2ª Avaliação de Grafos
Professor: Glauber Cintra

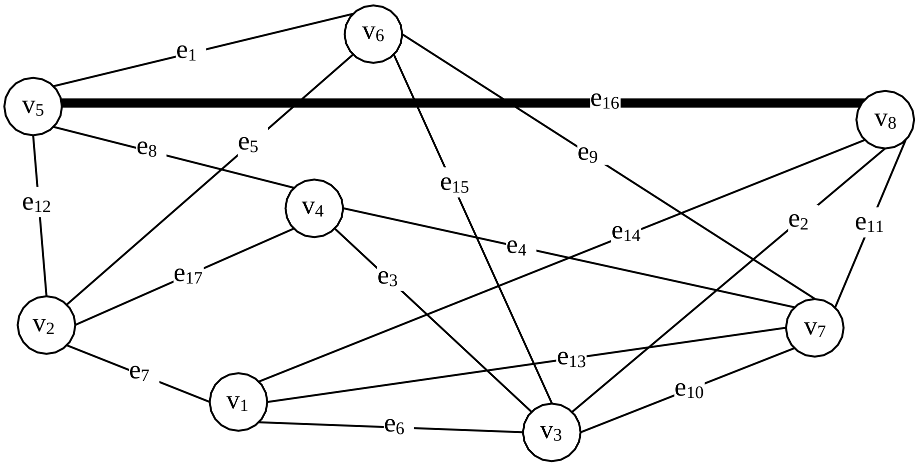
Você deve enviar essa avaliação pelo Google Classroom até o dia 08/jul/2021 às ~~15:30h~~ (Corrigindo, até as 23:59 graças ao professor, muito obrigado pela ajuda! 😊).

Avaliação enviada! ///////////////////////////////

Aluno: João Gabriel Carneiro Medeiros | Eng. Comp | Cadeira: Grafos | Prof. Glauber Cintra | IFCE | 2021.1 |

----

1) (**1 ponto**) Seja ***G*** o grafo abaixo, utilizado nas questões de 1 a 3. Exiba uma Trilha de Fechada de Euler e um Trilha de Aberta de Euler em ***G***. Se não for possível, justifique.



2) (**1 ponto**) Seja ***x*** o ***índice cromático*** de ***G***. Determine ***x*** e exiba uma ***x*-aresta-coloração desequilibrada** de ***G***. Justifique porque ela é desequilibrada e porque não existe uma aresta-coloração própria de ***G*** que utilize menos de ***x*** cores.

3) (**1 ponto**) Seja ***y*** o número cromático de ***G***. Determine ***y*** e exiba uma ***y*-vértice-coloração desequilibrada** de ***G***. Justifique porque ela é desequilibrada e porque não existe uma vértice-coloração própria de ***G*** que utilize menos de ***y*** cores.

4) (**1 ponto**) A tabela abaixo indica quais tarefas cada trabalhador está habilitado a executar. Designe exatamente uma tarefa para cada trabalhador de modo que cada tarefa seja realizada por um trabalhador que esteja apto para executá-la. Se não for possível, justifique. Nesse caso, designe o máximo de tarefas que for possível.

Trabalhador\Tarefa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ana		✓			✓		✓			✓
Bia	✓							✓		✓
Cid				✓					✓	
Davi						✓		✓	✓	✓
Eva			✓		✓		✓		✓	
Fred	✓					✓				
Gil				✓		✓				
Hugo	✓			✓						
Ivo		✓	✓				✓	✓		
João	✓			✓		✓				

5) (**2 pontos**) O Teorema das 4 cores diz que se ***G*** é planar então $\chi(G) \leq 4$. Consequentemente, se ***G*** é não planar então $\chi(G) > 4$. Prove ou refute esta afirmação.

6) **(2 pontos)** Determine um fluxo de volume máximo do vértice 1 para o vértice 8, na rede representada pela matriz de incidências abaixo. Exiba um (1,8)-corte com capacidade igual à do seu fluxo.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
v_1	-1	-1																
v_2	1		-1	-1														
v_3		1	1		1	-1	-1											
v_4				1	-1			-1		-1								
v_5						1		1	-1		-1	-1					-1	
v_6							1		1				-1					-1

V_7										1	1			-1	-1			
V_8												1	1	1		1		
V_9															1	-1	1	1
Capacidade	17	15	5	13	4	8	11	3	5	8	6	4	10	6	7	13	5	6

7) (**2 pontos**) As cidades de Campinas, São José dos Campos e Cubatão possuem refinarias de petróleo que produzem 15, 12 e 13 milhões de litros de gasolina por semana. Estas cidades e mais as cidades de São Paulo e Santos devem ser abastecidas usando-se toda a produção das três refinarias. A necessidade semanal de consumo de gasolina destas 5 cidades é:

Campinas	São José dos Campos	Cubatão	São Paulo	Santos	São Carlos
6 milhões	4 milhões	1 milhões	23 milhões	3 milhões	3 milhões

O custo, em centavos, para transportar cada litro de gasolina entre estas cidades é dado na tabela abaixo. Desejamos planejar como distribuir a gasolina de forma a minimizar o custo total do transporte. Modele este problema como um PL e resolva o modelo.

De \ Para	Campinas	São José dos Campos	Cubatão	São Paulo	Santos	São Carlos
Campinas	-	2	-	3	-	3
São José dos Campos	3	-	-	2	5	4
Cubatão	-	-	-	2	1	-
São Paulo	3	2	1	-	-	-
Santos	-	6	1	-	-	-
São Carlos	-	3	-	-	-	-

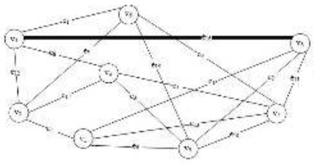
*Obs.

