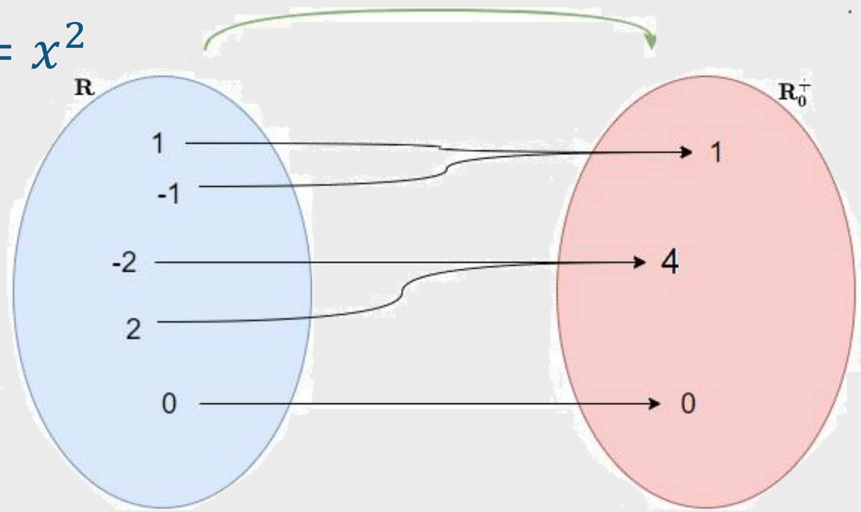
LE FUNZIONI

Funzioni reali di variabile reale e loro proprietà

Funzioni numeriche reali

- Una funzione è una corrispondenza biunivoca, cioè una relazione tra due insiemi che ad ogni elemento del primo insieme associa un solo elemento del secondo.
- Relazione = sottoinsieme del prodotto cartesiano tra i due insiemi
- Funzione numerica → se i due insiemi di partenza e di arrivo sono numerici
- Funzioni reali di variabile reale: funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ → $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Esempio 1: funzione doppio → $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = y = 2x$
- Esempio 2: funzione quadrato → $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = y = x^2$



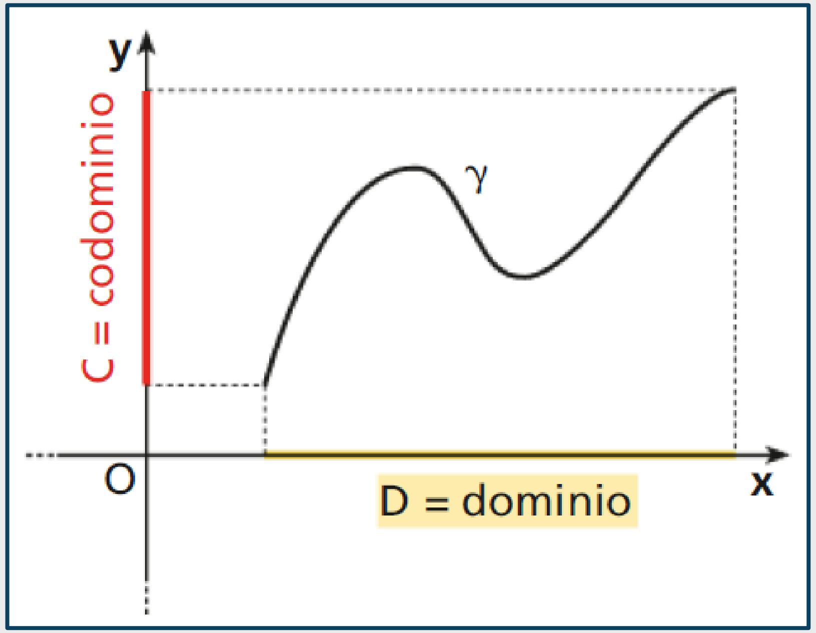
Classificazione delle funzioni

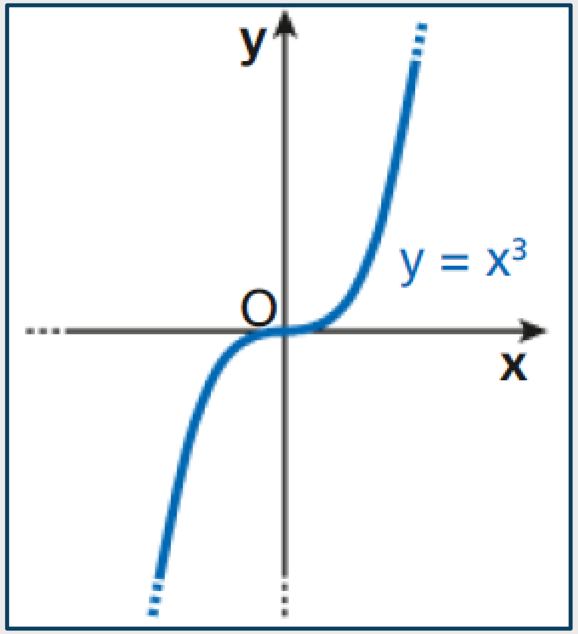
- ALGEBRICA
  - **razionale intera** (o polinomiale) se è espressa mediante un polinomio;
  - **razionale fratt**a se è espressa mediante quozienti di polinomi;
  - **irrazionale** se la variabile indipendente compare sotto il segno di radice.

