Transformada de Laplace

IFCe – Instituto Federal do Ceará
Departamento de Telemática

Prof. Dr. Regis C. P. Marques
regismarques@ifce.edu.br

- Introdução -

- A transformada de Laplace é definida pelo par:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Podemos observar uma relação direta entre a T.F. e Laplace. Esta relação existe uma vez que $s=\sigma+j\omega$. Para o caso de $\sigma=0$, temos que a transformada de Laplace se resume a transformada de Fourier.

- Introdução -

- Considerando sinais e sistemas causais, podemos simplificar nossa análise a transformada de Laplace unilateral.

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

A tabela seguinte relaciona alguns sinais e suas respectivas transformadas unilaterais.

No.	$x(t)$	$X(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{1}{s-\lambda}$
6	$te^{\lambda t} u(t)$	$\frac{1}{(s-\lambda)^2}$
7	$t^n e^{\lambda t} u(t)$	$\frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}}$
8a	$\cos bt\, u(t)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
8b	$\sin bt\, u(t)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
9a	$e^{-at} \cos bt\, u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
9b	$e^{-at} \sin bt\, u(t)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$

- Propriedades -

- Todas as propriedades definidas para a T.F (Linearidade, deslocamento no tempo, convolução, mudança de escala) são válidas para a transformada de Laplace. Sendo de fundamental importância três:

- Deslocamento no tempo

$$x(t) \Longleftrightarrow X(s)$$
$$x(t-t_0) \Longleftrightarrow X(s)e^{-st_0} \qquad \text{for } t_0 \geq 0$$

- Diferenciação no tempo

$$\frac{d^n x}{dt^n} \Longleftrightarrow s^n X(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} x^{(k-1)}(0^-)$$

- Convolução

$$x_1(t) * x_2(t) \Longleftrightarrow X_1(s)X_2(s)$$

- Introdução -

- A transformada de Laplace representa uma generalização da Transformada de Fourier, uma vez que a transformada de Laplace pode ser determinada ainda que a transformada de Fourier não exista. Isso é possível devido ao fato de definirmos uma região de convergência (RDC) para a solução da T.L.

- A RDC representa o intervalo σ para o qual a integral de Laplace é absolutamente somável.

- Ex: determine a Transformada de Laplace do sinal $x(t)=e^{\lambda t}\,u(t)$.

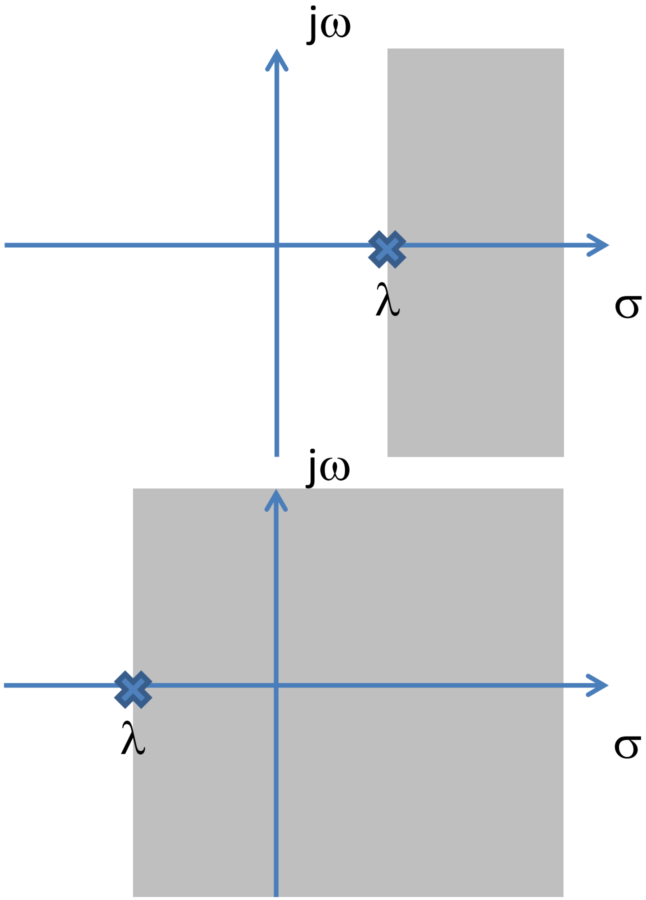
OBS: $X(\omega)$ somente existe se $\lambda<0$, condição que não é necessária para determinar $X(s)$.

- Introdução -

- Uma vez conhecida, a RDC de X(s) pode ser representada no chamado **plano s**. Como mostra a figura abaixo.

a>0

a<0



OBS: as transformadas de Fourier e Laplace são iguais se $\sigma=0$. Logo, a T.F é representada pelo eixo vertical do plano s.

OBS: a transformada de Fourier somente converge se $\sigma<0$, ou seja, se a RDC conter o eixo $j\omega$.

Propriedades da RDC

Solução de Equações diferenciais por Laplace

- Análise de Sistemas por Laplace -

- Considerando-se a resposta de um sistema linear como:

$$y(t) = y_0(t) + x(t) * h(t)$$

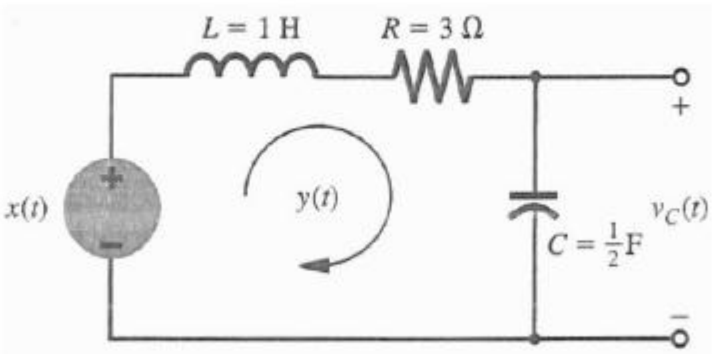
A transformada de Laplace desta equação é dada por:

$$Y(s) = Y_0(s) + X(s)H(s)$$

Os termos da relação acima podem ser obtidos conhecendo-se a equação diferencial do sistema e suas condições iniciais.

- Análise de Sistemas por Laplace -

- Considere o exemplo já conhecido do circuito abaixo, suas condições iniciais e respectiva equação diferencial:



$$\boxed{y_0(0^-) = 5, \dot{y}_0(0^-) = -15}$$

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = x(t)$$

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) + 2\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau = x(t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$s^2Y(s)\underbrace{-5s+0} + 3sY(s) + \underbrace{0} + 2Y(s) = sX(s)$$

$$[s^2+3s+2]Y(s)\underbrace{-5s} = sX(s)$$

$$[s^2+3s+2]Y(s) = 5s + sX(s)$$

$$Y(s) = \frac{5s}{[s^2+3s+2]} + X(s)\frac{s}{[s^2+3s+2]}$$

Condições iniciais, segundo a propriedade da diferenciação

- Análise de Sistemas por Laplace -

- Analisando a expressão obtida temos todos os termos necessários a análise do sistema:

$$Y(s) = \frac{5s}{[s^2 + 3s + 2]} + X(s)\frac{s}{[s^2 + 3s + 2]}$$

Polinômio característico

$$s^2 + 3s + 2$$

Função de transferência H(s)

$$\frac{s}{[s^2 + 3s + 2]}$$

Resposta a entrada nula $Y_0(s)$

$$\frac{5s}{[s^2 + 3s + 2]}$$

Polos

$$s = -2$$
$$s = -1$$

Zeros

$$s = 0$$

- H(s) e Estabilidade -

- Assim como h(t) e $H(\omega)$, H(s) é uma descrição externa e portanto apenas pode definir a Estabilidade BIBO. Se H(s) é uma fração própria (numerador P(s) de ordem inferior a do denominador Q(s)) o sistema é BIBO estável, se não será BIBO instável.

