INTEGRALI

Integrali indefiniti, definiti, propri e impropri, significato analitico e geometrico

INDICE DEI CONTENUTI

DEFINIZIONE DI INTEGRALE INDEFINITO

L'integrale è l'operatore inverso dell'operatore derivata:

$$\int f(x)dx = F(x) \iff F'(x) = f(x)$$

dx si chiama DIFFERENZIALE ed è un operatore che ci dice in che variabile integrare/derivare: viene dalla definizione di derivata.

$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} \rightarrow dg(x) = g'(x)dx \rightarrow dx = \frac{dg(x)}{g'(x)} \rightarrow dx = \frac{dy}{y'}$$

PRIMITIVA O PRIMITIVE?

La funzione F(x) che è integrale di f(x) si dice **primitiva** di f.

È unica?

Esempio: quali sono le funzioni che hanno come derivata f(x)=2x

1) $F_1(x) = x^2$
2) $F_2(x) = x^2 + 1$
3) $F_3(x) = x^2 - 3$
4) …

→ tutte le infinite funzioni $F(x) = x^2 + c$, con c costante reale

→ il risultato di un integrale indefinito sono infinite funzioni primitive

TUTTE LE FUNZIONI SONO INTEGRABILI?

Una funzione che ammette una primitiva (e quindi infinite) si dice INTEGRABILE.

Le funzioni continue sono integrabili (anche solo in tratti):

CONDIZIONE SUFFICIENTE DI INTEGRABILITA’

Se una funzione è continua in un intervallo reale, allora ammette primitive nello stesso intervallo.

→ Cosa significa condizione sufficiente? È anche necessaria?

INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

- $(x^n)' = (n-1)x^{n-1} \Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

- $(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

- $(e^x)' = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x + c$

- $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x \, dx = \sin x + c$

- $(\cos x)' = -\sin x \Rightarrow \int \sin x \, dx = -\cos x + c$

- $(\mathrm{t}g\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{t}g\, x + c$

- $(\mathrm{cot}g\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cot}g\, x + c$

LA LINEARITÀ DELL'OPERATORE INTEGRALE

L'operatore integrale, come la derivata, è lineare, cioè:

1) $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

Naturalmente, come per la derivata, NON valgono proprietà analoghe per il prodotto e per il rapporto.

ESEMPIO DI APPLICAZIONE PRATICA IN FISICA

Esempio: un'auto si muove con accelerazione data dalla legge $a(t) = 2t + 3$. Trova la legge oraria del moto dell'auto, sapendo che all'istante t=0 l'auto era allo spazio s=0 e aveva velocità nulla.

$$a(t) = t + 3 \rightarrow v(t) = \int a(t)dt = \int (2t + 3)dt = t^2 + 3t + c_1 \rightarrow v(t) = t^2 + 3t + c_1$$

$$v(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 + c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (t^2 + 3t)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + c_2 \rightarrow s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + c_2$$

$$s(0) = \frac{0^3}{3} + 3 \cdot \frac{0^2}{2} + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0 \rightarrow \boxed{s(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2}}$$

PRODOTTO DI UNA FUNZIONE COMPOSTA PER LA DERIVATA DELLA FUNZIONE INTERNA

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x)dx = G\big(f(x)\big) + c$$, con G primitiva di g

Esempi:

1) $\int \underbrace{(5x^2+3x)^3}_{\mathrm{f}(x)^3} \cdot \underbrace{(10x+3)}_{f'(x)} dx = \frac{\left(5x^2+3x\right)^4}{4} + c$

2) $\int \mathrm{tg}\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \overbrace{\frac{1}{\cos x}}^{\frac{1}{\mathrm{f(x)}}} \cdot \overbrace{(-\sin x)}^{f'(x)} dx = -\ln|\cos x| + c$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt\,, dove\ x = g(t)\ e\ dx = g'(t)dt$$

Esempio: $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}dx$ $\rightarrow$ sostituiamo $e^{2x} = t$

Calcoliamo x: $2x = \ln t \rightarrow x = \frac{\ln t}{2}$

Calcoliamo dx: $dx = \left(\frac{\ln t}{2}\right)' dt = \frac{1}{2t}dt$

$\rightarrow \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}dx = \int \frac{t}{t+2} \cdot \frac{1}{2t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+2}dt = \frac{1}{2}\ln|t+2| + c = [t = e^{2x}] = \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+2| + c$

UN ALTRO ESEMPIO PER SOSTITUZIONE

$\int \frac{\sqrt{1-x}+3}{\sqrt{1-x}+1} dx = [\sqrt{1-x} = t] = \int \frac{t+3}{t+1} dx$ → dobbiamo ora trasformare il dx