- As soluções foram feitas no software “Paint” (Windows) para facilitar o entendimento das mesmas peloprofessor!

- Quanto aos comentários que realizo nas questões e “definições” que apresento, tudo foi baseado no que foiapresentado nas aulas e nos slides da cadeira até o atual momento.

---

1) **(1 ponto)** Seja G o grafo abaixo, utilizado nas questões de 1 a 3. Exiba uma Trilha de Fechada de Euler e um Trilha de Aberta de Euler em G. Se não for possível, justifique.



* Grafo G
(Dado no enunciado da questão)

*Grafo Conexo:

Um grafo é dito conexo se para todo par de vértices do grafo sempre existe um caminho entre eles !

* Grau de um vértice:

O grau de um vértice é a quantidade de extremidades de arestas que incidem nesse vértice !

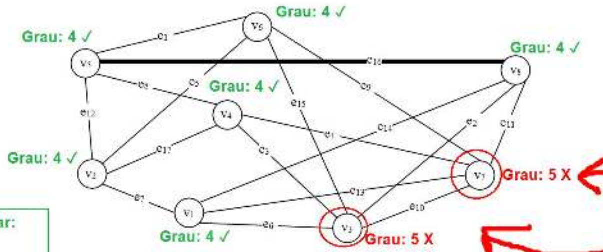
* Lembre também:
[O grau de um vértice v é denotado por d(v).]

i) Exiba uma Trilha de Fechada de Euler

Baseado no que foi passado em aula até o momento pelo professor e nos slides disponibilizados, entendemos que "Uma Trilha Fechada de Euler (TFE) é uma trilha fechada que contém todas as arestas de um grafo". Também devemos entender sobre aquilo que foi destacado, também, em aula acerca da condição que o Teorema de Euler estabelece para uma TFE num dado grafo: ": Um **grafo conexo** possui uma TFE **se e somente se** **todos os seus vértices têm grau par**".

Lembre dos seguintes conceitos já abordados anteriormente pelo professor!

Analisando **TODOS** os vértices existentes no grafo *G* chegamos aos seguintes resultados:



Vemos que se têm extamente 2 vértices com grau impar !

d(V3) = 5 **d(V7) = 5**

****Dado opcional:**

***Vértices de *G* com grau par:**

d(V1) = 4

d(V2) = 4

d(V4) = 4

d(V5) = 4

d(V6) = 4

d(V8) = 4

Assim, como existem dois vértices em *G*, V3 e V7, com grau impar, temos que a condição estabelecida pelo Teorema de Euler que relembramos anteriormente para a existência de uma TFE num grafo conexo não é cumprida! Logo, não existe uma Trilha Fechada de Euler no grafo *G*.

ii) e uma Trilha de Aberta de Euler em G.

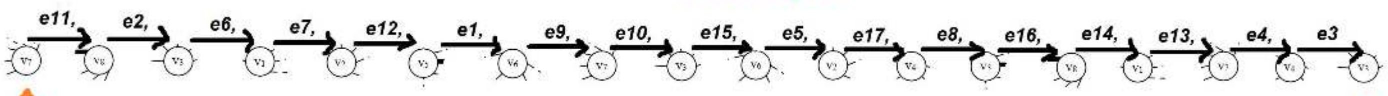
* Nos lembrando, também, do que foi dito nas aulas ministradas pelo professor sobre a definição de uma Trilha Aberta de Euler (TAE), que "*é uma trilha aberta que contém todos as arestas de um grafo*", e a condição estabelecida pelo Teorema de Euler para que uma grafo G possua uma TAE, de que um grafo conexo possui uma TAE se e somente se ele possui exatamente dois vértices de grau impar, chegamos nos seguintes resultados:

O grafo *G* da questão possúi sim uma TAE, pois como já mostramos, V3 e V7 no grafo são, ambos, de grau ímpar!
(E, isso, satisfaz a condição de que exatamente DOIS vértices de G precisem ser de grau impar para que o mesmo possua uma TAE, afinal os únicos vértices dde grau ímpar do grafo abordado na questão são apenas dois)

Uma TAE existente no grafo G da questão é a seguinte:

(e11, e2, e6, e7, e12, e1, e9, e10, e15, e5, e17, e8, e16, e14, e13, e4, e3)

Para vermos ela melhor, vamos só mostrar as ligações da trilha nos vértices do grafo:



***Início da trilha**

***Fim da trilha**

Obs. Eu poderia até tentar "mostrar" a trilha no Grafo, mas como ela percorre TODAS as arestas acabaria que eu iria destacar todas elas e isso só iria ficar mais confuso, o que já foi explicado e mostrado aqui já foi o suficiente para entender meu ponto ponto de vista kkkkkk

<< Nota do aluno*

2) **(1 ponto)** Seja x o *índice cromático* de G. Determine x e exiba uma **x-aresta-coloração desequilibrada** de G. Justifique porque ela é desequilibrada e porque não existe uma aresta-coloração própria de G que utilize menos de x cores.

i) Determine x

*** Mais uma vez, vamos nos basear no que foi disponibilizado pelo professor de material e aulas na cadeira para encontrar aquilo que nos é pedido. Segundo o que está afirmado nesse trecho, tirado de um print do aluno, de um dos slides da cadeira que o professor disponibilizou acerca do Teorema de Vizing temos a seguinte análize inicial:**

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Índice Cromático

O *índice cromático* de G, denotado por $X'(G)$, é o menor k tal que G é k-aresta-colorível.