- A estabilidade Interna (Assintótica) deve ser analisada a partir do polinômio característico Q(s), tal que:

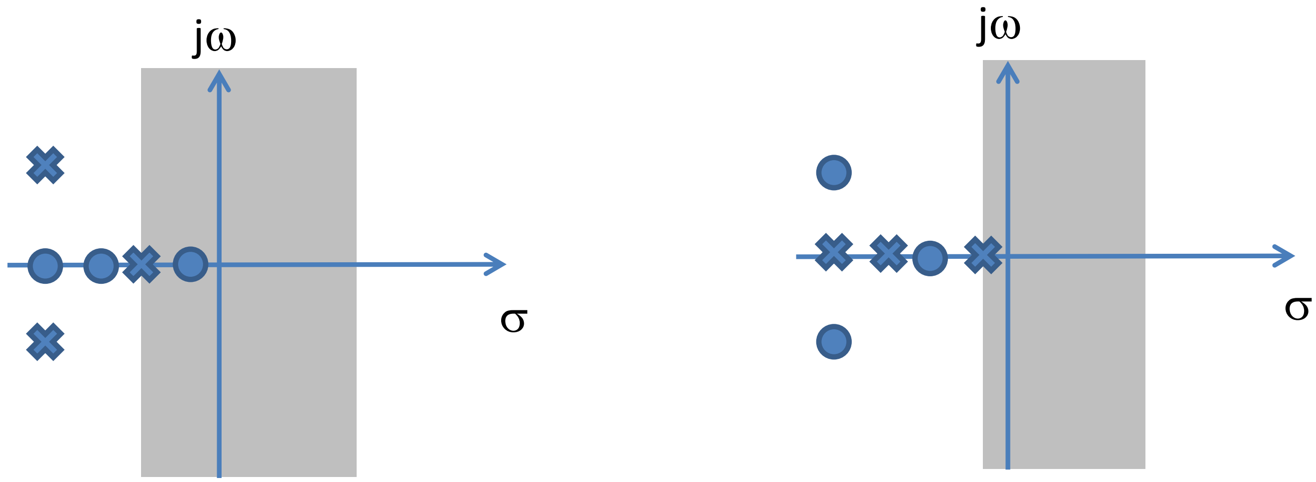
- O sistema é estável se: todos os polos estão no semi plano esquerdo do plano S.
- O sistema é instável se: este um polo no semi plano direito ou polos repetidos sobre o eixo $j\omega$.
- O sistema é marginalmente estável se: existem polos não repetidos sobre o eixo $j\omega$.

- Sistema Inverso -

- Se H(s) é a função de transferência de um sistema, o sistema inverso é definido com sendo o sistema com função de transferência $H_i(s)=1/H(s)$.

- NOTE que os polos do sistema inverso serão os zeros do sistema original, assim como os zeros do sistema inverso serão os polos do sistema original.

- Um sistema de **fase mínima** é qualquer sistema estável e causal, cujo sistema inverso também o é.



- Transformada Inversa-

- Podemos assim determinar $y_0(t)$, h(t) e y(t) por meio da transformada inversa de Laplace.

- Uma vez que a solução da integral inversa é uma tarefa onerosa, fazemos uso das tabela de pares de transformada e da técnica de frações parciais.

- A técnica de frações parciais visa colocar as funções racionais em uma formar mais simples, tal que encontremos pares referentes nas tabelas de Laplace.

- Frações parciais -

- Seja uma função F(s)=P(s)/Q(s). Podemos expressar esta função na forma :

$$F(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{(s-\lambda_i)}$$

em que λ_i são as raízes de Q(s) e K_i são constantes determinadas por meio da técnica de frações parcias, tal que:

$$K_i = F(s)(s-\lambda_i)|_{s=\lambda_i}$$

- Esta solução somente é possível se o grau de Q(s) é maior que o grau de P(s) e se todos os polos são distintos.

- Resposta a entrada nula -

- Exemplo: encontrar a resposta a entrada nula do exemplo anterior.

Para isso devemos calcular a transformada inversa de $\dfrac{5s}{[s^2+3s+2]}$

Aplicando a técnica de frações parciais temos:

$$Y_0(s) = \frac{5s}{[s^2+3s+2]} = \frac{5s}{(s+1)(s+2)}$$

$$Y_0(s) = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)} \longrightarrow$$

$$K_1 = \left.\frac{5s}{(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{5(-1)}{(-1+2)} = -5$$

$$K_2 = \left.\frac{5s}{(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{5(-2)}{(-2+1)} = 10$$

Fazendo uso da tabela de transformadas, temos

$$\boxed{y_0(t) = [-5e^{-t} + 10e^{-2t}]u(t)}$$

- Resposta impulsiva -

- Repetindo o processo para H(s) obtemos h(t).

$$H(s) = \frac{s}{[s^2 + 3s + 2]} = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)} \rightarrow$$

$$K_1 = \left.\frac{s}{(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{(-1)}{(-1+2)} = -1$$

$$K_2 = \left.\frac{s}{(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{(-2)}{(-2+1)} = 2$$

$$\boxed{h(t) = [-e^{-t} + 2e^{-2t}]u(t)}$$

- Resposta em estado nulo -

- Caso seja conhecida a forma de onda da fonte x(t), podemos determinar a resposta em estado nula e assim a resposta total do sistema.
- Consideremos que neste caso x(t)=10 u(t). Segundo a tabela de transformadas temos: X(s)=10/s, logo:

$$X(s)H(s) = \frac{10}{s}\frac{s}{[s^2+3s+2]} = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

$$X(s)H(s) = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)} \rightarrow$$

$$K_1 = \left.\frac{10}{(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{10}{(-1+2)} = 10$$

$$K_2 = \left.\frac{10}{(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{10}{(-2+1)} = -10$$

$$\boxed{x(t) * h(t) = 10[\ e^{-t} - e^{-2t}]u(t)}$$

- Resposta total-

- A resposta total do sistema $y(t) = y_0(t) + x(t)*h(t)$ é:

$$y(t) = [-e^{-t} + 2e^{-2t}]u(t) + 10[\ e^{-t} - \ e^{-2t}]u(t)$$

- Frações parciais -

- A solução adotada até aqui somente é possível se o grau N de Q(s) é maior que o grau M de P(s) e se todos os polos são distintos. Se não, devemos proceder da seguinte forma:

1) Se M≥N devemos realizar uma divisão polinomial, tal que:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=G(s)+\frac{R(s)}{Q(s)}$$

Exemplo:

$$F(s)=\frac{(s+5)(s+4)}{[s^2+3s+2]}$$

$$\begin{array}{r|l} s^2+9s+20 & s^2+3s+2 \\ \cline{2-2} \underline{-s^2-3s-2} & 1 \\ 6s+18 & \end{array}$$

$$\boxed{F(s)=1+\frac{6s+18}{s^2+3s+2}}$$

- Frações parciais -

2) Se existem polos repetidos, temos:

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s-\lambda)^r (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_j)}$$

Em que λ é um polo que se repete r vezes e α_j são os polos que não se repetem. Temos então,

$$F(s) = \sum_{m=1}^{r} \frac{a_{m-1}}{(s-\lambda)^{r-m+1}} + \sum_{i=1}^{j} \frac{K_i}{(s-\alpha_i)}$$

Os termos K_i são calculados como visto. Os termos a_{m-1} são calculados como

$$a_j = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{ds^j}\left[(s-\lambda)^r F(s)\right]\Big|_{s=\lambda}$$

Circuito Transformado

- Circuito transformado -

- A solução de equações diferenciais pode ser substituída pela análise do circuito transformado. O circuito transformado nada mais é do que a representação dos elementos por meio de suas impedâncias, neste caso os estados iniciais de capacitores e indutores são vistos como fontes de tensão ou corrente, conforme seja mais conveniente.