→ $se\ t = \sqrt{1-x}\ allora\ 1-x = t^2 \rightarrow x = 1-t^2$
→ $dx = (1-t^2)'dt = -2tdt$

Risolviamo dunque $\int \frac{t+3}{t+1} \cdot 2t\ dt = \int \frac{(t+1)+2}{t+1} 2tdt = \int \frac{t+1}{t+1} 2tdt + \int \frac{2}{t+1} 2tdt =$

$$\int 2tdt + \int \frac{4t}{t+1} dt = t^2 + 4\int \frac{t+1-1}{t+1} dt = t^2 + 4t - \ln|t+1| + c$$

→ sostituisco t → $= 1 - x + 4\sqrt{1-x} - \ln\left|\sqrt{1-x}+1\right| + c$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

Esempi: $\int x \cdot e^x dx = x \cdot \int e^x dx - \int (x)' \cdot [\int e^x dx] dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x$

f g'

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x \, dx = x^2 \sin x - 2x \cdot (-\cos x) - \int 2(-\cos x) dx =$$

f g' f g'

$$= x^2 \sin x + 2x \cdot \cos x + 2 \sin x + c$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE (1)

PRIMO CASO: GRADO DEL NUMERATORE < GRADO DENOMINATORE

(A) Il numeratore è la derivata del denominatore

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

Esempio: $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\,dx = \int \frac{(x^2-3x+1)'}{x^2-3x+1}\,dx = \ln|x^2-3x+1| + c$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE (2)

PRIMO CASO: GRADO DEL NUMERATORE < GRADO DENOMINATORE

(B) Il denominatore è di I grado

Moltiplico e divido per quel numero che mi permette di avere a numeratore la derivata del denominatore, e poi eseguo come al punto A.

$$\int \frac{5}{10x-3}\,dx = \int \frac{2}{2}\cdot\frac{5}{10x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{10}{10x-3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|10x-3| + c$$

$$(10x-3)' = 10 \nearrow$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE (3)

PRIMO CASO: GRADO DEL NUMERATORE < GRADO DENOMINATORE

(C) Il denominatore è di II grado

Δ>0

Risolvo l'equazione
di II grado denom.=0
e scompongo il denom.
con le radici:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Trovo A e B per cui:

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{x-x_2}$$

Δ=0

Risolvo l'equazione
e trovo la radice per
scomporre:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Trovo A e B per cui:

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_1)^2}$$

Δ<0

Trasformo l'integrale nella
forma:

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1} dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + c$$

Oppure nella forma:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1} dx$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE (4)

PRIMO CASO: GRADO DEL NUMERATORE < GRADO DENOMINATORE

(C) Il denominatore è di II grado - esempi

Δ>0

$$\int \frac{3x+2}{x^2+4x+3}dx = \int \frac{3x+2}{(x+1)(x+3)}dx$$

Trovo A e B tali che: $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{3x+2}{(x+1)(x+3)} \rightarrow \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{3x+2}{(x+1)(x+3)}$

$$\begin{cases} Ax+Bx=3x \\ 3A+B=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=3-A \\ 3A+B=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=3-A \\ 3A+3-A=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=3-A \\ 3A+3-A=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=3-A \\ 2A=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2} \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)(x+3)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{x+3}dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{7}{2}\ln|x+3| + c$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE (5)

PRIMO CASO: GRADO DEL NUMERATORE < GRADO DENOMINATORE

(C) Il denominatore è di II grado - esempi

Δ=0

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2}dx$$

Trovo A e B tali che: $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x+1)^2} \to \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$

$$\begin{cases} Ax = 2x \\ A+B = 1 \end{cases} \to \begin{cases} A = 2 \\ B = 1-2 = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x+1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{2}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = 2\ln|x+1| - \ln(x+1)^2 + c$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE (6)

PRIMO CASO: GRADO DEL NUMERATORE < GRADO DENOMINATORE

(C) Il denominatore è di II grado - esempi

Δ<0

NUMERATORE DI GRADO 0

$$\int \frac{2}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{2}{(x^2+4x+4)+1}dx = 2\int \frac{1}{(x+2)^2+1}dx = \operatorname{arctg}(x+2)+c$$

NUMERATORE DI GRADO 1

$$\int \frac{2x+3}{x^2+6x+10}dx = \int \frac{2x+6-3}{x^2+6x+10}dx = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}dx - \int \frac{3}{(x+3)^2+1}dx = \ln(x^2+6x+10) - 3\operatorname{arctg}(x+3)+c$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE (7)

PRIMO CASO: GRADO DEL NUMERATORE < GRADO DENOMINATORE

(D) Il denominatore è di grado >II

Fattorizzo e divido i fattori come nel caso A: se il denominatore è di II grado non fattorizzabile, a numeratore metto un polinomio di I grado.