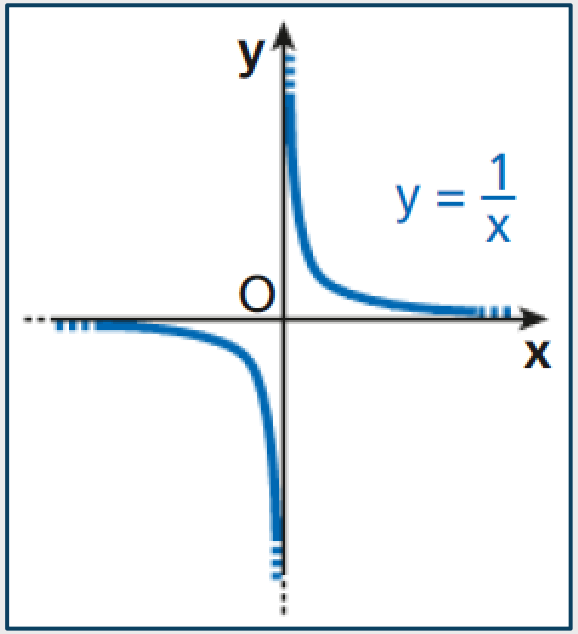
- TRASCENDENTE (es. funzioni logaritmiche, esponenziali, goniometriche)

Grafico, dominio e codominio

- Grafico cartesiano: ogni punto (x; y) in cui y=f(x) fa parte del grafico della funzione.
- Dominio o campo di esistenza: relativo alla x → insieme di partenza (insieme dei valori assegnabili alla x)
- Codominio o insieme immagine: relativo alla y → insieme di arrivo, insieme delle immagini del dominio







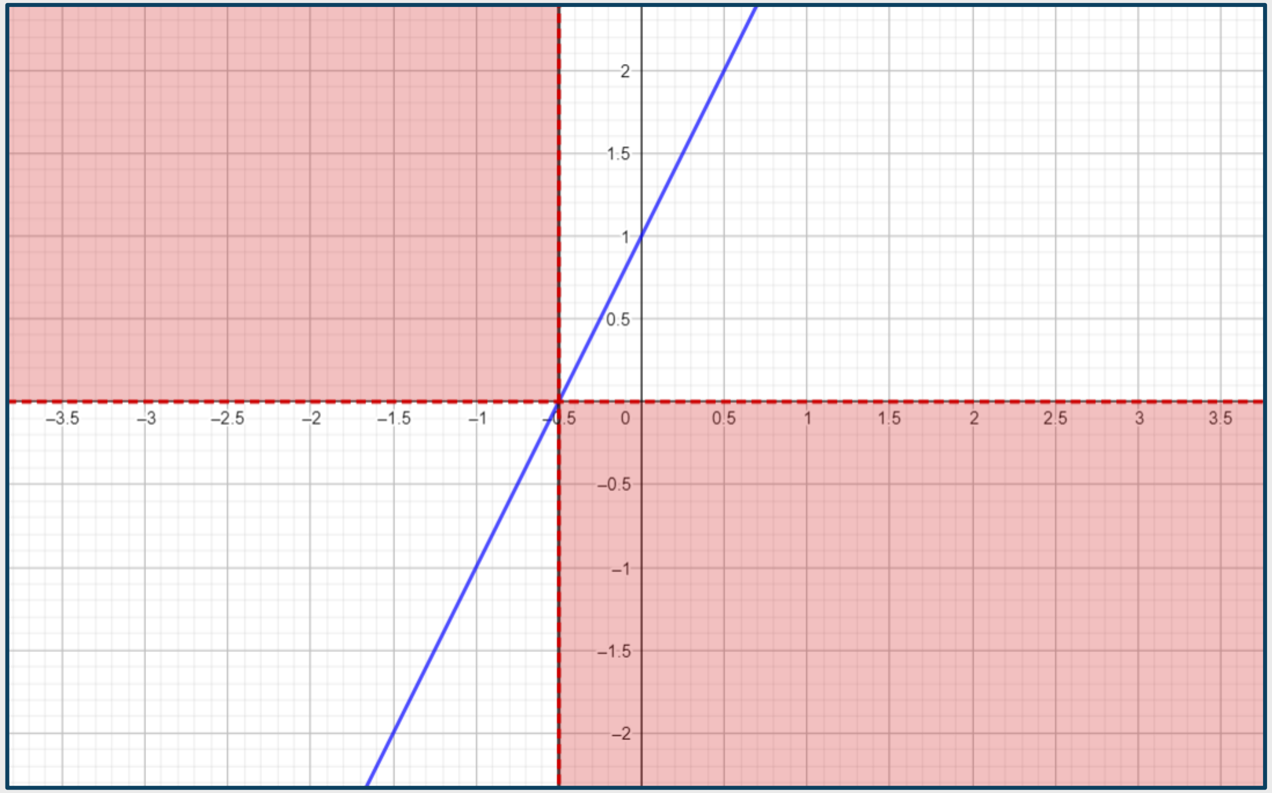
Zeri e segno

- ZERO di f → valore di x che annulla la funzione, valore x_0 per cui $y=f(x_0)=0$
- SEGNO di f → segno della funzione, cioè di y=f(x), positivo se la funzione è sopra all'asse delle x (cioè se y>0) e negativo altrimenti.

