INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 15-03-2021

Apresentação da Disciplina

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Conteúdo – 1ª etapa

- Notação assintótica
- Conceitos básicos
- Análise de algoritmos iterativos
  - Invariantes
  - Região crítica
- Fórmulas de recorrência
- Análise de algoritmos recursivos
- Algoritmos de cota inferior e superior
- Análise amortizada
  - Método da agregação
  - Método contábil
  - Método potencial

Conteúdo – 2ª etapa

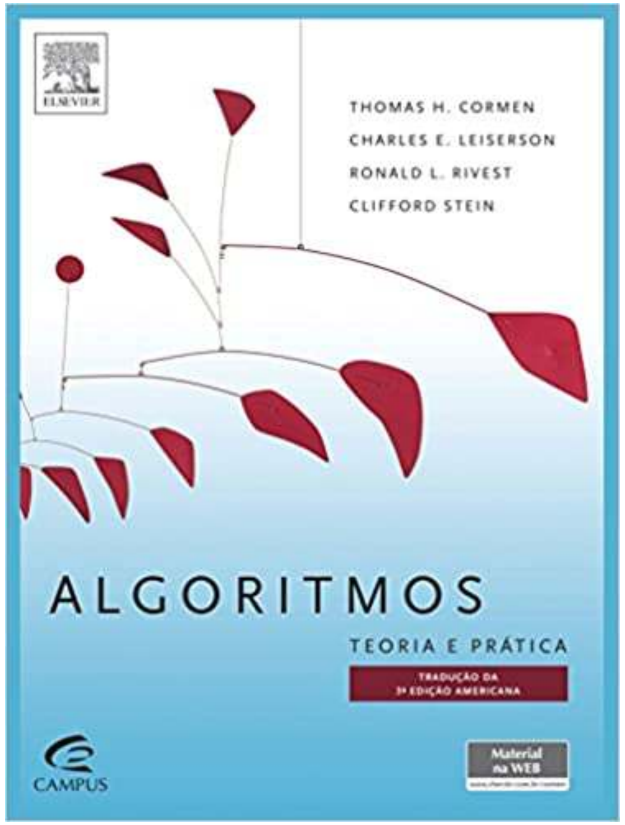
- Divisão e conquista
- Programação dinâmica
- Enumeração explícita
- Enumeração implícita
- Estratégia gulosa

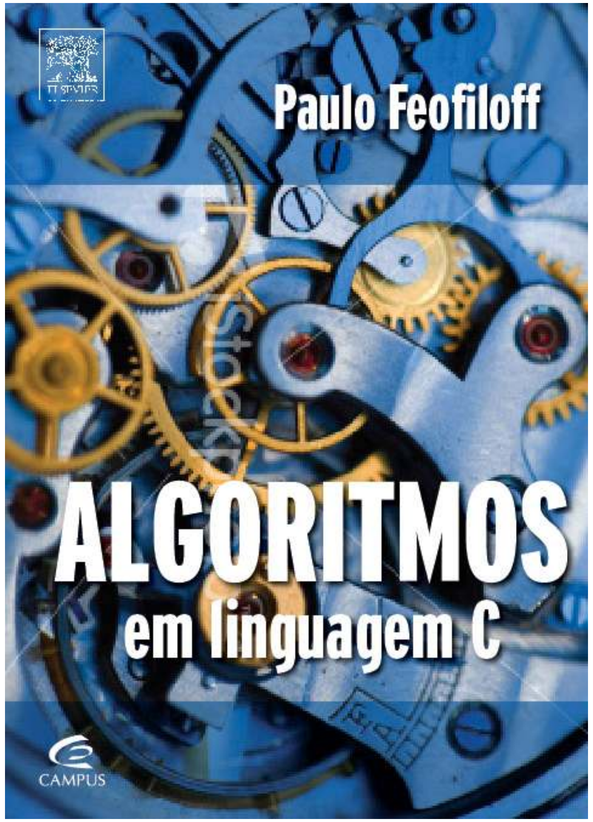
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Bibliografia

Cormen et Al, Algoritmos: Teoria e Prática

Feofiloff, Algoritmos em Linguagem C





Frequência

Controle através do Meet Attendance

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 22-03-2021

Notação Assintótica

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

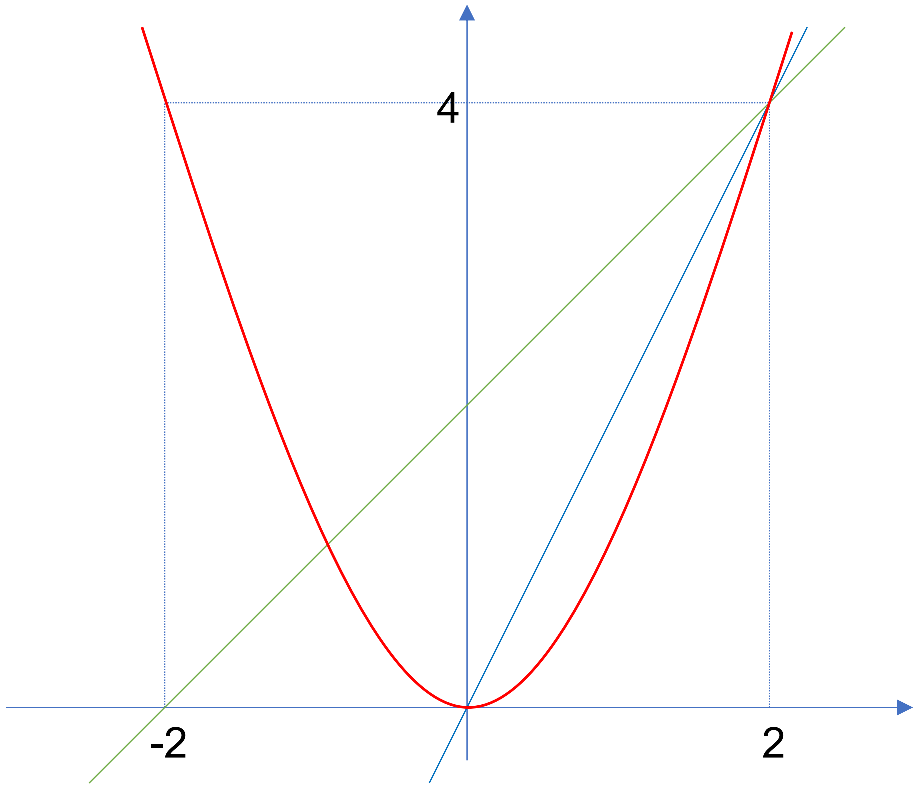
Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Notação Assintótica

Notação assintótica é usada para denotar conjuntos de funções. Usaremos cinco tipos de notação assintótica, todas elas baseadas no conceito de *dominação assintótica*.

Dizemos que uma função f *domina assintoticamente* uma função g se existe uma constante x_0 tal que $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \geq x_0$.

Ex: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$



Se $x \geq 2$:
$f(x) = x^2 = x.x \geq 2x = g(x)$
$f(x) = x^2 = x.x \geq 2x = x + x \geq x + 2 = h(x)$
Conclusão: f domina assintoticamente g e h

$g(x) = 2x = x + x \geq x + 2 = h(x)$
Conclusão: g domina assintoticamente h

Suponha que g domine assintoticamente f
$c.g(x) \geq f(x) \Rightarrow 2cx \geq x^2 \Rightarrow 2c \geq x$ (c não pode ser constante)

Notação O (Omicron ou Ó grande)

Denotamos por O(f) o conjunto de todas as funções *dominadas assintoticamente* por $c.f$, onde c é uma constante positiva. Isso significa dizer que se $g \in O(f)$ então existem constantes x_0 e c (> 0) tais que $c.f(x) \geq g(x)$, para todo $x \geq x_0$.

Ex: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$

Quais dessas funções pertencem a O(f), O(g) e O(h)?

