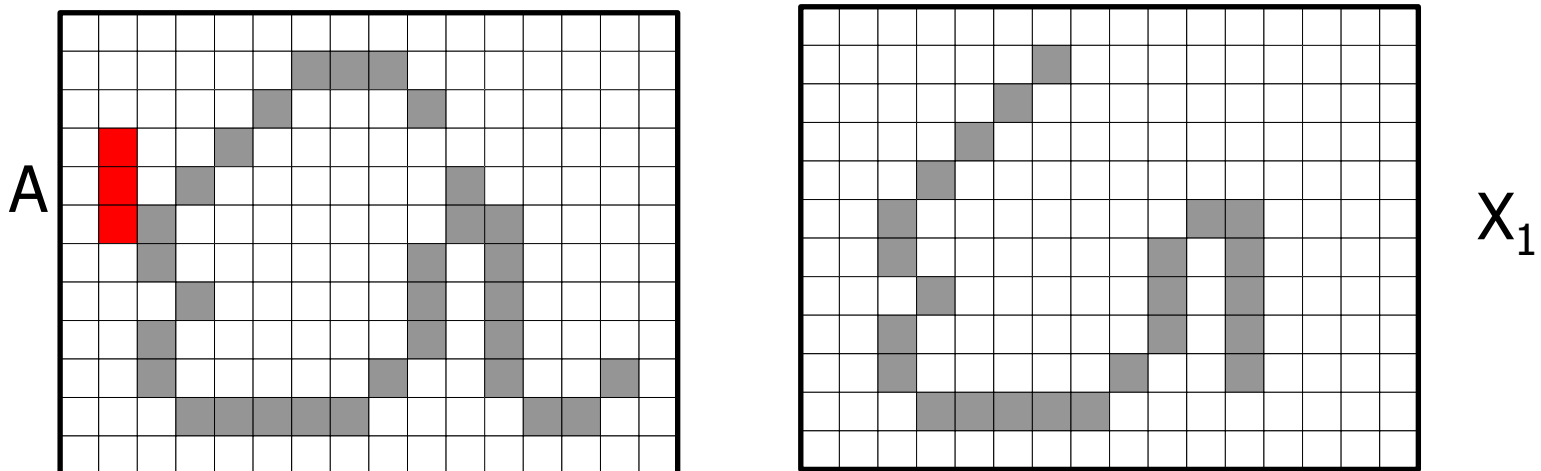
- Determina-se os pontos finais do objeto através de um afinamento:

$$X_1 = A \otimes \{B\}$$

- B é dado por:



- Aplicando 3 vezes o afinamento:



# Exemplo

---

## PDF Poda

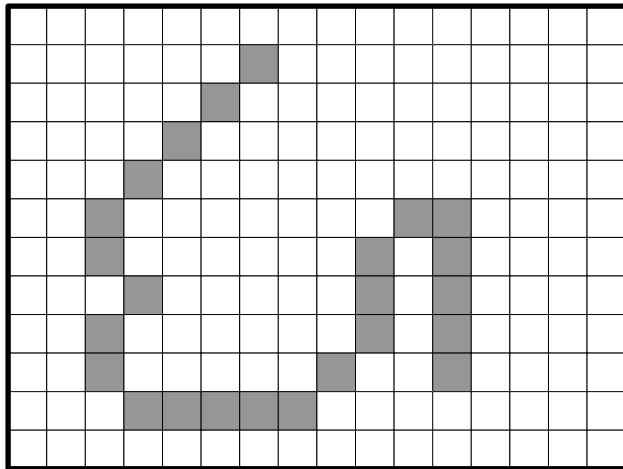
<https://www.dropbox.com/s/2y4mpxyxdso2ud0/PDI%20-%20Aula%209%20-%20Parte%201%20-Poda.pdf?dl=0>



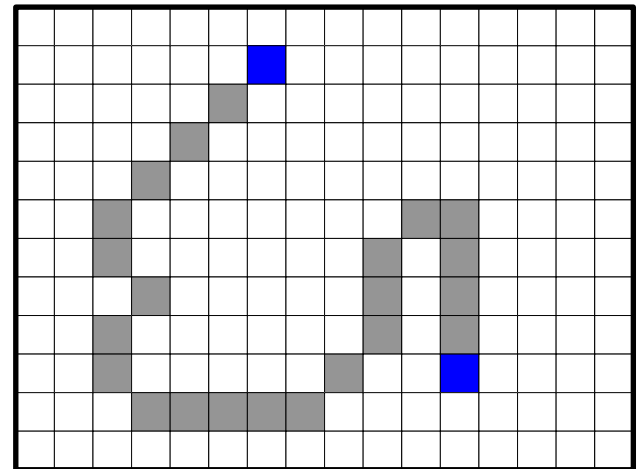
# Pruning

- Para reconstruir a forma, é necessário determinar os pontos extremos, dados por:

$$X_2 = \bigcup_{k=0}^K (X_1 * B^k)$$



$X_1$



$X_2$

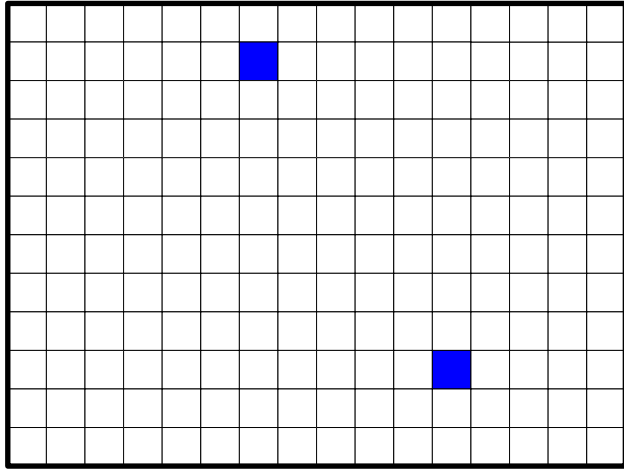
- Em seguida dilata-se três vezes o conjunto  $X_2$ , delimitado pelo conjunto A:

$$X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A$$

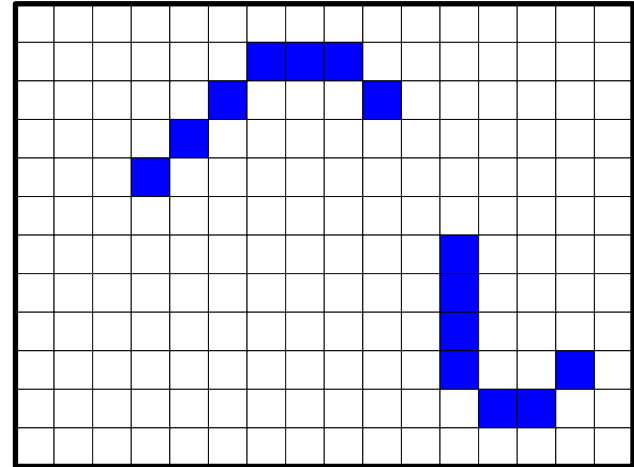
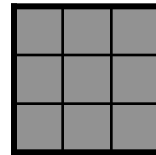


# Pruning

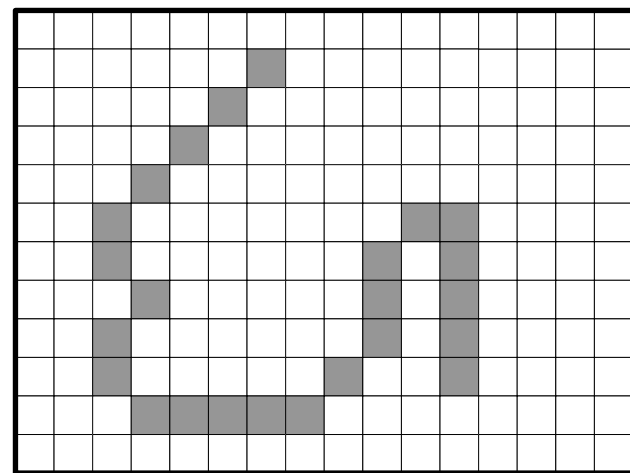
$$X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A$$



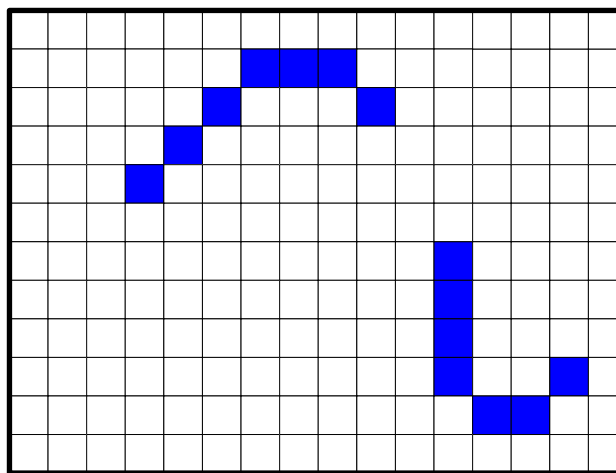
H



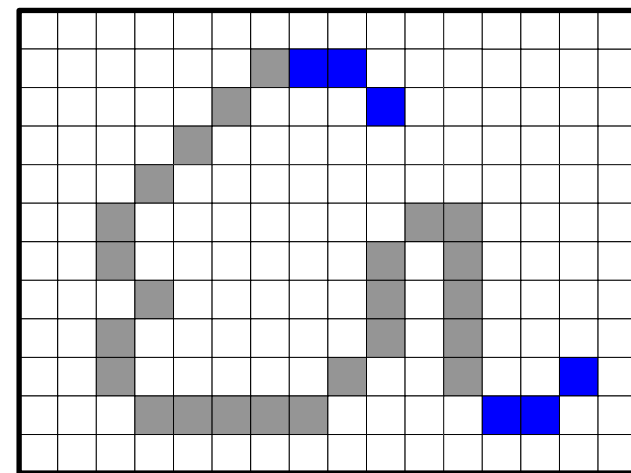
- Por fim, o resultado desejado é a união de  $X_1$  e  $X_3$ :



$X_1$



$X_3$



$X_4 = X_1 \cup X_3$

# Sumário das Operações Morfológicas

		Comments (The Roman numerals refer to the structuring elements shown in Fig. 9.26).
Operation	Equation	
Translation	$(A)_z = \{w \mid w = a + z, \text{ for } a \in A\}$	Translates the origin of $A$ to point $z$ .
Reflection	$\hat{B} = \{w \mid w = -b, \text{ for } b \in B\}$	Reflects all elements of $B$ about the origin of this set.
Complement	$A^c = \{w \mid w \notin A\}$	Set of points not in $A$ .
Difference	$A - B = \{w \mid w \in A, w \notin B\}$ $= A \cap B^c$	Set of points that belong to $A$ but not to $B$ .
Dilation	$A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$	“Expands” the boundary of $A$ . (I)
Erosion	$A \ominus B = \{z \mid (B)_z \subseteq A\}$	“Contracts” the boundary of $A$ . (I)
Opening	$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$	Smooths contours, breaks narrow isthmuses, and eliminates small islands and sharp peaks. (I)
Closing	$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$	Smooths contours, fuses narrow breaks and long thin gulfs, and eliminates small holes. (I)





