DERIVATE

Definizione e interpretazione geometrica, regole di derivazione e teoremi, crescenza e decrescenza, massimi e minimi, concavità

DEFINIZIONE

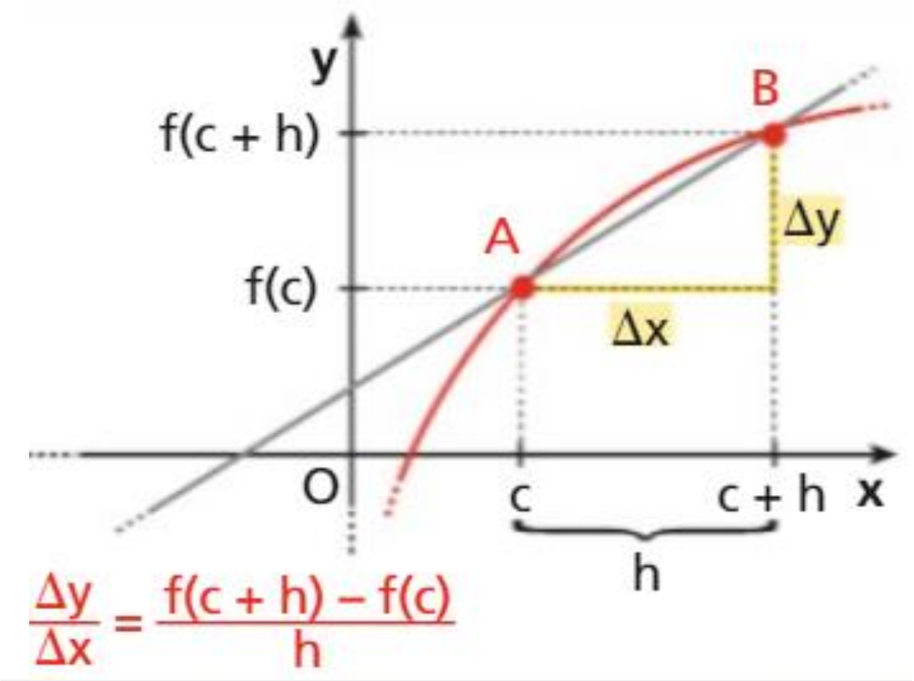
Limite del rapporto incrementale con l'incremento che tende a zero.

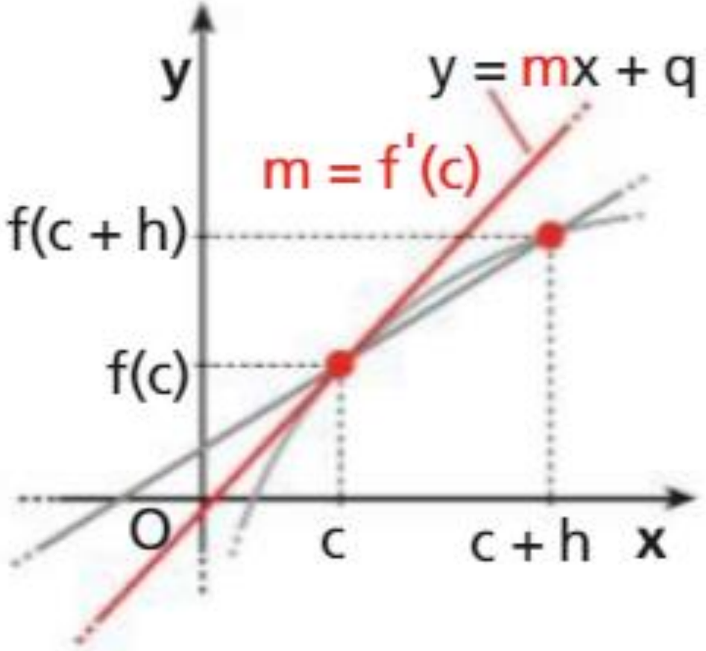
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

INTERPRETAZIONE GRAFICA

Man mano che l'incremento h diminuisce, la retta secante tende a diventare tangente, dunque il suo coefficiente angolare tende a coincidere l'm della tangente.