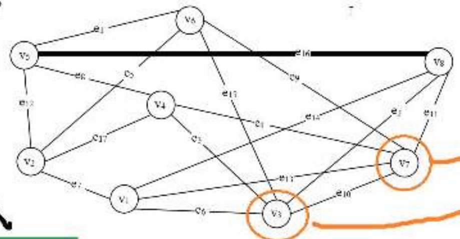
Teorema de Vizing: $\Delta(G) \leq X'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

***Importante lembrar!!!**

**** Lembre que $\Delta(G)$ é a simbologia usada para representar o grau máximo de G, ou seja, o grau de um vértice que tem o maior grau de G.**

***Sabendo disso vamos analisar o $\Delta(G)$ do grafo abordado aqui nessa questão:**

Grafo *G



Os vértices de maior grau em *G* são V7 e V3, e possuem ambos grau 5, logo, o $\Delta(G)$ para o grafo trabalhado na questão é 5, $\Delta(G) = 5$.

Sabendo disso, vamos nos voltar para uma outra afirmação que no trecho tirado do slide é dita sobre o índice cromático de *G*:

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

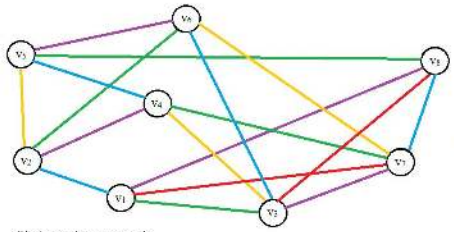
Índice Cromático

O *índice cromático* de G, denotado por $X'(G)$, é o menor k tal que G é k-aresta-colorível.

Teorema de Vizing: $\Delta(G) \leq X'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

e exiba uma **x-aresta-coloração desequilibrada** de G.

Grafo *G
(Devidamente colorido em suas arestas)



*Usei o seguinte esquema de cores:

(5 cores utilizadas)

****Logo temos uma "5-aresta-coloração-desequilibrada"***

***Vamos então, reorganizar o grafo G que a questão aborda e vamos realizar sua "coloração" como é falado no trecho destacado do print acima.**

>>> (A coloração também é pedida no enunciado da questão que diz para exibirmos uma x-aresta-coloração desequilibrada de G)

*** Com isso, vemos que a coloração realizada utilizou-se de 5 cores, além do fato de que $\Delta(G) = 5$ para o grafo em questão. Juntando essa informações obtidas na análise e reiterando o que é falado pelo Teorema de Vizing concluímos que: O "índice cromático de *G*" *que é* $x = \chi'(G) = 5$.**

ii) Justifique porque ela é desequilibrada

Usando do trecho tirado de um dos slides disponibilizados pelo professor e que aborda do tema da questão aqui abordada temos que:

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Coloração Equilibrada de Arestas

Seja C uma k-aresta-coloração que utiliza as cores 1, 2, ..., k. Seja c_i a quantidade de arestas da cor i (i = 1, 2, ..., k). Dizemos que C é *equilibrada* se $|c_i - c_j| \leq 1$(i = 1, 2, ..., k e j = 1, 2, ..., k).

Assim, para o grafo da questão, vemos que a cor vermelha (Que é referente as arestas e2 e e13, equivalentes a: v3 – v8 e v1 – v7) é utilizada em apenas 2 arestas de *G* enquanto que a cor azul claro (Que é referente as arestas e7, e8, e11 e e15, equivalentes a: v1 – v2, v4 – v5, v7 – v8 e v3 – v6) é utilizada para 4 arestas, ou seja, temos que nosso ci = cVERMELHO = 2 e nosso cj = cAZUL_CLARO = 4. E portanto, |cVERMELHO - cAZUL_CLARO| > 1, pois | 2 - 4 | = | -2 | = 2, logo, nossa coloração mostrada anteriormente é, sim, uma 5-aresta-coloração desequilibrada!

iii) e porque não existe uma aresta-coloração própria de G que utilize menos de x cores.

***Nos baseando naquilo que está nos materiasi do professor sobre o tema, podemos fazer a seguinte relação entre dois pontos de destaque:**

***Primeiro, lembremos dessa definição:**

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Coloração de Arestas

Uma *coloração de arestas* é uma atribuição de cores a cada uma das arestas de um grafo.
Dizemos que uma coloração de arestas é *própria* se arestas adjacentes sempre têm cores diferentes.
Se uma coloração própria de arestas utiliza k cores dizemos que ela é uma *k-aresta-coloração*.
Se um grafo admite uma k-aresta-coloração dizemos que ele é *k-aresta-colorível*.

***Segundo, usando do que foi definido acima, lembremos também dessa outra afirmação:**

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Índice Cromático

O *índice cromático* de G, denotado por $X'(G)$, é o menor k tal que G é k-aresta-colorível.

Teorema de Vizing: $\Delta(G) \leq X'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

***Logo, é impossível se ter uma aresta-coloração própria do grafo *G* com menos de 5 cores, já que por ambos os vértices 3 e 7 possuirem grau 5 (Que é o valor de nosso "x" ou "k" ou "índice cromático de G"), torna-se necessário que no mínimo 5 cores sejam usadas para sua coloração sem que nenhuma aresta vizinha possua a mesma cor!**

3) **(1 ponto)** Seja y o número cromático de G. Determine y e exiba uma **y-vértice-coloração desequilibrada** de G. Justifique porque ela é desequilibrada e porque não existe uma vértice-coloração própria de G que utilize menos de y cores.