# Sumário das Operações Morfológicas

Hit-or-miss transform	$A \circledast B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$ $= (A \ominus B_1) - (A \oplus \hat{B}_2)$	The set of points (coordinates) at which, simultaneously, $B_1$ found a match (“hit”) in $A$ and $B_2$ found a match in $A^c$ .
Boundary extraction	$\beta(A) = A - (A \ominus B)$	Set of points on the boundary of set $A$ . (I)
Region filling	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c; X_0 = p \text{ and } k = 1, 2, 3, \dots$	Fills a region in $A$ , given a point $p$ in the region. (II)
Connected components	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A; X_0 = p \text{ and } k = 1, 2, 3, \dots$	Finds a connected component $Y$ in $A$ , given a point $p$ in $Y$ . (I)
Convex hull	$X_k^i = (X_{k-1}^i \circledast B^i) \cup A; i = 1, 2, 3, 4;$ $k = 1, 2, 3, \dots; X_0^i = A; \text{ and}$ $D^i = X_{\text{conv}}^i.$	Finds the convex hull $C(A)$ of set $A$ , where “conv” indicates convergence in the sense that $X_k^i = X_{k-1}^i$ . (III)



# Sumário das Operações Morfológicas

Operation	Equation	Comments
Thinning	$A \otimes B = A - (A \odot B)$ $= A \cap (A \odot B)^c$	(The Roman numerals refer to the structuring elements shown in Fig. 9.26).  Thins set $A$ . The first two equations give the basic definition of thinning. The last two equations denote thinning by a sequence of structuring elements. This method is normally used in practice. (IV)
	$A \otimes \{B\} =$ $((\dots ((A \otimes B^1) \otimes B^2) \dots) \otimes B^n)$ $\{B\} = \{B^1, B^2, B^3, \dots, B^n\}$	
Thickening	$A \odot B = A \cup (A \otimes B)$	Thickens set $A$ . (See preceding comments on sequences of structuring elements.) Uses IV with 0's and 1's reversed.
	$A \odot \{B\} =$ $((\dots (A \odot B^1) \odot B^2 \dots) \odot B^n)$	



# Sumário das Operações Morfológicas

## Skeletons

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A)$$

$$S_k(A) = \bigcup_{k=0}^K \{ (A \ominus kB) - [(A \ominus kB) \circ B] \}$$

Reconstruction of  $A$ :

$$A = \bigcup_{k=0}^K (S_k(A) \oplus kB)$$

Finds the skeleton  $S(A)$  of set  $A$ . The last equation indicates that  $A$  can be reconstructed from its skeleton subsets  $S_k(A)$ . In all three equations,  $K$  is the value of the iterative step after which the set  $A$  erodes to the empty set. The notation  $(A \ominus kB)$  denotes the  $k$ th iteration of successive erosion of  $A$  by  $B$ . (I)

## Pruning

$$X_1 = A \otimes \{B\}$$

$$X_2 = \bigcup_{k=1}^8 (X_1 \circledast B^k)$$

$$X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A$$

$$X_4 = X_1 \cup X_3$$

$X_4$  is the result of pruning set  $A$ . The number of times that the first equation is applied to obtain  $X_1$  must be specified. Structuring elements  $V$  are used for the first two equations. In the third equation  $H$  denotes structuring element  $I$ .



# Encaminhamentos

---

- Dúvidas?
- Próximo assunto
  - Morfologia Matemática – Imagens em tom de cinza





**Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará**  
**PPGER – PPGCC**

# Parte 2 – Imagens tons de cinza

Processamento Digital de Imagens

Prof. Dr. Paulo César Cortez

Prof. Dr. Pedro Pedrosa

**[pedrosarf@ifce.edu.br](mailto:pedrosarf@ifce.edu.br)**

**[professorpedrosa.com](http://professorpedrosa.com)**

# Introdução

- Definição de Morfologia na Biologia
  - Estudo das formas e estruturas dos organismos animais e vegetais
- Definição de Morfologia Matemática
  - Ferramenta matemática para extração de componentes de imagens baseados na forma.
- Útil para a representação e descrição de :
  - Cantos
  - Bordas
  - Esqueletos
  - Componente envolvente
- A morfologia é um processo não linear, baseado na teoria de conjuntos.



# Processamento Digital de Imagens

## Morfologia Matemática

Morfologia em Nível de cinza

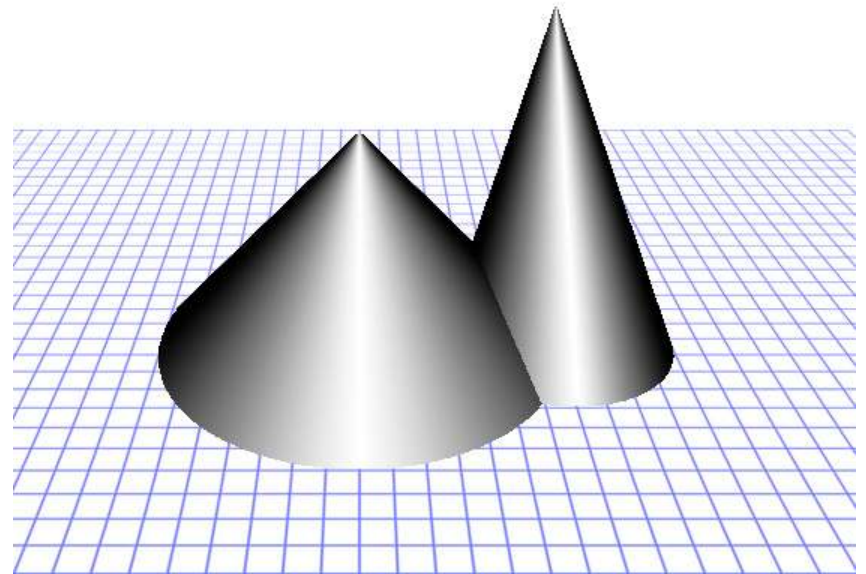
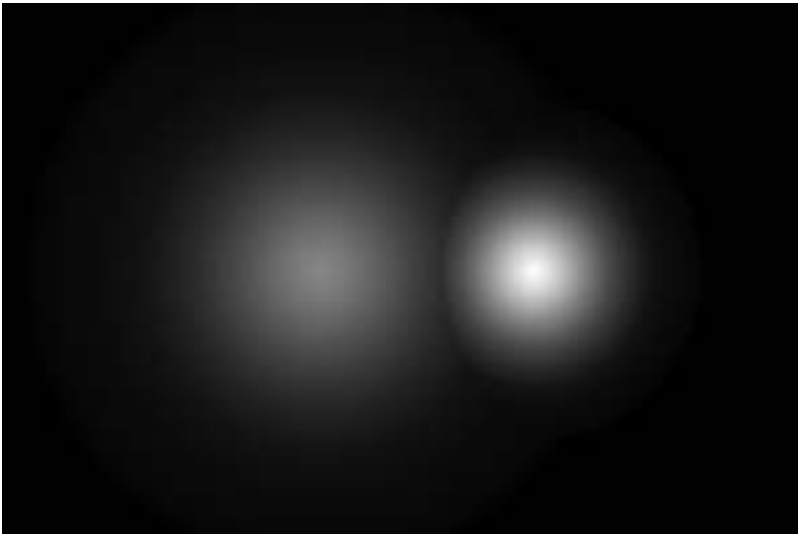
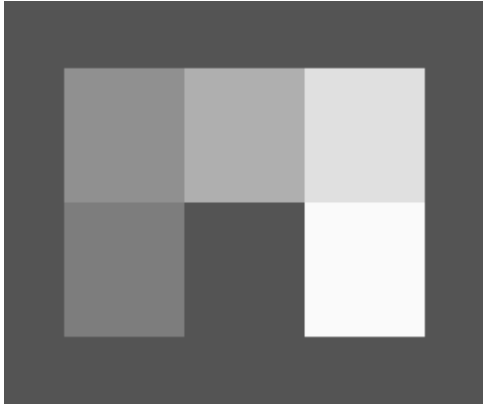
# Introdução

- A morfologia matemática em níveis de cinza é uma generalização multidimensional das operações morfológicas binárias
- As operações morfológicas binárias são definidas em termos baseados em operações da teoria de conjuntos de pixels da imagem por exemplo  $z = (x,y)$ .
- No caso da morfologia em nível de cinza, os pixels possuem maiores dimensões  $z = (x,y,g)$ .
- Desta forma, uma imagem em nível de cinza pode ser vista como uma objeto 3D , em que a 3ª dimensão é o nível de cinza



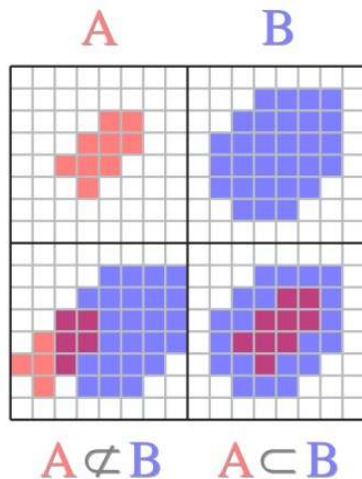


# Exemplos

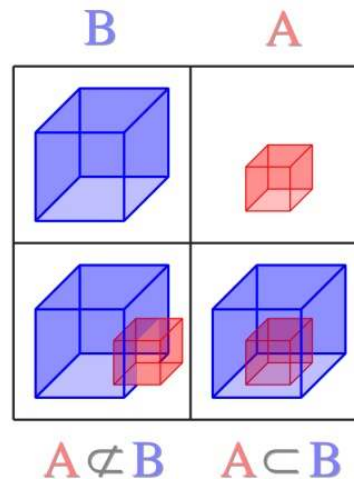


# Teoria dos conjuntos

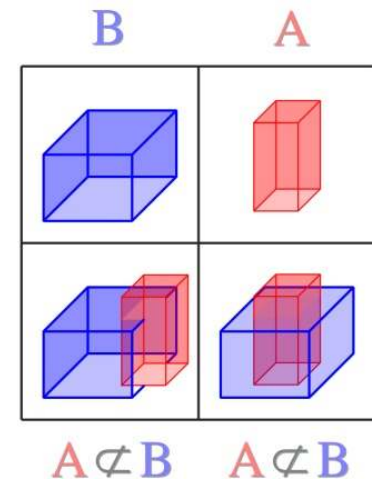
- As operações básicas definidas para binário, são extendidas para o nível de cinza, por exemplo:



(a)



