

Aula 30-08-22

Prova dia 20/09

Finalizado o conteúdo de filtros

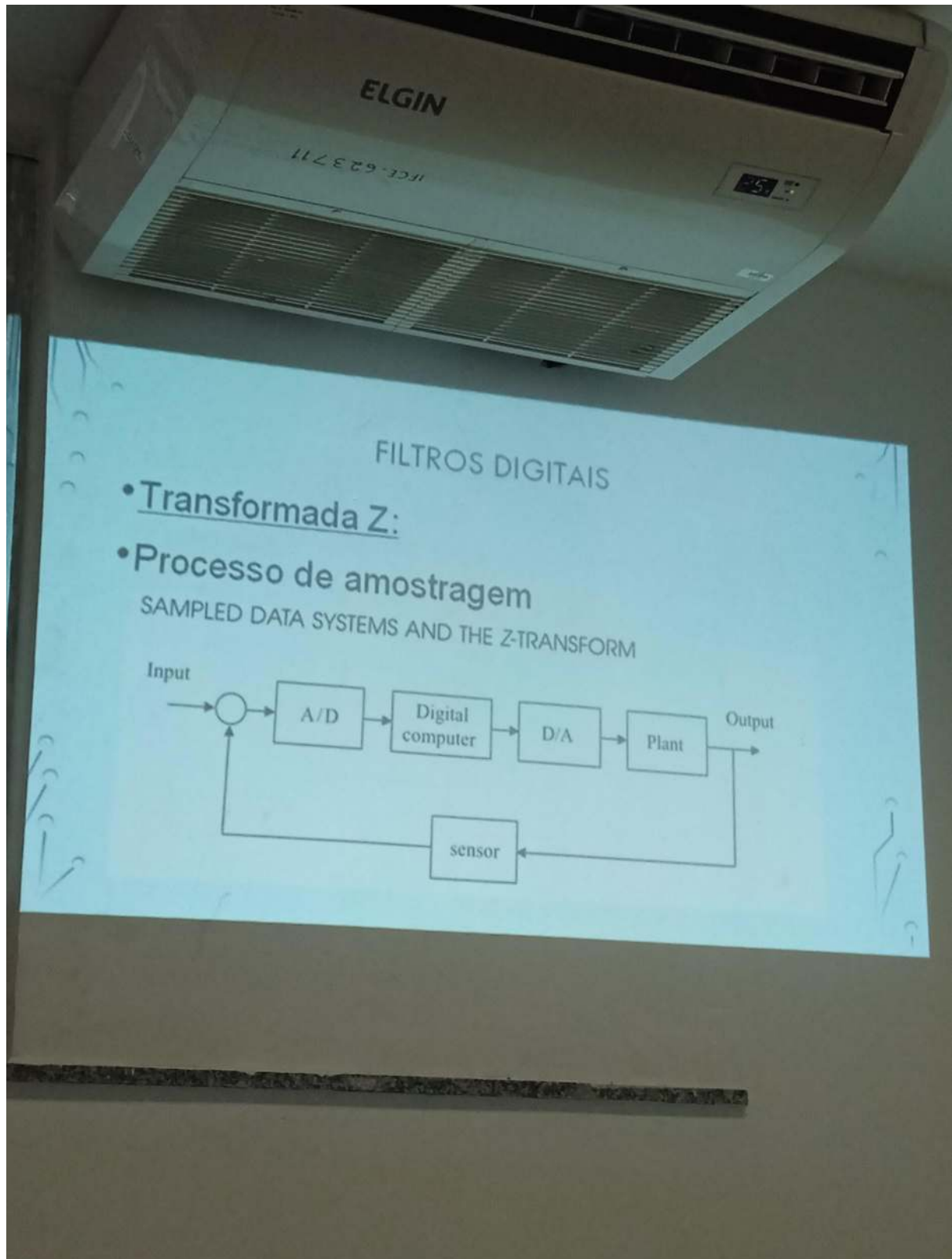
Transformada Z

Conceito

FILTROS DIGITAIS

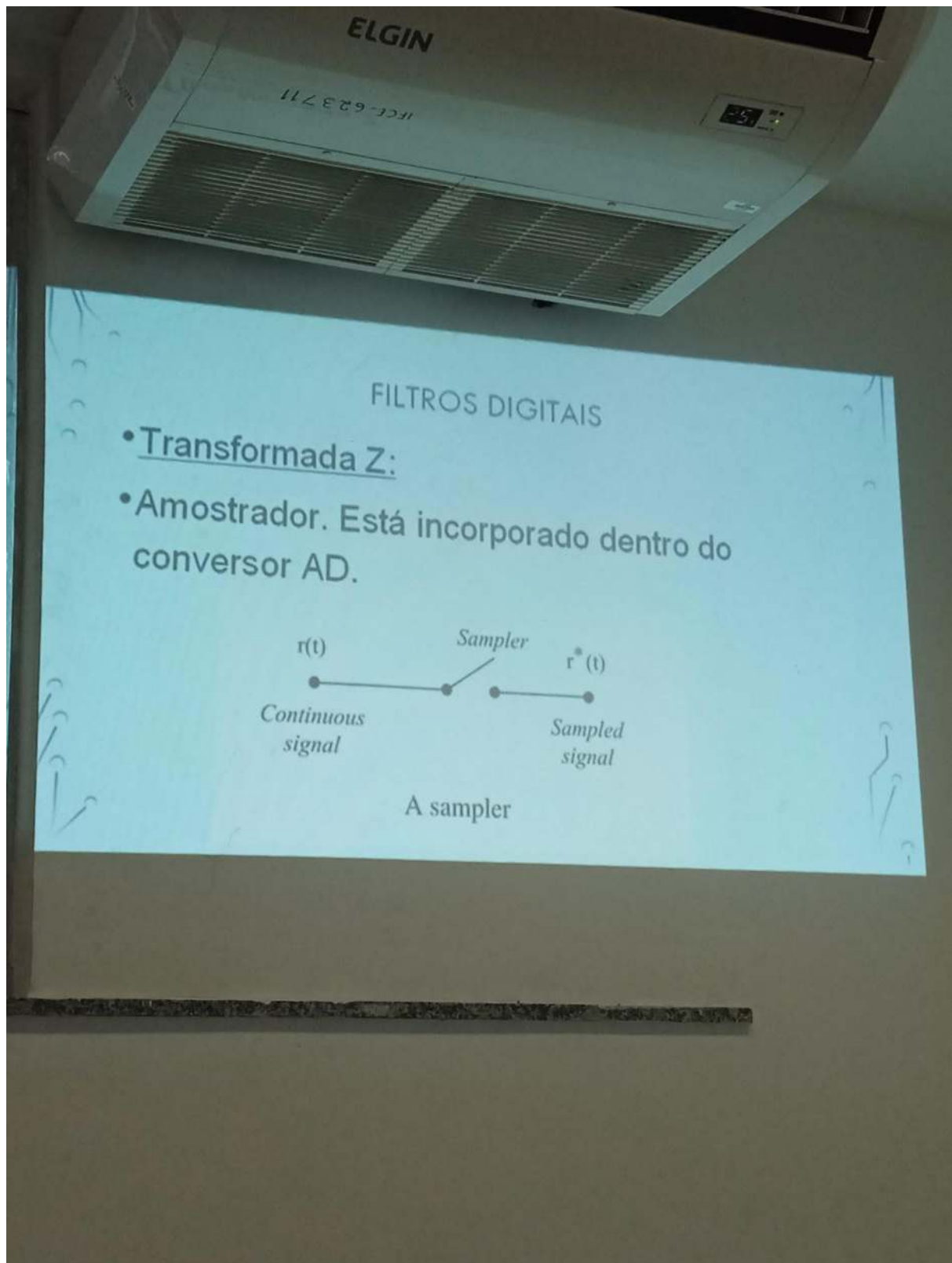
- Transformada Z:
 - Muito utilizada em sistemas de tempo discreto.
 - Utilizada para representar uma função em domínio do tempo ou da frequência no plano Z.
 - Para explicar a transformada Z, iremos começar explicando o processo de amostragem.
-

Processo



Obs: no mármore, está escrito Sensor

Sobre o amostrador da transformada Z

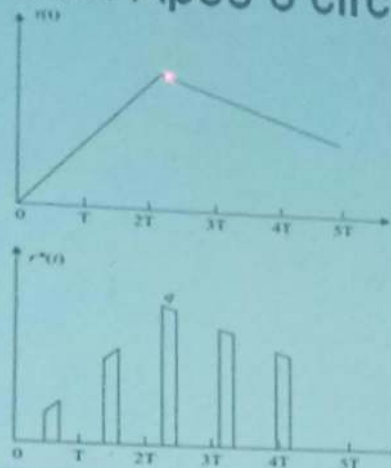


O Amostrador comuta um sinal periodicamente .