Determine y

*Assim como na questão anterior a essa, para "agilizar as coisas" kkkk, vamos nos basear no disponível em materiais que o professor disponibilizou para a turma através de slides para achar Y. Primeiro vamos lembrar o trecho do slide que fala sobre a coloração de vértices de um grafo G:

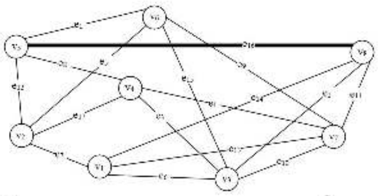
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Coloração de Vértices

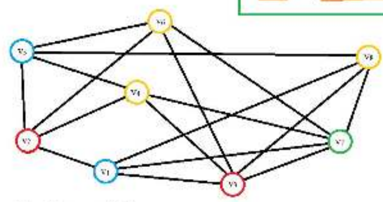
Uma *coloração de vértices* é uma atribuição de cores a cada um dos vértices de um grafo.
Dizemos que uma coloração de vértices é *própria* se vértices adjacentes sempre têm cores diferentes.
Se uma coloração própria de vértices utiliza k cores dizemos que ela é uma *k-vértice-coloração* ou simplesmente *k-coloração*.
Se um grafo admite uma k-coloração dizemos que ele é *k-colorível*.

* Com base nisso vamos contruir o grafo G seguindo esse modelo de coloração de vértices que é brevemente descrito no trecho acima tirado de um dos slides da cadeira atualmente:

e exiba uma **y-vértice-coloração desequilibrada** de G



*Grafo G



*Usei o seguinte esquema de cores:

*Grafo G (Devidamente colorido em seus vértices)

*Após a montagem dessa coloração vamos achar o "clique" do grafo G aqui trabalhado, baseando-se na definição que nos foi apresentada do que é um clique e como o determinamos:

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Número Cromático

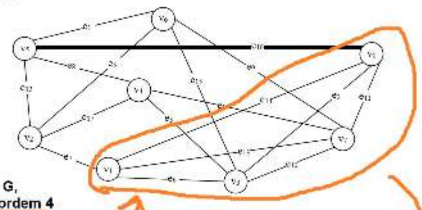
O *número cromático* de G, denotado por $X(G)$, é o menor k tal que G é k-colorível.
Um *clique* de G é um subgrafo completo contido em G.

Teorema 1: Se G contém um clique de ordem n então $X(G) \geq n$.

Clique de ordem 3

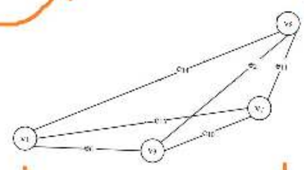
Teorema 2: Se F é uma floresta então $X(F) \leq 2$.

Teorema 3: $X(K_n) = n$.



Logo, para nosso grafo G, achamos um clique de ordem 4 que se refere a um subgrafo G' de G que segue as seguintes caractgerísticas:

G' = ({v1, v3, v7, v8}, {e2, e6, e10, e11, e13, e14})



Subgrafo G' de G (Que é o clique encontrado para G nessa questão)

e porque não existe uma vértice-coloração própria de G que utilize menos de y cores.

****Assim, podemos concluir que como a vértice-coloração mostrada anteriormente para *G* utiliza 4 cores e que G possui um clique de ordem 4, y = χ(G) ≥ 4. Então, já que a vértice coloração já mostrada utiliza apenas 4 cores, temos que o número cromático de *G* que é y = χ(G) = 4! Isso, seguindo a definição abordada em aula e que encontra-se disponível no slides disponibilizados pelo professor e que eu inclusive estou usando nessa resolução como já foi mostrado (Para gilizar as coisas kkkk).**

ii) Justifique porque ela é desequilibrada

Usando do trecho tirado de um dos slides disponibilizados pelo professor e que aborda do tema da questão aqui abordada temos que:

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Coloração Equilibrada de Vértices

Seja C uma k-coloração que utiliza as cores $1, 2, ..., k$. Seja c_i a quantidade de vértices da cor i ($i = 1, 2, ..., k$). Dizemos que C é *equilibrada* se $|c_i - c_j| \leq 1$ ($i = 1, 2, ..., k$ e $j = 1, 2, ..., k$).

Assim, para o grafo da questão, vemos que a cor verde (Que é referente ao vértice v7) é utilizada em apenas 1 vértice, enquanto que a cor amarela (Que é referente aos vértices v4, v6 e v8) é utilizada em 3 vértices, ou seja, temos que nosso ci = cVERDE = 1 e nosso cj = cAMARELO = 3. Então, |cVERDE - cAMARELO| > 1, pois | 1 - 3 | = | -2 | = 2, logo, temos que nossa coloração mostrada anteriormente é, sim, uma 4-vértice-coloração desequilibrada.

iii) e porque não existe uma vértice-coloração própria de G que utilize menos de y cores.

*Nos baseando naquilo que está nos materiais do professor sobre o tema, podemos fazer a seguinte relação entre dois pontos de destaque:

*Primeiro, lembremos dessa definição:

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Coloração de Vértices

Uma *coloração de vértices* é uma atribuição de cores a cada um dos vértices de um grafo.
Dizemos que uma coloração de vértices é *própria* se vértices adjacentes sempre têm cores diferentes.
Se uma coloração própria de vértices utiliza k cores dizemos que ela é uma *k-vértice-coloração* ou simplesmente *k-coloração*.
Se um grafo admite uma *k*-coloração dizemos que ele é *k-colorível*.