Al limite per h→0, la derivata prima in un punto qualsiasi c coincide con il coefficiente angolare della retta tangente.





DERIVABILITÀ E CONTINUITÀ

TEOREMA:

Se una funzione è derivabile in un punto x_0, allora in quel punto la funzione è anche continua.

DERIVATE FONDAMENTALI

- $(k)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$
- $(\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$

OPERAZIONI CON LE DERIVATE

Se $y = f(x) + g(x) + \ldots \rightarrow y' = f'(x) + g'(x) + \ldots$

39) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^{\cancel{3}\,1}}{\cancel{x^2}_{1}} + \dfrac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} + \dfrac{1}{x}$

$y = x + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x} = x + \dfrac{3}{x}$

DERIVATA DEL PRODOTTO PER COSTANTE

$$\left(kf(x)\right)' = kf'(x)$$

DERIVATA DELLA SOMMA

$$\big(g(x) + f(x)\big)' = g'(x) + f'(x)$$

DERIVATA DEL PRODOTTO

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Conseguenza: $(f(x)^2)' = 2f(x)\cdot f'(x)$

DERIVATA DEL RAPPORTO

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Conseguenza: $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$

DERIVATA DI FUNZIONE COMPOSTA

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Conseguenza: $(f(x)^n)' = f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

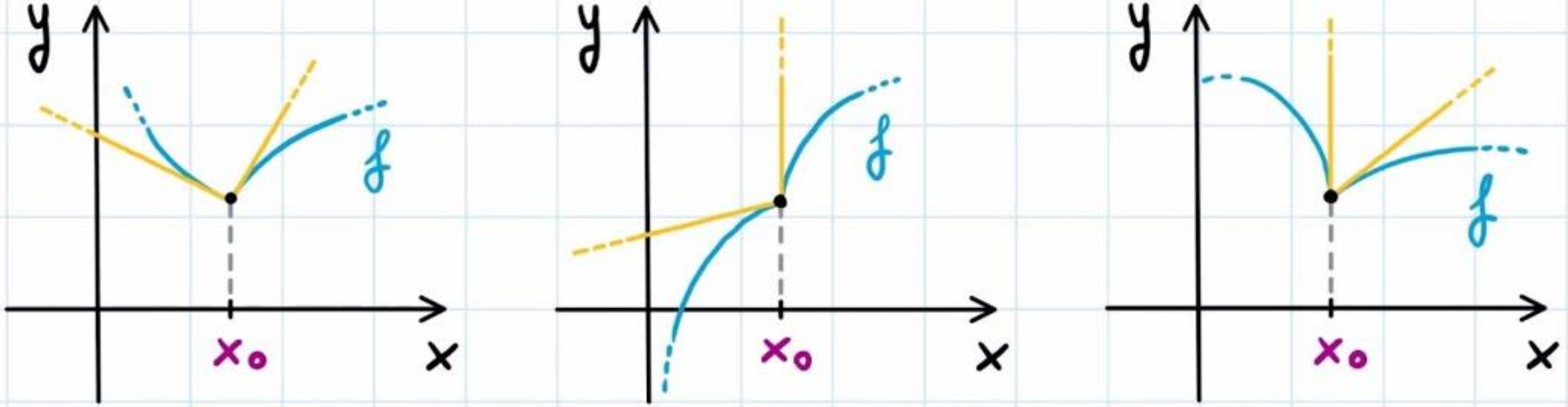
$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}, con\ x = f^{-1}(y)$$

Conseguenze:

$$\mathrm{D}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \mathrm{D}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\mathrm{D}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \mathrm{D}\,\mathrm{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE, TANGENTI E PUNTI DI NON DERIVABILITÀ



$f'_-(x_0) < 0$ $\qquad$ $f'_-(x_0) > 0$ $\qquad$ $f'_-(x_0) = -\infty$

$f'_+(x_0) > 0$ $\qquad$ $f'_+(x_0) = +\infty$ $\qquad$ $f'_+(x_0) > 0$

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

Le derivate di ordine secondo sono le derivate delle derivate prime, e così via per gli ordini superiori. Per lo studio di funzione si utilizzano in particolare le derivate prime e le derivate seconde.

