Avaliação Online
Cálculo I

21 de Setembro de 2024

(As demonstrações utilizadas nas resoluções desta prova podem ser encontradas no fim do documento)

---

1. Analise a continuidade da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, \text{ se x} \geq 1 \\ x^3 - 2x^2 + 1, \text{ se x} < 1 \end{cases} \tag{1}$$

1) Sabendo que uma função é contínua em um ponto quando cumpre 3 condições, sendo a primeira a definição do limite no ponto a:

$$f(x) = x^2 + x - 2, se \geq 1, \text{ logo, quando a} = 1\text{:}$$
$$f(1) = 1^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

2) A segunda condição requer que o $\lim_{x \to a} f(x)$ exista, o que pode ser definido utilizando limites laterais:

2.1) Calculando o limite à esquerda:

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 + x - 2 =$$

$$1^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

2.2) Calculando o limite à direita:

$$\lim_{x \to 1^+} x^3 - 2x^2 + 1 =$$

$$1^3 - 2 \cdot (1^2) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

2.3) Como os limites laterais são iguais, $\lim_{x \to a} f(x)$ quando a = 1 existe e é igual 1.

3) A terceira condição requer que $\lim_{x \to a} f(x)$ seja igual ao $f(a)$, o que foi comprovado em 1) e 2.3).

4) Por cumprir as três condições, a função é contínua no ponto 1.

5) Como a função é definida por equações polinomiais tanto à esquerda quanto à direita, ela é contínua em todos os pontos.

2. Encontre a equação da reta tangente e da reta normal à curva $y = x^5 + \ln x$ no ponto de abcissa $x = 1$

1) Sabendo que o coeficiente angular da reta tangente a uma função pode ser encontrado pela derivada da função e que a derivada da soma de duas funções é equivalente à soma de suas derivadas (Demonstração 1):

1.1) Calculando a derivada de x^5, sabendo que a derivada de x^n é igual a $n \cdot x^n$ (Demonstração 3):

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5x^4$$

1.2) Encontrando a derivada de $\ln x$, sabendo que $\log_a x$ é igual a $\frac{1}{x \ln a}$ (Demonstração 4) e que $\ln x = \log_e x$:

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$$

1.3) Unindo os resultados anteriores:

$$f(x) = x^5 + \ln x$$

$$f'(x) = 5x^4 + \frac{1}{x} = \frac{5x^5 + 1}{x}$$

2) Sabendo que o valor da primeira derivada de uma função é igual ao coeficiente angular de sua reta tangente, o coeficiente da reta no ponto $(1, 1)$ é:

$$m_t = \frac{5 \cdot 1^5 + 1}{1} = 6$$

3) Encontrando o y no ponto $(1, 1)$:

$$f(x) = y = x^5 + \ln x$$

$$f(1) = 1^5 + \ln 1 = 1 + 0 = 1$$

3) Substituindo m_t, x_0 e y_0 na equação da reta $(y - y_0 = m \cdot (x - x_0))$:

$$y - 1 = 6(x - 1)$$

$$y - 1 = 6x - 6$$

$$y = 6x - 5$$

4) Sabendo que a multiplicação do coeficiente da reta tangente com o coeficiente da reta normal resulta em -1:

$$m_t \cdot m_n = -1$$

$$6 \cdot m_n = -1$$

$$m_n = \frac{-1}{6}$$

5) Substituindo m_n, x_0 e y_0 na equação da reta:

$$y_n - 1 = \frac{-1}{6} \cdot (x - 1)$$

$$y_n - 1 = \frac{-x + 1}{6}$$

$$y_n = \frac{-x + 1}{6} + 1$$

$$y_n = \frac{-x + 7}{6}$$

3. Encontre as derivadas indicadas de forma não sucinta.
I) $f(x) = x^4 + x \cdot \cos x + 4, f'(x);$

1) Sabendo que a derivada da soma de funções é equivalente à soma de suas derivadas (Demonstração 1):
1.1) Calculando a derivada de x^4, sabendo que a derivada de x^n é igual a $n \cdot x^n$ (Demonstração 3):