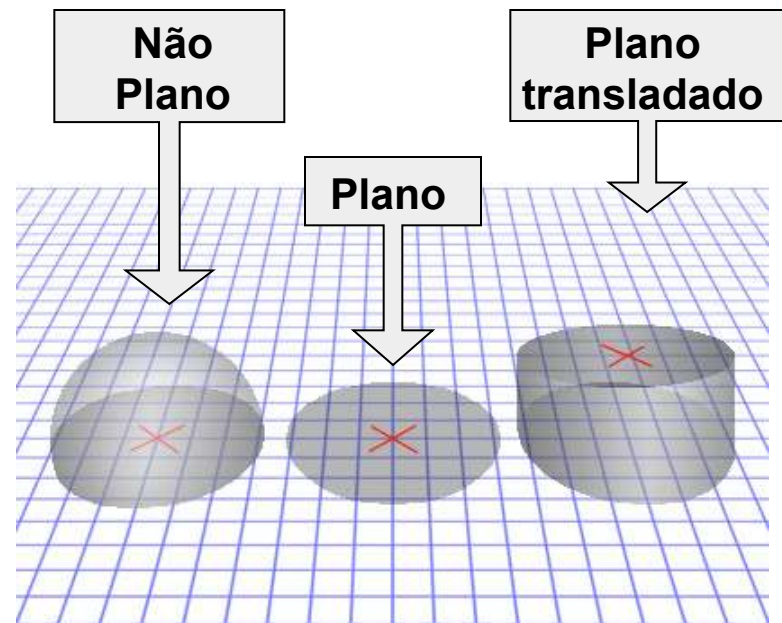
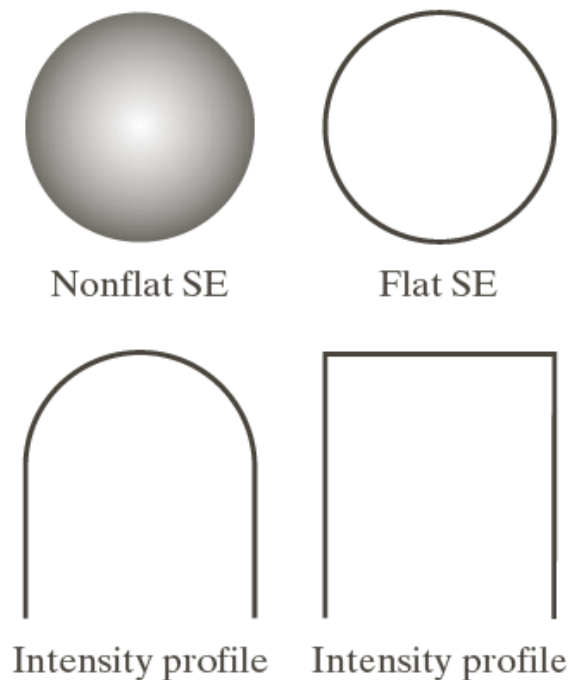
(b)



(c)

# Elementos Estruturantes em NC

- Os elementos estruturantes em níveis de cinza possuem a mesma função dos binários.
- Os operadores em NC pertencem a duas categorias:



# Processamento Digital de Imagens

## Morfologia Matemática

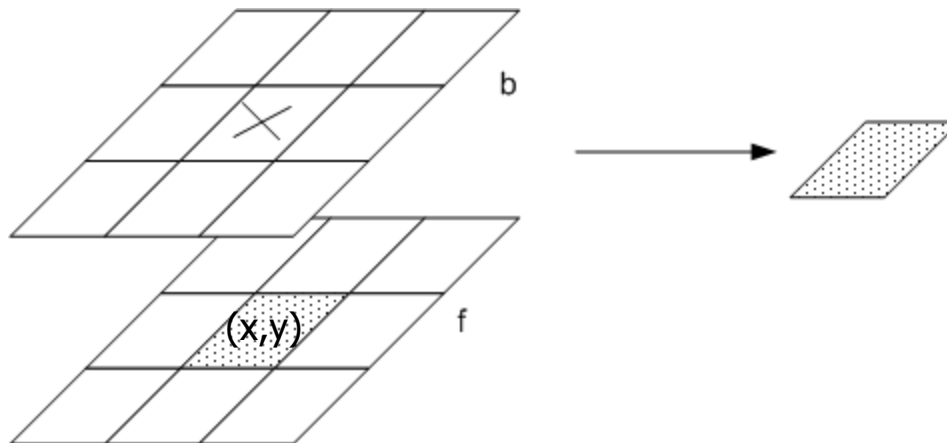
Erosão e Dilatação

# Erosão e Dilatação

- A erosão de um elemento estruturante plano é definido como o mínimo valor da região coincidente à  $b$ , definido por:

$$[f \ominus b](x,y) = \min \{f(x+s,y+t)\}$$

$$(s,t) \in b$$

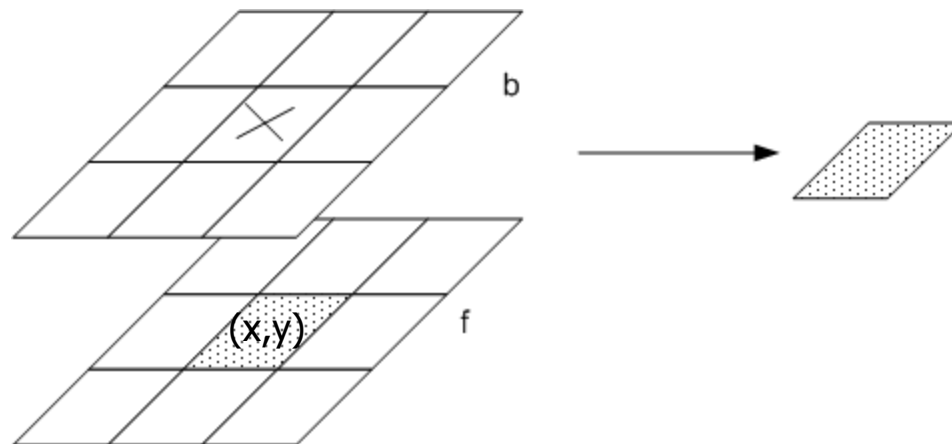


# Erosão e Dilatação

- A dilatação de um elemento estruturante plano é definido como o máximo valor da região coincidente à  $b$ , definido por:  $(s,t) \in b$

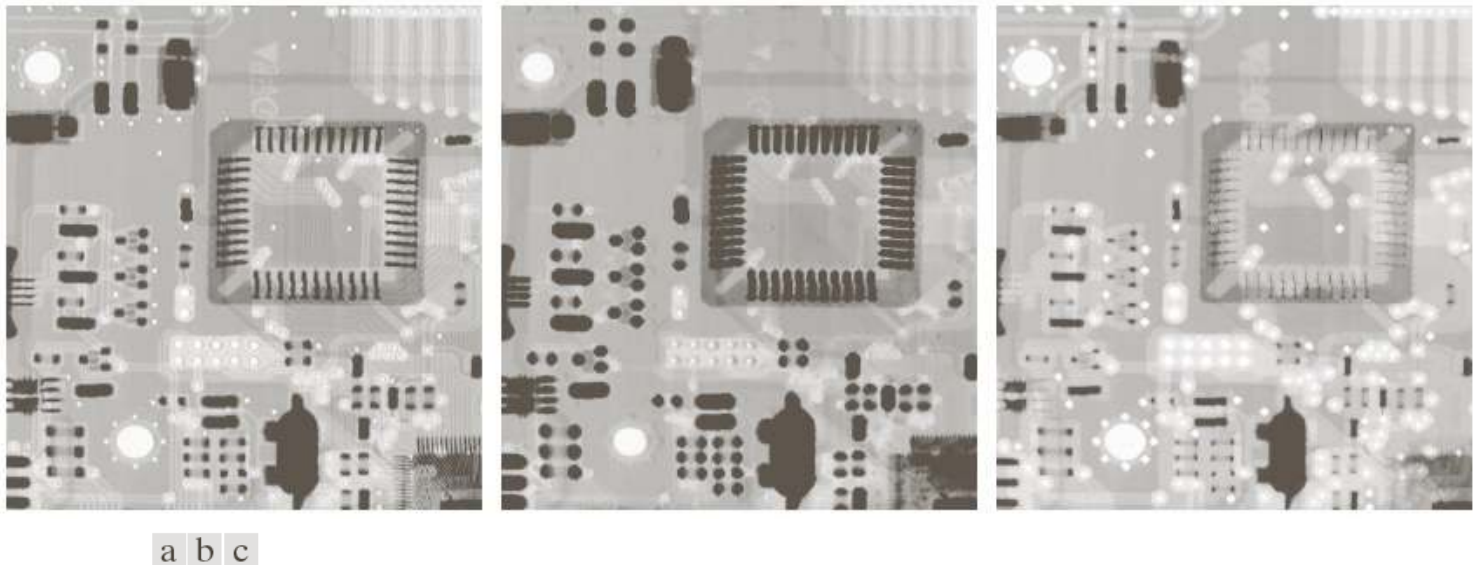
$$[f \oplus b](x,y) = \max \{f(x+s, y+t)\}$$

- Neste caso, o elemento estruturante deve ser espelhado  $b = b(-x, -y)$ .



# Exemplo

- A erosão tende a escurecer a imagem
  - os objetos claros se tornarão menores e as regiões escuras aumentarão
- A dilatação tende a clarear a imagem
  - os objetos escuros se tornarão menores e as regiões claras aumentarão



**FIGURE 9.35** (a) A gray-scale X-ray image of size  $448 \times 425$  pixels. (b) Erosion using a flat disk SE with a radius of two pixels. (c) Dilation using the same SE. (Original image courtesy of Lixi, Inc.)