Exemplo de um sinal amostrado

FILTROS DIGITAIS

- Transformada Z:
- Sinal amostrado. Após o circuito amostrador.



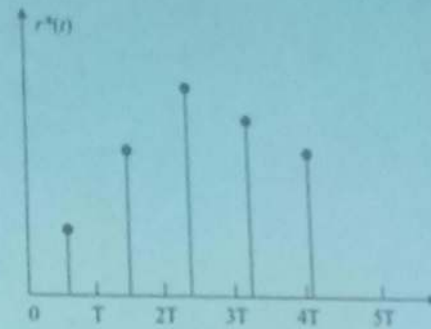
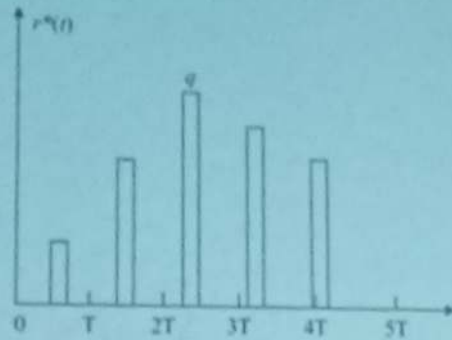
Page 129 of 312

No eixo y é um período de tempo T

Exemplo de um gráfico de um sinal amostrado e na direita um gráfico de um sinal amostrado ideal

FILTROS DIGITAIS

- Transformada Z:
- Gráfico do sinal amostrado ideal:



Signal $r(t)$ after ideal sampling

Função do sinal amostrado

FILTROS DIGITAIS

- Transformada Z:

- Função do sinal amostrado:

$$r^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(nT)\delta(t - nT). \quad (6.4)$$

Now

$$r(t) = 0, \quad \text{for } t < 0, \quad (6.5)$$

and

$$r^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)\delta(t - nT). \quad (6.6)$$

Taking the Laplace transform of (6.6) gives

$$R^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)e^{-snT}. \quad (6.7)$$

Sigma=> Delta de Dirac

Aplicando Laplace ao delta de Dirac

$$\mathcal{L}[\delta[t - nT]] = e^{-s n T}$$

$t \Rightarrow$ é o tempo de amostragem

Segurador de ordem zero:

É utilizado para manter(ou segurar) o valor de cada sinal amostrado

FILTROS DIGITAIS

Formada Z:

Segurador de ordem zero: Utilizado para manter (segurar) o valor de cada sinal amostrado.