Se $x \geq 2$ e c = 1:

$c.f(x) = x^2 = x.x \geq 2x = g(x)$

$c.f(x) = x^2 = x.x \geq 2x = x + x \geq x + 2 = h(x)$

Conclusão: $f, g, h \in O(f)$

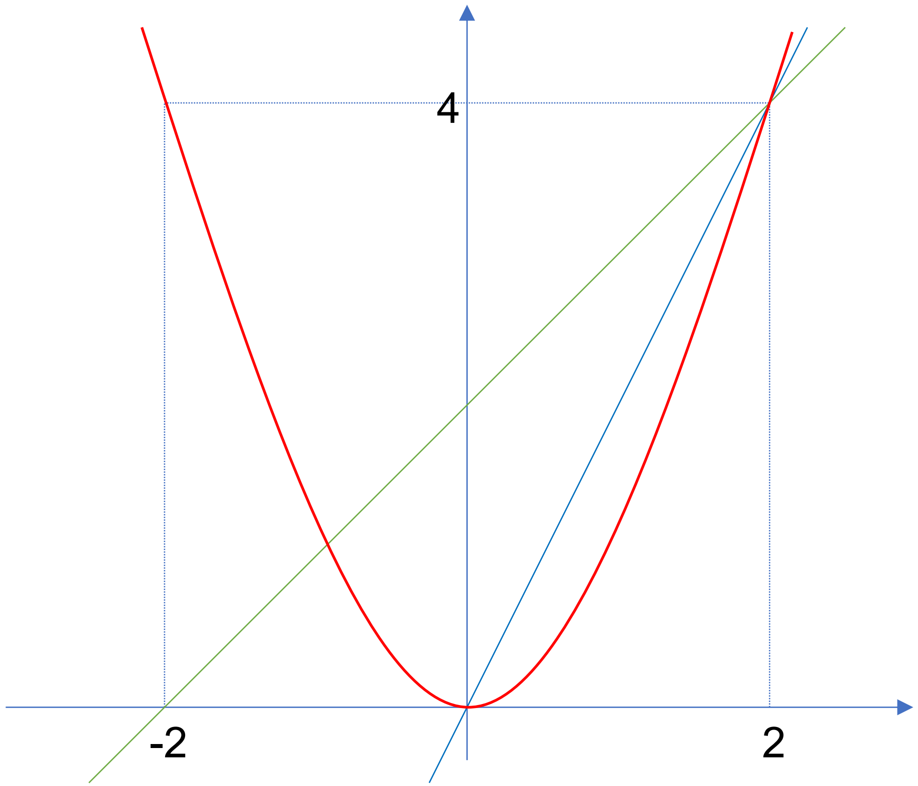
$c.g(x) = 2x = x + x \geq x + 2 = h(x)$

Conclusão: $g, h \in O(g)$

Se $x \geq 2$ e c = 2:

$c.h(x) = 2(x + 2) = 2x + 4 > 2x = g(x)$

Conclusão: $g, h \in O(h)$



Notação Ω (Ômega grande)

Denotamos por $\mathbf{\Omega}(f)$ o conjunto de todas as funções que *dominam assintoticamente c.f*, onde *c* é uma constante positiva.

Ex: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$

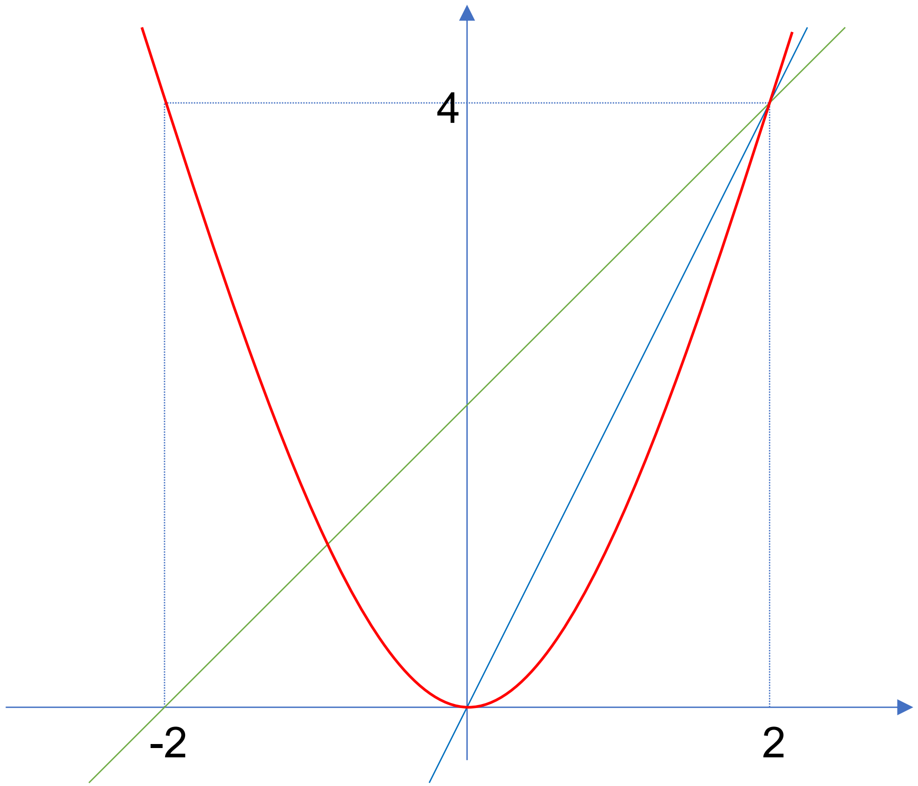
Quais dessas funções pertencem a $\mathbf{\Omega}(f)$, $\mathbf{\Omega}(g)$ e $\mathbf{\Omega}(h)$?

$f \in \mathbf{\Omega}(f)$

f, g e $h \in \mathbf{\Omega}(g)$

f, g e $h \in \mathbf{\Omega}(h)$

Obs: $g \in O(f) \Leftrightarrow f \in \mathbf{\Omega}(g)$



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Notação Θ (Theta)

$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$

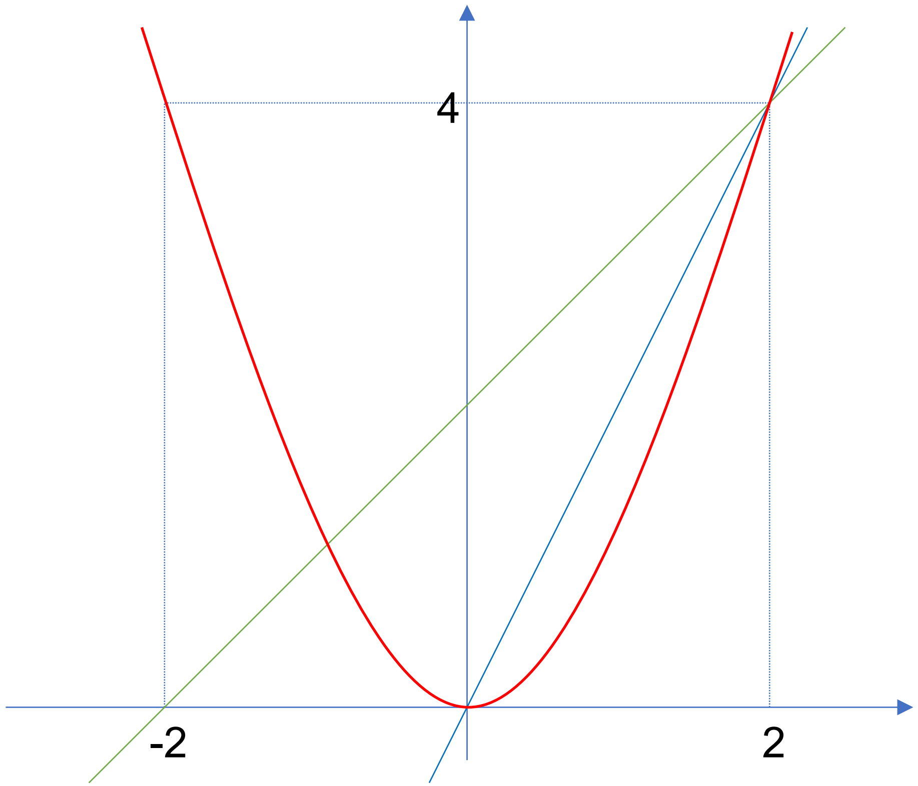
Ex: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$

Quais dessas funções pertencem a $\Theta(f)$, $\Theta(g)$ e $\Theta(h)$?