ESEMPIO: $f(x) = y = 2x + 1$

Zeri: $2x + 1 = 0 \;\rightarrow\; 2x = -1 \;\rightarrow\; x = -\frac{1}{2}$

Segno: $2x + 1 > 0 \rightarrow 2x > -1 \rightarrow x > -\frac{1}{2}$



Funzioni definite a tratti

Funzione definita da espressioni analitiche diverse in diversi tratti, come ad esempio la funzione valore assoluto:

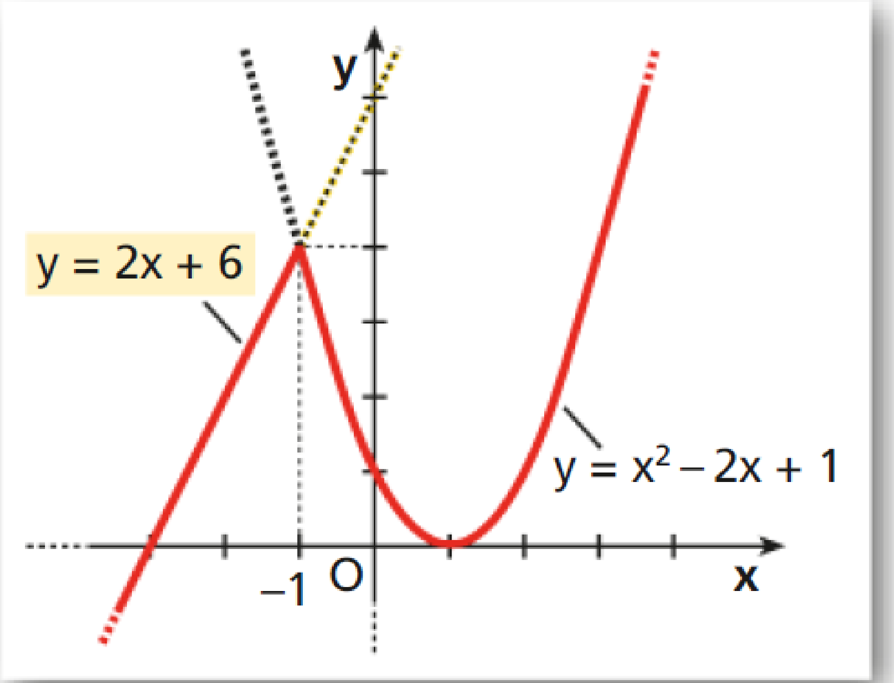
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

La funzione

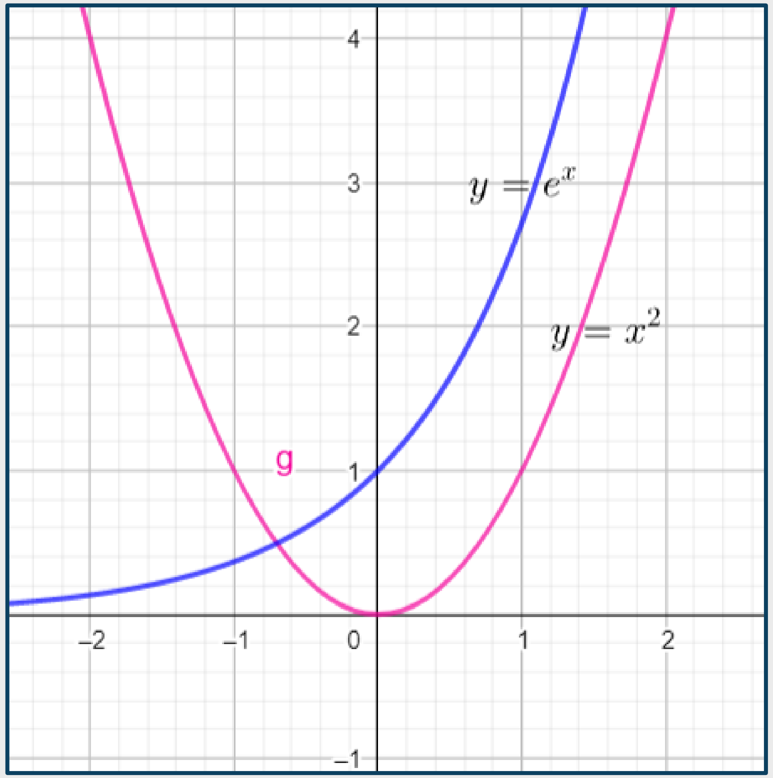
$$y = \begin{cases} 2x + 6 & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

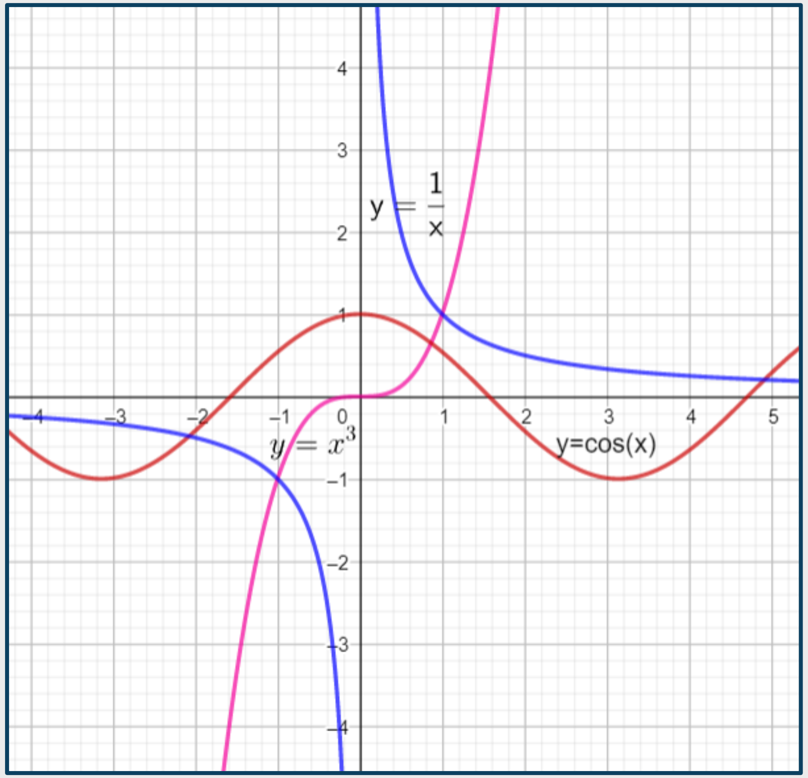
è definita a tratti. Nella figura il suo grafico è in rosso.