Esempio:

$$\int \frac{x+2}{x^4-1}dx = \int \frac{x+2}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}dx \to \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}=\frac{x+2}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ B-C+D=0 \\ -A+C+D=1 \\ -B-C+D=2 \end{cases} \to \begin{cases} B=-1 \\ C=-\frac{1}{4} \\ A=-\frac{1}{2} \\ D=\frac{3}{4} \end{cases} \to \int \frac{-\frac{1}{2}x-1}{x^2+1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{x-1}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{4}\ln|x-1|$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{4}\ln|x-1|=-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}(x^2-1)-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{4}\ln|x-1|+c$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE (8)

SECONDO CASO: GRADO DEL NUMERATORE ≥ GRADO DENOMINATORE

Si fa la divisione per poi risolvere i due integrali separati di quoziente e resto:

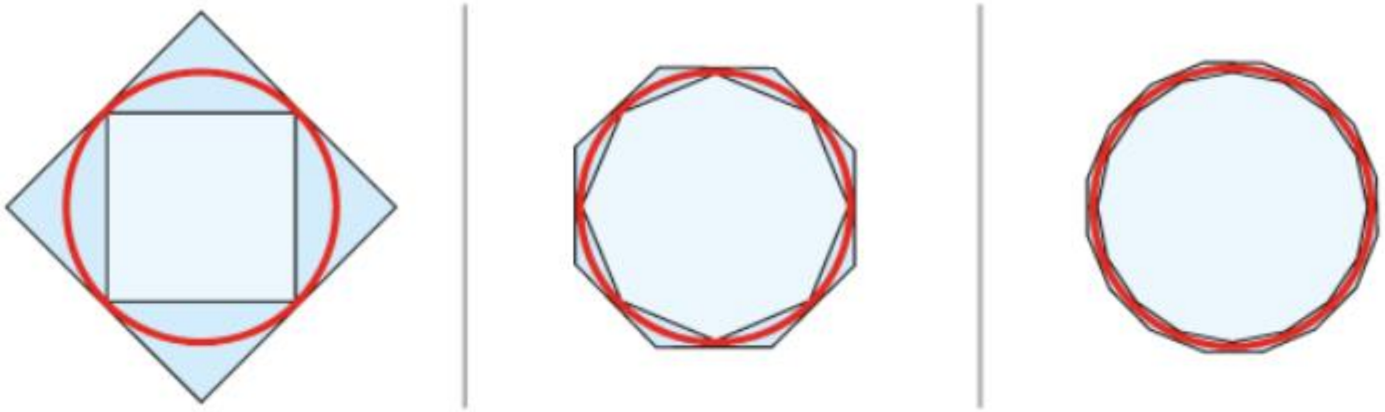
$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx = \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}dx$$

Esempio:

$$\int \frac{x^2+x-1}{x+1}dx \to (x^2+x-1):(x+1) = x\ con\ R = -1$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x+1}dx = \int x dx - \int \frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x+1| + c$$

INTEGRALI DEFINITI: IL PROBLEMA DELLE AREE



Integrale definito → calcolo aree di figure curvilinee (es. poligono → cerchio)

Come calcolare l'area del trapezoide?

INTEGRALI DEFINITI: VERSO LA DEFINIZIONE (1)

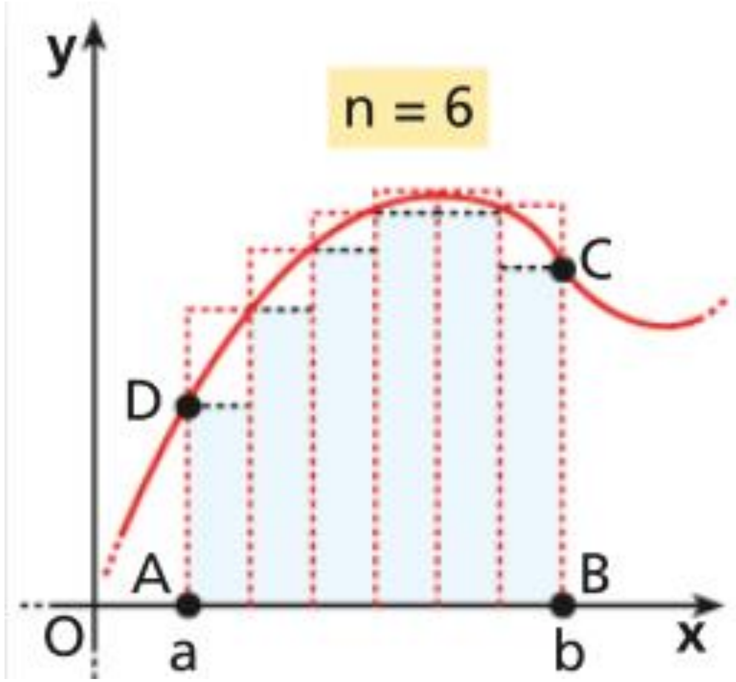
y=f(x) funzione → devo calcolare l'area del trapezoide ABCD