Esempio: $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f''(x) = 6x \rightarrow f'''(x) = 6$$

RETTE TANGENTI

La derivata calcolata in un punto restituisce il coefficiente angolare della retta tangente in quel punto: $f'(x_0) = m_{tg}\ in\ \left(x_0; f(x_0)\right)$.

In particolare, l'equazione della retta tangente in un punto $\left(x_0; f(x_0)\right)$ è

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

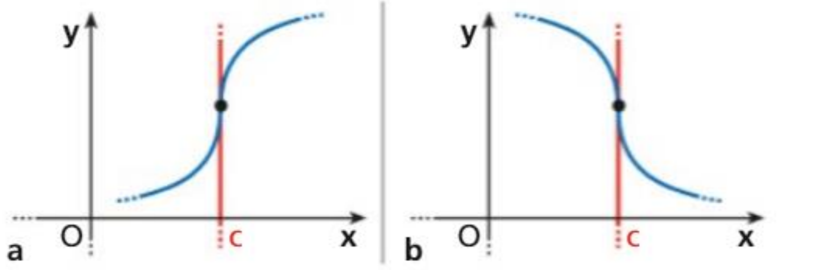
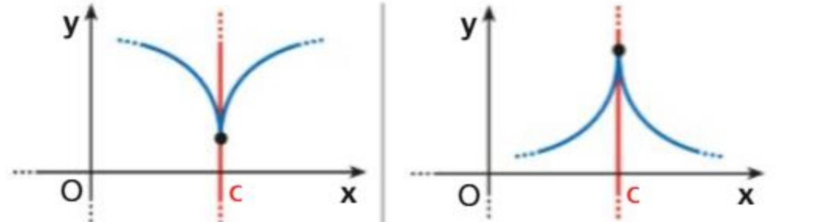
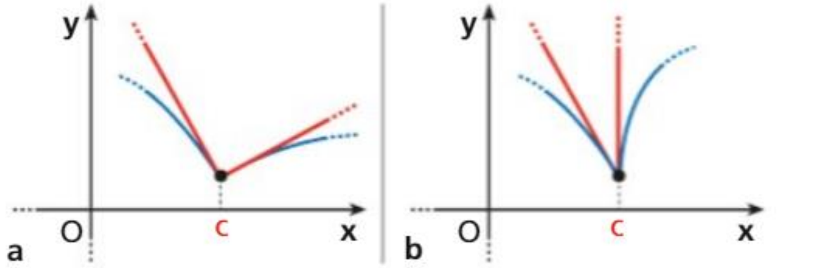
PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Derivata infinita → tangente verticale