Funzioni iniettive, suriettive e biiettive

- Funzione INIETTIVA = ogni elemento del codominio è immagine di un solo elemento del dominio
- Funzione SURIETTIVA = ogni elemento dell'insieme di arrivo è immagine di almeno un elemento del dominio → il codominio coincide con l'insieme di arrivo (definendo la funzione dal dominio al codominio si può sempre rendere suriettiva la funzione)
- Funzione BIIETTIVA = funzione sia iniettiva che suriettiva



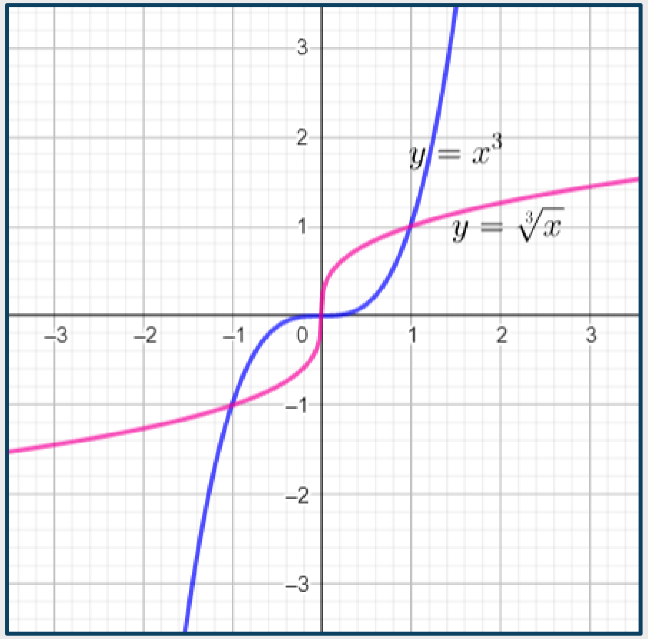


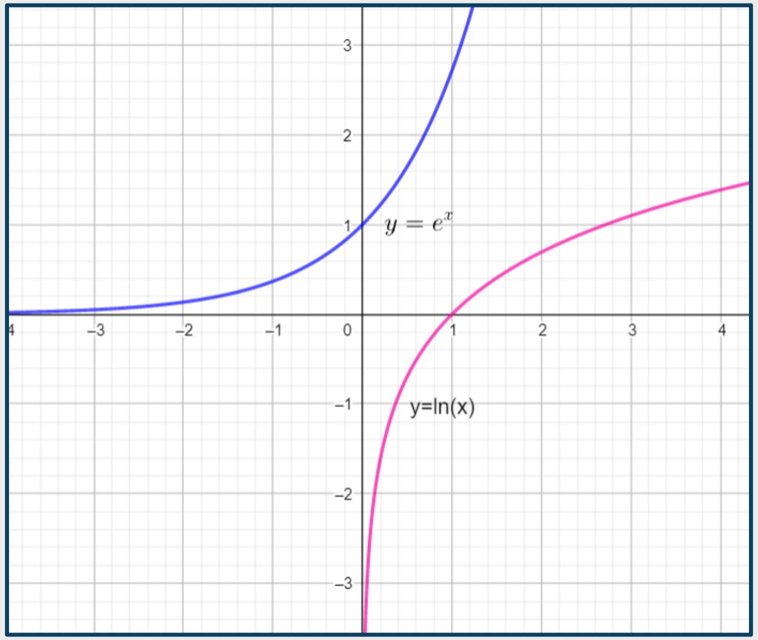
Funzione inversa

Le funzioni biiettive $f: A \to B$ ammettono l'inversa, cioè la funzione $f^{-1}: B \to A$ che ad ogni y di B associa il valore x di A tale che $x = f^{-1}(y)$, cioè $y = f(x)$.