→Divido il trapezoide in piccoli rettangoli (in figura 6) di base un Δx e altezza un $\Delta y = \Delta f(x)$

→Sommando le aree (calcolo banale) di questi rettangolini:

- Se prendo quelli blu di altezza minore della funzione, otterrò un'area leggermente minore di quella del trapezoide;
- Se prendo quelli rossi di altezza maggiore della funzione, otterrò un'area leggermente maggiore di quella del trapezoide.

→Aumenta numero rettangoli → aumenta precisione



INTEGRALI DEFINITI: VERSO LA DEFINIZIONE (2)

Formalizziamo:

- Dividiamo il segmento AB in n segmentini di uguale lunghezza b;
- Indichiamo con h_i le altezze per difetto e H_i le altezze per eccesso;
- Indichiamo con s_n la somma delle aree dei rettangoli per difetto:

$$s_n = b \cdot h_1 + b \cdot h_2 + \cdots + b \cdot h_n = \sum_{i=1}^{n} b \cdot h_i$$

- Indichiamo con S_n la somma delle aree dei rettangoli per eccesso:

$$S_n = b \cdot H_1 + b \cdot H_2 + \cdots + b \cdot H_n = \sum_{i=1}^{n} b \cdot H_i$$

INTEGRALI DEFINITI: VERSO LA DEFINIZIONE (3)

Risulta chiaro, ora, che l'area S del trapezoide è compresa tra le due aree appena calcolate:

$$s_n \leq S \leq S_n$$

Se n tende ad infinito, cioè divido trapezoide in un numero sempre più grande di rettangoli, allora succede che le due aree risultano uguali: questa è proprio la definizione di integrale definito.

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = S = \int_a^b f(x)dx$$

INTEGRALI DEFINITI: CALCOLO

estremo superiore

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

estremo inferiore

funzione integranda

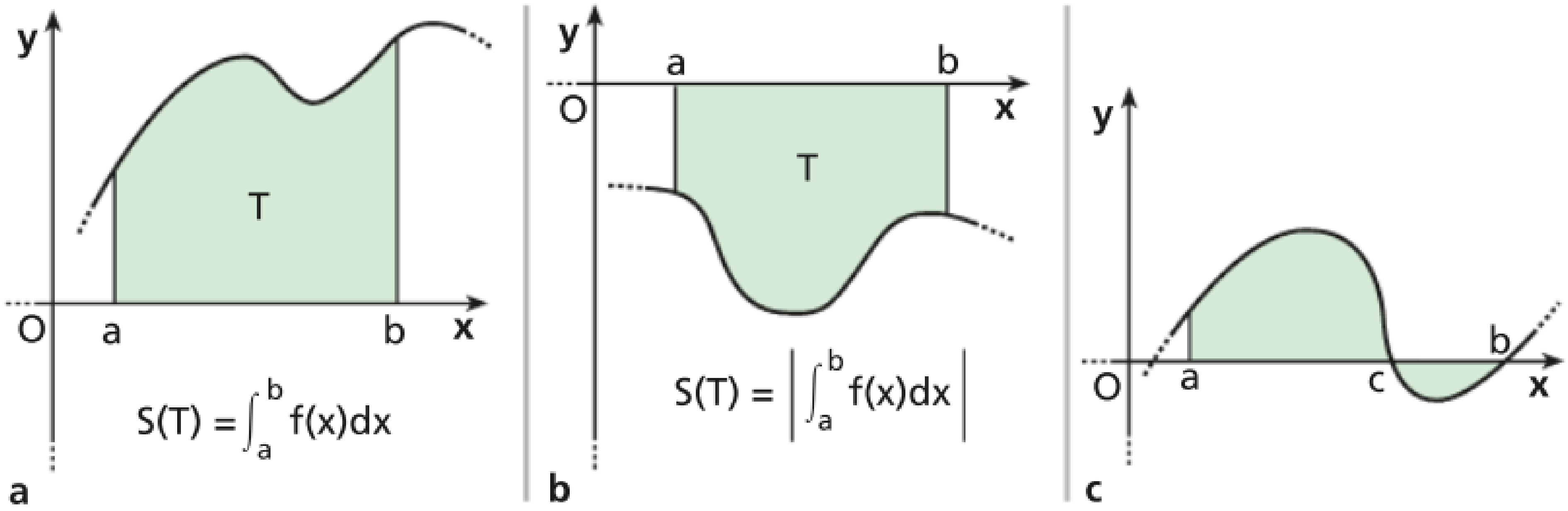
Come calcolare un integrale definito:

calcolo l'integrale indefinito e poi lo valuto nell'estremo superiore b e poi nell'inferiore a facendo la sottrazione.