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = 4x^3$$

1.2) Calculando a derivada de $x \cdot \cos x$, sabendo que a derivada de $f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ e $\cos' x = -\sin x$:

$$f(x) = x \cdot \cos x$$

$$f'(x) = 1 \cdot \cos x + x \cdot - \sin x = \cos x - x \cdot \sin x$$

2) Unindo os resultados anteriores e sabendo que a derivada da constante é igual a 0:

$$f'(x) = 4x^3 + \cos x - x \sin x$$

II) $\varphi(t) = \sin(t)(\cos 7^t) - \arctan(t^4 + t), \varphi'$;

1) Sabendo que a derivada da soma de funções é igual a soma das derivadas (Demonstração 1):

1.1) Calculando a derivada de $\sin(t)(\cos 7^t)$, sabendo que $f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Demonstração 2), que a derivada de $(a^x)' = a^x \cdot \ln x$ (Demonstração 5) que $\sin' x = \cos x$, que $\cos' x = -\sin x$ e aplicando a regra da cadeia:

$$\cos(t)(\cos 7^t) + (\sin t)(7^t)(\ln 7)(-\sin 7^t) =$$

$$\cos(t)(\cos 7^t) - (\sin t)(7^t)(\ln 7)(\sin 7^t)$$

1.2) Calculando a derivada de $-arctan(t^4 + t)$, sabendo que a derivada de x^n é igual a $n \cdot x^{n-1}$ (Demonstração 3), que a derivada de $\arctan x$ é igual a $\frac{1}{1+x^2}$ e aplicando a regra da cadeia:

$$(-1)\left(\frac{1}{1+(t^4+t)^2}\right)(4t^3+1) =$$

$$(-1)\left(\frac{1}{1+t^8+2t^5+t^2}\right)(4t^3+1) =$$

$$(-1)\left(\frac{4t^3+1}{t^8+2t^5+t^2+1}\right)$$

1.3) Unindo os resultados anteriores:

$$\varphi(t) = \sin(t)(\cos 7^t) - \arctan(t^4 + t)$$

$$\varphi'(t) = \cos(t)(\cos 7^t) - (\sin t)(7^t)(\ln 7)(\sin 7^t) - \left(\frac{4t^3+1}{t^8+2t^5+t^2+1}\right)$$

III) $y^2 + x^3y^2 = 8$, $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$;

1) Derivando toda a equação em relação a x, sabendo que a derivada da constante é 0, a derivada de $f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Demonstração 2), a derivada de x^n é igual a $n \cdot x^{n-1}$ (Demonstração 3) e aplicando a regra da cadeia:

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} + 3x^2 \cdot y^2 + x^3 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

1.1) Colocando $\frac{dy}{dx}$ em evidência:

$$\frac{dy}{dx}(2y + x^3 \cdot 2y) + 3x^2 \cdot y^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y + x^3 \cdot 2y) = -3x^2 \cdot y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 \cdot y^2}{2y + x^3 \cdot 2y} = \frac{-3x^2 \cdot y}{2 + x^3 \cdot 2}$$

2) Derivando toda a equação em relação a y, sabendo que a derivada da constante é 0, a derivada de $f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Demonstração 2), a derivada de x^n é igual a $n \cdot x^{n-1}$ (Demonstração 3) e aplicando a regra da cadeia:

$$2y + 2x^3 \cdot \frac{dx}{dy} \cdot y^2 + x^3 \cdot 2y = 0$$

2.1) Colocando $\frac{dx}{dy}$ em evidência:

$$\frac{dx}{dy} \cdot 3x^2 \cdot y^2 = -2y - x^3 \cdot 2y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2y - x^3 \cdot 2y}{3x^2 \cdot y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2 - x^3 \cdot 2}{3x^2 \cdot y}$$

IV) $y = (\sin x)^{e^x}$, $\frac{dy}{dx}$

1) Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da equação:

$$\ln y = \ln{(\sin x)^{e^x}}$$

2) Sabendo que a derivada de $\log_x a^b$ é igual a $b \log_x a$:

$$\ln y = e^x \ln \sin x$$

3) Derivando ambos os lados da equação, sabendo que a derivada de $f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Demonstração 2), que a derivada de e^x é igual a e^x, que $\sin' x = \cos x$, que a derivada de $\log_a x$ é igual a $\frac{1}{x \ln a}$ (Demonstração 4) e aplicando a regra da cadeia (Demonstração 5) em y e em $\ln \sin x$:

$$\frac{1}{y \ln e} \cdot \frac{dy}{dx} = e^x \ln \sin x + e^x \frac{1}{\sin x \ln e} \cos x =$$