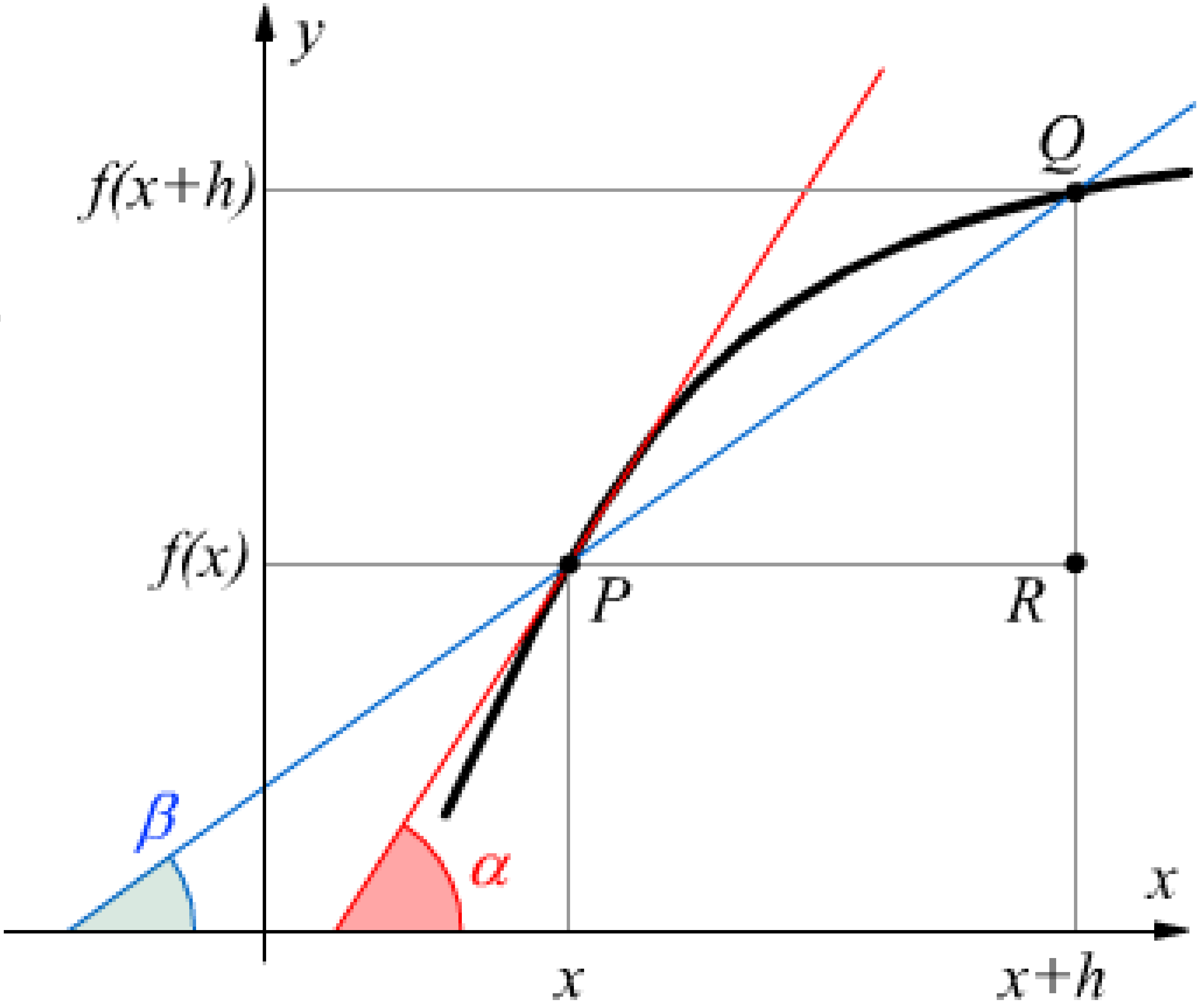
oppure

Derivate destra e sinistra diverse

I punti di non derivabilità in sintesi

Punti di non derivabilità	Grafico	Derivata
flesso a tangente verticale		a. $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$ b. $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$
cuspide	 **a.** Verso il basso. **b.** Verso l'alto.	a. $f'_-(c) = -\infty, \quad f'_+(c) = +\infty$ b. $f'_-(c) = +\infty, \quad f'_+(c) = -\infty$
punto angoloso		$f'_-(c) \neq f'_+(c)$ a. entrambe finite b. una finita, l'altra infinita

VELOCITÀ DI VARIAZIONE E DIFFERENZIALE



VELOCITÀ DI VARIAZIONE

La velocità media di variazione viene approssimata da una retta secante.