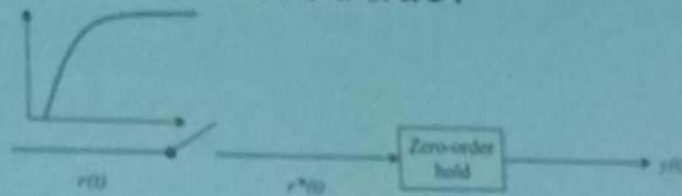


Figure 6.10 Ideal sampler and zero-order hold for Example 6.1

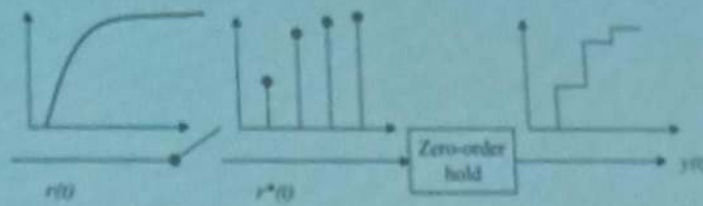
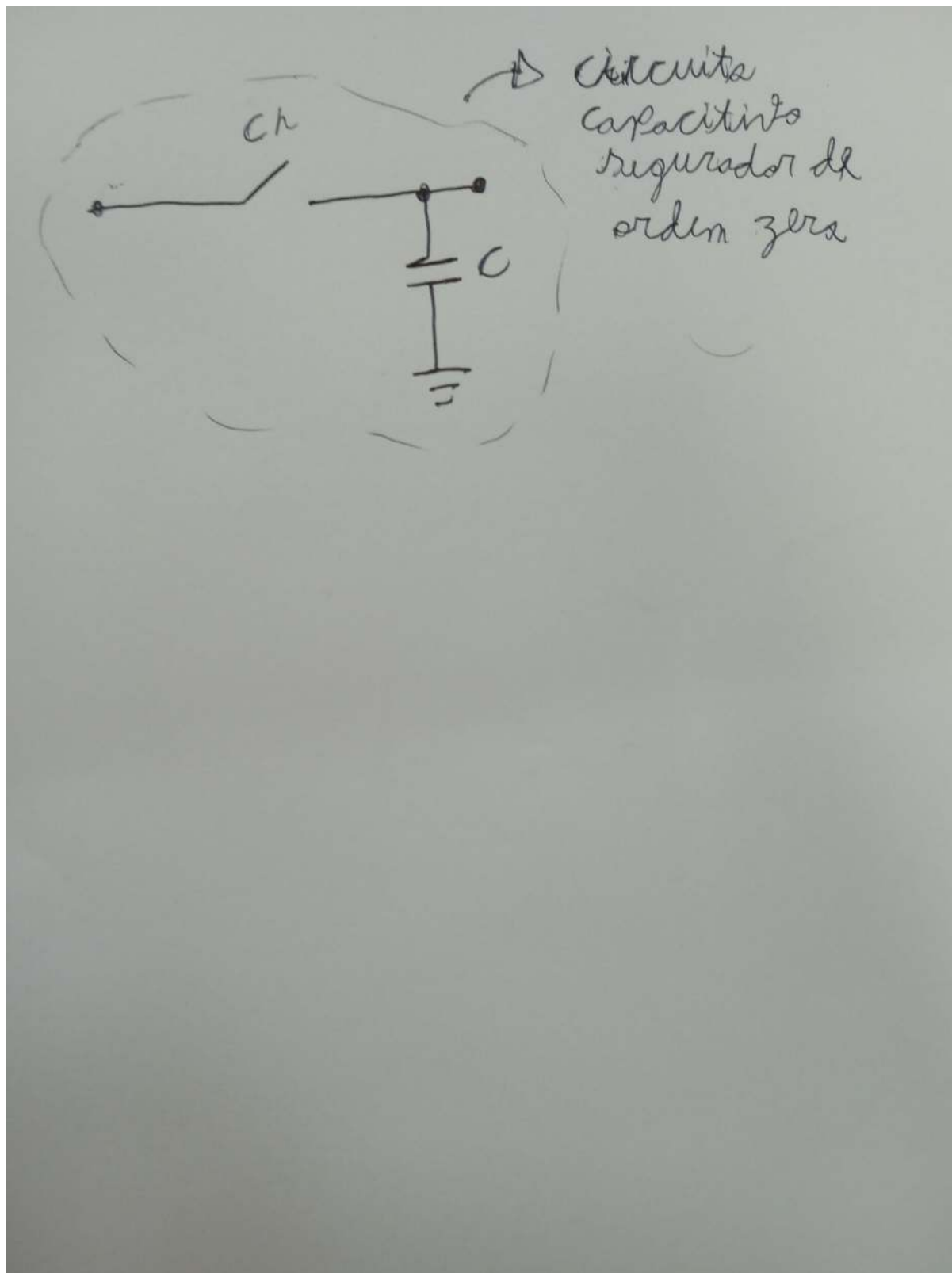
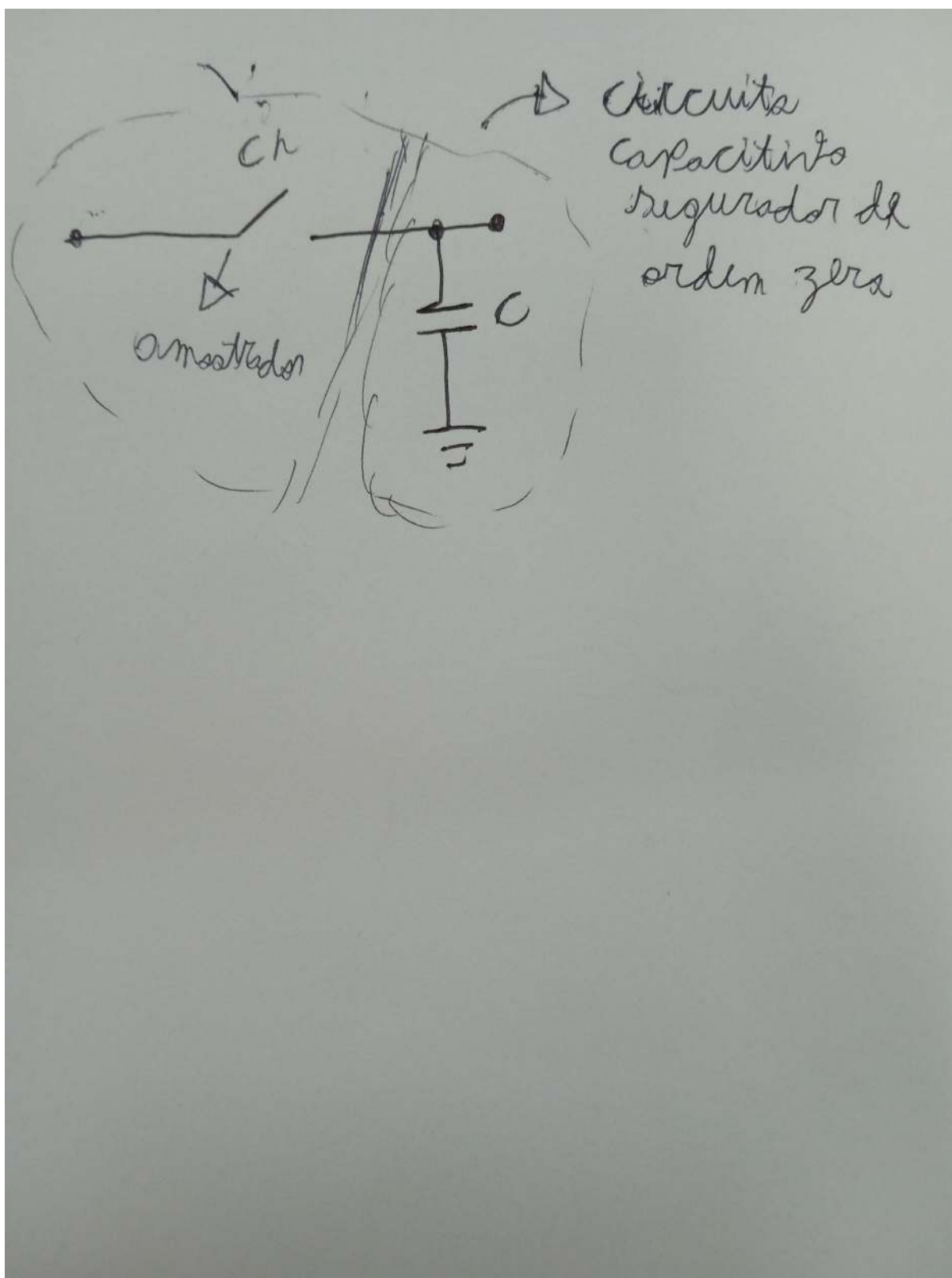