4) Sabendo que $\ln e = 1$:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^x \ln \sin x + e^x \frac{\cos x}{\sin x}$$

5) Colocando e^x em evidência:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^x (\ln \sin x + \frac{\cos x}{\sin x}) = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^x (\ln \sin x + cotanx)$$

6) Passando y para o outro lado da equação e substituindo pela função

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot e^x (\ln \sin x + cotanx) = (\sin x)^{e^x} \cdot e^x (\ln \sin x + cotanx)$$

4. Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$, ache a maior distância entre o ponto $(4, 5)$ a um ponto da circunferência.

1) Utilizando a equação da distância euclidiana, a distância do ponto $P(4, 5)$ ao ponto $V(x, y)$ é dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - 4)^2 + (y_2 - 5)^2}$$

2) Isolando y na equação da circunferência:

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

3) Aplicando y na equação encontrada no passo 1:

$$d = \sqrt{(x_2 - 4)^2 + (\sqrt{9 - x^2} - 5)^2}$$

$$d^2 = (x_2 - 4)^2 + (\sqrt{9 - x^2} - 5)^2 =$$

$$x_2^2 - 8x_2 + 16 + (9 - x_2^2) - 10(\sqrt{9 - x_2^2}) + 25 = -8x_2 - 10(\sqrt{9 - x_2^2}) + 50$$

4) É possível encontrar o maior valor de x utilizando o ponto crítico da função, que pode ser encontrado igualando a primeira derivada da função a 0, sabendo que a derivada de $f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Demonstração 1) e que a derivada de x^n é igual a $n \cdot x^{n-1}$ (Demonstração 3) e aplicando a regra da cadeia:

$$f(x) = -8x - 10(\sqrt{9 - x^2}) + 50 = -8x - 10(9 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -8 - 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot (9 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x = -8 + \frac{10x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

4.2) Igualando a função a 0:

$$-8 + \frac{10x}{\sqrt{9 - x^2}} = 0$$

$$\frac{10x}{\sqrt{9 - x^2}} = 8$$

$$10x = 8 \cdot (\sqrt{9 - x^2})$$

4.3) Elevando os dois lados da equação ao quadrado:

$$(10x)^2 = (8 \cdot (\sqrt{9 - x^2}))^2$$

$$100x^2 = 64 \cdot (9 - x^2)$$

$$100x^2 = 576 - 64x^2$$

$$164x^2 = 576$$

$$x^2 = \frac{576}{164} = \frac{144}{41}$$

$$x = \sqrt{\frac{144}{41}} = \pm\frac{12}{\sqrt{41}}$$

4.4) Aplicando o valor de x na equação de y:

$$y = \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - \left(\frac{12}{\sqrt{41}}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{144}{41}} = \sqrt{\frac{369 - 144}{41}} = \sqrt{\frac{225}{41}} = \pm\frac{15}{\sqrt{41}}$$

4.5) Aplicando os valores de x e y na equação da distância euclidiana:

$$d = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 5)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(\pm\frac{12}{\sqrt{41}} - 4\right)^2 + \left(\pm\frac{15}{\sqrt{41}} - 5\right)^2}$$

4.6) Testando os valores possíveis para essa equação:

$$d_1 = \sqrt{\left(\frac{12}{\sqrt{41}} - 4\right)^2 + \left(\frac{15}{\sqrt{41}} - 5\right)^2} \approx 3.403$$

$$d_2 = \sqrt{\left(\frac{12}{\sqrt{41}} - 4\right)^2 + \left(-\frac{15}{\sqrt{41}} - 5\right)^2} \approx 7.644$$

$$d_3 = \sqrt{\left(-\frac{12}{\sqrt{41}} - 4\right)^2 + \left(\frac{15}{\sqrt{41}} - 5\right)^2} \approx 6.447$$

$$d_4 = \sqrt{\left(-\frac{12}{\sqrt{41}} - 4\right)^2 + \left(-\frac{15}{\sqrt{41}} - 5\right)^2} \approx 9.403$$

4.7) Como o maior valor foi d_4, a maior distância entre o ponto $(4, 5)$ a um ponto da circunferência é, aproximadamente, 9.4.