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = x^3 \to f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, y = f(x) = e^x \to f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, y = f^{-1}(x) = \ln(x)$

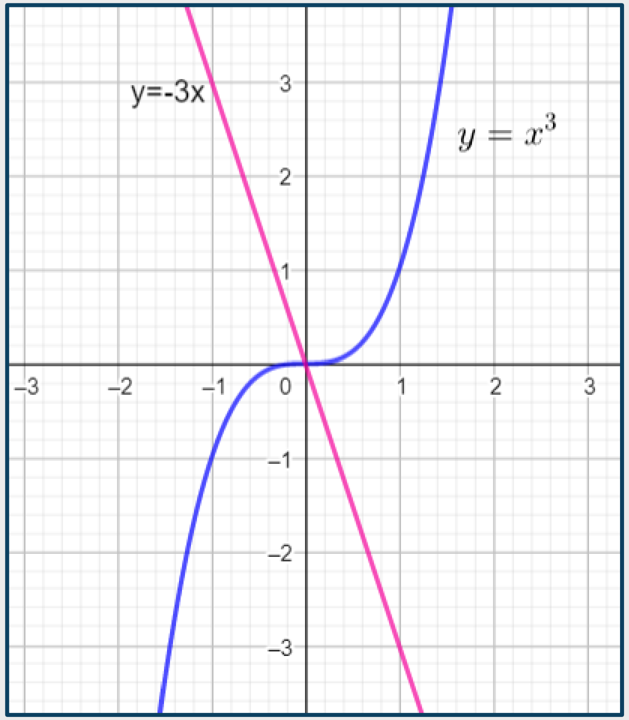


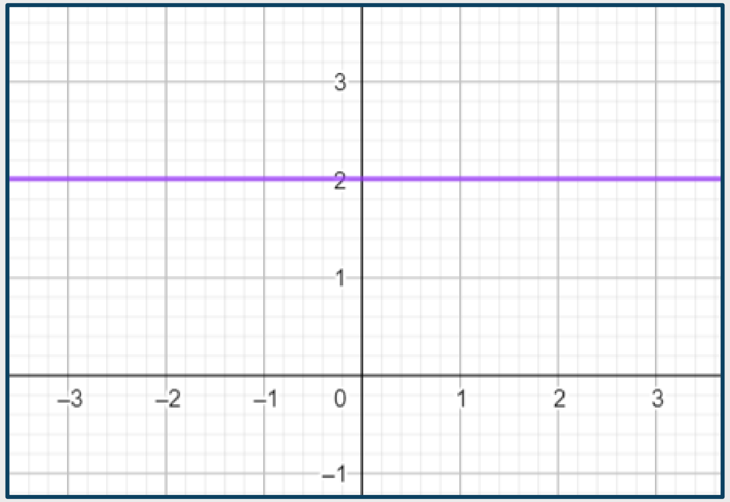


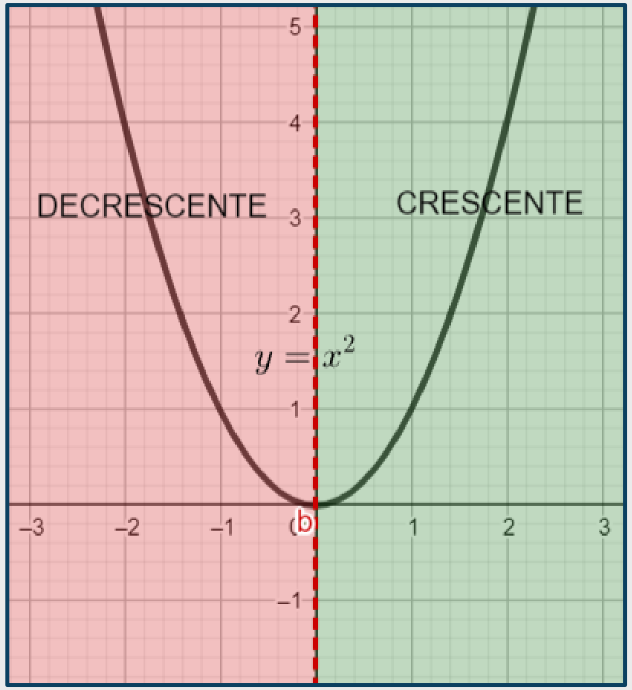
P.S.: come per l'esponenziale, ogni funzione non suriettiva si può invertire restringendo il codominio, così come ogni funzione non iniettiva si può invertire a tratti scegliendo una parte del dominio dove essa sia iniettiva (es. seno e coseno).

Funzioni monotone

- Funzione CRESCENTE: al crescere di x cresce anche la y
- Funzione DECRESCENTE: al crescere di x la y cala
- Monotone = termine generico per crescenti o decrescenti