# Erosão e Dilatação

- Os elementos estruturantes não planos possuem os valores do pixel diferentes.
- A erosão pode ser definida como:

$$[f \ominus b_N](x,y) = \min_{(s,t) \in b} \{f(x+s,y+t) - b_N(s,t)\}$$

- A dilatação pode ser definida como:

$$[f \oplus b_N](x,y) = \max_{(s,t) \in b} \{f(x+s,y+t) + b_N(s,t)\}$$

- Os operadores não planos são pouco utilizados pela dificuldade de interpretar os resultados obtidos.
- Da mesma forma que nos operadores binários, a dilatação e erosão são duais:

$$(f \ominus b_N)^c = (f^c \oplus b)$$

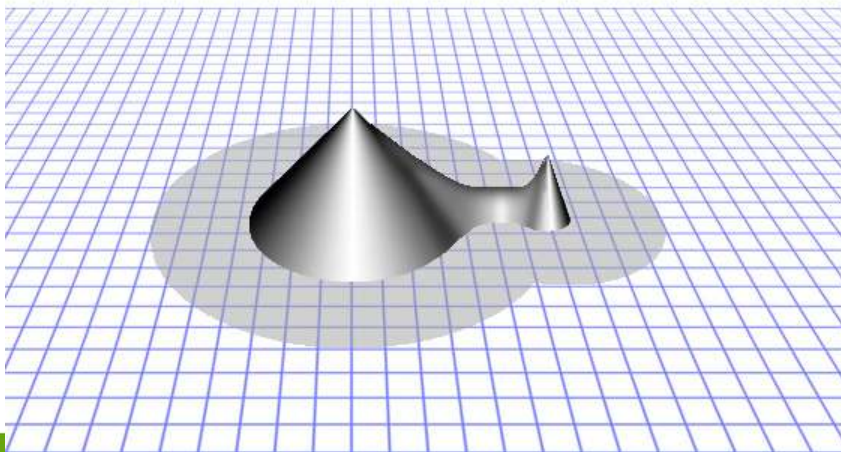
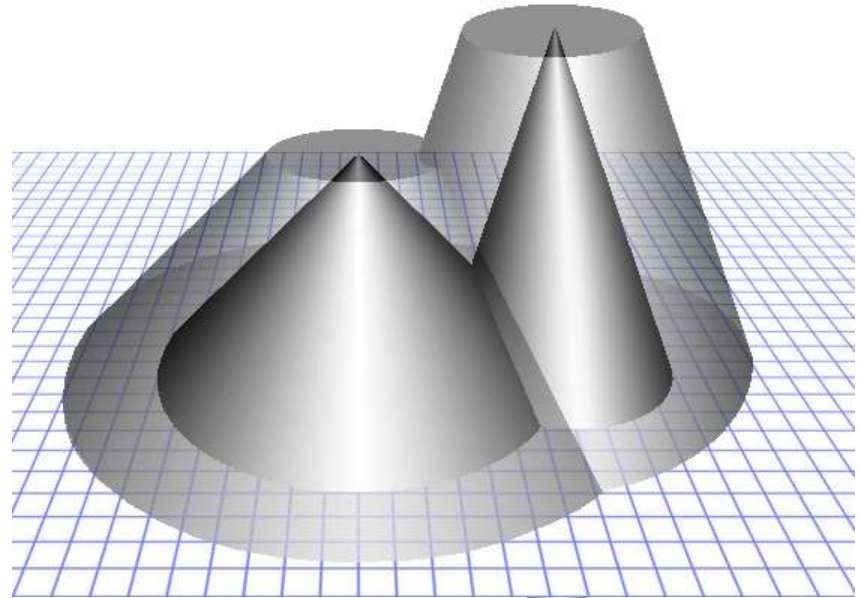
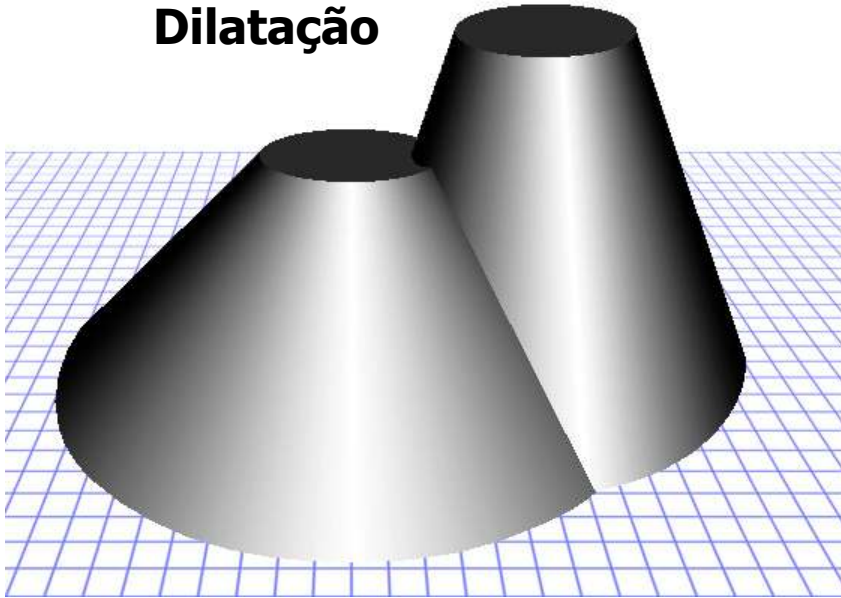




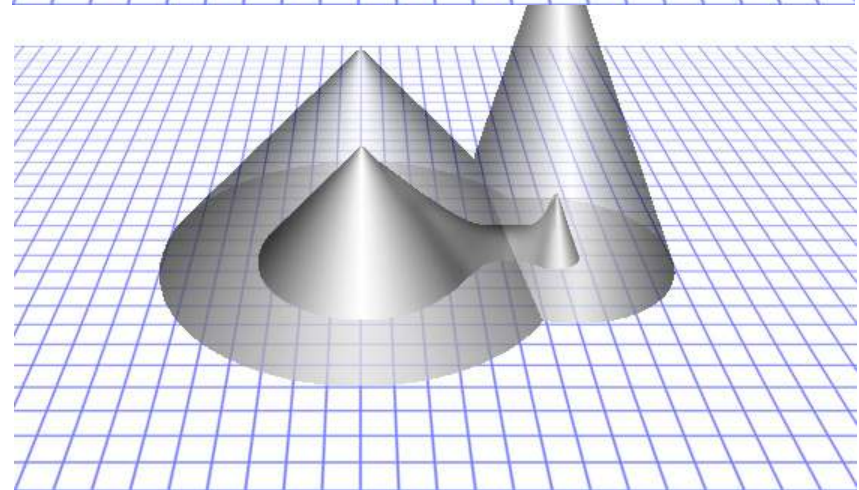
# Exemplo

## Dilatação sobre a imagem

**Dilatação**

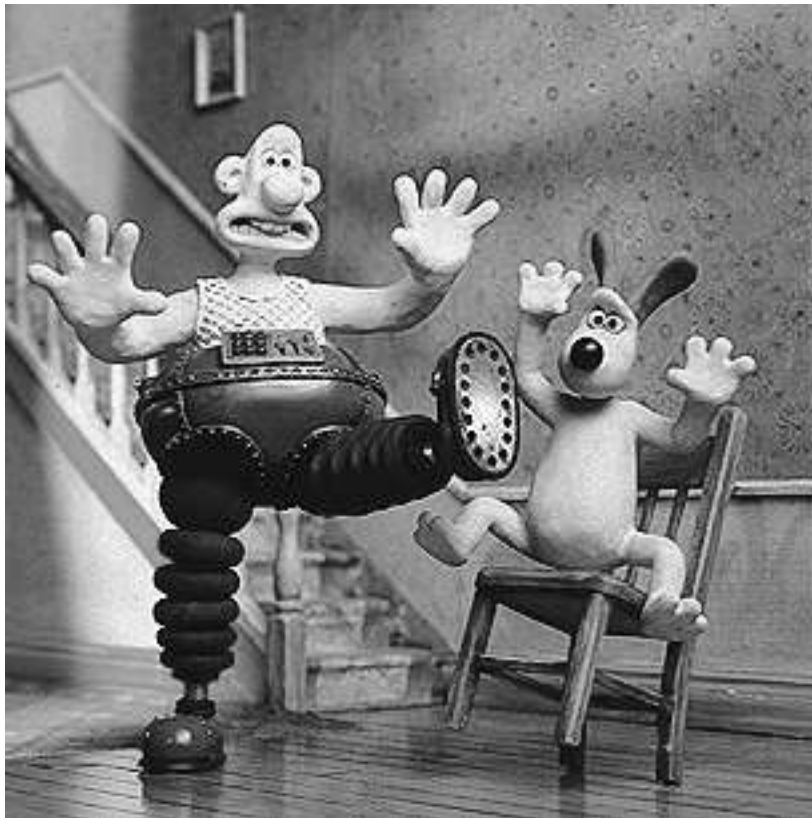


**Erosão**



**Erosão sob a imagem**

# Exemplo de Dilatação



# Exemplo de Erosão



# Processamento Digital de Imagens

## Morfologia Matemática

Abertura e Fechamento

# Abertura e fechamento

- A abertura de uma imagem  $f$  por um elemento estruturante  $b$  é definida como:

$$f \circ b = (f \ominus b) \oplus b$$

- E o fechamento é definido como:

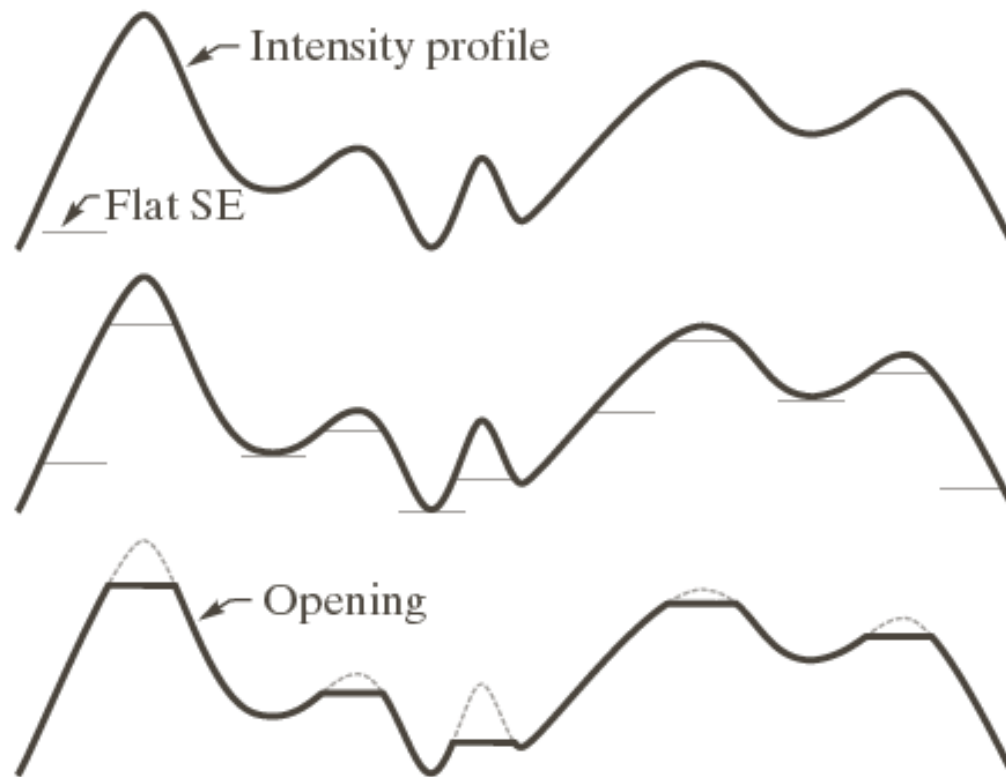
$$f \cdot b = (f \oplus b) \ominus b$$

- A abertura e fechamento são operações duais em respeito ao complemento e reflexão do elemento estruturante
  - $(f \cdot b)^c = f^c \circ b$
  - $(f \circ b)^c = f^c \cdot b$
- Em que  $f^c = -f(x,y)$



# Abertura e fechamento

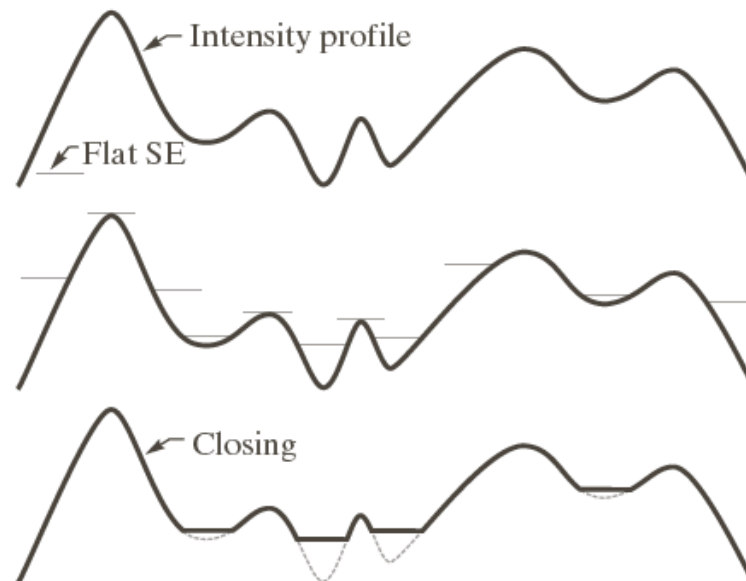
- Estas operações possuem uma simples interpretação geométrica. Supõe-se que uma supõe-se que a imagem é vista como uma superfície 3D, suas intensidades são interpretadas como valores da altura sobre o plano xy.
- A abertura é interpretada como empurrar a superfície para baixo em direção ao elemento estruturante, sob a superfície.