5. Considerando a função $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1$, encontre os pontos críticos, os intervalos de crescimento e decrescimento, intervalos de concavidade positiva e negativa, os pontos de inflexão e as assíntotas, se essas existirem.

1) Para calcular os pontos críticos, igualando a primeira derivada à 0, sabendo que a derivada de $f(x) + g(x) = f'(x) + g'(x)$ (Demonstração 1), a derivada de x^n é igual a $n \cdot x^{n-1}$ (Demonstração 4), $[kf(x)]'$ é igual a $kf'(x)$ e a derivada da constante é 0:

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 - \frac{5}{3}3x^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

1.1) Substituindo x^2 por uma váriavel k:

$$k^2 - 5k + 4 = 0$$

1.2) Utilizando a fórmula de Bhaskara:

$$k = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{(25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$
$$k_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4; k_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

1.3) Sabendo que $k_1 = 4$, $k_2 = 1$ e $k = x^2$:

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \text{ ou } x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$
$$x = \{-2, -1, 1, 2\}$$

2) Os intervalos de crescimento e decrescimento da função podem ser encontrados pelo estudo dos sinais da primeira derivada, logo, fatorando a primeira derivada:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4)$$

2.1) Realizando o estudo dos sinais, podemos descobrir que a equação $(x^2 - 1)$ é positiva nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$ e negativa no intervalo $(-1, 1)$.
2.2) Realizando o estudo dos sinais, podemos descobrir que a equação $(x^2 - 4)$ é positiva nos intervalos $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$ e negativa no intervalo $(-2, 2)$.
2.3) Multiplicando os sinais dos polinômios, a primeira derivada será positiva nos intervalos $(-\infty, -2)$, $(-1, 1)$ e $(2, -\infty)$ e negativa nos intervalos $(-2, -1)$ e $(1, 2)$
2.4) Logo, a função original é crescente nos intervalos $(-\infty, -2)$, $(-1, 1)$ e $(2, -\infty)$

e decrescente nos intervalos $(-2,-1)$ e $(1,2)$

3) Os intervalos de concavidade positiva e negativa podem ser encontrados pelo estudo dos sinais da segunda derivada, logo, calculando a segunda derivada, sabendo que a derivada de $f(x)+g(x) = f'(x)+g'(x)$ (Demonstração 1), que a derivada de x^n é igual a $n \cdot x^{n-1}$ (Demonstração 3) e a derivada da constante é 0:

$$f''(x) = [f'(x)]'$$
$$f''(x) = [x^4 - 5x^2 + 4]' = 4x^3 - 10x = (x)\cdot(4x^2 - 10)$$

3.1) As raízes de $(x)\cdot(4x^2-10)$ podem ser encontradas quando o resultado 0, que pode ser encontrado quando um dos fatores é igual a 0.
3.2) (x) é igual a 0 apenas quando $x=0$, e as raízes de $(4x^2-10)$ podem ser encontradas utilizando a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4\cdot 4\cdot -10}}{2\cdot 8} = \frac{\pm\sqrt{16\cdot 10}}{16} = \frac{\pm 4\sqrt{10}}{16} = \frac{\pm\sqrt{10}}{4} =$$
$$\frac{\pm\sqrt{10}}{\sqrt{2^2}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2^2}} = \pm\sqrt{\frac{10}{2^2}} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