$f \in \Theta(f)$

g e $h \in \Theta(g)$

g e $h \in \Theta(h)$



Notação o (ó pequeno)

$o(f) = O(f) - \Theta(f)$

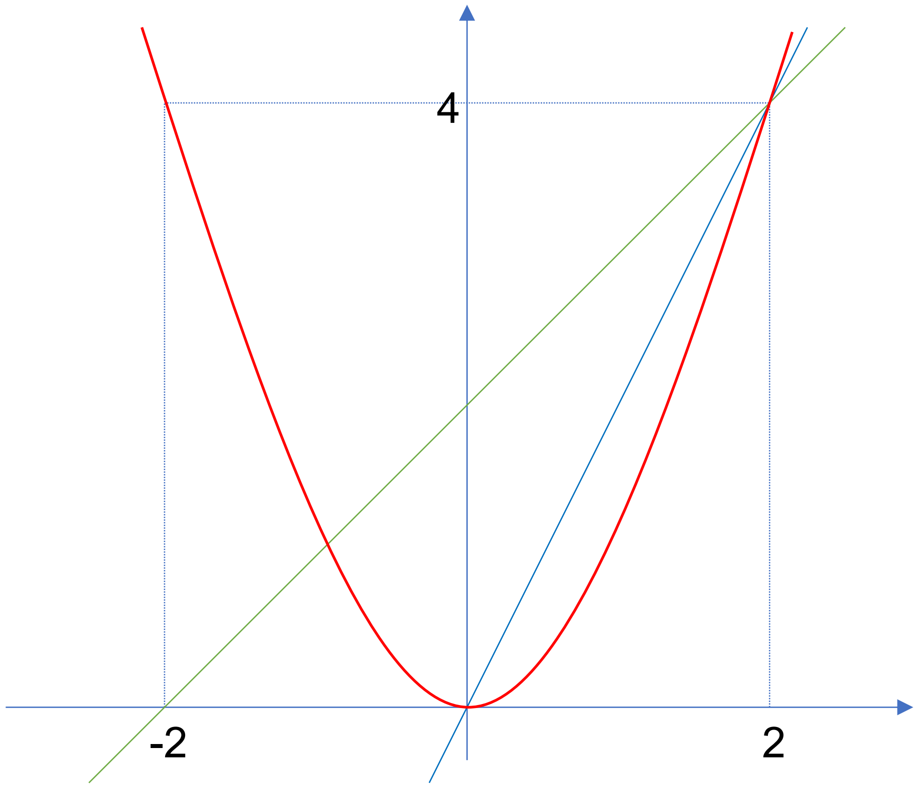
Ex: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$

Quais dessas funções pertencem a $o(f)$, $o(g)$ e $o(h)$?

g e $h \in o(f)$

Nenhuma dessas funções pertence a $o(g)$

Nenhuma dessas funções pertence a $o(h)$



Notação ω (ômega pequeno)

$\omega(f) = \Omega(f) - \Theta(f)$

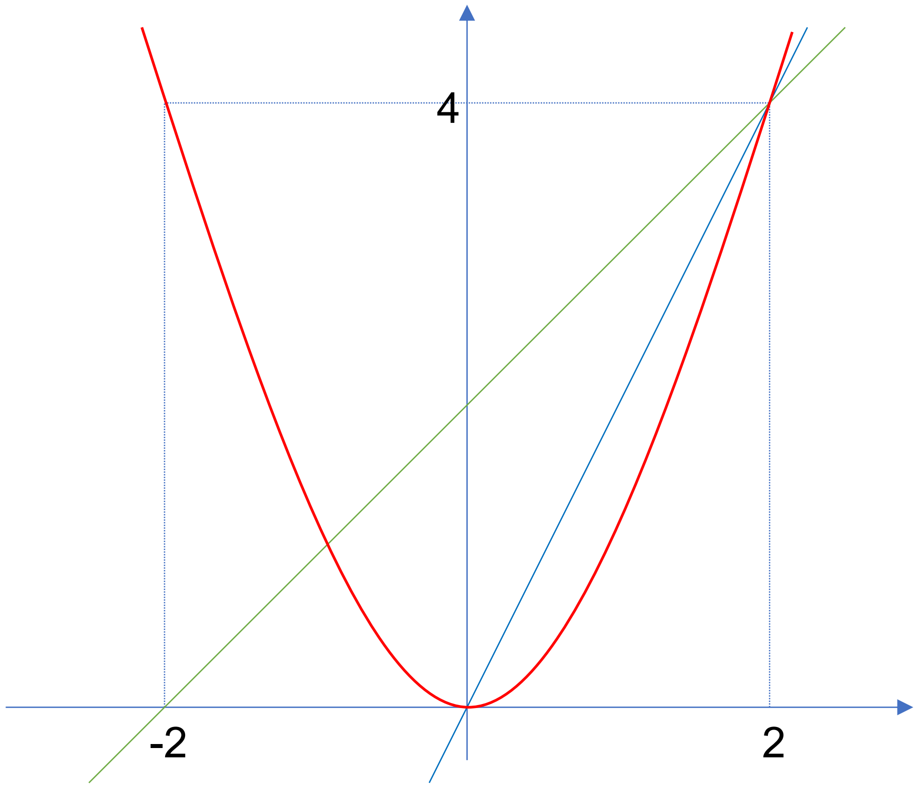
Ex: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x + 2$

Quais dessas funções pertencem a $\omega(f)$, $\omega(g)$ e $\omega(h)$?

Nenhuma dessas funções pertence a $\omega(f)$

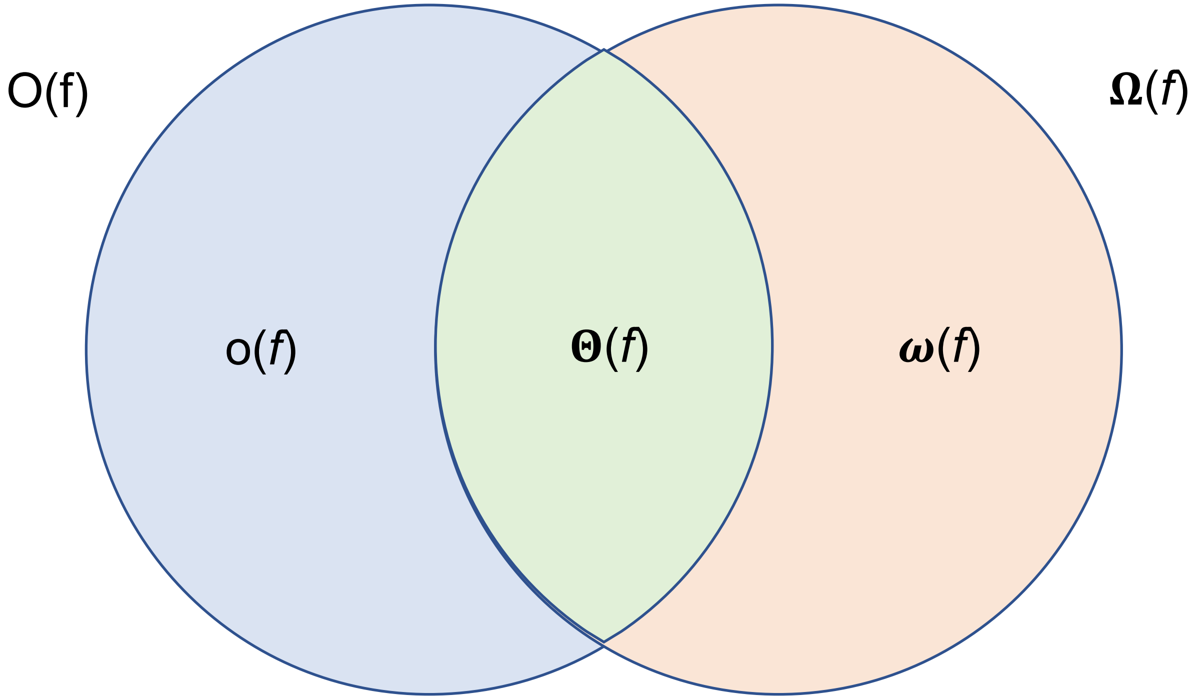
$f \in \omega(g)$

$f \in \omega(h)$



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

O	$\leq$
Ω	$\geq$
Θ	=
o	<
ω	>



INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 26-03-2021

Propriedades das Notações Assintóticas

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Propriedades das Notações Assintóticas