Man mano che i due punti di intersezione si avvicinano tra loro, vengono a coincidere e dunque la retta viene a coincidere con la tangente e la velocità di variazione media con quella istantanea. Il coefficiente angolare di questa retta esprime la velocità istantanea di variazione; esso coincide con la derivata calcolata nel punto di tangenza.

APPLICAZIONI ALLA FISICA

Nel grafico di una legge oraria $s(t) = s_0 + vt$ di un modo uniforme, la velocità istantanea è il coefficiente angolare della retta graficata, e dunque la derivata prima. Lo stesso nel moto rettilineo uniformemente accelerato, di legge oraria $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$. La velocità istantanea dunque si calcola sostituendo un particolare istante $t = t_0$ alla legge della velocità, calcolata come derivata della legge oraria:

$$v(t) = s'(t) = \frac{1}{2}a \cdot 2t + v_0 \cdot 1 + 0 = at + v_0$$

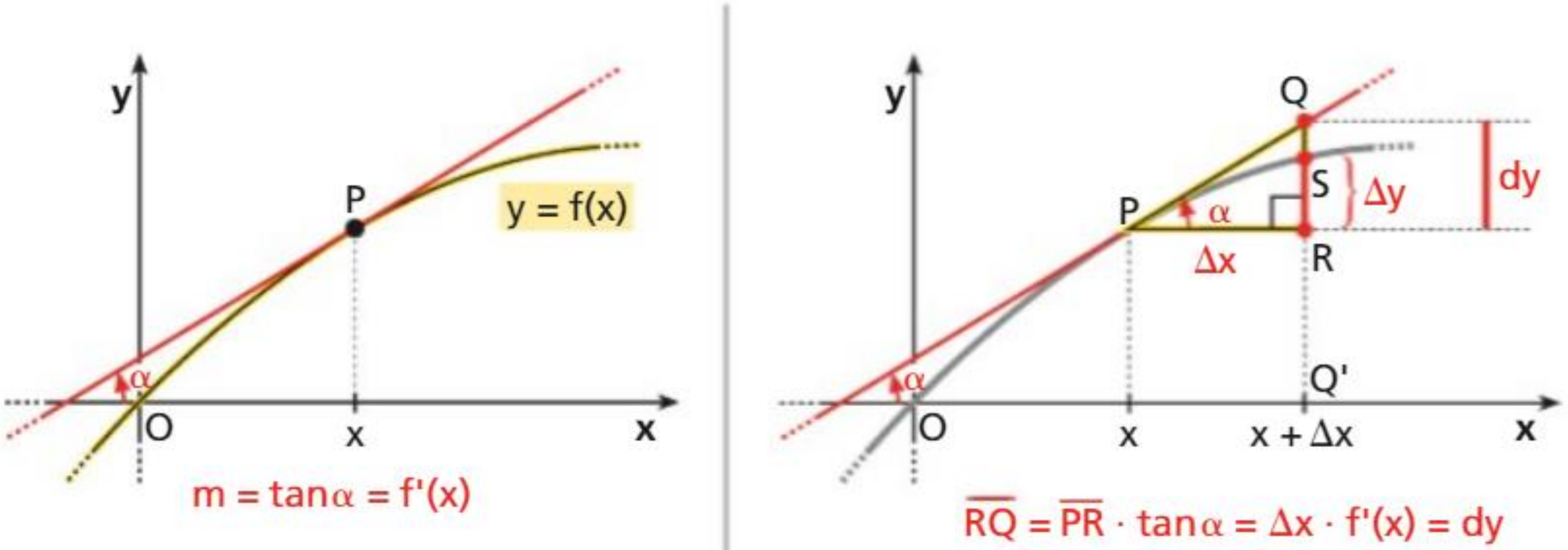
Ad esempio, nell'istante $t = 3$ secondi, per un moto uniformemente accelerato di velocità iniziale $v_0 = 1\, m/s$ e accelerazione $a = 5\, m/s^2$, avrò una velocità istantanea $v(3) = 5 \cdot 3 + 1 = 16\, m/s$.