Se F è primitiva di f, allora:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

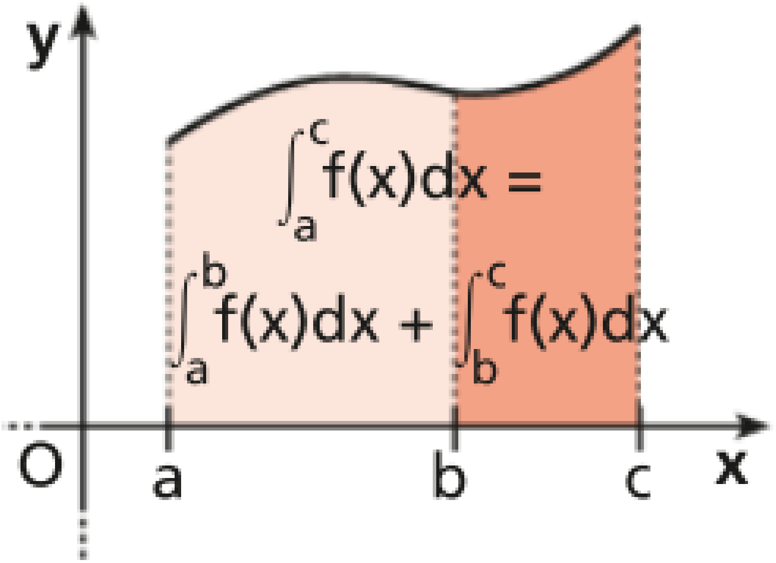
CORRISPONDENZA CON LE AREE



PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DEFINITO

Valgono tutte le proprietà già viste per l'integrale indefinito, in più:

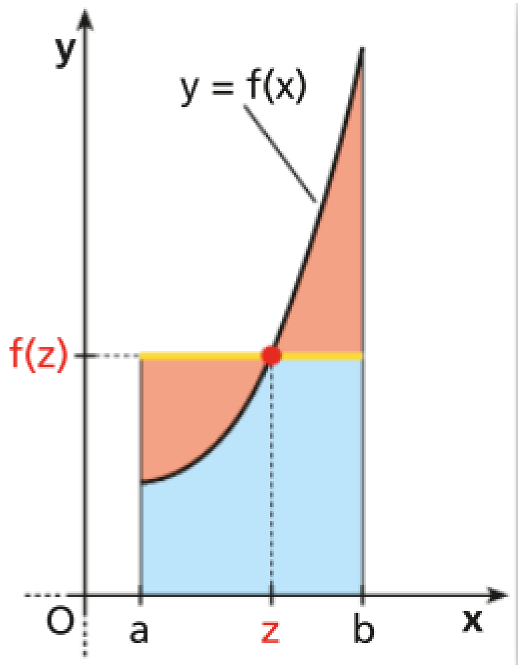
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b |f(x)|dx = |\int_a^b f(x)dx|$



TEOREMA DELLA MEDIA

Se f(x) è una funzione continua in un intervallo [a; b], esiste almeno un punto z di tale intervallo tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(z)$$



TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

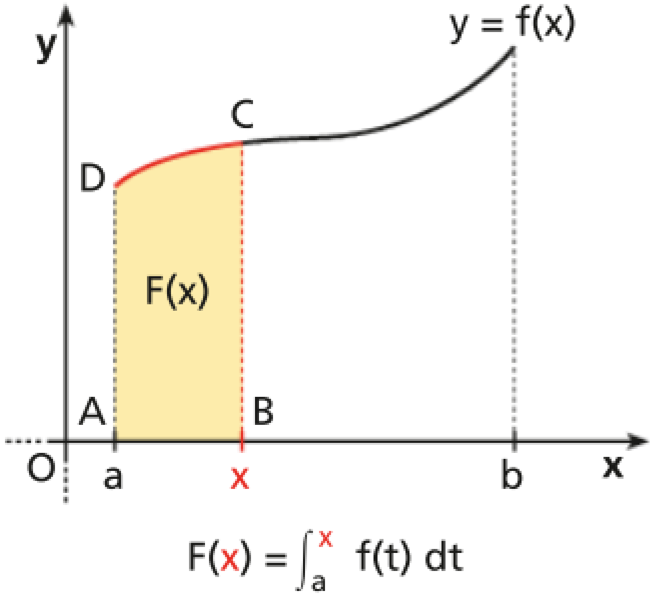
FUNZIONE INTEGRALE di f in [a; b] → $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Teorema di Torricelli-Barrow (fondamentale del c.i.)