- **Reflexividade**: O, Ω, Θ
  Ex: $f \in O(f)$

- **Antirreflexividade**: o, ω
  Ex: $f \notin o(f)$

- **Simetria**: Θ
  Ex: se $g \in \Theta(f)$ então $f \in \Theta(g)$

- **Antissimetria**: o, ω
  Ex: se $g \in \omega(f)$ e $f \in \omega(g)$ então $f = g$

- **Transitividade**: O, Ω, Θ, o, ω
  Ex: se $f \in \Omega(g)$ e $g \in \Omega(h)$ então $f \in \Omega(h)$

- **Propriedade multiplicativa**: se c é uma *constante positiva* então $O(f) = O(c.f)$

- **Propriedade aditiva**: se $g \in O(f)$ então $O(f) = O(f + g)$

- **Propriedade subtrativa**: se $g \in o(f)$ e f e g são funções crescentes então $O(f) = O(f - g)$

Essas três propriedades também valem para as notações Ω, Θ, o, ω. Elas significam que em notação assintótica *constantes positivas multiplicativas* e *termos de menor ordem de crescimento* são ***irrelevantes***.

$O(3x^2)$, $\Omega(x^3 + 4x)$, $\Theta(2^x - x^4)$, $o(2^{x+1} + 6x - 8)$, $\omega(\log_2 x^4)$

Ex: Simplifique as notações assintóticas abaixo usando as propriedades multiplicativa, aditiva e subtrativa.

$O(3x^2)$, $\Omega(x^3 + 4x)$, $\Theta(2^x - x^4)$, $o(2^{x+1} + 6x - 8)$, $\omega(\log_2 x^4)$

$O(3x^2) = O(x^2)$ propriedade multiplicativa

$\Omega(x^3 + 4x) = \Omega(x^3)$ propriedade aditiva

$\Theta(2^x - x^4) = \Theta(2^x)$ subtrativa

$o(2^{x+1} + 6x - 8) = o(2^x)$ propriedade multiplicativa, aditiva e subtrativa

$\omega(\log_2 x^4) = \omega(\log x)$ propriedade multiplicativa

Cuidado!

$O(2^{3x}) = O(2^{x})$?

Não!!

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 29-03-2021

Algoritmos

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Algoritmos

Algoritmo: uma *sequência* de instruções que visam resolver instâncias de um *problema*.

Algoritmo computacional: algoritmo constituído apenas de instruções *bem definidas*.

Algoritmo correto: algoritmo que resolve corretamente *todas* as instâncias do problema para o qual foi desenvolvido.
Além disso, cada instância deve ser resolvida em tempo finito.

Algoritmo eficiente: algoritmo que requer a execução de uma quantidade de instruções elementares limitada por um *polinômio* no tamanho da entrada.

Uma instrução é *elementar* se ela pode ser executada em tempo constante.

O *tamanho da entrada* de um algoritmo é a quantidade de bits necessários para representar os dados fornecidos ao algoritmo.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 09-04-2021

Complexidade computacional

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Complexidade computacional

A análise de algoritmos tem como principais objetivos determinar a *corretude* e a *eficiência* dos algoritmos.

A *complexidade temporal* de um algoritmo é um medida que nos permite estimar o tempo requerido pelo algoritmo. A complexidade temporal é função do tamanho da entrada e costuma ser expressa usando-se notação assintótica.

A *complexidade espacial* de um algoritmo é um medida que nos permite estimar a quantidade *extra* de memória requerida pelo algoritmo. A quantidade extra é toda a memória requerida pelo algoritmo exceto aquela usada para representar os dados de entrada. A complexidade espacial também é função do tamanho da entrada e costuma ser expressa usando-se notação assintótica.

Tais complexidades podem ser de três tipos:

- Melhor caso: expressa o comportamento do algoritmo nos casos que lhe são mais favoráveis
- Pior caso: expressa o comportamento do algoritmo nos casos que lhe são menos favoráveis
- Caso médio: expressa o comportamento médio (típico) do algoritmo

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 12-04-2021

Invariantes

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Invariantes

Um *invariante* é uma propriedade que se mantém válida durante toda a execução de um procedimento iterativo. Podemos usar invariantes para demonstrar a corretude de algoritmos.

Ex:

Algoritmo fatorial

Entrada: $x \in \mathbb{N}$
Saída: $x!$
$r = x$
para $i = x - 1$ até 2 (passo -1)
    $r = r * i$
devolva r

Esse algoritmo é correto?

Ele falha para $x = 0$, logo não é correto 😕

Algoritmo fatorial_corrigido

Entrada: $x \in \mathbb{N}$
Saída: $x!$
$r = 1$
para $i = 2$ até x
    $r = r * i$
devolva r

Esse algoritmo é correto?

Analisando esse algoritmo, percebemos a validade do seguinte invariante: ao final de cada iteração do laço temos $r = i!$.

Invariante: Ao final de cada iteração do laço temos $r = i!$.

Prova: Façamos indução em i. Base: $i = 2$. Observe que ao final da primeira iteração teremos $r = 2 = 2! = i!$.

Suponha agora que ao final da iteração com $i = k$ tenhamos $r = k!$ (hipótese de indução ou simplesmente H.I.).

Observe que na iteração com $i = k + 1$ faremos $r = k! * (k + 1) = (k + 1)!$ ■

Teorema: O algoritmo fatorial_corrigido é correto.

Prova: Se $x < 2$, nenhuma iteração do laço será executada e o algoritmo devolverá 1, o que é correto pois $0! = 1$ e $1! = 1$.

Nos demais casos, o invariante garante que ao final da última iteração teremos $r = x!$, portanto o algoritmo devolverá $x!$ ■ 😀

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 16-04-2021

Região crítica

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Vamos determinar a complexidade temporal do Algoritmo fatorial_corrigido.

Algoritmo fatorial_corrigido

	Entrada: $x \in \mathbb{N}$
	Saída: $x!$
1	$r = 1$
$4x - 1$	para $i = 2$ até x
$2x - 2$	$r = r * i$
1	devolva r

Contando cuidadosamente, concluímos que ele requer a execução de $6x – 1$ instruções elementares. Logo sua complexidade temporal, em termos assintóticos, é $\Theta(x)$.

Como o algoritmo utiliza apenas as variáveis escalares r e i, sua complexidade espacial é $O(1)$ (constante).

O Algoritmo fatorial_corrigido é eficiente?

Não, ele é ineficiente.

Região crítica

Felizmente, não precisamos contar quantas instruções elementares o algoritmo executa. Se pudermos determinar uma *região crítica* (ou *instrução crítica*) do algoritmo, basta contar quantas vezes a região crítica é executada para determinar a complexidade temporal do algoritmo. Chamamos de região crítica uma região do algoritmo que é a mais executada do algoritmo.

Formalmente, seja A um algoritmo constituído das instruções 1, 2, ..., k. Sejam f_1, f_2, ..., f_k funções que indicam quantas vezes as instruções 1, 2, ..., k são executadas, respectivamente.

Se $f_j \in O(f_i)$ (j = 1, 2, ..., k) então a instrução i é uma instrução crítica do algoritmo A.

Observe que a complexidade temporal assintótica de A é $O(f_1 + f_2 + ... + f_k)$. Se a instrução i é critica, usando a propriedade da adição, concluímos que tal complexidade é $O(f_i)$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 19-04-2021

Algoritmos com melhor e pior caso

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Vamos analisar o algoritmo abaixo que serve para procurar um valor num vetor.

Algoritmo Busca_sequencial

Entrada: um vetor *v* com *n* posições e um valor *x*
Saída: *Sim*, se *x* ocorre em *v*; *Não*, caso contrário

```
para i = 1 até n
    se x = v[i]
        devolva Sim e pare
devolva Não
```

Teorema: o Algoritmo Busca_sequencial é correto.