*** Logo, é impossível se ter uma vértice-coloração própria de *G* com menos de 4 cores pois o subgrafo G' é do tipo K4 e, logo, todos os seus vértices são vizinhos de todos os demais vértices que compõem esse subgrafo, assim, é necessário no mínimo 4 vértices para que cada vértice tenha uma cor diferente da cor dos de seus vizinhos.**

*Segundo, usando do que foi definido acima, lembremos também dessa outra afirmação:

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Número Cromático

O *número cromático* de G, denotado por $X(G)$, é o menor k tal que G é k-colorível.
Um *clique* de G é um subgrafo completo contido em G.

Teorema 1: Se G contém um clique de ordem n então $X(G) \geq n$.

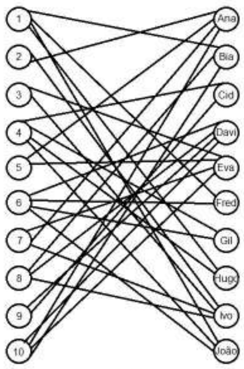
4) (**1 ponto**) A tabela abaixo indica quais tarefas cada trabalhador está habilitado a executar. Designe exatamente uma tarefa para cada trabalhador de modo que cada tarefa seja realizada por um trabalhador que esteja apto para executá-la. Se não for possível, justifique. Nesse caso, designe o máximo de tarefas que for possível.

Trabalhador\Tarefa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ana		✓			✓		✓			✓
Bia	✓							✓		✓
Cid				✓					✓	
Davi						✓		✓	✓	✓
Eva			✓		✓		✓		✓	
Fred	✓					✓				
Gil				✓		✓				
Hugo	✓			✓						
Ivo		✓	✓				✓	✓		
João	✓			✓		✓				

<< Obs. Entenda que aonde tem um "✓" quer dizer uma tarefa (de 1 a 10) que um determinado trabalhador está apto a fazer!

i) Apartir da tabela apresentada e dos conhecimentos do aluno sobre problemas que envolvam situações semelhantes as que a tabela representa e que foram abordadas em aula pelo professor algumas vezes, vamos construir, primeiramente um grafo que represente o cenário "geral" que a tabela dada na questão representa, para isso modelar a tabela acima na form de um grafo bipartido é a melhor escolha para essa visualização inicial, segundo a opnião do aluno :

Trabalhador\Tarefa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ana		✓			✓		✓			✓
Bia	✓							✓		✓
Cid				✓					✓	
Davi						✓		✓	✓	✓
Eva			✓		✓		✓		✓	
Fred	✓					✓				
Gil				✓		✓				
Hugo	✓			✓						
Ivo		✓	✓				✓	✓		
João	✓			✓		✓				

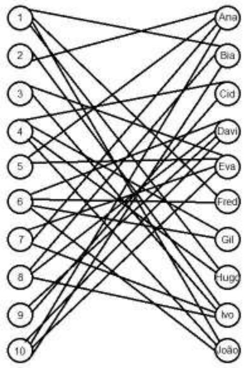


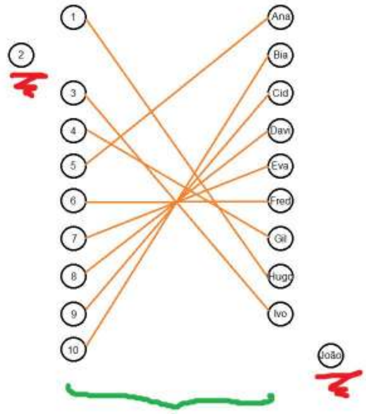
* Repreentação da tabela dada na questão através da construção de um grafo bipartido *G*

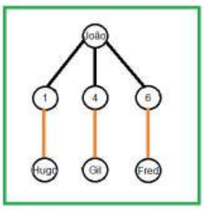
ii) Designe exatamente uma tarefa para cada trabalhador de modo que cada tarefa seja realizada por um trabalhador que esteja apto para executá-la. Se não for possível, justifique. Nesse caso, designe o máximo de tarefas que for possível.

*Para o grafo bipartido *G* mostrado anteriormente acima não é possíve,l de fato, *designar exatamente uma tarefa para cada trabalhador de forma que **cada tarefa** seja realizada **por um trabalhador que esteja apto a realizá-la***. Para isso vamos justificar tal impossibilidade mostrando abaixo um exemplo que mostre como não é possível uma **distribuição completa de tarefas** para o grafo bipartido *G de forma que todos os trabalhadores trabalhem cada um em respectivas tarefas que estão aptos a fazer, sem que um interfira na tarefa do ouro é claro e que isso seja distribuido entre TODOS os trabalhadores e TODAS as tarefas apresentadas na tabela e e representadas em G. Isso será reiterado ainda mais na arvore maximal que surgirá a partir desse exemplo que estará enraizada exatamente no trabalhador que ficará sem nenhuma tarefapara realizar o que já mostra a impossibilidade que estamos justificando na questão (Ou seja, que não é possível aumentar o emparelhamento das tarefas):*

Grafo bipartido *G*







*Arvore maximal, aqui, enraizada no Joao, o único trabalhador sem nenhuma tarefa atribuida a ele que ele seja apto a fazer.