Se f(x) è una funzione continua in un intervallo [a; b], allora esiste la derivata della sua funzione integrale F(x) per ogni punto $x \in [a; b]$, e corrisponde ad f(x), cioè:

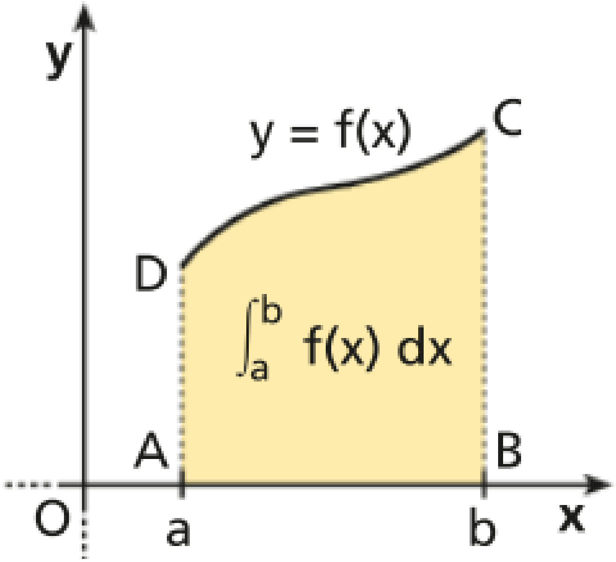
$$F'(x) = f(x)$$

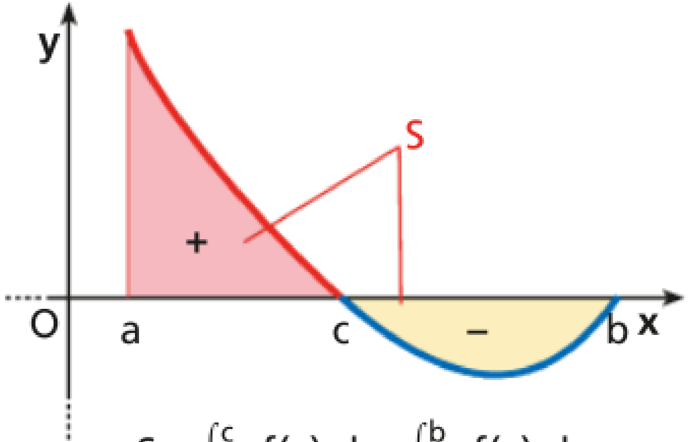
ovvero F(x) è una primitiva di f(x).



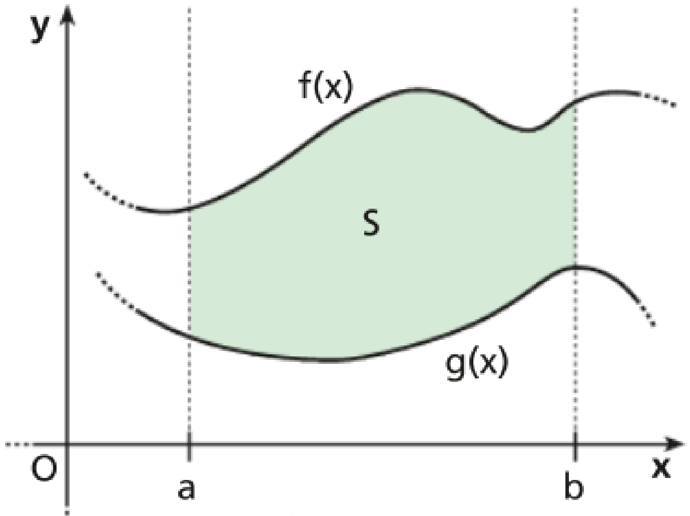
DUNQUE: $\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + c$