# Abertura e fechamento

- O fechamento é interpretado como colocar o elemento estruturante sobre a superfície e em seguida a superfície é puxada para cima em direção ao elemento estruturante



# Abertura e Fechamento

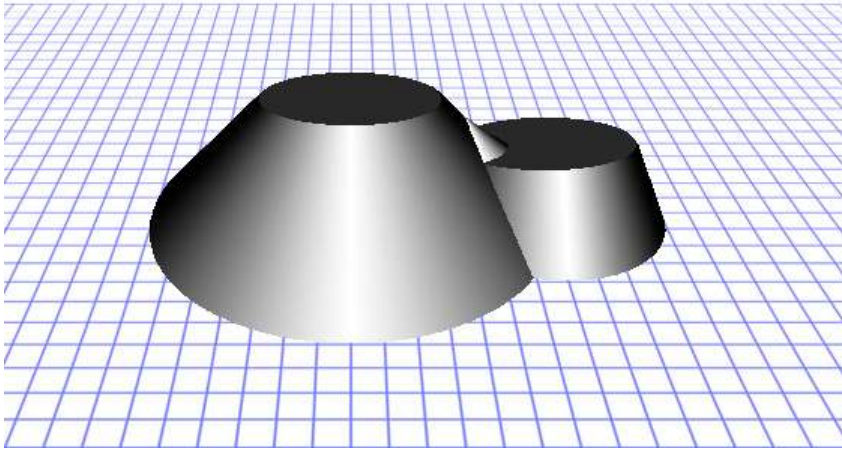
- A abertura satisfaz as seguintes condições:
  - A abertura é um sub-conjunto da imagem ( $f \circ b \sqsubseteq f$ ), ou seja  $f \circ b \leq f$
  - Se  $f_1 \sqsubseteq f_2$  então  $f_1 \circ b \sqsubseteq f_2 \circ b$
  - $(f \circ b) \circ b = f \circ b$
- O fechamento satisfaz as seguintes condições:
  - A imagem é um sub-conjunto do fechamento ( $f \sqsubseteq f \cdot b$ ), ou seja  $f \cdot b \leq f$
  - Se  $f_1 \sqsubseteq f_2$  então  $f_1 \cdot b \sqsubseteq f_2 \cdot b$
  - $(f \cdot b) \cdot b = f \cdot b$
- Similar às operações binárias



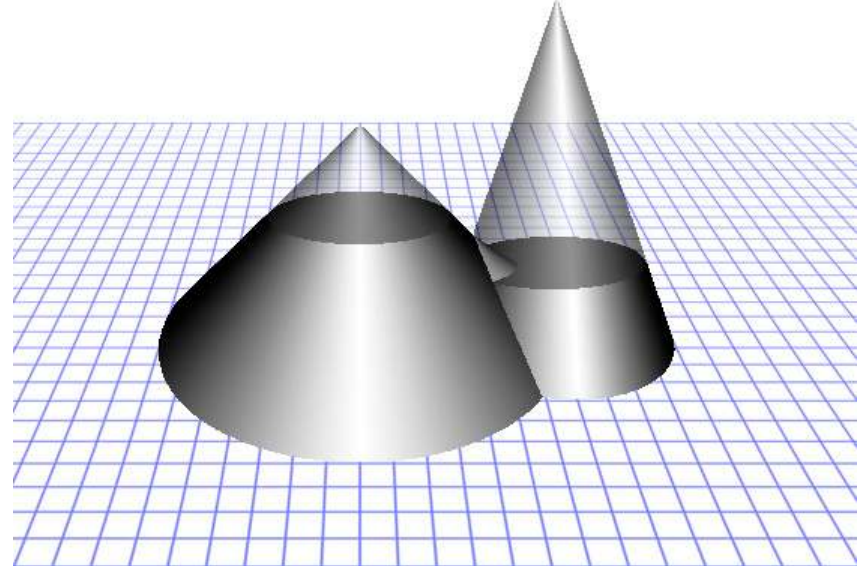


# Exemplo

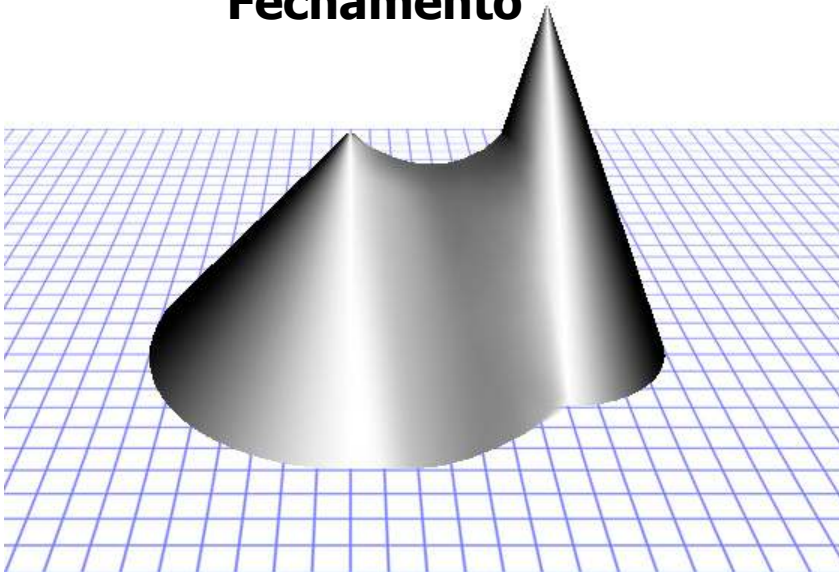
**Abertura**



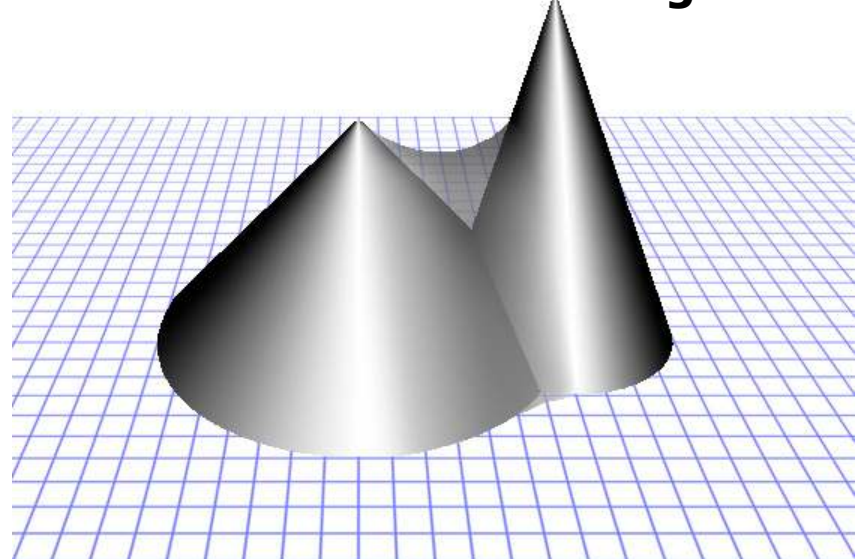
**Abertura sobre a imagem**



**Fechamento**



**Fechamento sobre a imagem**



# Exemplo de Abertura

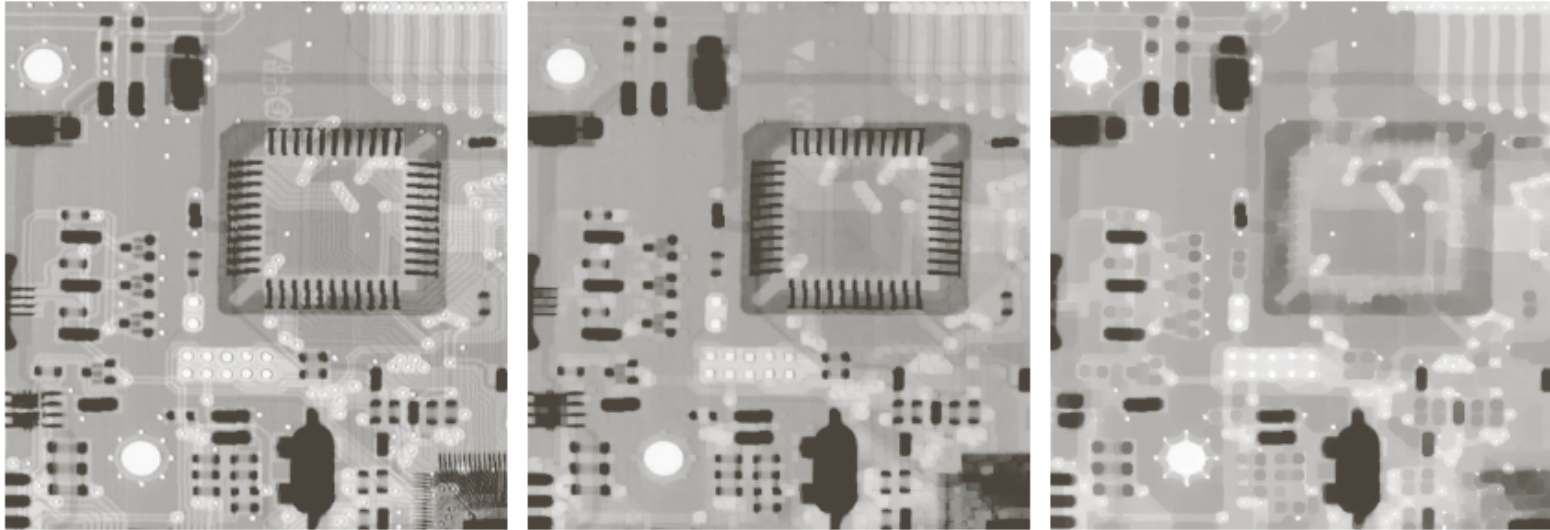


# Exemplo de Fechamento





# Exemplo



a b c

**FIGURE 9.37** (a) A gray-scale X-ray image of size  $448 \times 425$  pixels. (b) Opening using a disk SE with a radius of 3 pixels. (c) Closing using an SE of radius 5.