3.3) Logo, como as raízes de $(x)\cdot(4x^2-10)$, uma função quadrática, são $-\sqrt{\frac{5}{2}}$ e $\sqrt{\frac{5}{2}}$ e a concavidade da função é para cima, a função é positiva nos intervalos $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}})$ e $(\sqrt{\frac{5}{2}}, \infty)$ e negativa no intervalo $(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}})$.
3.4) Multiplicando os sinais dos polinômios, a segunda derivada será positiva nos intervalos $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}})$ e $(\sqrt{\frac{5}{2}}, \infty)$ e negativa nos intervalos $(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0)$ e $(0, \sqrt{\frac{5}{2}})$.
3.5) Logo, a função original terá concavidade positiva nos intervalos $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}})$ e $(\sqrt{\frac{5}{2}}, \infty)$ e concavidade negativa nos intervalos $(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0)$ e $(0, \sqrt{\frac{5}{2}})$.
4) O pontos de inflexão são os pontos onde a concavidade da curva são nulos, ou seja, os pontos onde o sinal da segunda derivada muda, suas raízes, que são 0, $-\sqrt{\frac{5}{2}}$ e $\sqrt{\frac{5}{2}}$
5) Por ser polinomial, a equação não admite assíntotas.

Demonstrações utilizadas nas resoluções

1. A derivada de $f(x) + g(x) = f'(x) + g'(x)$

1) Utilizando a definição da derivada:

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] – [f(x) + g(x)]}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) – f(x) + g(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) – f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) + g(x)}{\Delta x} \right)$$

2) Divindo o limite em dois:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) – f(x)}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x + \Delta x) + g(x)}{\Delta x} \right) = f'(x) + g'(x)$$

2. A derivada de $f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

1) Utilizando a definição da derivada:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

2) Somando e subtraindo o mesmo valor, $g(x + \Delta x)f(x)$, o que não altera o valor da equação:

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) + g(x + \Delta x)f(x) - g(x + \Delta x)f(x)}{\Delta x}$$

3) Colocando $g(x + \Delta x)$ e $f(x)$ em evidência:

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x)(f(x + \Delta x)) + f(x)) + f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x}$$

4) Dividindo o limite em dois:

$$lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x)(f(x + \Delta x) - f(x))}{\Delta x} + lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))}{\Delta x}$$

5) Reorganizando a equação:

$$lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

6) Dividindo os limites em dois:

$$lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + lim_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

7) Aplicando o primeiro e o terceiro limite:

$$g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

8) Os limites que restaram são iguais a derivada de, respectivamente, f e g, e podem ser substituídos, logo:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

3. A derivada de x^n é igual a $n \cdot x^{n-1}$

1) Utilizando a definição da derivada:

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

2) Aplicando o teorema binomial sobre $(x + \Delta x)^n$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \cdots + nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \cdots + nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n}{\Delta x}$$

3) Separando as frações:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{nx^{n-1}\Delta x}{\Delta x} + \cdots + \frac{nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n}{\Delta x} \right) =$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (nx^{n-1} + \cdots + nx\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}) =$$

4) Aplicando o limite:

$$f'(x) = (nx^{n-1} + \cdots + nx(0)^{n-2} + (0)^{n-1}) = nx^{n-1}$$

4. A derivada de $\log_a x$ é igual a $\frac{1}{x \ln a}$

1) Utilizando a definição da derivada:

$$f(x) = \log_a x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a(x + \Delta x) - log_a x}{\Delta x}$$

2) Sabendo que $log_x a - log_x b = log_x \frac{a}{b}$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})$$

3) Sabendo que $a \log b = \log b^a$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} log_a[(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}}]$$

4) Utilizando uma váriavel t de valor $\frac{\Delta x}{x}, logo \Delta x = xt$:

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} log_a[(1+t)^{\frac{1}{xt}}]$$

5) Separando a fração do expoente:

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} log_a[(1+t)^{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}}]$$

6) Sabendo que $log_x a - log_x b = log_x \frac{a}{b}$:

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{x} log_a[(1+t)^{\frac{1}{t}}]$$

7) Sabendo que $\lim kf(x) = k \lim f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} log_a[(1+t)^{\frac{1}{t}}] = \frac{1}{x} log_a \lim_{t \to 0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]$$

8) Sabendo que $\lim_{t \to 0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}] = e$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a}$$

5. A derivada de $(a^x)'$ é igual a $a^x \cdot \ln a$

1) Utilizando a definição da derivada:

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a^x)(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

2) Dividindo o limite em dois:

$$\lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

3) Aplicando o primeiro limite e sabendo que o segundo limite é um dos limites fundamentais:

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$