Figure 6.11 Solution for Example 6.1

Zero-order hold => Segurador de ordem zero

É um circuito capacitivo



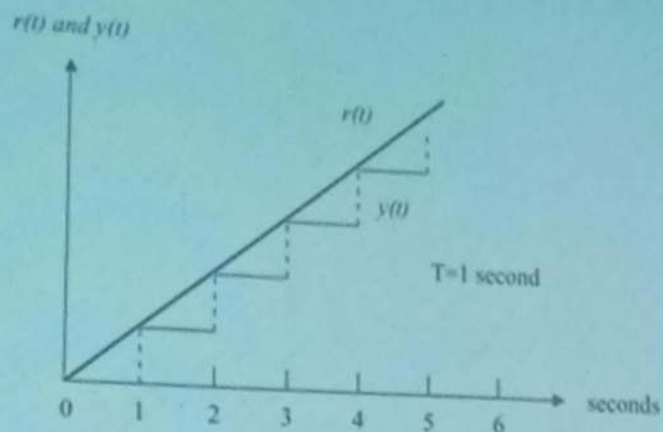


Gráfico

FILTROS DIGITAIS

Transformada Z:

Segurador de ordem zero: Utilizado para manter (segurar) o valor de cada sinal amostrado.



$r(t)$

$y(t)$

$T = 1 \text{ second}$

Encontrando a transformada Z

FILTROS DIGITAIS

- Transformada Z:
- Encontrando a transformada Z:

THE z-TRANSFORM

The z -transform is defined so

$$Z = e^{sT};$$

$Z[r(t)] = R(z)$ which, from (6.7), is given by

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)z^{-n}.$$

the z -transform consists of an infinite series in the complex variable z , and

$$R(z) = r(0) + r(T)z^{-1} + r(2T)z^{-2} + r(3T)z^{-3} + \dots$$

Transformada Z

$$R^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT) \cdot e^{-s n T}; \quad z = e^{sT}$$

$$Z[R^*(s)] = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT) \cdot z^{-n}$$

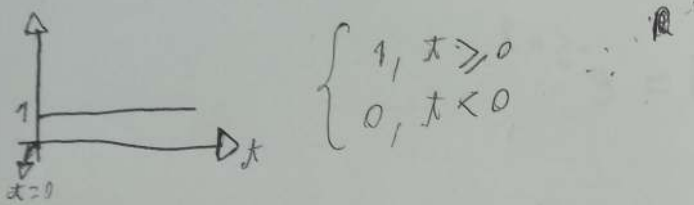
Representando em uma série infinita.

$$R(z) = r(0) + r(T) \cdot z^{-1} + r(2T) \cdot z^{-2} + \dots + r(nT) \cdot z^{-n}$$

Transformada Z para a função degrau unitário

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(nT) \cdot z^{-n} \Rightarrow n(0) + n(T) \cdot z^{-1} + n(2T) \cdot z^{-2} + \dots + n(nT) \cdot z^{-n}$$

• Função degrau unitário



$$I) R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(nT) \cdot z^{-n}$$

$$R(z) = 1 \cdot z^{-0} + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + \dots + 1 \cdot z^{-n}$$

$$R(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n} \rightarrow \text{Série infinita}$$

ou

$$R(z) = \frac{z}{z-1} \rightarrow \text{Forma Reduzida}$$

Série infinita só serve para tirar a representação, enquanto a forma reduzida é utilizado para fins de cálculo

Exemplo de demonstração de uma série Infinita para uma forma reduzida

$t > 0$
 $t < 0$

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT) \cdot z^{-n}$$

$$R(z) = 1 \cdot z^{-0} + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + \dots + 1 \cdot z^{-n}$$

$$R(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-n} \Rightarrow R(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$z^{-1} \cdot R(z) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots + z^{-n-1}$$

$$R(z) - z^{-1} \cdot R(z) = 1 + \cancel{z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n-1}}^{\substack{\text{cancelado} \\ n-1 \rightarrow \infty}} \Rightarrow R(z) - z^{-1} \cdot R(z) = 1$$

$$R(z) \left(1 - z^{-1} \right) = 1$$

$$R(z) \left(1 - \frac{1}{z} \right) = 1$$

$$R(z) \left(\frac{z-1}{z} \right) = 1$$

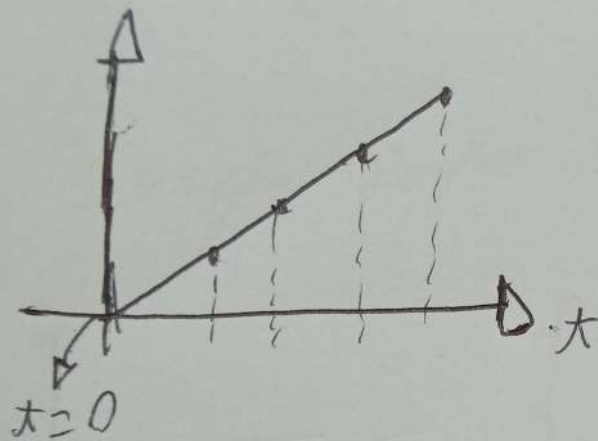
$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

Obs: $n = \text{infinito}$

Função Rampa (transformada Z)

30/08/22

- Função Rampa (Transformada Z)



$$\begin{cases} 0, & t < 0 \\ nT, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$z^{-n} \Rightarrow r(0) + r(T) \cdot z^{-1} + r(2T) \cdot z^{-2} + \dots + r(nT) \cdot z^{-n}$$

ADD z):