- A representação por fontes de tensão é mais comum, porém no caso do circuito ter uma fonte de corrente $x(t)$, a representação dos estados por fontes de corrente será mais conveniente.

- As fontes de tensão são colocadas em série com a impedância e as de corrente são postas em paralelo. Devemos ter atenção com as polarizações das fontes.

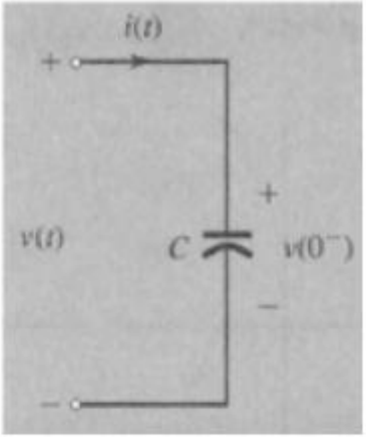
- Circuito transformado -

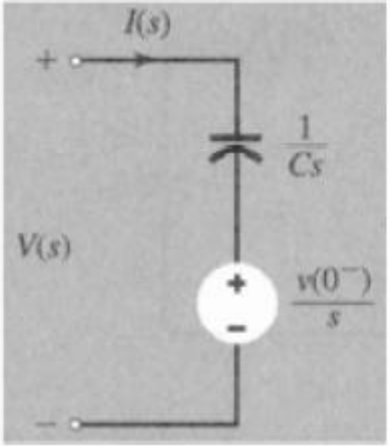
$$Z_C = \frac{1}{Cs}$$

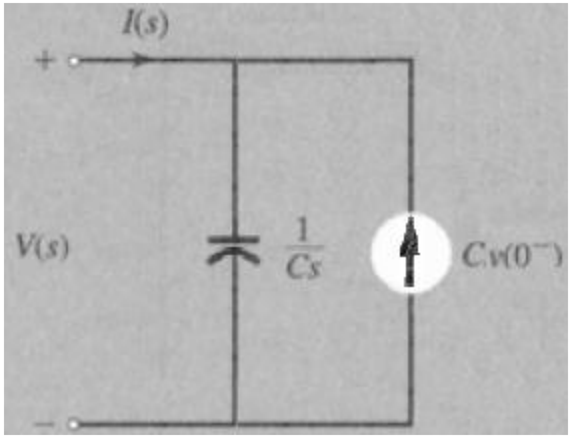
$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

$$I(s) = C[sV(s) - v(0^-)]$$

$$V(s) = \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$







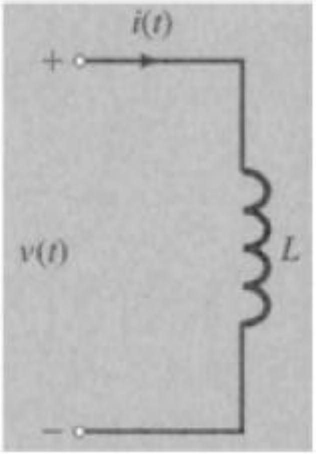
- Circuito transformado -

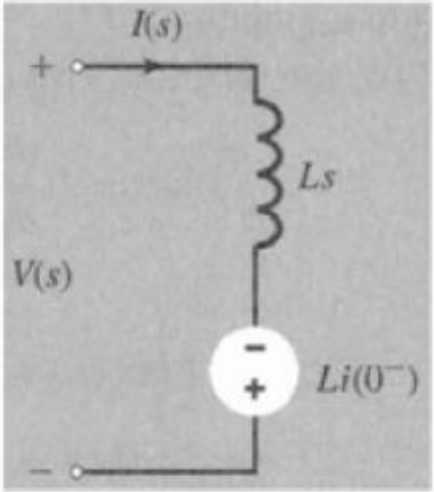
$$Z_L = Ls$$

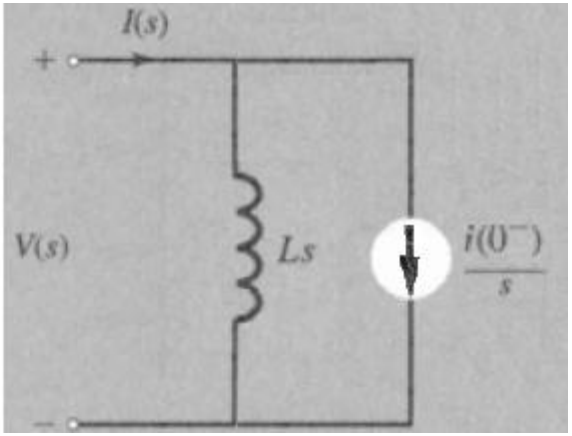
$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

$$V(s) = L[sI(s) - i(0^-)]$$

$$= LsI(s) - Li(0^-)$$



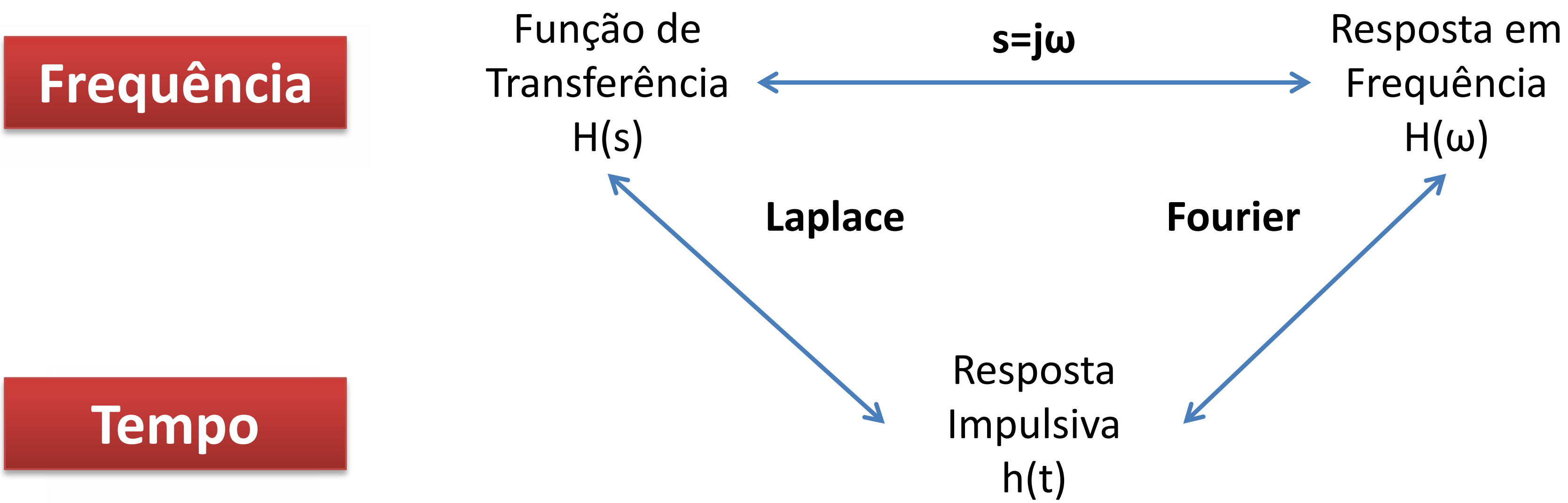




Função de Transferência

- Função de Transferência -

- A análise e modelagem de sistemas consiste do conhecimento destas três funções e das relações entre elas. Em geral, considera-se o sistema relaxado e qualquer descrição do sistema é suficiente se conhecemos estas funções