Prova: Suponha que *x* não ocorre em *v*. Nesse caso a condição do *se* nunca será satisfeita e o algoritmo devolverá *Não*, o que é correto.

Suponha agora que *x* ocorre em *v*. Seja *k* a primeira posição de *v* tal que $x = v[k]$. Note que $1 \leq k \leq n$. Quando $i = k$ a condição do *se* será satisfeita e o algoritmo devolverá *Sim*, o que é correto ■

Qual o melhor caso do Algoritmo Busca_sequencial?

O melhor caso ocorre quando $x = v[1]$. Nesse caso o tempo requerido será $O(1)$.

Qual o pior caso desse algoritmo?

O pior caso ocorre quando v não contém x. Nesse caso o tempo requerido será $\Theta(n)$.

Ele é eficiente?

Sim, pois o tamanho da entrada é $\Theta(n)$ e o tempo requerido pelo algoritmo, mesmo no pior caso, é $O(n)$, portanto linear no tamanho da entrada.

O Algoritmo Busca_sequencial utiliza apenas a variável escalar i, logo sua complexidade espacial é $O(1)$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Vamos agora analisar um algoritmo que verifica se há elementos repetidos num vetor.

Algoritmo Repetido

Entrada: um vetor v com n posições
Saída: *Sim*, se existem elementos repetidos em v; *Não*, caso contrário
para $i = 1$ até $n - 1$
  para $j = i + 1$ até n
    se $v[i] = v[j]$
      devolva *Sim* e pare
devolva *Não*

Teorema: o Algoritmo Repetido é correto.

Prova: Suponha que não há elementos repetidos em v. Nesse caso a condição do *se* nunca será satisfeita e o algoritmo devolverá *Não*, o que é correto.

Suponha agora que há elementos repetidos em v. Seja k a primeira posição de v cujo conteúdo se repete. Seja l a primeira posição após a posição k tal que $v[k] = v[l]$. Note que $1 \leq k \leq n - 1$ e $k + 1 \leq l \leq n$. Quando $i = k$ e $j = l$ a condição do *se* será satisfeita e o algoritmo devolverá *Sim*, o que é correto ■

Qual o melhor caso do Algoritmo Repetido?

O melhor caso ocorre quando $v[1] = v[2]$. Nesse caso o tempo requerido será $O(1)$.

Qual o pior caso desse algoritmo?

O pior caso ocorre quando *v* não contém elementos repetidos. Nesse caso o tempo requerido será $\Theta(n^2)$.

Ele é eficiente?

Sim, pois o tamanho da entrada é $\Theta(n)$ e o tempo requerido pelo algoritmo, mesmo no pior caso, é $O(n^2)$, portanto quadrático no tamanho da entrada.

O Algoritmo Repetido utiliza apenas as variáveis escalares *i* e *j*, logo sua complexidade espacial é $O(1)$.

Tem como melhorar esse algoritmo?

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 23-04-2021

Algoritmos com laços condicionais

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Algoritmo tamanho_interseção

Entrada: os vetores A e B com n e m posições respectivamente
Saída: a quantidade de elementos de A que também ocorrem em B

```
quant = 0
para i = 1 até n
    j = 1
    enquanto j < i e A[j] ≠ A[i]
        j++
    se j = i        /* A[i] não é uma repetição dos valores contidos nas posições anteriores */
        j = 1
        enquanto j ≤ m e B[j] ≠ A[i]
            j++
        se j ≤ m
            quant++
devolva quant
```

Invariante: Ao final de cada iteração do laço *para* a variável *quant* armazena a quantidade de elementos que estão entre as posições 1 e *i* de *A* que aparecem em *B*.

Prova: Façamos indução em *i*. Base: *i* = 1. Observe que na primeira iteração do *para* o segundo laço *enquanto* irá procurar uma ocorrência de *A*[1] em *B*. Se encontrar, *quant* passará a valer 1; caso contrário, *quant* continuará valendo 0, e portanto o invariante será válido.

Suponha agora que ao final da iteração do *para* com *i* = *k* a variável *quant* armazene a quantidade de elementos que estão entre as posições 1 e *k* de *A* que aparecem em *B* (H.I.).

Na iteração com *i* = *k* + 1, o primeiro *enquanto* servirá para verificar se *A*[*k* + 1] é uma repetição de elementos das posições anteriores de *A.* Caso isso não seja verdade, o segundo laço *enquanto* irá procurar uma ocorrência de *A*[*k* + 1] em *B*. Se encontrar, *quant* será incrementada; caso contrário, *quant* continuará com o mesmo valor. Dessa forma, ao final da iteração a variável *quant* armazenará a quantidade de elementos que estão entre as posições 1 e *k* + 1 de *A* que aparecem em *B* ■

Teorema: O Algoritmo tamanho_interseção é correto.

Prova: Aplicando o invariante, no final da última iteração do *para* a variável *quant* armazenará a quantidade de elementos de *a* que aparecem em *b* ■

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Qual o melhor caso do Algoritmo tamanho_interseção?

O melhor caso ocorre quando todos os elementos de *a* são iguais e $a[1] = b[1]$. Nesse caso o tempo requerido será $\Theta(n)$.

Qual o pior caso desse algoritmo?

O pior caso ocorre quando todos os elementos de *a* são distintos e não há interseção entre *a* e *b*. Nesse caso o tempo requerido será $\Theta(n^2 + nm)$.

Ele é eficiente?

Sim, pois o tamanho da entrada é $\Theta(n + m)$ e o tempo requerido pelo algoritmo, mesmo no pior caso, é $\Theta(n^2 + nm)$, portanto no máximo quadrático no tamanho da entrada.

O Algoritmo tamanho_interseção utiliza apenas 3 variáveis escalares, logo sua complexidade espacial é $O(1)$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 26-04-2021

Fórmulas de Recorrência

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Fórmulas de Recorrência

Uma *fórmula de recorrência* é uma fórmula na qual um termo é definido em função dele mesmo.

Ex: $n! = n * (n - 1)!$

$\text{fib}(n) = \text{fib}(n - 1) + \text{fib}(n - 2)$

No primeiro exemplo temos uma recorrência de primeira ordem. No segundo, temos uma recorrência de segunda ordem.

Resolver uma fórmula de recorrência consiste em eliminar a repetição do termo recorrente.

Ex: $n! = n * (n - 1) * (n - 2) * \ldots * 1$

$fib(n) = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$, onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Método da Soma

Podemos resolver uma fórmula de recorrência usando o *método da soma*. Este método consiste basicamente em, a partir da recorrência original, obter uma coleção de fórmulas de recorrências tais que a sua soma resulta na eliminação da repetição do termo recorrente.

Ex: $T(n) = T(n-1) + n$
$T(1) = 1$

$T(n) = \cancel{T(n-1)} + n$
$\cancel{T(n-1)} = \cancel{T(n-2)} + (n-1)$
$\cancel{T(n-2)} = \cancel{T(n-3)} + (n-2)$
...
$\cancel{T(2)} = \cancel{T(1)} + 2$
$\cancel{T(1)} = 1$

$\mathbf{T(n)} = 1 + 2 + \ldots + n = n * (n + 1) / 2 = \mathbf{(n^2 + n)/2}$

$T(n) \in \Theta(n^2)$

Ex: $R(n) = 2 * R(n-1) + 1$

$R(1) = 1$

Eq. 0 $R(n) = 2 * \cancel{R(n-1)} + 1$

Eq. 1 $2 * \cancel{R(n-1)} = 4 * \cancel{R(n-2)} + 2$

Eq. 2 $4 * \cancel{R(n-2)} = 8 * \cancel{R(n-3)} + 4$

...

Eq. n-2 $2^{n-2} * \cancel{R(2)} = 2^{n-1}\ \cancel{R(1)} + 2^{n-2}$

Eq. n-1 $2^{n-1} * \cancel{R(1)} = 2^{n-1}$

$\mathbf{R(n)} = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = \mathbf{2^n - 1}$

$R(n) \in \Theta(2^n)$

Ex: $S(n) = S(\lfloor {}^{n}/_{2} \rfloor) + 1$

$S(1) = 1$

Vamos supor que $n = 2^k \Longrightarrow k = \log n$

Eq. 0 $S(n) = \cancel{S(n/2)} + 1$

Eq. 1 $\cancel{S(n/2)} = \cancel{S(n/4)} + 1$

Eq. 2 $\cancel{S(n/4)} = \cancel{S(n/8)} + 1$

...