CALCOLO DELLE AREE



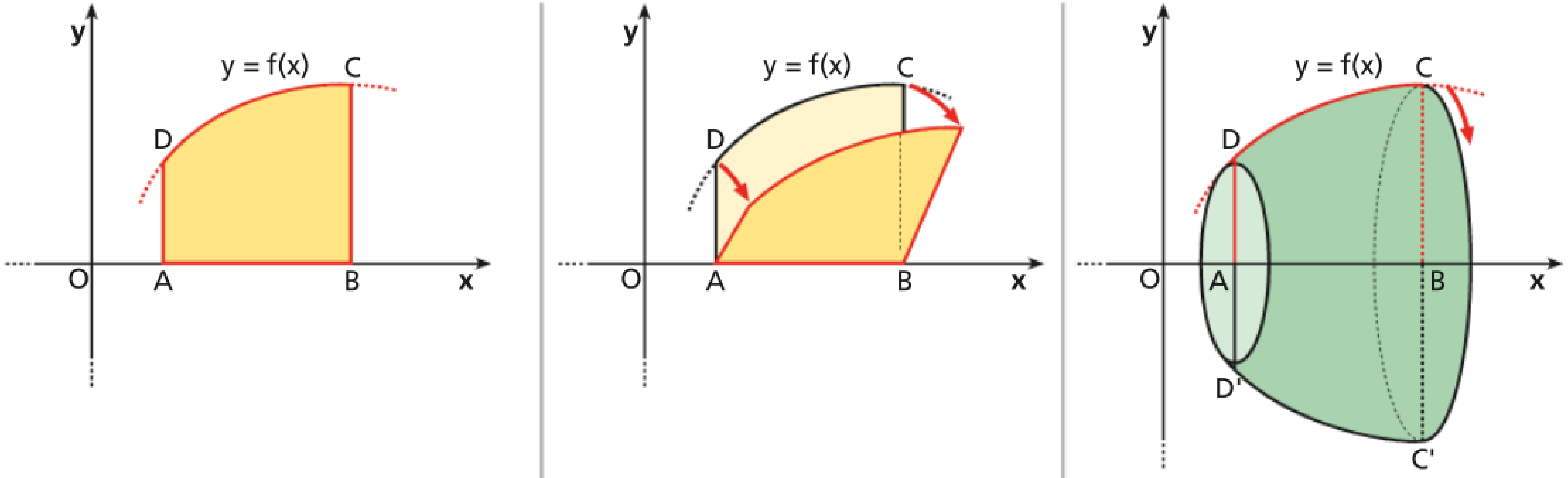


$$S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

CALCOLO DEI VOLUMI: SOLIDI DI ROTAZIONE, ASSE X



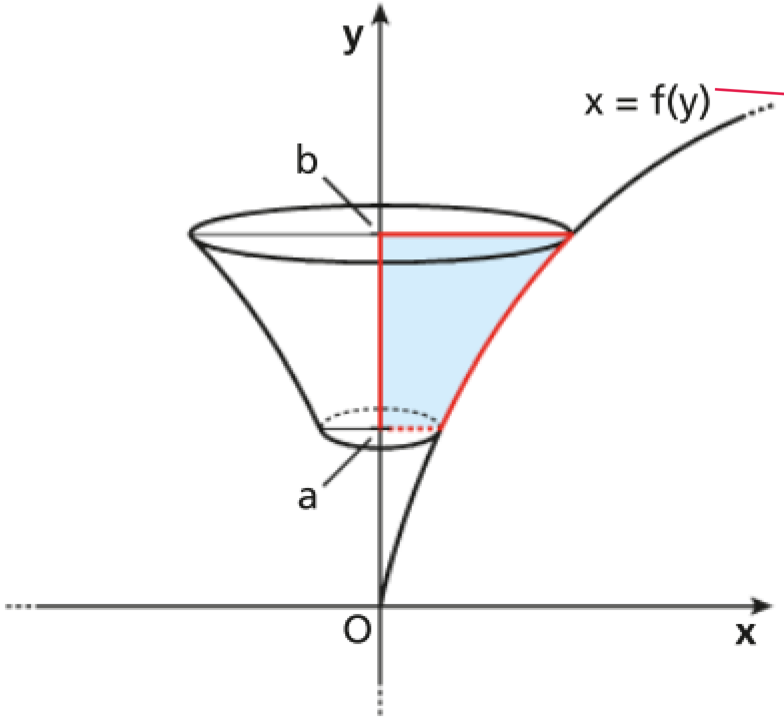
a. È dato il trapezoide *ABCD*.

b. Ruotiamo il trapezoide attorno all'asse *x* (il lato *AB* rimane fisso).

c. Abbiamo ottenuto il solido generato dalla rotazione di 360° del trapezoide attorno all'asse *x*.

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx$$

CALCOLO DEI VOLUMI: SOLIDI DI ROTAZIONE, ASSE Y



Funzione inversa

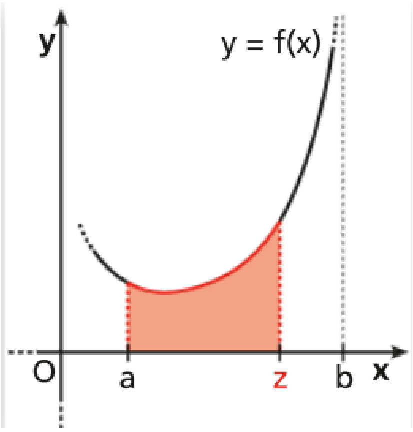
$$V = \pi \int_a^b f^2(y)\,dy$$

INTEGRALI IMPROPRI (1)