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT) \cdot z^{-n}$$

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nT \cdot z^{-n} \Rightarrow R(z) = 0 \cdot T \cdot z^{-0} + T \cdot z^{-1} + 2T \cdot z^{-2} + 3T \cdot z^{-3} + 4T \cdot z^{-4} + \dots + nT \cdot z^{-n}$$

$$R(z) = T \cdot z^{-1} + 2T \cdot z^{-2} + 3T \cdot z^{-3} + \dots + nT \cdot z^{-n}$$

$$R(z) = T \cdot (z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots + n \cdot z^{-n})$$

$$z \cdot R(z) = T \cdot (1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + \dots + n \cdot z^{-n+1})$$

$$z \cdot R(z) - R(z) = (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots + z^{-n}) \cdot T$$

$$+ nT \cdot z^{-n}$$

$$z \cdot R(z) - R(z) = T \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$R(z) \cdot (z-1) = \frac{T \cdot z}{z-1}$$

$$R(z) = \frac{T \cdot z}{(z-1)^2}$$

Transformada. Z para função exponencia

FILTROS DIGITAIS

- Transformada Z:
- A transformada Z para a função exponencial:

Exponential Function

Consider the exponential function shown in Figure 6.14, defined as

$$r(nT) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ e^{-anT}, & n \geq 0. \end{cases}$$

From (6.11),

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \dots$$

or

$$R(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}, \quad \text{for } |z| < e^{-aT}. \quad (6.12)$$

Some commonly used z -transforms

$f(kT)$	$F(z)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{z}$
1	$\frac{z}{z-1}$
kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$kT e^{-akT}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
$1 - e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin akT$	$\frac{z \sin aT}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$
$\cos akT$	$\frac{z(z - \cos aT)}{z^2 - 2z \cos aT + 1}$

Funções em tempo discreto

Exemplo

• Lembrete .

Função Exponencial

$$\begin{array}{ccccccc} e^{-at} & \xRightarrow{L} & \frac{1}{s+a} & \xRightarrow{Z} & \frac{z}{z-e^{-at}} & \xRightarrow{Z^{-1}} & e^{-ant} // \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & \text{Transformada } z & & \text{Transformada} & \\ & & & & & \text{inversa de } z & \end{array}$$

Ex

FILTROS DIGITAIS

- Transformada Z:
- Encontrando a transformada Z:

Let

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

Determine $G(z)$ by the methods described above.

Solution

Method 1: By finding the inverse Laplace transform. We can express $G(s)$ as a sum of its partial fractions:

$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+2)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

The inverse Laplace transform of (6.16) is

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{-2t} - e^{-3t}$$

From the definition of the z -transforms we can write (6.17) as

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-2nT} - e^{-3nT})z^{-n}$$

Exemplo $G(s)$

Aplicar a transformada Z na seguinte função de transferência:

Anotação do professor

APLICAR A TRANSFORMADA Z NA
SEGUINTE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

$$\frac{\cancel{s+2}}{(\cancel{s+2})(s+3)} = \frac{A \cdot (\cancel{s+2})}{\cancel{s+2}} + \frac{B \cdot \overset{0}{\cancel{s+2}}}{\cancel{s+2}} \Big|_{s=-2}$$

$$A = \frac{1}{s+3} \Big|_{s=-2} \Rightarrow \boxed{A=1}$$

$$e^{-at} = \frac{1}{s+a}$$

$$\frac{\cancel{s+3}}{(s+2)(\cancel{s+3})} = \frac{A \cdot \cancel{s+3}}{\cancel{s+2}} + \frac{B(\cancel{s+3})}{\cancel{s+3}} \quad | \quad s = -$$

$$B = \frac{1}{s+2} \quad | \quad s = -3$$

$$\boxed{B = -1}$$

$$G(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

$$G(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

~~(3+3)~~
~~2+3~~

$s = -3$

$$G(z) = \frac{z}{z - e^{-2T}} - \frac{z}{z - e^{-3T}}$$

$$G(z) = \frac{z \cdot (z - e^{-3T}) - z \cdot (z - e^{-2T})}{(z - e^{-2T}) \cdot (z - e^{-3T})}$$

$$G(z) = \frac{z^2 - z e^{-3T} - z^2 + z e^{-2T}}{(z - e^{-2T}) \cdot (z - e^{-3T})}$$

$$G(z) = \frac{z(-e^{-3T} + e^{-2T})}{(z - e^{-2T}) \cdot (z - e^{-3T})}$$

$$e^{-at} \xRightarrow{L} \frac{1}{s+a} \xRightarrow{Z} \frac{z}{z-e^{-at}} \xRightarrow{Z^{-1}} e^{-a \cdot n} //$$