- Função de Transferência -

- Podemos considerar as seguintes relações entre as funções de um sistema

Propriedade	h(t)	H(ω)	H(s)
Análise de Estabilidade	BIBO	BIBO	Assintótica (se Q(s) é observável)
Se o sistema é estável	É absolutamente integrável	Existe	Polos no SPE
Causalidade	$h(t)=0,\ t<0$	-	RDC $\Re\{\sigma\} > a$

- Representação por diagramas-

- Um sistema pode ser representado com um diagrama, conhecendo-se uma das suas funções.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t)=h(t) * x(t)$$

$$X(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow Y(\omega)$$

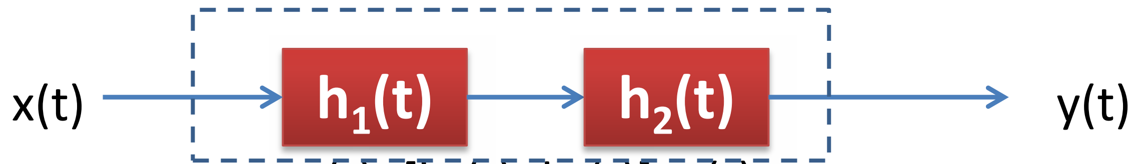
$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$$

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

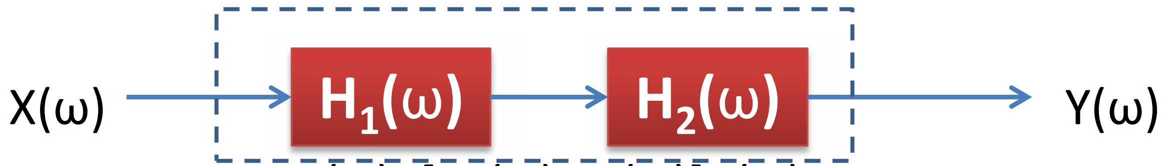
$$Y(s)=H(s)X(s)$$

- Associação Série (cascata)-

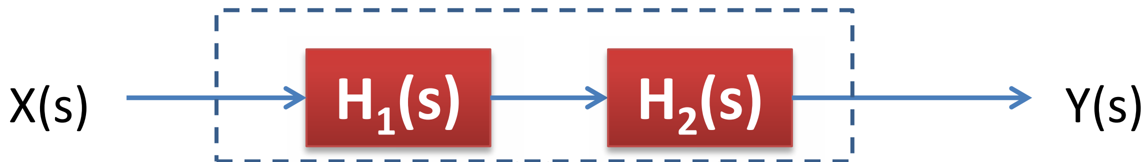
- O pontilhado indica que a relação entrada-saída pode ser vista como se exista um sistema único. Isso é comum em filtros com vários estágios.



$$y(t)=[h_2(t)*h_1(t)]*x(t)$$



$$Y(\omega)=[H_2(\omega)\,H_1(\omega)]X(\omega)$$

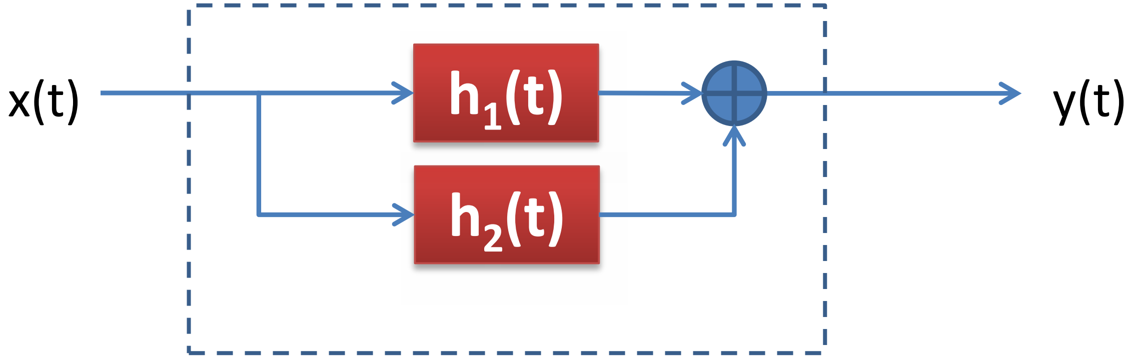


$$Y(s)=[H_2(s)H_1(s)]X(s)$$

As expressões entre colchetes [] podem ser interpretadas como a forma de se determinar o sistema equivalente.

- Associação Paralelo -

- A associação paralelo também é vista como um sistema único. Um exemplo é o uso de banco de filtros ou equalizadores.



$$y(t)=[h_2(t)+h_1(t)]*x(t)$$

$$Y(\omega)=[H_2(\omega)+H_1(\omega)]X(\omega)$$

$$Y(s)=[H_2(s)+H_1(s)]X(s)$$

Realização de sistemas

- Representação por integradores-

- As duas operações singulares para realização de sistemas são: diferenciação ou integração. Sistemas lineares, preferencialmente, são modelados por equações diferencias. Porém, em se tratando de circuitos, diferenciadores são sistemas instáveis, sobre tudo em regime AC.

- Integradores apresentam problemas em regime DC, porém sua resposta AC tende a ser estável. Por esta razão, a implementação de sistemas a partir de sua função de transferência é feita utilizando-se circuitos integradores.

- Representação por integradores-

- Seja H(s) uma função transferência de um sistema:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

em que M≤N. Esta representação por meio de uma razão de polinômios deriva da propriedade da diferenciação. Realizando-se a operação

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \times \left(\frac{s^{-N}}{s^{-N}}\right)$$

temos a função de transferência do sistema representada por meio de operações de integração.

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1/s + b_2/s^2 + b_3/s^3}{1 + a_1/s + a_2/s^2 + a_3/s^3}$$

Lembre-se que um circuito integrador tem resposta impulsiva h(t)=u(t) e que $\mathcal{L}$\{u(t)\}=1/s.