Integrale definito tra a e b di una funzione con punti di discontinuità in [a; b]

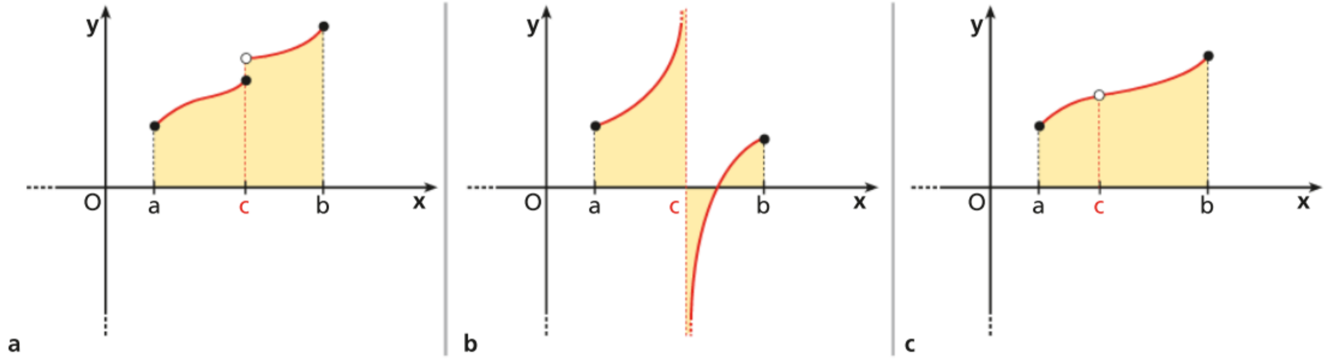
→La discontinuità è uno degli estremi (a oppure b)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z \to b^-} \int_a^z f(x)\,dx \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z \to a^+} \int_z^b f(x)\,dx$$



→La discontinuità è interna all'intervallo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{z \to c^+} \int_z^b f(x)\,dx$$

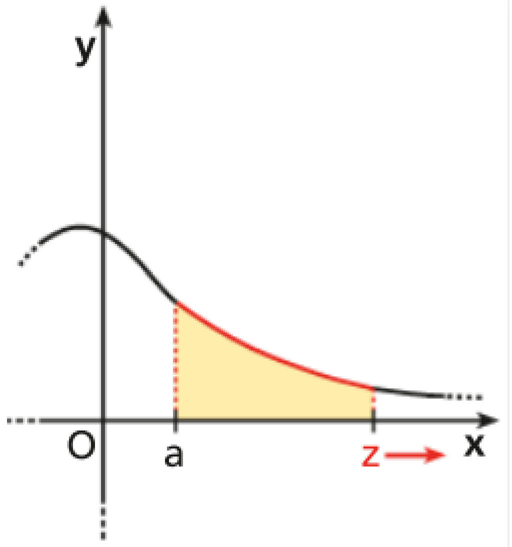


INTEGRALI IMPROPRI (2)

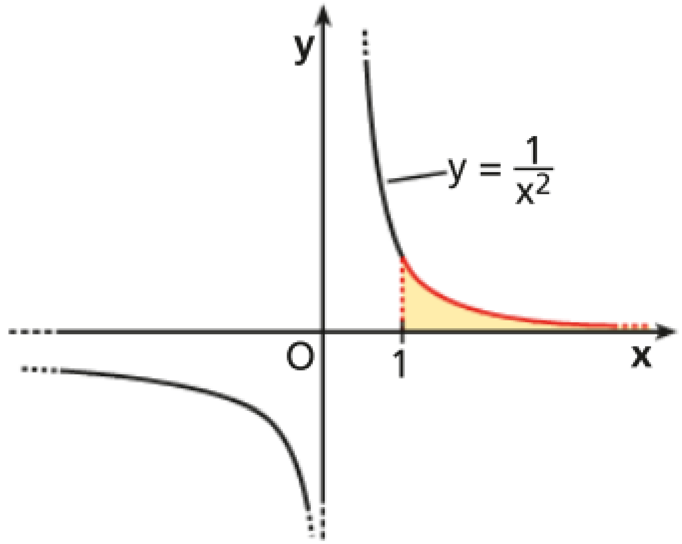
Integrali di funzioni in intervalli infiniti

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)\,dx.$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{z \to -\infty} \int_z^a f(x)\,dx.$$



→ Non sempre l'area è infinita



Esempio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

APPLICAZIONI ALLA FISICA

- Dall'accelerazione, alla velocità, alla legge oraria

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(z)\, dz$$

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(z)\, dz.$$

- Lavoro di una forza

$$L = \int_{a}^{b} F(x)\, dx.$$

- Quantità di carica

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} i(t)\, dt.$$