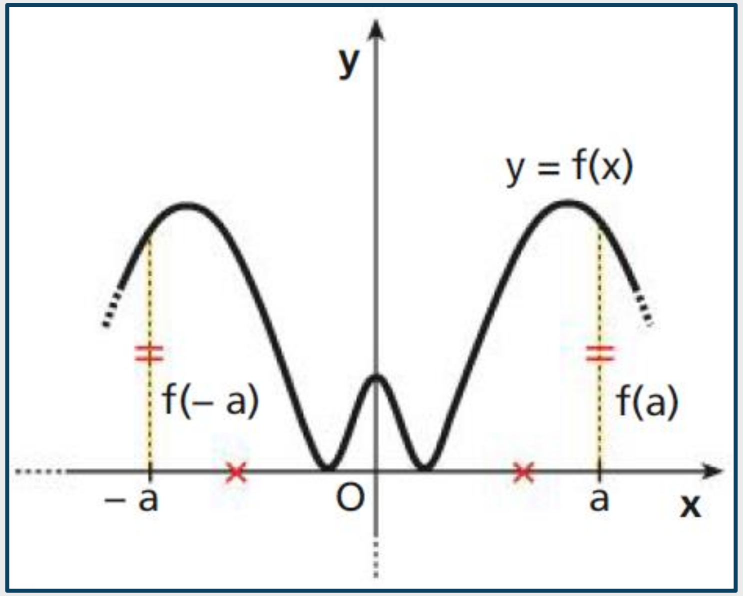




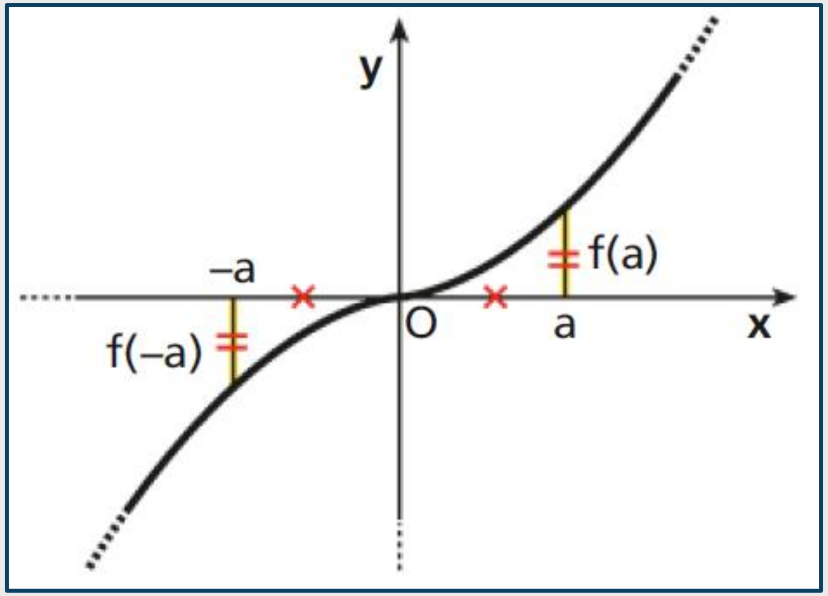


Funzioni pari e dispari

- Funzione PARI = simmetrica rispetto all’asse delle y: $f(-x) = f(x)$
- Funzione DISPARI = simmetrica rispetto all’origine: $f(-x) = -f(x)$