Eq. k-1 $\cancel{S(n/2^{k-1})} = \cancel{S(n/2^k)} + 1$

Eq. k $\cancel{S(n/2^k)} = 1$

$\mathbf{S(n)} = k + 1 = \mathbf{\log n + 1}$

$S(n) \in \Theta(\log n)$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Observe que as funções S e log são crescentes, ou seja, se $n' \geq n$, então $S(n') \geq S(n)$ e $\log n' \geq \log n$.

Seja $2^k < n' < 2^{k+1}$. Se $n = 2^k$ então $n < n' < 2n$.

Isso implica que $\mathbf{\log n'} < \log 2n = \mathbf{\log n + 1}$ e $\mathbf{\log n'} > \mathbf{\log n}$. Note que:

$$S(n) \leq S(n') \leq S(2n)$$

$$\log n + 1 \leq S(n') \leq \log 2n + 1$$

$$\log n + 1 \leq S(n') \leq \log n + 2$$

$$\log n' < S(n') < \log n' + 2$$

Concluímos assim que $S(n') \in \Theta(\log n')$.

Diversão pra casa:

$$V(n) = 2 * V(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$
$$V(1) = 1$$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 30-04-2021

Análise de Algoritmos Recursivos – Parte 1

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Diversão pra casa: $V(n) = 2 * V(\lfloor n/2 \rfloor) + n$
$V(1) = 1$

Vamos supor $n = 2^k \Longrightarrow k = \log n$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Eq. } 0 & V(n) = \cancel{2 * V(n/2)} + n \\
\text{Eq. } 1 & \cancel{2 * V(n/2)} = \cancel{4 * V(n/4)} + n \\
\text{Eq. } 2 & \cancel{4 * V(n/4)} = \cancel{8 * V(n/8)} + n \\
 & \ldots \\
\text{Eq. } k\text{-}1 & \cancel{2^{k-1}\, V(n/2^{k-1})} = \cancel{2^k\, V(n/2^k)} + n \\
\text{Eq. } k & \cancel{2^k\, V(n/2^k)} = 2^k \\
\hline
 & \mathbf{V(\boldsymbol{n})} = n * k + 2^k = \boldsymbol{n} \mathbf{\, * \log} \boldsymbol{n} \mathbf{\, +} \boldsymbol{\, n}
\end{array}
$$

$V(n) \in \Theta(n\log n)$

Análise de Algoritmos Recursivos

Um algoritmo é dito *recursivo* se ele chama a si mesmo.

Todo algoritmo recursivo deve apresentar pelo menos um caso no qual ele não chama a si mesmo. Tal caso é chamado de *base da recursividade*.

Ex:

Algoritmo Fatorial

Entrada: $x \in \mathbb{N}$
Saída: $x!$
se $x = 0$ // base de recursividade
    devolva 1
se não
    devolva x * Fatorial($x - 1$) // chamada recursiva

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Teorema: O Algoritmo Fatorial é correto.

Prova: Façamos indução em x. Base: $x = 0$, trivial.

Suponha agora que a chamada Fatorial(x – 1) resulta em (x – 1)! (H.I.).

Observe que a chamada Fatorial(x), com $x > 0$, devolve:

$$x * \text{Fatorial}(x - 1) = x * (x - 1)! = x! \blacksquare$$

Para determinar a complexidade temporal do Algoritmo Fatorial vamos denotar por T(x) o tempo requerido pelo algoritmo quando ele recebe uma entrada x. Note que:

$T(x) = T(x – 1) + c$
$T(0) = c$

onde c é uma constante. Assim:

$T(x) = \cancel{T(x – 1)} + c$
$\cancel{T(x – 1)} = \cancel{T(x – 2)} + c$
$\cancel{T(x – 2)} = \cancel{T(x – 3)} + c$
...
$\cancel{T(1)} = \cancel{T(0)} + c$
$\cancel{T(0)} = c$

$\mathbf{T(x) = c * (x + 1)}$

$T(x) \in \Theta(x)$

Denotando por $E(x)$ o espaço requerido pelo Algoritmo Fatorial quando ele recebe uma entrada x, temos que:

$E(x) = E(x - 1) + c$
$E(0) = c$

$E(x) \in \Theta(x)$

Concluímos que o Algoritmo Fatorial requer tempo e espaço $\Theta(x)$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 03-05-2021

Análise de Algoritmos Recursivos – Parte 2

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Problema: dado $x \in \mathbb{N}$ calcular 2^x.

Algoritmo Pot1

Entrada: $x \in \mathbb{N}$
Saída: 2^x
$r = 1$
para $i = 1$ até x
  $r = 2 * r$
devolva r

Invariante: ao final de cada iteração do laço temos $r = 2^i$.
Prova: Por indução em i. Base: $i = 1$, trivial. Suponha agora que ao final da iteração com $i = k$ tenhamos $r = 2^k$ (H.I.). Observe que na iteração com $i = k + 1$ o algoritmo faz $r = 2 * r = 2 * 2^k = 2^{k+1}$ ■

Teorema: o Algoritmo Pot1 é correto.
Prova: Se $x = 0$ o algoritmo devolve 1, o que é correto. Se $x > 0$, o invariante nos garante que ao final da última iteração teremos $r = 2^x$, e portanto ao devolver r o algoritmo devolverá a resposta correta ■

O Algoritmo Pot 1 requer tempo $\Theta(x)$ e espaço $O(1)$ 🙂

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Fato 1: $2^x = 2 * 2^{x-1}$.

Algoritmo Pot2

Entrada: $x \in \mathbb{N}$
Saída: 2^x
se $x = 0$
devolva 1
se não
devolva 2 * Pot2(x – 1)

Teorema: o Algoritmo Pot2 é correto.
Prova: Por indução em x. Base: $x = 0$, trivial. Suponha agora que Pot2(x – 1) devolva 2^{x-1} (H.I.). Ao receber x > 0, o Pot2 devolve:

$$2 * \text{Pot2}(x-1) = 2 * 2^{x-1} = 2^x \blacksquare$$

A complexidade temporal e espacial do algoritmo Pot2 é dada por:

$$T(x) = T(x-1) + c$$
$$T(0) = c$$
$$T(x) \in \Theta(x)$$

Concluímos que o Pot2 requer tempo e espaço $\Theta(x)$ 😐

Fato 2: $2^x = 2^{x-1} + 2^{x-1}$.

Algoritmo Pot3

Entrada: $x \in \mathbb{N}$
Saída: 2^x
se $x = 0$
devolva 1
se não
devolva Pot3(x – 1) + Pot3(x – 1)

Teorema: o Algoritmo Pot3 é correto.
Prova: Por indução em x. Base: $x = 0$, trivial. Suponha agora que Pot3(x – 1) devolva 2^{x-1} (H.I.). Ao receber x > 0, o Pot3 devolve:

$$\text{Pot3}(x - 1) + \text{Pot3}(x - 1) = 2^{x-1} + 2^{x-1} = 2^x \blacksquare$$

A complexidade temporal do Algoritmo Pot3 é dada por:

$$T(x) = 2 * T(x - 1) + c$$
$$T(0) = c$$

$$T(x) \in \Theta(2^x)$$ 😔

Já a complexidade espacial do Pot3 é dada por:

$$E(x) = E(x - 1) + c$$
$$E(0) = c$$

$$E(x) \in \Theta(x)$$ 😳

Concluímos que o Pot3 requer tempo $\Theta(2^x)$ e espaço $\Theta(x)$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Algoritmo Pot4

Entrada: $x \in \mathbb{N}$
Saída: 2^x
se $x = 0$
devolva 1
se não
aux = Pot4(x – 1)
devolva aux + aux

Teorema: o Algoritmo Pot4 é correto.
Prova: Por indução em x. Base: $x = 0$, trivial. Suponha agora que Pot4(x – 1) devolva 2^{x-1} (H.I.). Ao receber x > 0, o Pot4 devolve:

$$\text{aux} + \text{aux} = \text{Pot4}(x-1) + \text{Pot4}(x-1) = 2^{x-1} + 2^{x-1} = 2^x \blacksquare$$

A complexidade temporal e espacial do algoritmo Pot4 é dada por:

$$T(x) = T(x-1) + c$$
$$T(0) = c$$
$$T(x) \in \Theta(x)$$

Concluímos que o Pot4 requer tempo e espaço $\Theta(x)$ 🧐

Fato 3: $2^x = 2^{x/2} * 2^{x/2}$.