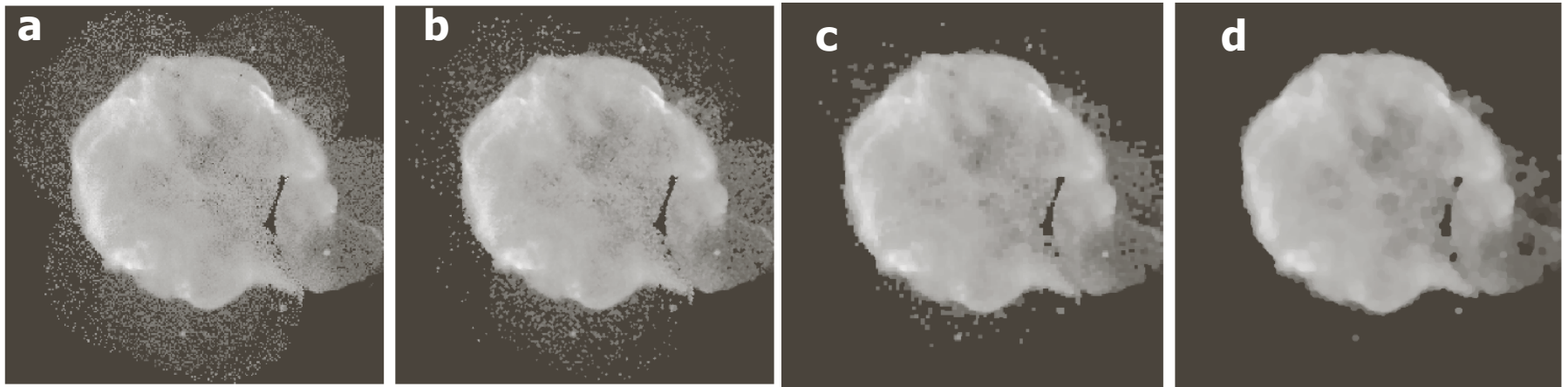
# Processamento Digital de Imagens

## Morfologia Matemática

Algoritmos de morfologia em níveis de cinza

# Suavização morfológica

- A abertura apaga detalhes mais claros que o elemento estruturante enquanto o fechamento apaga os elementos mais escuros que o elemento estruturante.
- A combinação de abertura e fechamento são utilizados para suavização e remoção de ruído, similar ao realizado em binário para supressão de ruído.



**a) Imagem original, abertura e fechamento aplicados b) 1 vez, c) 3 vezes e d) 5 vezes**



# Gradiente morfológico

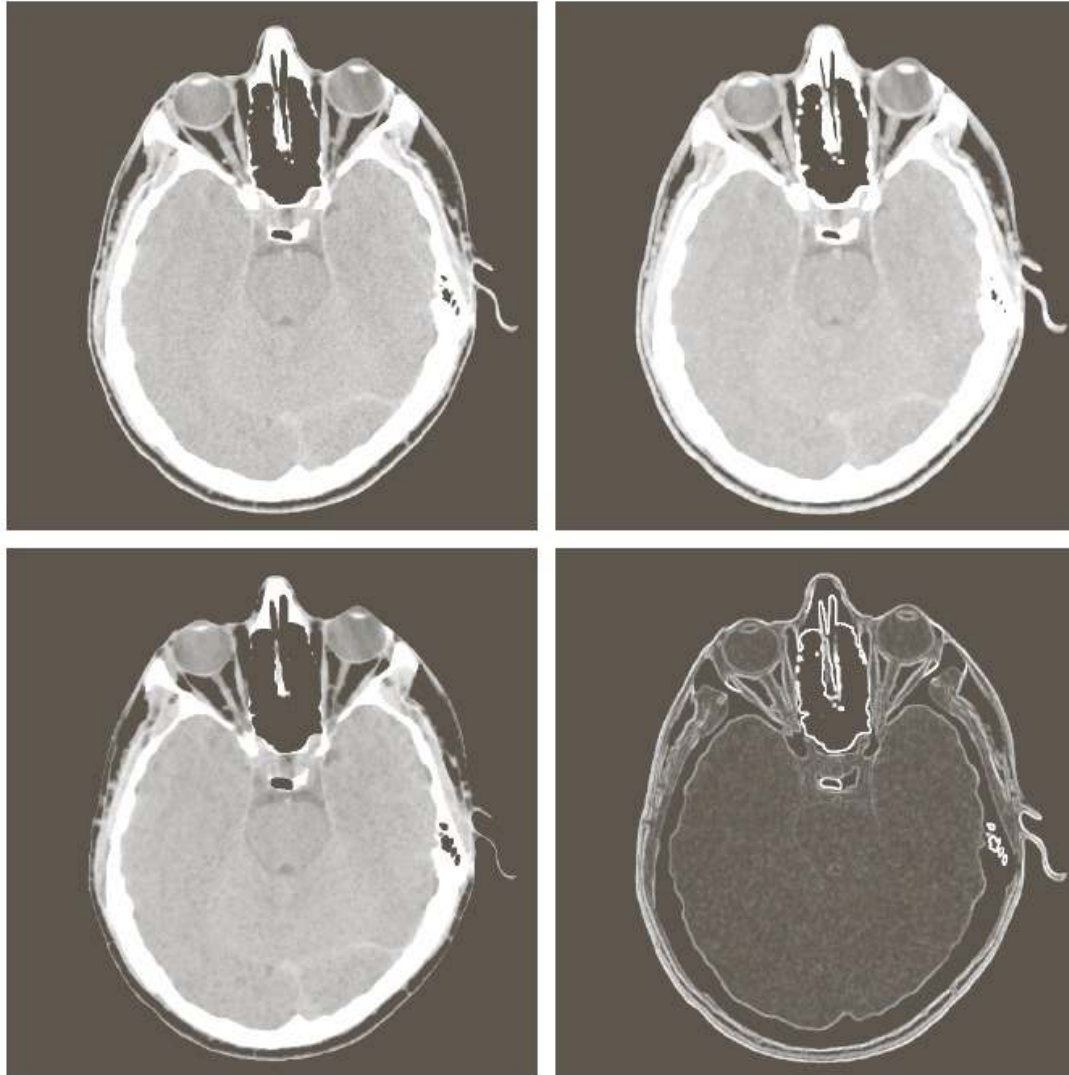
- A erosão e dilatação podem ser combinadas para obter o gradiente morfológico, dado por:

$$g = (f \oplus b) - (f \ominus b)$$

- A dilatação enlarga as regiões enquanto a erosão as encolhe. A diferença entre ambas realça as bordas.
- As áreas homogêneas são eliminadas pela subtração. O resultado é uma imagem com bordas, produzindo um efeito similar a derivada.



# Exemplo



a	b
c	d

**FIGURE 9.39**

(a)  $512 \times 512$  image of a head CT scan.

(b) Dilation.

(c) Erosion.

(d) Morphological gradient, computed as the difference between (b) and (c).

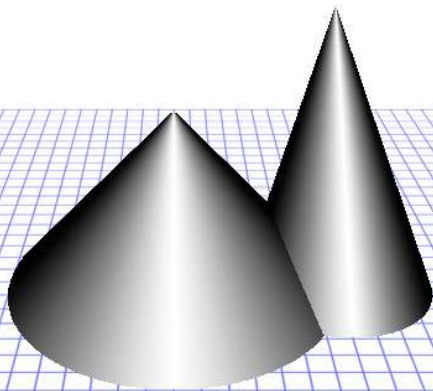
(Original image courtesy of Dr. David R. Pickens, Vanderbilt University.)



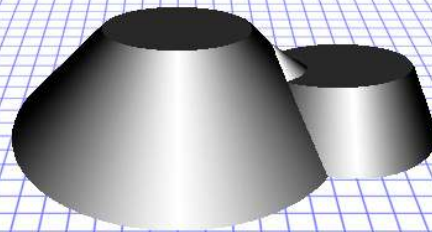
# Transformação Top-hat

- A combinação da subtração da imagem com a abertura e fechamento. A transformação top-hat é definida como a subtração de a imagem pela sua abertura, dada por:

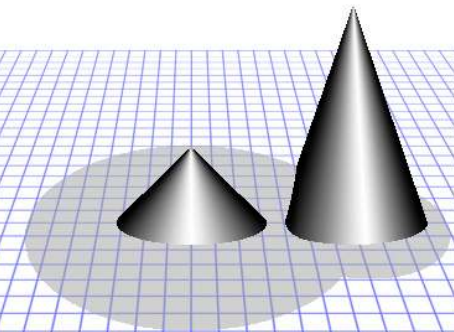
$$T_{\text{hat}}(f) = f - (f \circ b)$$



Original



Abertura

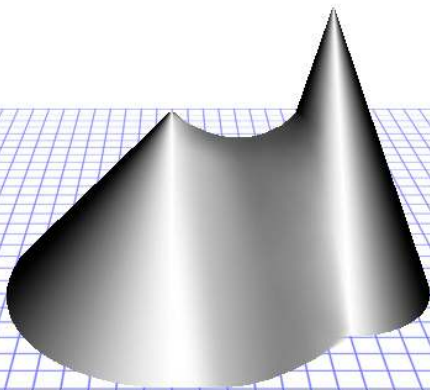


Top-hat

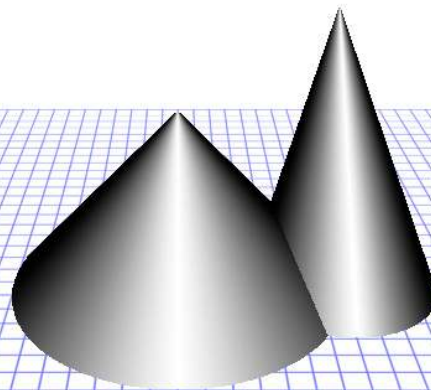
# Transformação Botton-hat

- A transformação Botton-hat é definida como a subtração do fechamento da imagem pela imagem