Ad es., solo potenze pari



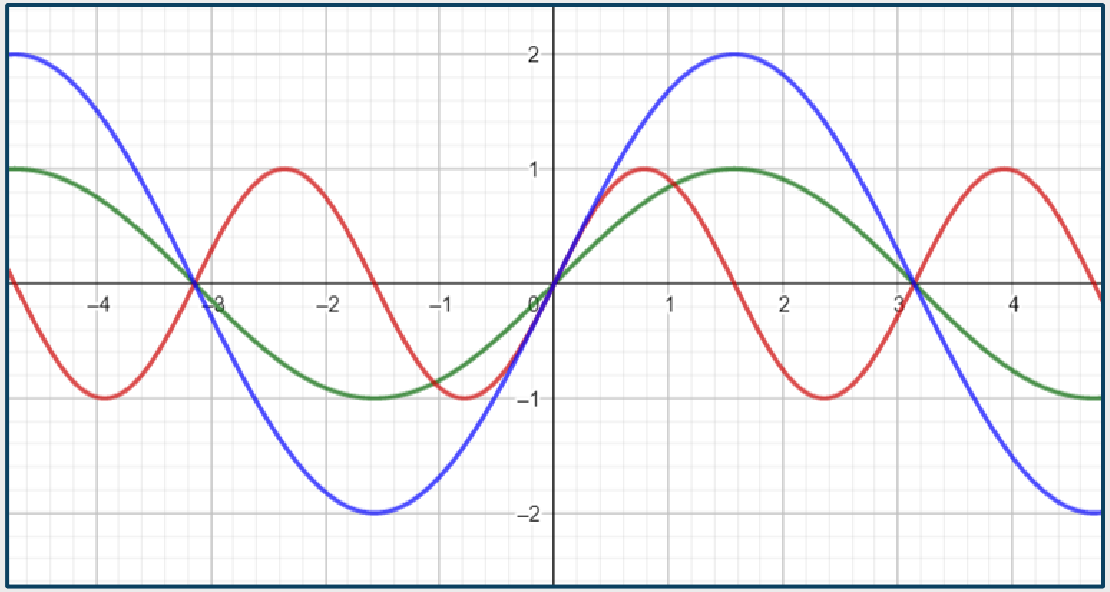
Ad es., solo potenze dispari

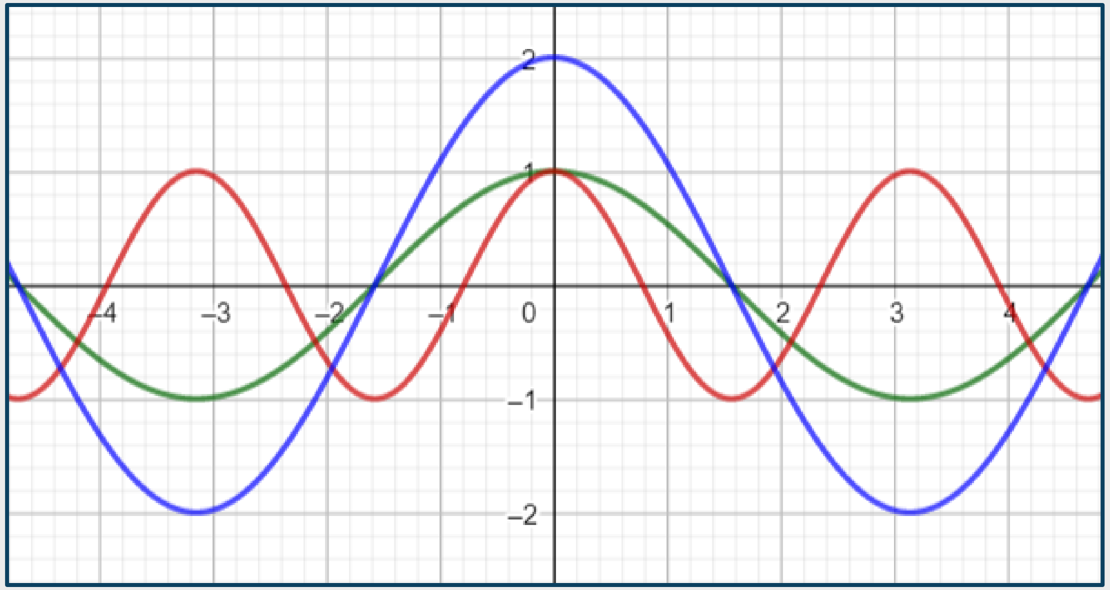
Funzioni periodiche

Funzioni che si ripetono periodicamente dopo un determinato intervallo T sulla x, detto *periodo* della funzione:

$$f(x) = f(x + kT)$$

Tutte le funzioni goniometriche sono periodiche.



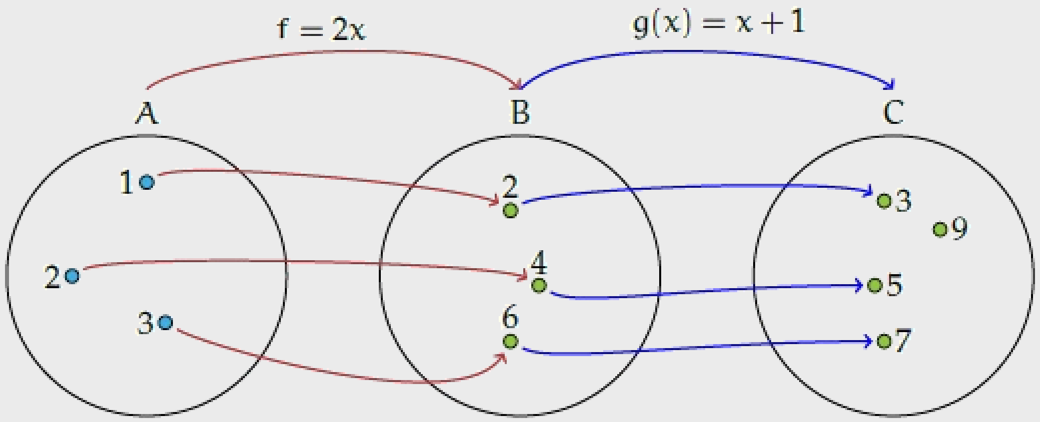


Funzioni composte

Funzione formata dalla composizione di più funzioni diverse: vengono applicate le leggi delle varie funzioni in ordine, partendo dalla più vicina alla x nella scrittura.

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Si legge f composto g si svolge applicando g alle immagini delle x calcolate secondo f.



ESEMPIO: $f(x) = 2x$ e $g(x) = x + 1 \rightarrow g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x) = 2x + 1$

Se $x = 1$, allora $g \circ f(1) = g\big(f(1)\big) = g(2 \cdot 1) = 2 + 1 = 3$

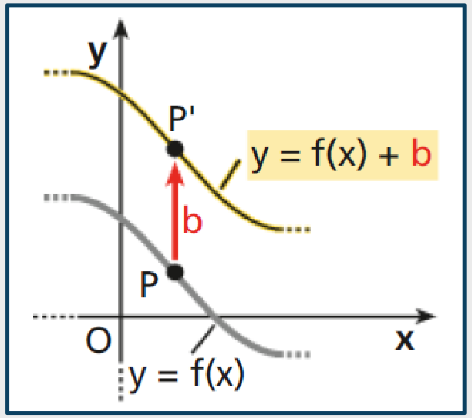
Se $x = -3$, allora $g \circ f(-3) = g\big(f(-3)\big) = g\big(2 \cdot (-3)\big) = -6 + 1 = -5$

P.S.: Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ allora $g \circ f: A \rightarrow C$.

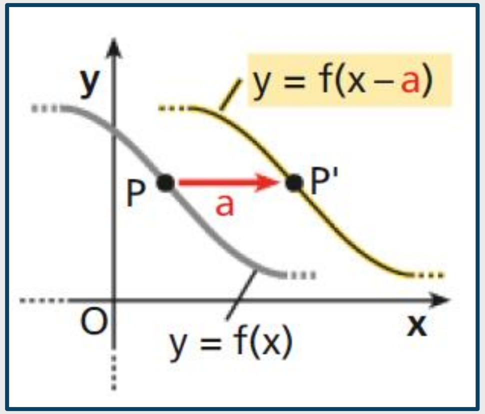
DOMANDONE: la composizione tra funzioni è commutativa?