\downarrow Transformada Z
 \downarrow Transformada inversa de Z

Exemplo

\Rightarrow Aplicar a Transformada Z na seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \rightarrow \text{Aplicando soma e produto (teorema médio)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

I) $A = ? ; \times (s+2)$

$$\frac{s+2}{(s+2)(s+3)} = \frac{A(s+2)}{(s+2)} + \frac{B(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=-2}$$

$A = 1$

II) $B = ? ; \times (s+3)$

$$\frac{(s+3)}{(s+2)(s+3)} = \frac{A(s+3)}{(s+2)} + \frac{B(s+3)}{(s+3)} \Big|_{s=-3}$$

$B = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=-3} \Rightarrow B = -1$

III) $G(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \xrightarrow{Z} G(z) = \frac{z}{z-e^{-2T}} - \frac{z}{z-e^{-3T}}$

IV)

caso { IV) Aplicando MMC

$$G(z) = \frac{z \cdot (z - e^{-3T}) - z(z - e^{-2T})}{(z - e^{-2T}) \cdot (z - e^{-3T})}$$

$$G(z) = \frac{\cancel{z^2} - ze^{-3T} - \cancel{z^2} + ze^{-2T}}{(z - e^{-2T}) \cdot (z - e^{-3T})}$$

$$G(z) = \frac{z \cdot (-e^{-3T} + e^{-2T})}{(z - e^{-2T}) \cdot (z - e^{-3T})} //$$

FILTROS DIGITAIS

- Transformada Z
- Encontre a transformada Z das seguintes funções de transferência:
- A) $F(s) = 2/(s+2)(s+5)$
- B) $G(s) = (s+3)/(s+1)(s+2)(s+3)$
- C) $H(s) = 5/(s^2 + 9s + 20)$
- D) $I(s) = 2s/(s+4)(s+6)$
- E) $G(s) = (s+1)/(s^2 + 9s + 18)$

Exemplo 2 $F(s)$ (item A)

Aplicar a transformada Z na seguinte função de transferência

Anotação do professor

APLICAZ A TRANSFORMADA Z NA
SEGUINTE FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA:

$$F(s) = \frac{2}{(s+2)(s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+5}$$

$$A = ? \Rightarrow \frac{2 \cdot \cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}(s+5)} = \frac{A \cdot \cancel{(s+2)}}{\cancel{s+2}} + \frac{B \cdot \overset{0}{\cancel{(s+2)}}}{s+5} \Big|_{s=-2}$$

$$A = \frac{2}{s+5} \Big|_{s=-2} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$B = ? \Rightarrow \frac{2 \cdot \cancel{(s+5)}}{(s+2)\cancel{(s+5)}} = \frac{A \cdot \cancel{(s+5)}}{(s+2)} + \frac{B \cdot \cancel{(s+5)}}{\cancel{s+5}} \Big|_{s=-5}$$

$$B = \frac{2}{s+2} \Big|_{s=-5} \Rightarrow B = -\frac{2}{3}$$

$$e^{-at} \xrightarrow{L} -$$

$$F(s) = \frac{2/3}{s+2} - \frac{2/3}{s+5}$$

$$F(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+5}$$

$$F(z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z - e^{-2T}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z - e^{-5T}}$$

Anotação do Cristiano

30/08/22

Exemple 2

Lembrando: $\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s+a} \Rightarrow \frac{1}{s+a} \Rightarrow \frac{z}{z-e^{-at}}$

$$F(s) = \frac{2}{(s+2) \cdot (s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+5}$$

I) $A = ?; \times (s+2)$

$$A = ? = \frac{2 \cdot (s+2)}{(s+2) \cdot (s+5)} = \frac{A(s+2)}{s+2} + \frac{B(s+2)}{s+5} \Big|_{s=-2}$$

$$\boxed{A = \frac{2}{3}}$$

II) $B = ?; \times (s+5)$

$$B = \frac{2 \cdot (s+5)}{(s+2) \cdot (s+5)} = \frac{A(s+5)}{s+2} + \frac{B(s+5)}{s+5} \Big|_{s=-5}$$

$$B = \frac{2}{s+2} \Big|_{s=-5} \Rightarrow B = -\frac{2}{3} //$$

III)

$$F(s) = \frac{2/3}{s+2} - \frac{2/3}{s+5}$$

$$F(s) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+5}$$

$$F(z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z-e^{-2T}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z-e^{-5T}} //$$