P.S.: lo stesso concetto si applica all'elettromagnetismo, infatti l'intensità di corrente è la derivata della funzione carica elettrica ($i(t) = q'(t)$).

DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \rightarrow$$

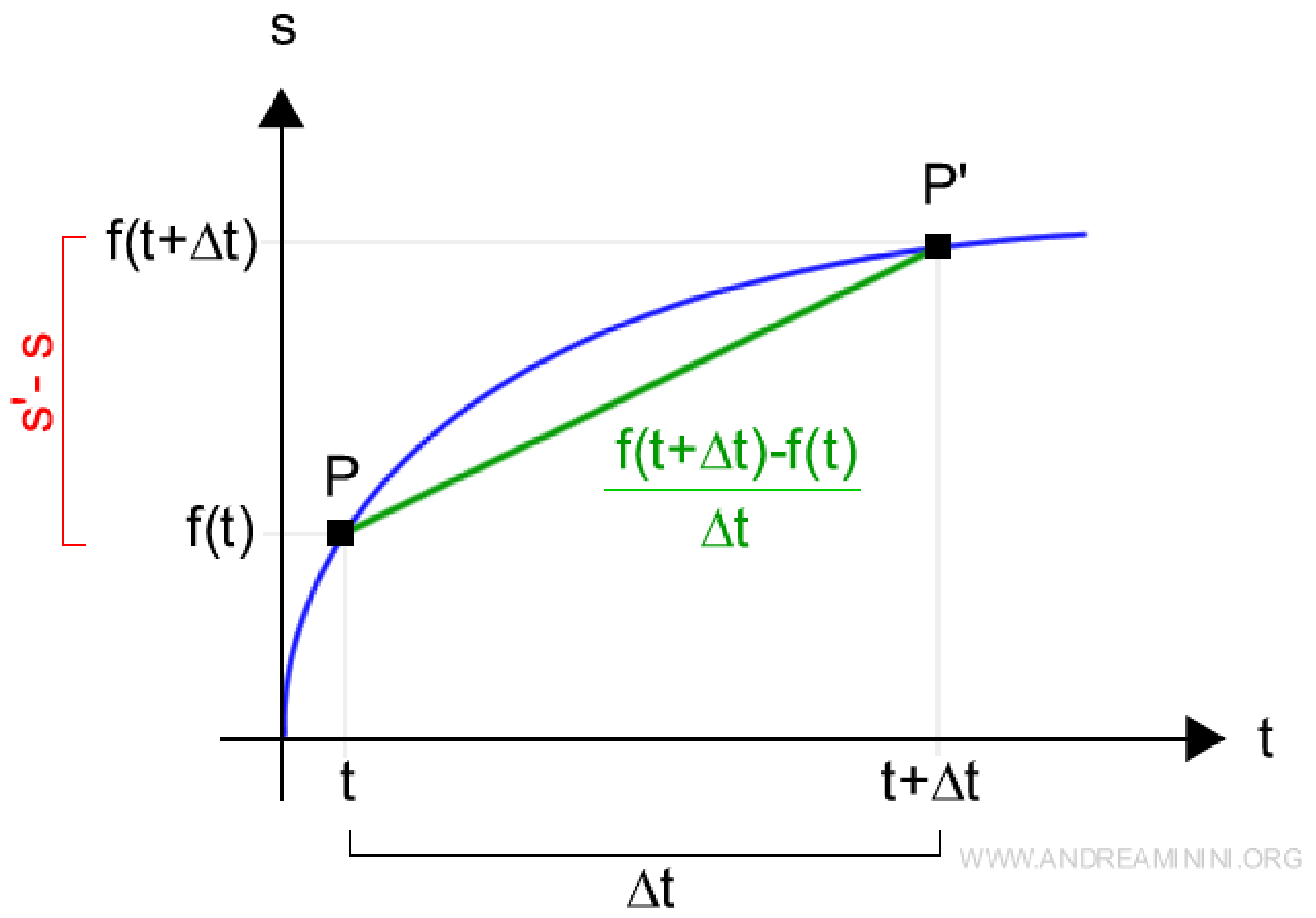
$$dy = f'(x)dx$$



a. Consideriamo il grafico della funzione $y = f(x)$ e la retta tangente nel punto P, di ascissa x.

b. In corrispondenza del punto Q' di ascissa $x + \Delta x$, tracciamo i punti R, S e Q. Il triangolo PRQ è rettangolo in R.