Funzioni e trasformazioni geometriche

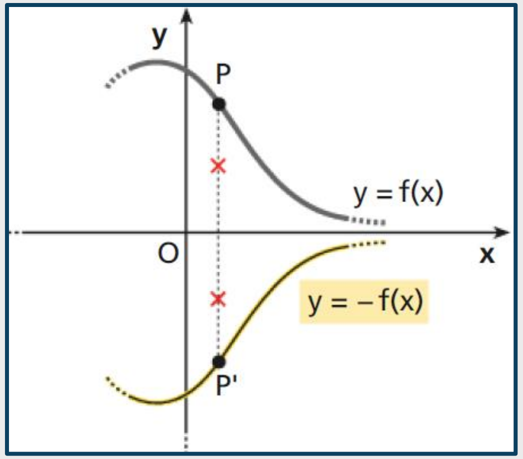
- $y = f(x) \pm k$ → sfasamenti sull'asse y



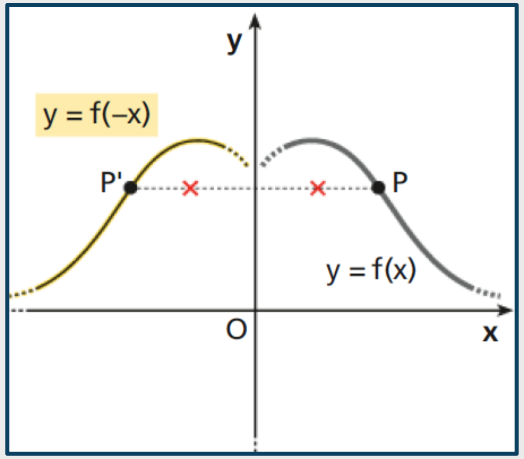
- $y = f(x \pm k)$ → sfasamenti sull'asse x



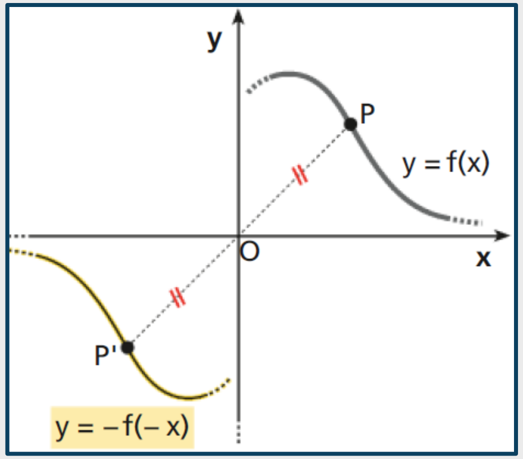
- $y = -f(x)$ → simmetria asse x



- $y = f(-x)$ → simmetria asse y



- $y = -f(-x)$ → simmetria centro O

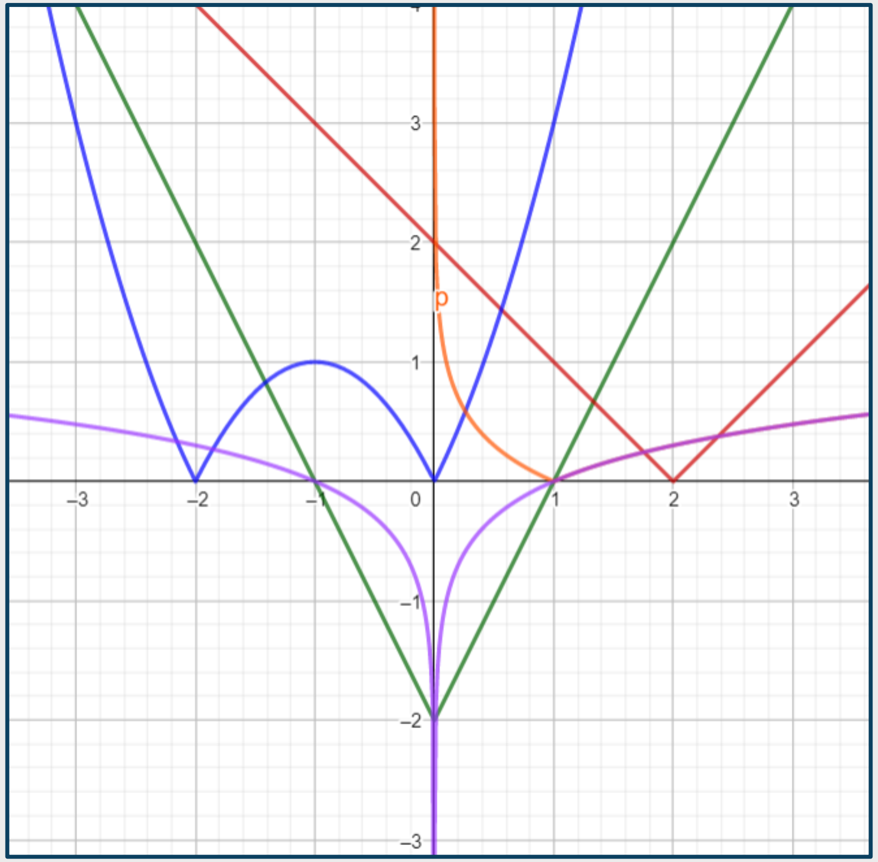


Funzione valore assoluto e funzioni con valore assoluto

- Funzione valore assoluto = funzione spezzata, definita a tratti

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

- Funzioni con valore assoluto = funzioni composte con la funzione valore assoluto



- $f: y = 2|x| - 2$
- $g: y = |x - 2|$
- $h: y = |x^2 + 2x|$
- $p: y = |\log_{10}(x)|$
- $q: y = \log_{10}(|x|)$