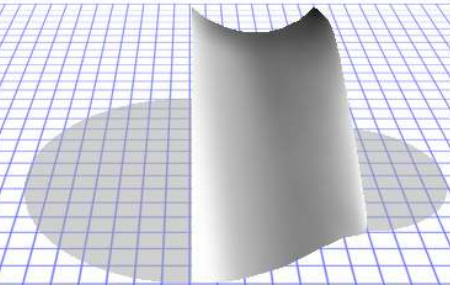
$$B_{\text{hat}}(f) = (f \cdot b) - f$$



Original



Abertura



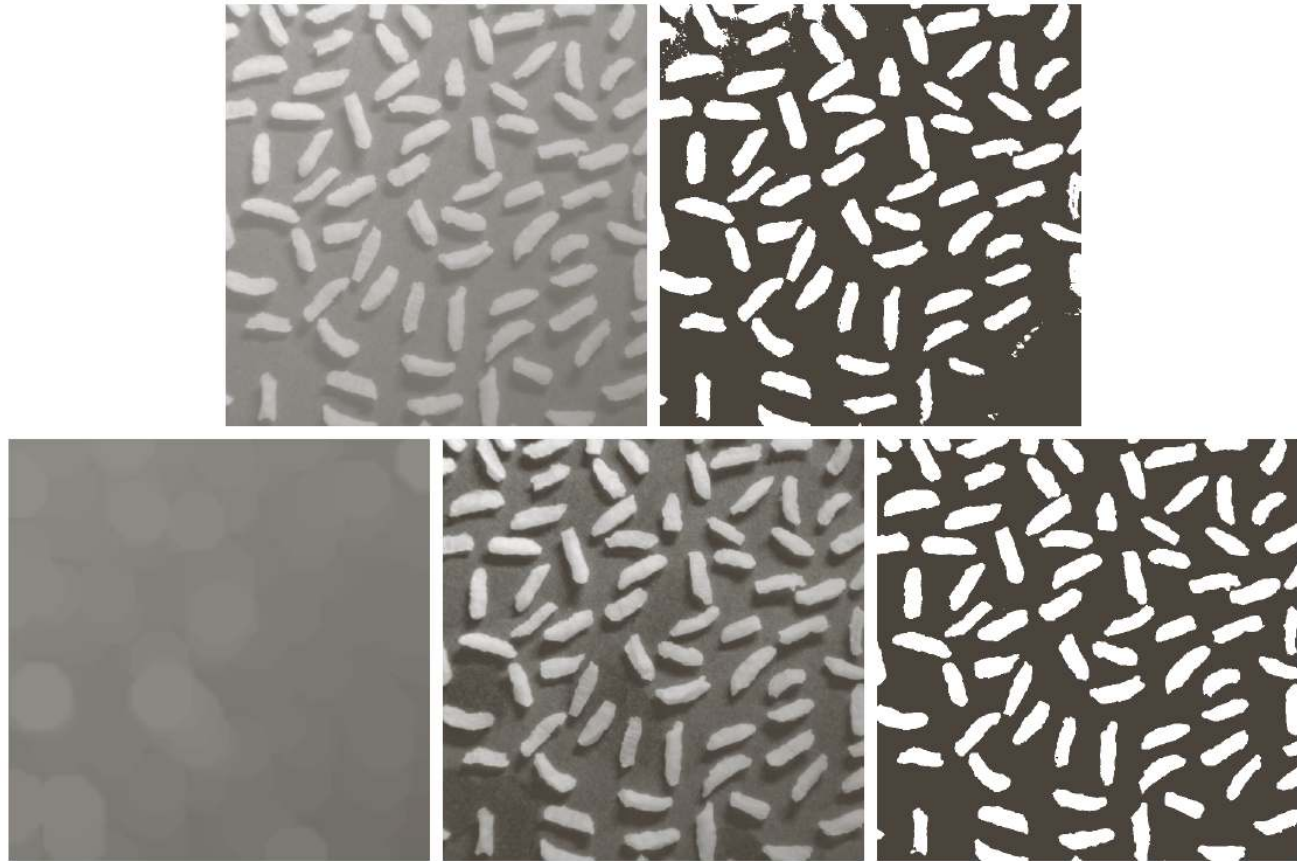
Botton-hat

# Transformação botton-hat e top-hat

- A principal aplicação dessas transformações é remover objetos através da utilização de um elemento estruturante na abertura e fechamento que não destrua o objeto a ser removido.
- A operação de diferença realiza o papel para remoção dos componentes que permanecem.
- A transformação top-hat é usada para extrair objetos claros em um fundo escuro.
- A transformação botton-hat é usada para extrair objetos escuros em um fundo claro.
- É útil para corrigir efeito de iluminação não uniforme.



# Exemplo



Método de otsu

a b  
c d e

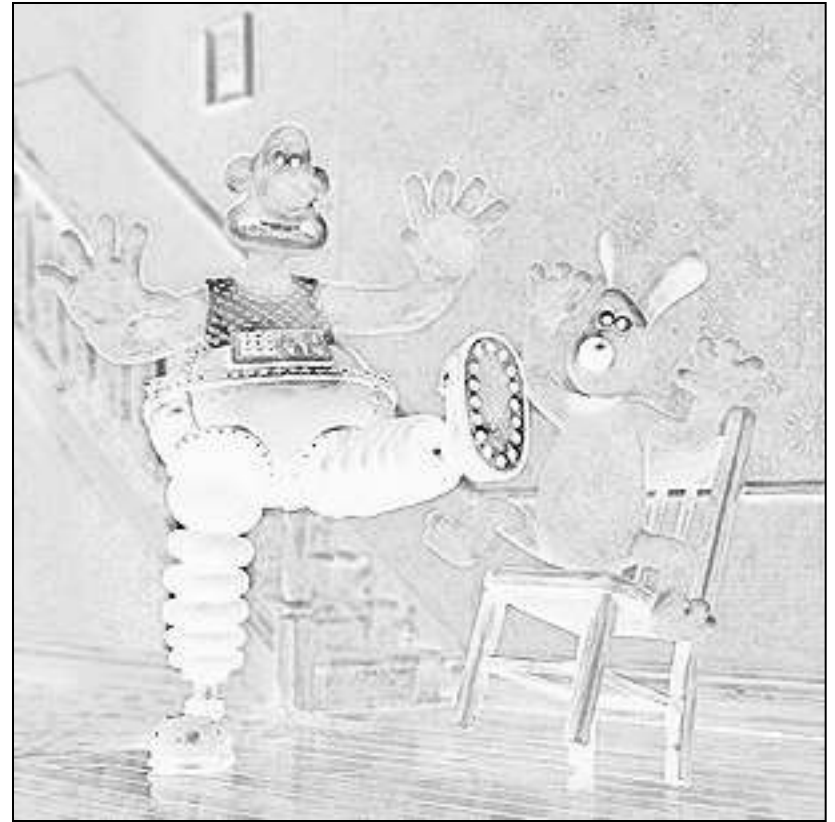
**FIGURE 9.40** Using the top-hat transformation for *shading correction*. (a) Original image of size  $600 \times 600$  pixels. (b) Thresholded image. (c) Image opened using a disk SE of radius 40. (d) Top-hat transformation (the image minus its opening). (e) Thresholded top-hat image.

# Bottom-hat





# Top-hat



# Granulometria

- Granulometria é um campo que realiza o processo de determinar a distribuição das partículas baseadas em seu tamanho.
- A morfologia pode ser usada para estimar a distribuição do tamanho das partículas.
- Quando as partículas são mais claras que o fundo, o método consiste em aplicar aberturas aumentando o tamanho do elemento estruturante a cada aplicação da aplicação.
- A abertura age nas regiões que são maiores que o elemento estruturante.
- Para cada abertura, a soma dos valores níveis de cinza da imagem resultante é somada.



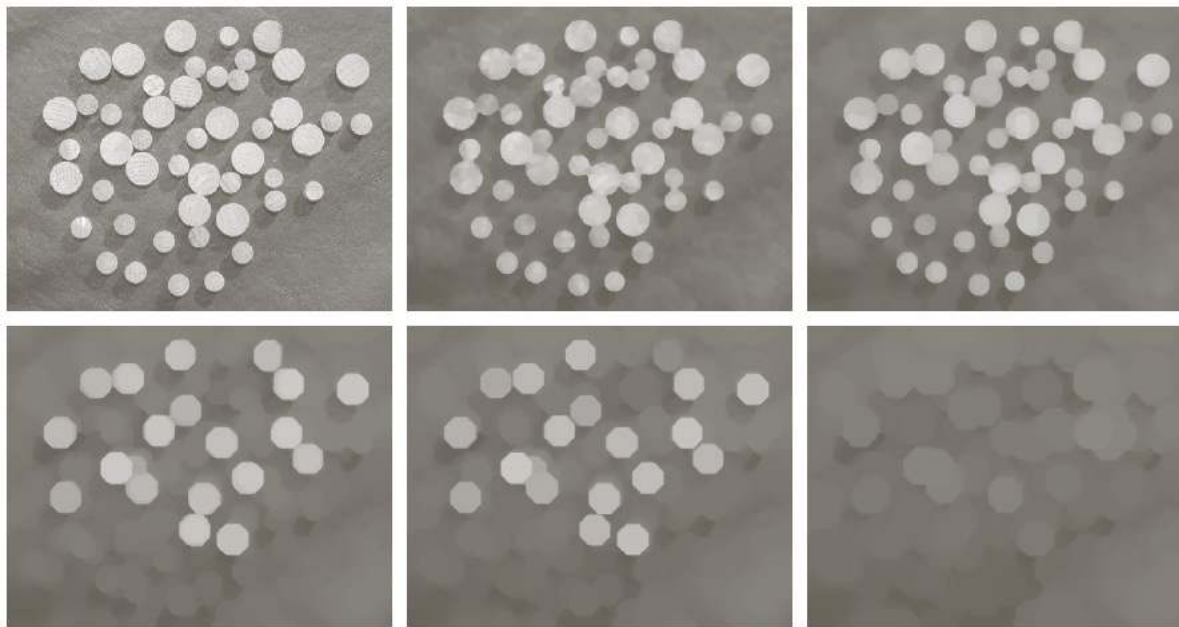
# Granulometria

- Esta soma é chamada de superfície de área, esta decresce a medida que o elemento estruturante cresce.
- Este decrescimento gerado pela diminuição da intensidade dos objetos claros.
- Este procedimento gera um vetor 1D em que cada elemento representa a soma dos pixels da abertura. Para enfatizar as diferenças entre as aberturas são computadas a diferença entre dois elementos do vetor 1D.
- Os picos neste gráfico indicam o tamanho dos objetos que prevalecem na imagem