Trabalhador\Tarefa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ana		✓			✓		✓			✓
Bia	✓							✓		✓
Cid				✓					✓	
Davi						✓		✓	✓	✓
Eva			✓		✓		✓		✓	
Fred	✓					✓				
Gil				✓		✓				
Hugo	✓			✓						
Ivo		✓	✓				✓	✓		
João	✓			✓		✓				

*O exemplo abaixo foi feito seguindo a respectiva designação:

Ana –> 5, Bia –> 10, Cid –> 9, Davi –> 8, Eva –> 7, Fred –> 6, Gil –> 4, Hugo –> 1, Ivo –> 3, João –> Nenhuma.

5) (**2 pontos**) O Teorema das 4 cores diz que se G é planar então $\chi(G) \leq 4$. Consequentemente, se G é não planar então $\chi(G) > 4$. Prove ou refute esta afirmação.

i) → O Teorema das 4 cores diz que se G é planar então $\chi(G) \leq 4$. Consequentemente, se G é não planar então $\chi(G) > 4$.

*** Vamos então seguir o seguinte raciocínio lógico e matemático:**

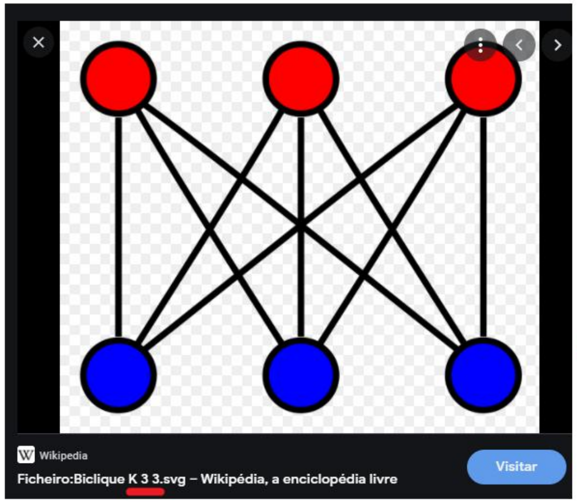
- Vamos ter a seguinte *hipótese*: *G é planar e χ(G) > 4*.

****Agora, vamos seguir o raciocínio do enunciado aplicando a hipótese em questão:**

- Se *G* é um grafo planar, logo χ(G) <= 4, que é o afirmado pelo Teorema das 4 cores. Mas pela nossa hipótese definida anteriormente temos que o número cromático deve ser χ(G) > 4, o que é um absurdo! Portanto, ou o grafo *G* é um grafo não planar ou o número cromático deste deve ser χ(G) <= 4. E com isso temos a garantia de que, apenas para χ(G) > 4, *G* é não planar, mas, a recíproca/correspondência já não pode ser afirmada com certeza absoluta. Assim, a afirmação está errada/falsa e o correto de fato seria que no enunciado da mesma estivesse escrito de uma forma smelhante a frase: *"E como consequência, se o número cromático χ(G) > 4 então o grado G não é um grafo planar."*

***** Por ser falsa a afirmação do enunciado e existir sim pelo menos um grafo *G não planar que possui número cromático χ(G)<4, a título de "exemplificar" um modelo de grafo que segue esse padrão podemos citar o grafo de modelo K3,3 (um dos grafos nao planares mais conhecidos) que é um grafo não planar e possui, ainda, χ(K3,3) =2 !***

**** E não somente o K3,3 mas em muitos dos grafos que o contém como subgrafo não irão precisar de mais do que 4 cores para suas respectivas colorações na maioria dos casos!***



<< Ao lado, a estrutura "base" do K3,3

6) **(2 pontos)** Determine um fluxo de volume máximo do vértice 1 para o vértice 8, na rede representada pela matriz de incidências abaixo. Exiba um (1,8)-corte com capacidade igual à do seu fluxo.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
v_1	-1	-1																
v_2	1		-1	-1														
v_3		1	1		1	-1	-1											
v_4				1	-1			-1		-1								
v_5						1		1	-1		-1	-1					-1	
v_6							1		1				-1					-1
v_7										1	1			-1	-1			
v_8												1	1	1		1		
v_9															1	-1	1	1
Capacidade	17	15	5	13	4	8	11	3	5	8	6	4	10	6	7	13	5	6

i) ***Antes de irmos para a figura resultante mostrando o que se é pedido, acho interessante lembrarmos só do conteúdo abordado aqui no enunciado da questão, lendo ele podemos destacar os seguintes pontos importantes de se lembrar, e, que foram ensinado pelo professor em aula e encontram-se disponíveis inclusive em seus slides:**

Determine um fluxo de volume máximo do vértice 1 para o vértice 8, na rede representada pela matriz de incidências abaixo. Exiba um (1,8)-corte com capacidade igual à do seu fluxo.

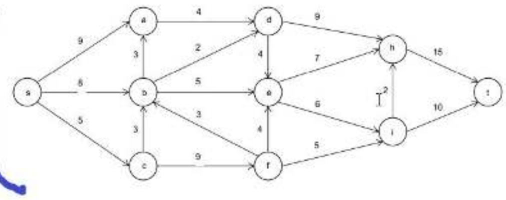
INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Fluxos em Redes

Uma *rede* é um grafo dirigido com dois vértices especiais *s* (origem) e *t* (destino), no qual cada arco *i* possui uma capacidade de vazão c_i.