- Representação por integradores-

- Uma vez que

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{b_0 + b_1/s + b_2/s^2 + b_3/s^3}{1 + a_1/s + a_2/s^2 + a_3/s^3}$$

temos

$$Y(s)\left[1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}\right] = X(s)[b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}]$$

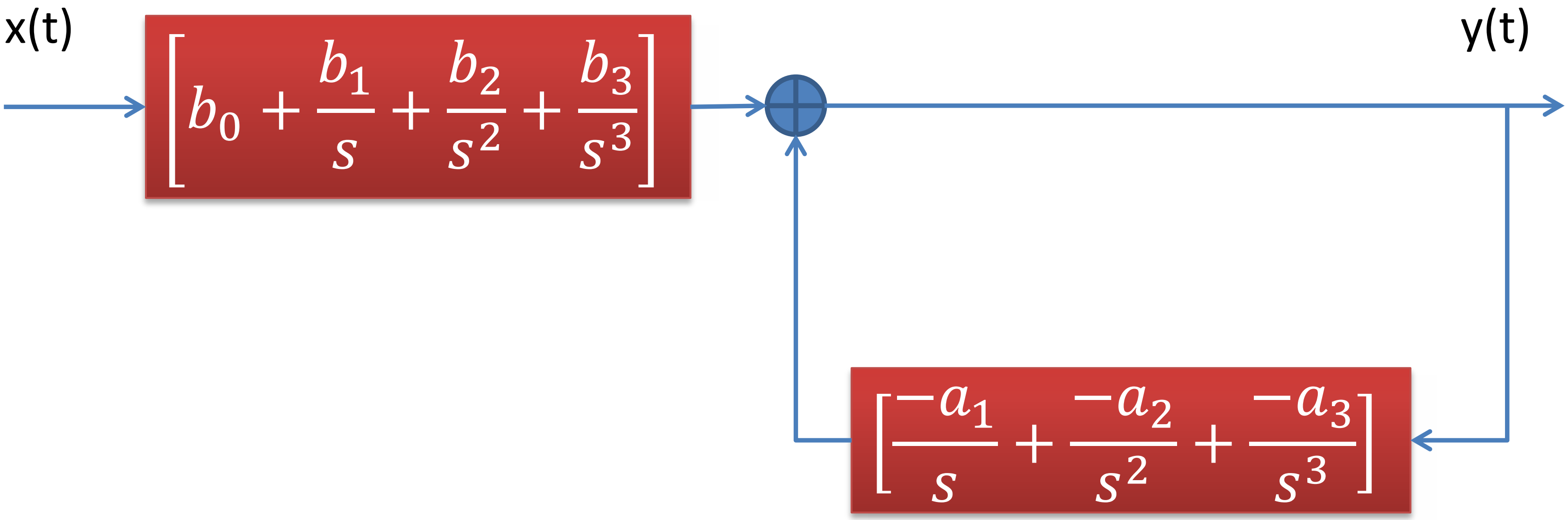
logo

$$Y(s) = X(s)\left[b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}\right] - Y(s)\left[\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}\right]$$

A relação entrada-saída do sistema é modelada por uma rede de circuitos integradores com ganhos determinados pelos coeficientes de Q(s) e P(s).

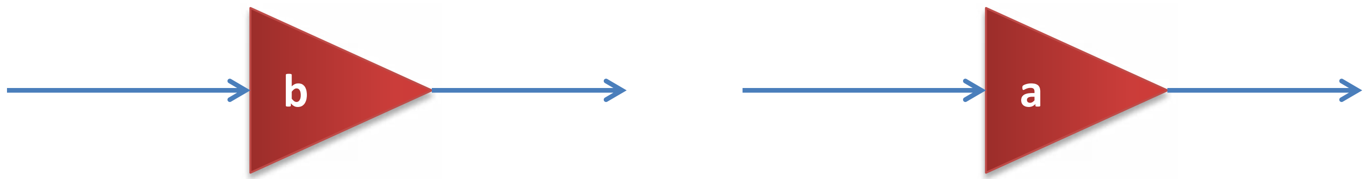
- Representação por integradores-

$$Y(s) = \underbrace{X(s)\left[b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}\right]}_{H_1(s)} - \underbrace{Y(s)\left[\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}\right]}_{H_2(s)}$$



- Representação por integradores-

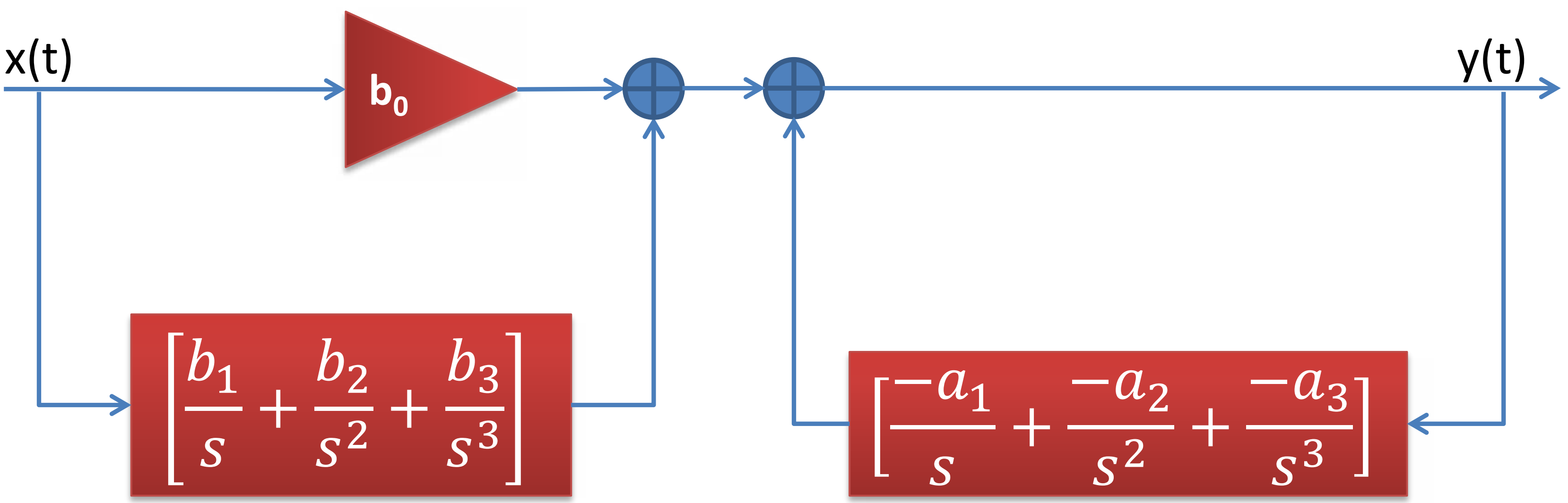
- Nesta representação os coeficientes são ganhos, e portanto representados, por



- Um integrador é um termo $1/s$. Um termo $1/s^3$, por exemplo, é a associação série de 3 integradores