Fato 4: $2^x = 2^{x-1/2} * 2^{x-1/2} * 2$.

Algoritmo Pot5

Entrada: $x \in \mathbb{N}$
Saída: 2^x
se $x = 0$
    devolva 1
se não
    aux = Pot5($\lfloor x/2 \rfloor$)
    se *x* for par
        devolva aux * aux
    se não
        devolva aux * aux * 2

Teorema: o Algoritmo Pot5 é correto.

Prova: Por indução em *x*. Base: $x = 0$, trivial. Suponha agora que Pot5($\lfloor x/2 \rfloor$) devolva $2^{\lfloor x/2 \rfloor}$ (H.I.). Ao receber $x > 0$, se *x* for par o Pot5 devolve:

$$\text{aux} * \text{aux} = \text{Pot5}(\lfloor x/2 \rfloor) * \text{Pot5}(\lfloor x/2 \rfloor) = 2^{\lfloor x/2 \rfloor} * 2^{\lfloor x/2 \rfloor} = 2^{x/2} * 2^{x/2} = 2^x$$

Se *x* for ímpar o Pot5 devolve:

$$\text{aux} * \text{aux} * 2 = \text{Pot5}(\lfloor x/2 \rfloor) * \text{Pot5}(\lfloor x/2 \rfloor) * 2 = 2^{\lfloor x/2 \rfloor} * 2^{\lfloor x/2 \rfloor} * 2 = 2^{x-1/2} * 2^{x-1/2} * 2 = 2^x \blacksquare$$

A complexidade temporal e espacial do algoritmo Pot5 é dada por:

$$T(x) = T(\lfloor x/2 \rfloor) + c$$
$$T(0) = c$$

$T(x) \in \Theta(\log x)$ 😀

Concluímos que o Pot5 requer tempo e espaço $\Theta(\log x)$.

Logo, ele é eficiente!

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 10-05-2021

Algoritmos de Cota Inferior e Superior

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Algoritmos de Cota Inferior

Se todo algoritmo correto para um problema *P* tem complexidade temporal $\Omega(f)$ dizemos que a função *f* é **uma *cota inferior*** para a complexidade temporal de *P*.
Nesse caso, se um algoritmo *A* que resolve corretamente *P* tem complexidade temporal $O(f)$, dizemos que *A* é um ***algoritmo de cota inferior*** para *P*.
Dizemos ainda que $\Theta(f)$ é a *complexidade temporal* ***intrínseca*** a *P*.

Ex:

Algoritmo Busca_Sequencial

Entrada: um vetor *v* com *n* posições e um valor *x*
Saída: *Sim*, se *x* ocorre em *v*; *Não*, caso contrário

```
para i = 0 até n – 1
    se x = v[i]
        devolva Sim e pare
devolva Não
```

Claramente, só é possível ter certeza de que *x* não ocorre em *v* após inspecionar todas as suas posições. Assim, todos os algoritmos que resolvem corretamente esse problema gastam tempo $\Omega(n)$.

Como o algoritmo Busca_Sequencial requer tempo $O(n)$, concluímos que ele é um ***algoritmo de cota inferior***. 😀

Vejamos mais um exemplo: no ***Problema das Torres de Hanói*** temos *n* discos de tamanhos diferentes e três bases *A*, *B* e *C*. Inicialmente os discos então empilhados, do menor (no topo) para o maior sobre a base *A*. O desafio consiste em mover os *n* discos para a base *B* usando apenas movimentos válidos. Um movimento válido consiste em mover um único disco que esteja no topo de uma pilha e colocá-lo sobre o topo de outra pilha. Além disso, um disco maior **nunca** pode ser colocado sobre um disco menor.

Teorema: para resolver o Problema das Torres de Hanói com *n* discos são necessários $2^n - 1$ movimentos válidos.
Prova: Por indução em *n*. Base: *n* = 0, trivial. Suponha agora que para mover *n* – 1 discos de uma base para outra são necessários $2^{n-1} - 1$ movimentos válidos (H.I.).
Observe que antes de mover o maior disco da base *A* para a base *B* é necessário mover os outros *n* – 1 discos para a base *C*. Para isso, pela H.I., serão necessários $2^{n-1} - 1$ movimentos válidos. Em seguida o maior disco pode ser movido para a base *B*. Finalmente, será preciso mover *n* – 1 discos da base *C* para a base *B*, sendo necessários mais $2^{n-1} - 1$ movimentos válidos. Assim, a quantidade total de movimentos será:

$$2^{n-1} - 1 + 1 + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1 \blacksquare$$

Concluímos que todo algoritmo correto para o problema das Torres de Hanói requer tempo $\Omega(2^n)$ 🤓

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Algoritmo Hanói

Entrada*: n discos e as bases orig, dest e aux*

Saída*: uma coleção de movimentos válidos para mover n discos da base orig para a base dest*

se n = 1

mova o disco da base *orig* para a base *dest*

se não

Hanói(n – 1, *orig, aux, dest*)

Hanói(1, *orig, dest, aux*)

Hanói(n – 1, *aux, dest, orig*)

A complexidade temporal do Algoritmo Hanói é dada por:

$T(n) = 2T(n-1) + c$

$T(1) = c$

Concluímos que o Algoritmo Hanói requer tempo $\Theta(2^n)$, logo o Algoritmo Hanói é um ***algoritmo de cota inferior***. 😀

Algoritmos de Cota Superior

Se todo algoritmo correto ***conhecido*** para um problema *P* tem complexidade temporal $\Omega(f)$ dizemos que a função *f* é uma ***cota superior*** para a complexidade temporal de *P*. Nesse caso, se um algoritmo **conhecido** *A* que resolve corretamente *P* tem complexidade temporal O(*f*), dizemos que *A* é um ***algoritmo de cota superior*** para *P*.

Um algoritmo de cota superior pode perder esse status se for descoberto outro algoritmo mais rápido do que ele.

Ex: Multiplicação de matrizes quadradas de ordem *n*

Algoritmo clássico: $\Theta(n^3)$

Algoritmo de *Strassen (1969)*: $\Theta(n^{log7})$

Algoritmo de *Coppersmith-Winograd (1987)*: $\Theta(n^{2{,}375})$

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 14-05-2021

Análise Amortizada

Método da Agregação e Método Contábil

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Análise Amortizada

Se uma operação requer tempo O(*f*), é correto afirmar que uma sequência de *n* execuções dessa operação requer tempo O(*nf*).
No entanto, em algumas circunstâncias, o tempo requerido por essa sequência de operações é o(*nf*).
Isso ocorre porque algumas dessas operações podem requerer tempo o(*f*), e isso pode *amortizar* (compensar) o custo das operações que gastam tempo Θ(*f*).
Técnicas de análise amortizada permitem fazer essa compensação e estimar com mais precisão o tempo requerido pela sequência de operações.

Se o custo total de uma sequência de *n* execuções de uma operação requer tempo Θ(*f*), o ***custo amortizado*** de cada operação é $\Theta({}^{f}/{}_{n})$.

Método da agregação

É um método de análise de amortizada que consiste basicamente em somar o custo total da sequências de operações.

Algoritmo Incrementa

Entrada*: um contador A implementado num vetor de bits com k posições*
Saída*: Incrementa de 1 unidade o valor contido no contador*

i = *k* – 1
enquanto i >= 0 e A[i] = 1
    A[*i*] = 0 // reset
    i--
se i >= 0
    A[*i*] = 1 // set

0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1
0	0	0

Valores armazenados num contador A de 3 bits inicializado com 0 após 8 chamadas ao algoritmo Incrementa

O custo de uma chamada ao algoritmo Incrementa é O(*k*)
Qual o custo de *n* chamadas a esse algoritmo?