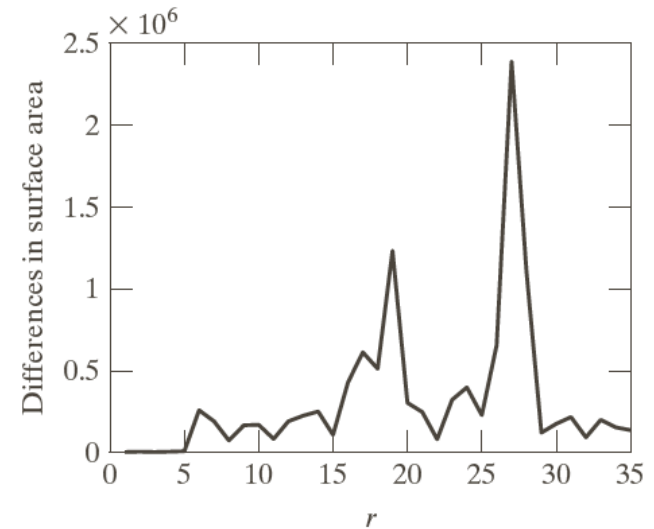


# Exemplo



a	b	c
d	e	f

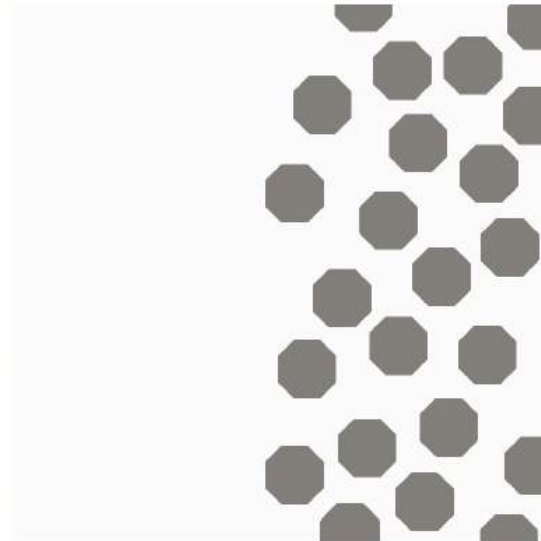
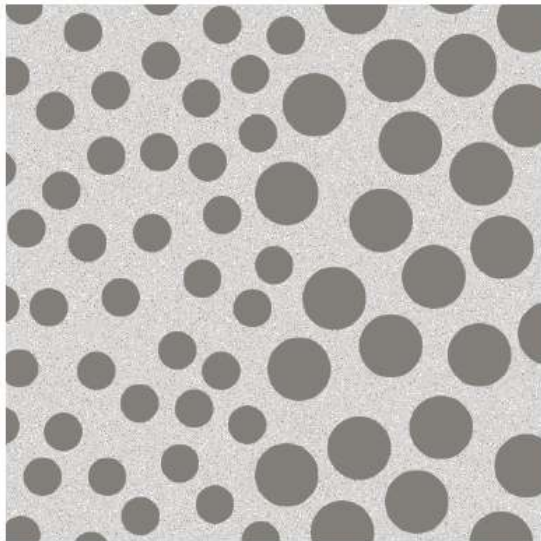
**FIGURE 9.41** (a)  $531 \times 675$  image of wood dowels. (b) Smoothed image. (c)–(f) Openings of (b) with disks of radii equal to 10, 20, 25, and 30 pixels, respectively. (Original image courtesy of Dr. Steve Eddins, The MathWorks, Inc.)



**FIGURE 9.42** Differences in surface area as a function of SE disk radius,  $r$ . The two peaks are indicative of two dominant particle sizes in the image.

# Segmentação Textural

- Através da detecção de bordas entre as regiões com baseada na diferença de textura.
- Inicialmente realiza-se um fechamento para remover os pequenos círculos



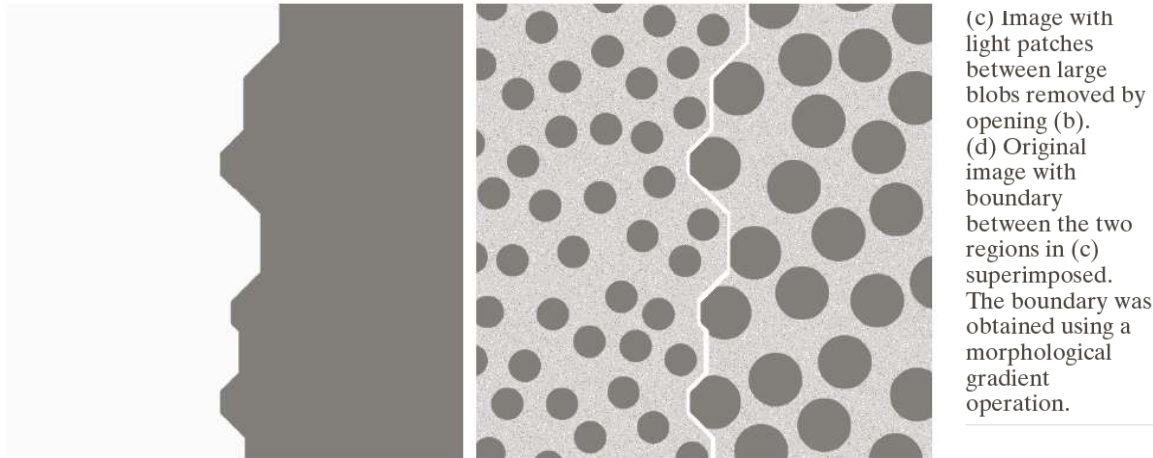
a	b
c	d

**FIGURE 9.43**

Textural segmentation.  
(a) A  $600 \times 600$  image consisting of two types of blobs. (b) Image with small blobs removed by closing (a). ...

# Segmentação Textural

- Através da abertura desta imagem com um elemento estruturante maior que a separação dos círculos, removendo esses espaços.
- Em seguida, aplica-se um gradiente morfológico para realizar a separação das duas regiões texturais



# Reconstrução

- Seja  $f$  e  $g$  duas imagens (marcadora e máscara, respectivamente). Assume-se que ambas imagens em níveis de cinza possuam o mesmo tamanho e que  $f \leq g$ .
- A dilatação geodésica de tamanho 1 é definida por:
  - $D^1_g(f) = (f \oplus b) \wedge g$
- Em que  $\wedge$  representa um mínimo.
- A dilatação geodésica de tamanho  $n$  da imagem  $f$  em relação a  $g$  é definida como:

$$D^n_g(f) = D^1_g[D^{n-1}_g(f)]$$

- em que

$$D^0_g(f) = f$$



# Reconstrução

- A erosão geodésica de tamanho 1 é definida como:

$$E_g^1(f) = (f \ominus b) \vee g$$

- Em que  $\vee$  denota a operação máximo
- A reconstrução pela dilatação de uma imagem máscara (g) por uma imagem marcadora f é definida pela dilatação geodésica de f em relação a g.

$$R_g^D(f) = D_g^{(k)}(f)$$

- E pela erosão

$$R_g^E(f) = E_g^{(k)}(f)$$

- Pela abertura:

- $O_R^{(n)}(f) = R_g^D(f \ominus nb)$

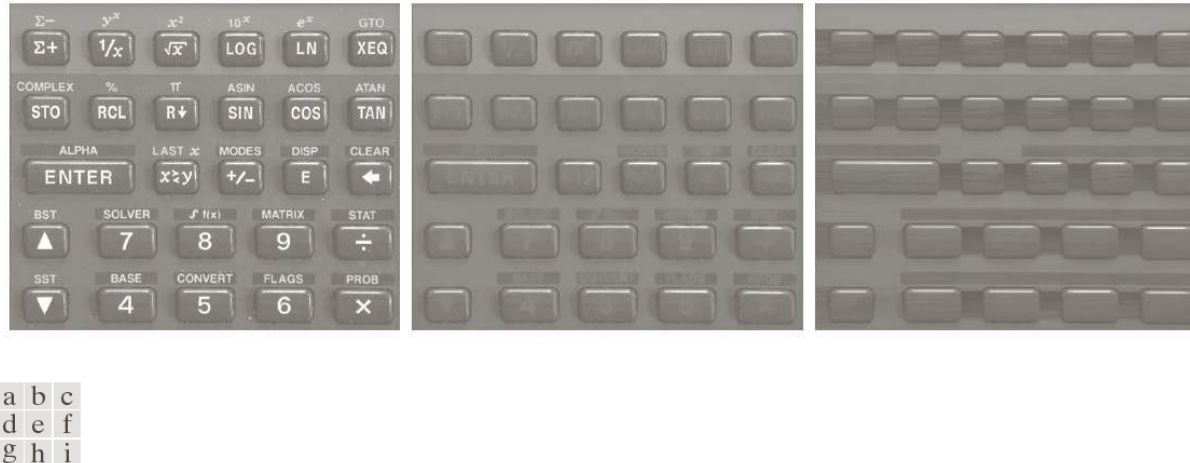
- Pelo fechamento:

- $C_R^{(n)}(f) = R_g^E(f \oplus nb)$



# Exemplo

- É possível utilizar a reconstrução em vários passos para normalizar fundo irregulares de uma imagem, como mostrado na figura 9.44a, o objetivo é manter apenas os caracteres os textos dos botões das teclas.
- Inicia-se a supressão pela reflexão das teclas através da reconstrução por abertura com uma linha que é maior que um caractere.
- Em seguida o rastro dos caracteres é desaparecido através de uma abertura



**FIGURE 9.44** (a) Original image of size  $1134 \times 1360$  pixels. (b) Opening by reconstruction of (a) using a horizontal line 71 pixels long in the erosion. (c) Opening of (a) using the same line. (d) Top-hat by reconstruction. (e) Opening by reconstruction of (d) using a horizontal line 11 pixels long. (f) Dilation of (f) using a horizontal line 21 pixels long. (g) Minimum of (d) and (g). (h) Final reconstruction result. (Images courtesy of Dr. Steve Eddins, The MathWorks, Inc.)

# Exemplo

- Subtraindo a imagem (9.44a) pela imagem reconstruída pela abertura (9.44b) obtem-se a reconstrução por top-hat.
- A figura 9.44e ilustra a transformação top-hat tradicional.
- Aplica-se a reconstrução por abertura no top-hat para desaparecer os detalhes horizontais e uniformidades do fundo, resultando na 9.44 f.



**FIGURE 9.44** (a) Original image of size  $1134 \times 1360$  pixels. (b) Opening by reconstruction of (a) using a horizontal line 71 pixels long in the erosion. (c) Opening of (a) using the same line. (d) Top-hat by reconstruction. (e) Top-hat. (f) Opening by reconstruction of (d) using a horizontal line 11 pixels long. (g) Dilation of (f) using a horizontal line 21 pixels long. (h) Minimum of (d) and (g). (i) Final reconstruction result. (Images courtesy of Dr. Steve Eddins, The MathWorks, Inc.)

# Reconstrução

- Aplicando uma dilatação em 9.44f, resulta nos caracteres borrados, resultando na Figura 9.44g.
- Aplicando o mínimo da imagem dilatada e a reconstrução por top-hat, melhora os contraste do texto
- Finalmente, aplica-se uma operação de mínimo, restaurando com perfeição os textos da imagem.



**FIGURE 9.44** (a) Original image of size  $1134 \times 1360$  pixels. (b) Opening by reconstruction of (a) using a horizontal line 71 pixels long in the erosion. (c) Opening of (a) using the same line. (d) Top-hat by reconstruction. (e) Top-hat. (f) Opening by reconstruction of (d) using a horizontal line 11 pixels long. (g) Dilation of (f) using a horizontal line 21 pixels long. (h) Minimum of (d) and (g). (i) Final reconstruction result. (Images courtesy of Dr. Steve Eddins, The MathWorks, Inc.)



# Encaminhamentos

---

- Dúvidas?
- Próximo assunto
  - Segmentação de objetos em imagens digitais