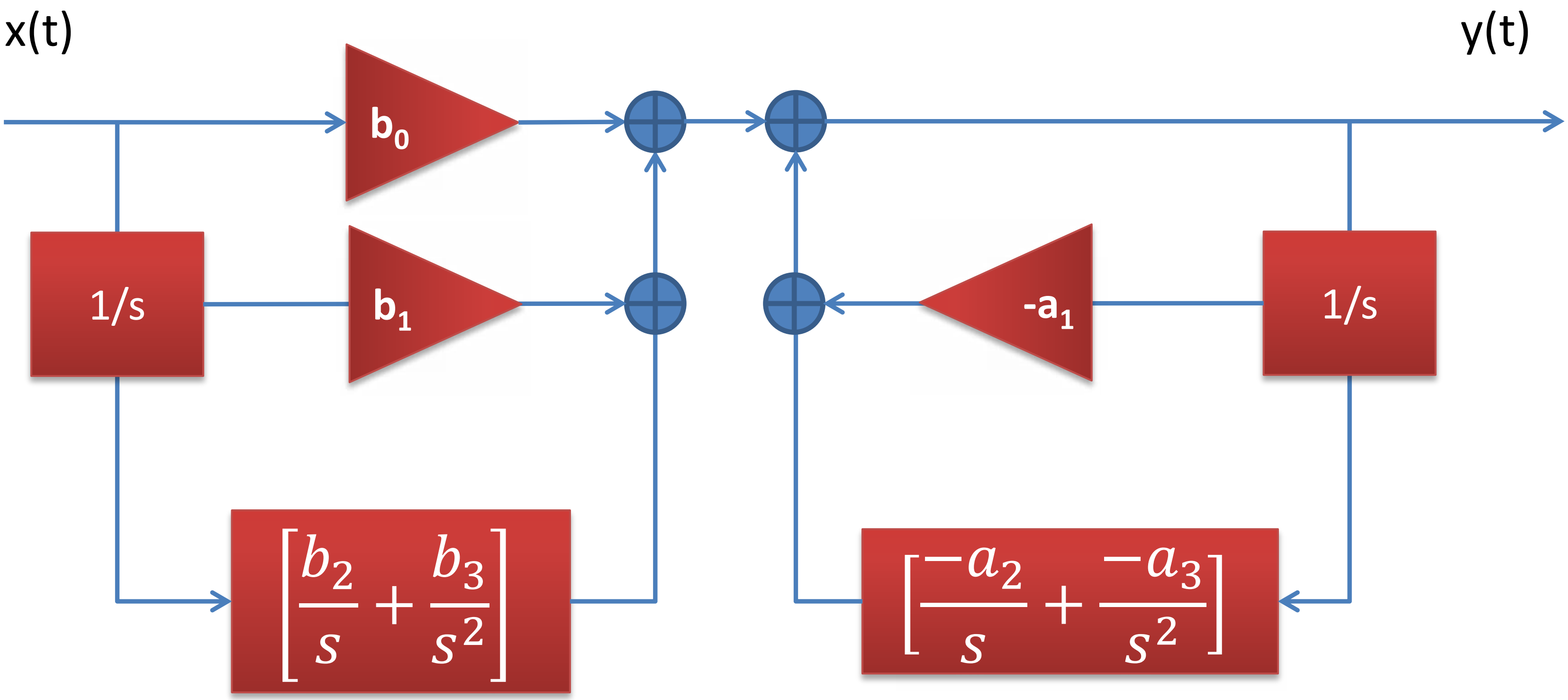
- Representação por integradores-

Expandindo o sistema para que cada coeficiente seja representado por um bloco de ganho específico, temos:



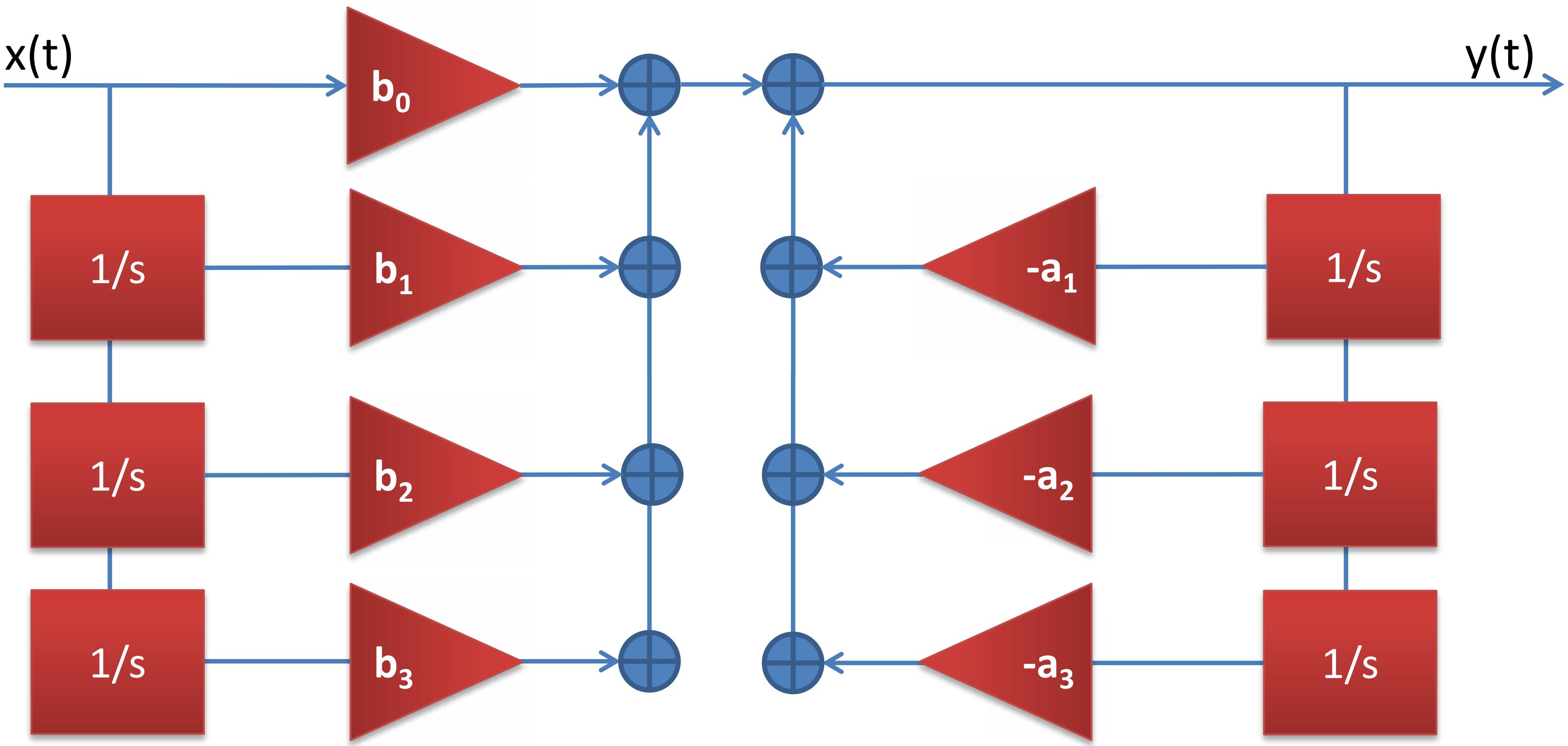
- Representação por integradores-

Colocando-se o termo 1/s em evidência, temos:



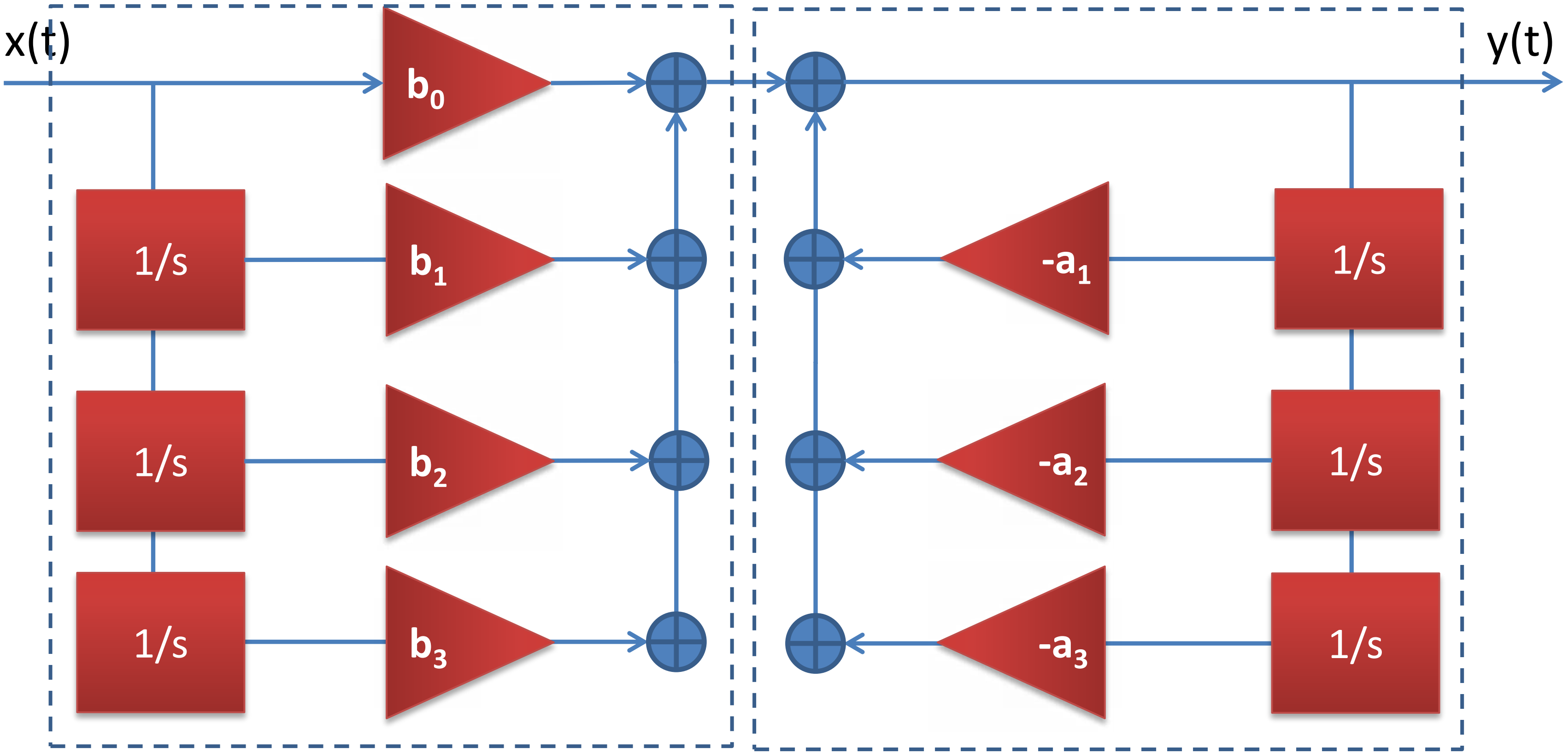
- Representação por integradores-

Esta representação é dita Forma Direta I. Devemos observar, que neste caso, serão necessários 2N circuitos integradores e dois somadores:



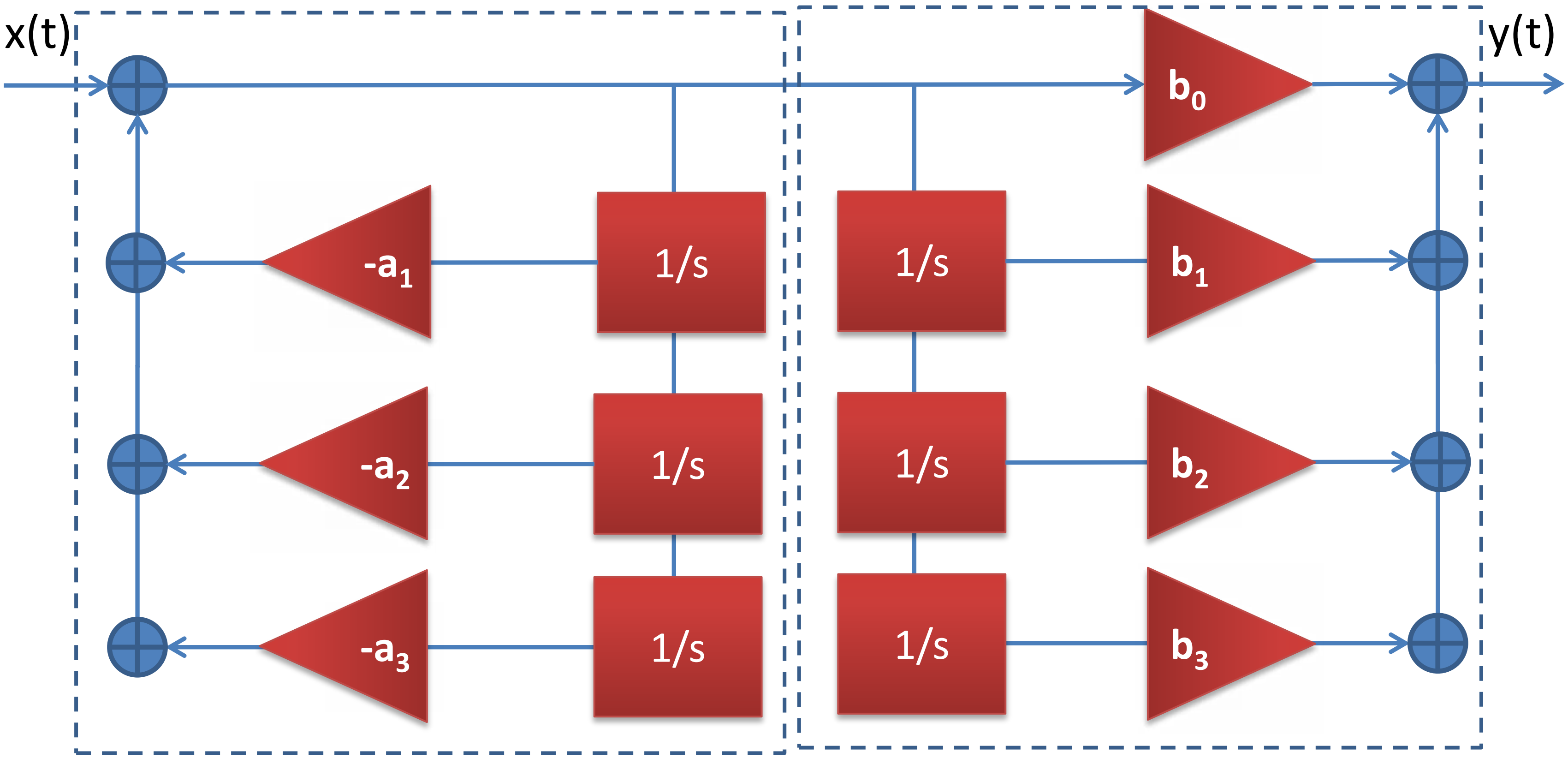
- Representação por integradores-

Para se reduzir o número de integradores necessários, faz-se uso da representação Canônica. Definimos dois subsistemas H_1 e H_2 e invertemos suas posições.