A cada chamada, *A*[*k*-1] é alterado (set ou reset). A cada duas chamadas *A*[*k*-2] é alterado. A cada quatro chamadas *A*[*k*-3] é alterado, e assim por diante. Assim, a quantidade total de sets e resets é:

$$n + {}^{n}/_{2} + {}^{n}/_{4} + \cdots + {}^{n}/_{2^{k-1}} \cong 2n$$

Concluímos que o custo total da sequência de *n* chamadas ao incrementa é $\Theta(n)$ e o ***custo amortizado*** de cada chamada é O(1) 😀

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Vejamos mais um exemplo. Considere as operação *Empilha*, *Desempilha* e *EsvaziaPilha*, implementadas num vetor de k posições. As operações Empilha, Desempilha gastam tempo O(1), já a operação EsvaziaPilha, que serve para remover todo o conteúdo da pilha, requer tempo O(k). Qual seria o custo de um sequência de n chamadas a essas operações?

Naturalmente o custo total das chamadas ao Empilha é O(n), assim como o custo total das chamadas ao Desempilha. Note ainda que o custo total das chamadas ao EsvaziaPilha é menor ou igual ao custo das chamadas ao Empilha, logo é O(n).

Agregando todos esses custos, concluímos que o custo total das n chamadas é O(n) e o custo amortizado de cada chamada é O(1) 😀

Método Contábil

No método contábil atribuímos a cada operação um custo amortizado. Se o custo amortizado é maior do que o custo real, dizemos que a operação gera **crédito**. Se for menor que o custo real, a operação gera **débito**.

Se numa sequência de *n* operações o saldo for sempre maior ou igual a zero, então a soma dos custos amortizados é maior ou igual à soma das custos reais.

Vamos aplicar o método contábil ao Algoritmo Incrementa, atribuindo custo amortizado 2 à operação *set* (gera crédito) e custo amortizado 0 ao *reset* (gera débito).

Note que o algoritmo só faz um reset de uma posição do contador se previamente foi feito o set dessa posição, que gerou uma unidade de crédito que cobrirá o custo do reset. Assim, o saldo será sempre maior ou igual a zero, logo a soma dos custos amortizados é maior ou igual à soma dos custos reais.

O custo amortizado de *n* chamadas ao Algoritmo Incrementa é O(*n*). Concluímos assim que a soma dos custos reais é O(*n*) e o custo amortizado de cada chamada ao Incrementa é O(1).

			Saldo
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	2
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	0	2
1	1	1	3
0	0	0	0

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Mais um exemplo: vamos atribuir custo amortizado 2 à operação Empilha (gera crédito) e custo amortizado 0 ao Desempilha (gera débito). Consequentemente, a operação EsvaziaPilha também terá custo amortizado 0 e gerará débito.

Observe que cada elemento desempilhado foi previamente empilhado e o crédito gerado no empilhamento é suficiente para pagar pelo desempilhamento. Assim, o saldo será sempre maior ou igual a zero.

Como a soma dos custos amortizados é $O(n)$, concluímos que o custo total das n chamadas é $O(n)$ e o custo amortizado de cada chamada é $O(1)$.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Introdução à Análise de Algoritmos

Aula 17-05-2021

Análise Amortizada
Método Potencial

Prof: Glauber Cintra

glauberfcintra@gmail.com

REGRAS GERAIS DE CONDUTA EM AULAS REMOTAS

A sala de aula virtual é uma extensão da sala de aula presencial e, portanto, o Regulamento da Organização Didática (ROD) é o documento que rege a sua dinâmica. Ao acessar a sala de aula virtual, você estará ciente de que a violação dessas regras é passível de medidas disciplinares, tanto no âmbito do IFCE como no âmbito civil e criminal. Para que possamos manter o ambiente harmônico, respeitoso e seguro entre todos, é necessário observar algumas regras de conduta, a saber:

Não compartilhe a gravação das aulas

Você não deve copiar, distribuir, modificar, reproduzir, republicar, transmitir ou comercializar qualquer informação, texto e/ou documentos contidos nas aulas em qualquer meio eletrônico, nem criar qualquer trabalho utilizando imagens, textos ou documentos dessas aulas sem ter por escrito o prévio consentimento dos envolvidos na exposição.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Tenha tolerância e paciência com possíveis falhas tecnológicas e eventuais limitações pessoais

Falhas técnicas poderão acontecer, seja com o professor, com colegas ou com você mesmo. Tenha paciência, procure manter a calma e contornar o problema com discrição e gentileza.

Prepare-se para a aula virtual

Vista-se adequadamente e escolha na sua casa o local mais apropriado (se possível, separado de outras pessoas e das atividades que estiverem sendo realizadas por elas), para que haja o máximo de atenção na aula.

Desative o microfone

Ao acionar seu aparelho, desative o microfone. Essa ação impedirá que, num momento de distração, você compartilhe uma fala ou ruídos indesejados. Seu celular deve ficar no silencioso. Evite também interromper a fala dos demais participantes e, pelo *chat*, peça a palavra ao professor quando quiser fazer algum comentário ou esclarecer alguma dúvida.

Método Potencial

No método potencial associamos à operação que queremos analisar uma estrutura e denotamos por D_i o estado dessa estrutura ao final de *i*-ésima chamada à operação. Definimos uma função Φ que associa a cada estado da estrutura um número que representa o potencial desse estado da estrutura. Assim, $\Phi(D_i)$ é o potencial da estrutura após a *i*-ésima chamada ($\Phi(D_0)$ é o potencial antes da primeira chamada).

O custo real de cada chamada *i* é denotado por c_i e o custo amortizado da chamada *i* é denotado por $\hat{c}_i$. Definimos:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

Observe que:

$$\hat{c}_1 = c_1 + \Phi(D_1) - \Phi(D_0)$$
$$\hat{c}_2 = c_2 + \Phi(D_2) - \Phi(D_1)$$
...
$$\hat{c}_n = c_n + \Phi(D_n) - \Phi(D_{n-1})$$

Somando todas essas equações temos:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0)$$

Se $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0)$ então a soma dos custos amortizados é maior ou igual à soma dos custos reais.

Vamos usar o contador como estrutura associada ao Algoritmo Incrementa e definir a função Φ como sendo a quantidade de bits iguais a 1 no contador. Supondo que inicialmente o contador armazena 0, temos $\Phi(D_0) = 0$ e portanto $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0)$. Neste caso, a soma dos custos amortizados é maior ou igual à soma dos custos reais.

Qual o custo amortizado de cada chamada *i* ao Incrementa?

Se a chamada *i* reseta *t* bits ($t < k$) e seta 1 bit:

$$\hat{c}_i = t + 1 + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = t + 1 - (t - 1) = 2$$

Se a chamada *i* reseta *k* bits:

$$\hat{c}_i = k + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = k - k = 0$$

Assim, o custo amortizado de *n* chamadas ao Algoritmo Incrementa é O(*n*). Concluímos mais uma vez que o custo de *n* chamadas ao Algoritmo Incrementa é O(*n*).

Outro exemplo: vamos usar a pilha como estrutura associada às operações Empilha, Desempilha e EsvaziaPilha e definir a função Φ como sendo a quantidade de elementos armazenados na pilha. Supondo que inicialmente a pilha está vazia, temos $\Phi(D_0) = 0$ e portanto $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0)$. Consequentemente, a soma dos custos amortizados é maior ou igual à soma dos custos reais.

Custo amortizado do Empilha:

$$\hat{c}_i = 1 + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + 1 = 2$$

Custo amortizado do Desempilha:

$$\hat{c}_i = 1 + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 - 1 = 0$$

Custo amortizado do EsvaziaPilha, supondo que a pilha armazenava *t* elementos:

$$\hat{c}_i = t + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = t - t = 0$$

Assim, o custo amortizado de *n* chamadas às operações Empilha, Desempilha e EsvaziaPilha é O(*n*). Concluímos mais uma vez que o custo da sequência de *n* chamadas é O(*n*).