***Essa é a aparência "comum" aos grafos desse tipo de problema, estarei usando ela no grafo dessa questão!**

(Ou pelo menos algo "parecido" kkkk)



Denotamos por $\delta^+(v)$ o conjunto de todos os arcos que chegam em *v* e por $\delta^-(v)$ o conjunto de todos os arcos que saem de *v*.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Um *(s, t)-corte* numa rede é um conjunto de arcos cuja remoção desconecta *s* de *t*. A *capacidade* de um (*s*, *t*)-corte, denotada por *cap*(*C*), é a soma das capacidades do arcos que compõem C.

INSTITUTO FEDERAL
Ceará

Um *fluxo* numa rede é uma atribuição de fluxo a cada um dos arcos da rede. Vamos denotar por f_i o fluxo no arco *i*. Um fluxo é viável se:

- Para todo arco *i*, $0 \leq f_i \leq c_i$
- Para todo vértice *v* (diferente de *s* e de *t*), $\sum_{i \in \delta^+(v)} f_i = \sum_{i \in \delta^-(v)} f_i$ (Lei de *Kirchoff*)

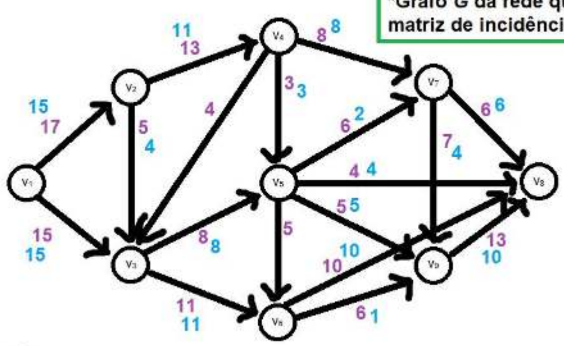
O *volume* de um fluxo *F*, denotado por *vol*(*F*), é definido como sendo:

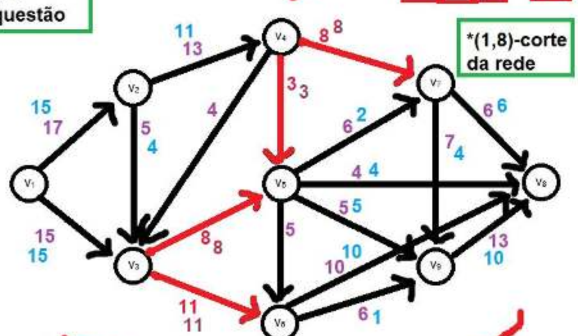
$$vol(F) = \sum_{i \in \delta^-(s)} f_i - \sum_{i \in \delta^+(s)} f_i = \sum_{i \in \delta^+(t)} f_i - \sum_{i \in \delta^-(t)} f_i$$

a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
-1	-1			
		-1		-1
1		1	-1	
	1		1	
				1
8	11	3	5	8

ii) ****Tendo as seguintes definições em mente, chegamos na imagem e nos resultados finais pedidos na questão:**

***Grafo *G* da rede que representa a matriz de incidências dada na questão**





***(1,8)-corte da rede**

*Onde:

Cor referente ao fluxo no nosso grafo usado para representar a rede que a matriz de incidências representa

Cor referente a capacidade que é dada na matriz de incidências

***As arestas em vermelho referentes as aresta do (1,8)-corte pedido no enunciado. Com isso temos os seguintes resultados finais referentes ao fluxo máximo para o corte pedido:**

-Fluxo de Volume Máximo: 30
-Corte: (1,8)-corte
-Arestas do Corte e seus Custos:
. v4 --> v7: Custo 8
. v4 --> v5: Custo 3
. v3 --> v5: Custo 8
.v3 --> v6: Custo 11

7) **(2 pontos)** As cidades de Campinas, São José dos Campos e Cubatão possuem refinarias de petróleo que produzem 15, 12 e 13 milhões de litros de gasolina por semana. Estas cidades e mais as cidades de São Paulo e Santos devem ser abastecidas usando-se toda a produção das três refinarias. A necessidade semanal do consumo de gasolina destas 5 cidades é:

Campinas	São José dos Campos	Cubatão	São Paulo	Santos	São Carlos
6 milhões	4 milhões	1 milhões	23 milhões	3 milhões	3 milhões

O custo, em centavos, para transportar cada litro da gasolina entre estas cidades é dado na tabela abaixo. Desejamos planejar como distribuir a gasolina de forma a minimizar o custo total do transporte. Modele este problema como um PL e resolva o modelo.

De \ Para	Campinas	São José dos Campos	Cubatão	São Paulo	Santos	São Carlos
Campinas	-	2	-	3	-	3
São José dos Campos	3	-	-	2	5	4
Cubatão				2	1	
São Paulo	3	2	1			
Santos		5	1			
São Carlos		3				

i) Desejamos planejar como distribuir a gasolina de forma a minimizar o custo total do transporte. Modele este problema como um PL e resolva o modelo.