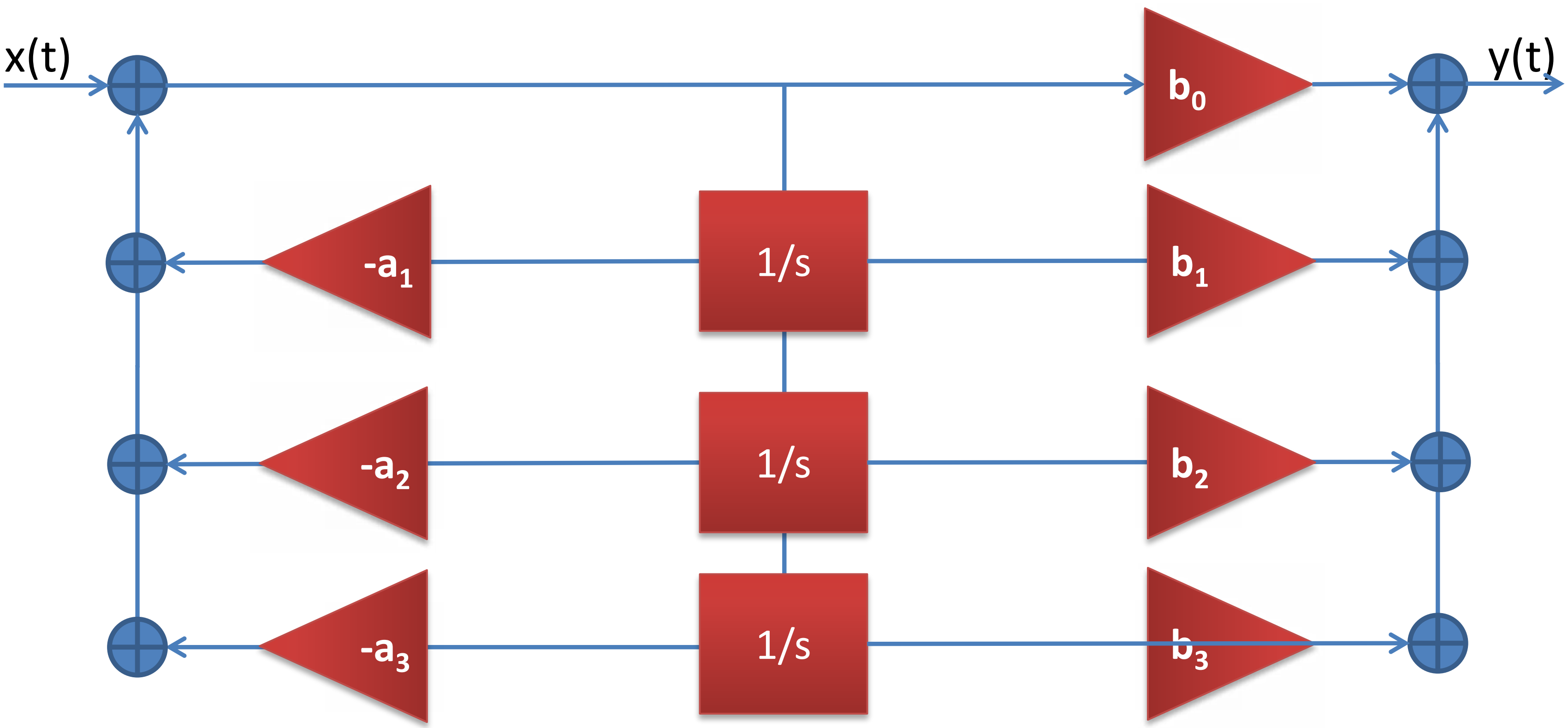
- Representação por integradores-

Note que as entradas duas redes de integradores são iguais, e por isso, suas saídas são exatamente iguais também. Podemos utilizar uma única rede de integradores.



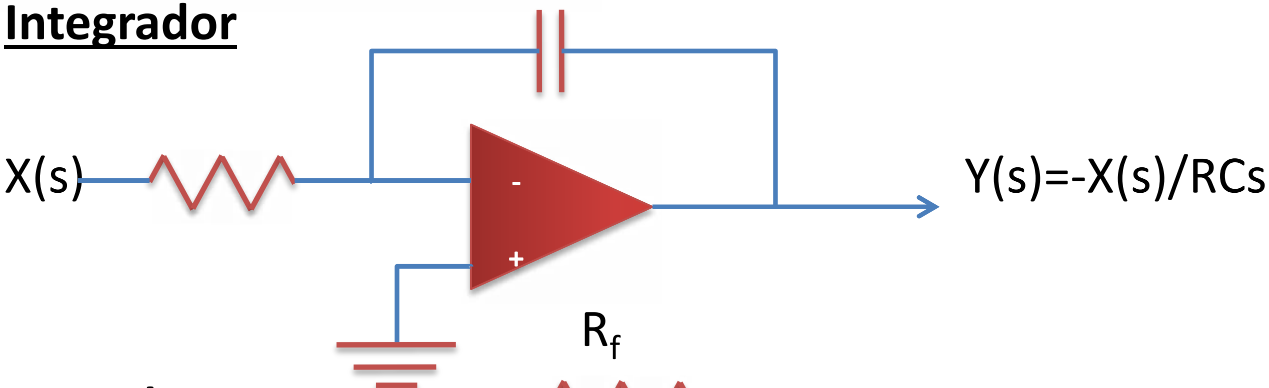
- Representação por integradores-

Representação na forma canônica.

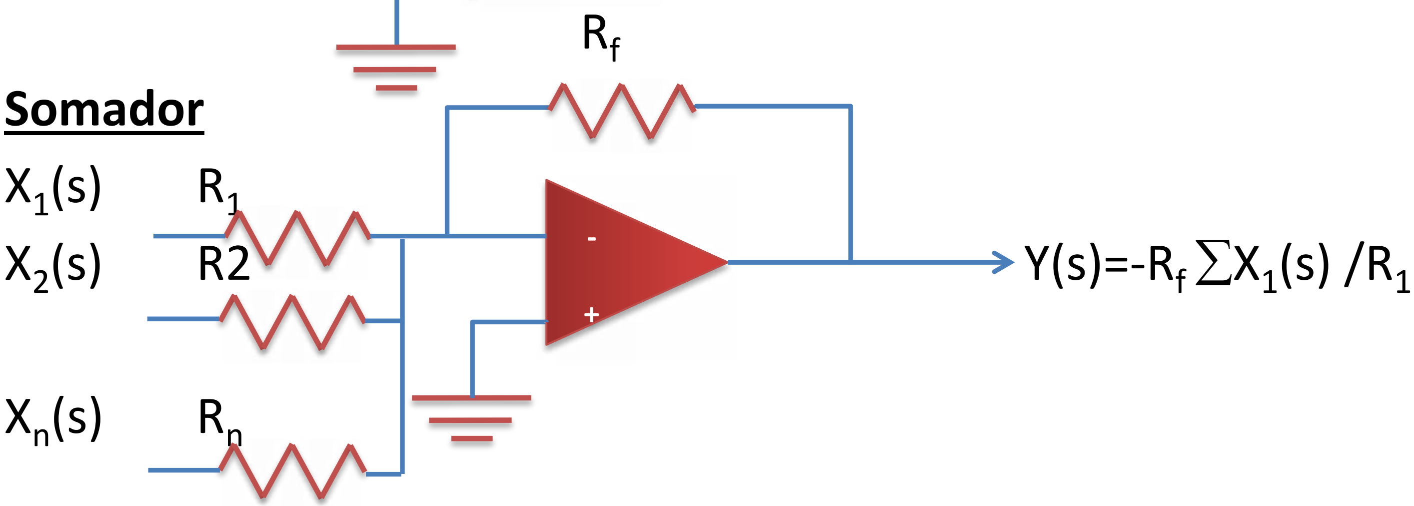


- Realização -

Integrador



Somador



Inversor: o inversor é um somador com uma única entrada e, usualmente, resistências iguais para se obter ganho -1.