* Nos lembrando do que foi dito em aula pelo professor e que está nos slides disponibilizados pelo mesmo, temos a seguinte a informação que é importante lembrar para entender o problema ao tratá-lo como um modelo em PL:

Podemos no entanto modelar o PT como sendo um problema de programação linear (PL)

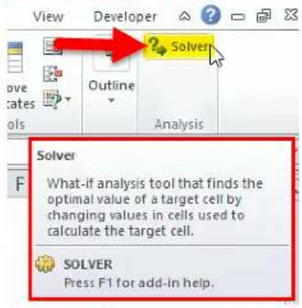
$\min \sum_{\forall i} c_i f_i$ (função objetivo)

$\sum_{i \in \delta^+(v)} f_i - \sum_{i \in \delta^-(v)} f_i = d_v, \forall v \in \vec{G}$

$f_i \geq 0, \forall i \in \vec{G}$ (restrição de não-negatividade)

É possível resolver um PL é tempo polinomial 😀

* Um pequeno vislumbre do Solver no Excel, eu usei o Excel de 2009, por isso é antigo kkkk



*Se lembrando disso, e para agilizar nossos cálculos, para resolver o modelo com PL usarei de uma ferramenta indicada pelo professor de nome "Solver" na plataforma do Excel, não mostrarei TUDO feito nela, até porque creio que se o professor leu TUDO até aqui deve estar cansado kkkk. Vamos nos ater a planilha que foi usada para junto do Solver no Excel obter o cuto mínim total (Em centavos) para distribuir a gasolina que é pedido na questão:

Questão 7

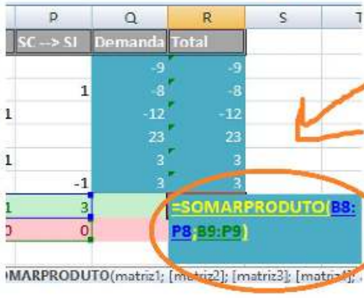
* Planilha usada para solucionar a questão como um modelo de PL:

P14

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	Vértices de G \ Arestas de G	C --> SJ	C --> SP	C --> SC	SJ --> C	SJ --> SP	SJ --> S	SJ --> SC	CB --> SP	CB --> S	SP --> C	SP --> SJ	SP --> CB	S --> SJ	S --> CB	SC --> SJ	Demanda	Total
2	C (Campinas)	-1	-1	-1	1						1						-9	-9
3	SJ (São José dos Camp	1			-1	-1	-1	-1				1		1		1	-8	-8
4	CB(Cubatão)								-1	-1			1		1		-12	-12
5	SP (São Paulo)		1			1			1		-1	-1	-1				23	23
6	S (Santos)						1			1				-1	-1		3	3
7	SC(São Carlos)			1				1								-1	3	3
8	Valor do Custo	2	3	3	3	2	5	4	2	1	3	2	1	6	1	3		64
9	Valor do Fluxo	-1E-06	6,000001	3	0	7,999999	0	0	9	3	0	0	0	0	0	0		

* Estava dando 2 depois o Excel deu bug :(

**Ao lado, uma das muitas funções que se chamam na planilha para junto do Solver, obter o resultado de custo mínimo total de 64 centavos para distribuir a gasolina que é encontrado:

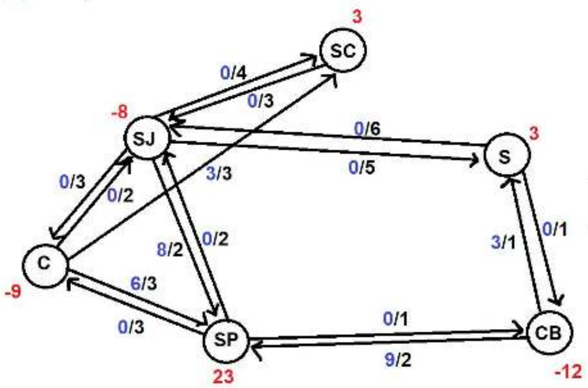


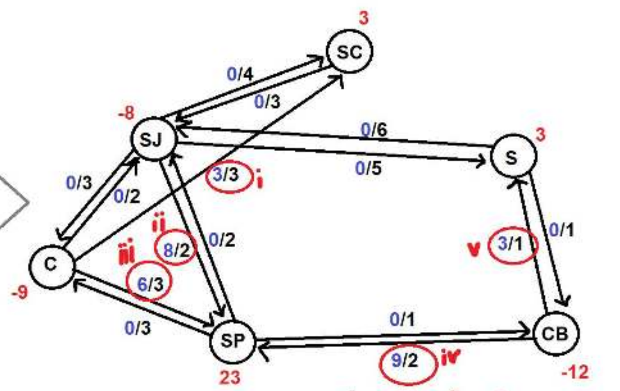
**** Logo, pode-se ver que o custo mínimo total para se distribuir a gasolina é de 64 centavos!

ii) * Para vermos melhor a distribuição desse fluxo que trabalhamos na planilha feita e que é citado na questão, vamos visualizá-lo no grafo *G* abaixo:

1	Vértices de G \ Arestas de G
2	C (Campinas)
3	SJ (São José dos Camp
4	CB(Cubatão)
5	SP (São Paulo)
6	S (Santos)
7	SC(São Carlos)

* Considere as seguintes legendas usadas na planilha, imagem ao lado, para os vértices do grafo na direita também.





** Onde:

Se refere ao fluxo — 0/3 — Se refere ao custo

\>>> Cálculo do custo mínimo: 3*3 + 6*3 + 8*2 + 9*2 + 3*1 = 64

( ) [ ] [ ]
[ ] [ ]
[ ] [ ] [ ]
[ ] [ ]

~Fim*

//---

-- · ---

Glauber Ferreira Cintra
10 de jul.
Excelente!!

Questão 1: 1 ponto
Questão 2: 1 ponto
Questão 3: 1 ponto
Questão 4: 1 ponto
Questão 5: 2 pontos
Questão 6: 2 pontos
Questão 7: custo total do transporte será de 64 milhões de centavos (R$ 640.000,00) 2 pontos

*** Só pra confirmar que tá toda certa.**