TEOREMI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE



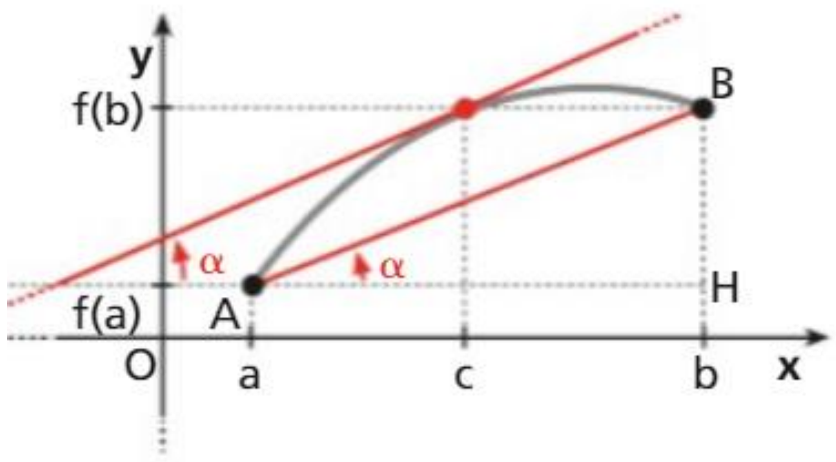
TEOREMA DI LAGRANGE O DEL VALOR MEDIO

Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ tale che

- $f(x)$ è continua in $[a, b]$,
- $f(x)$ è derivabile in $]a, b[$,

Esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Conseguenze:

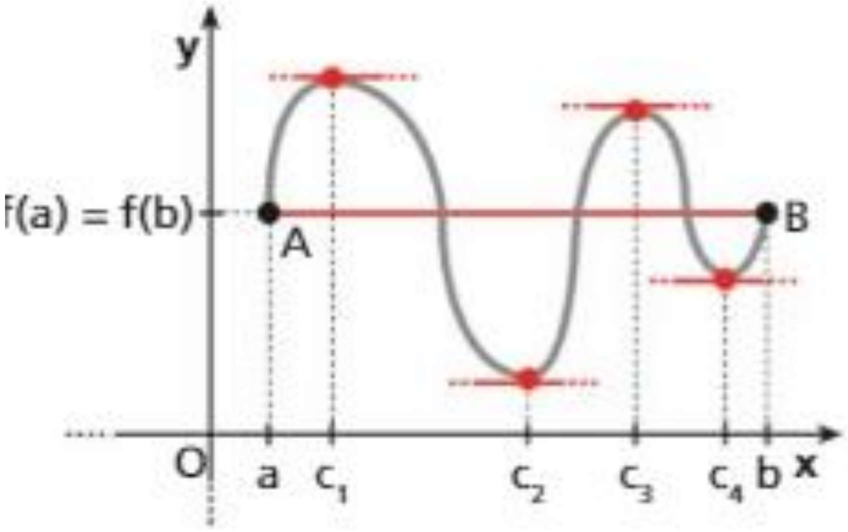
- se f' è nulla in tutto l'intervallo, allora f è costante
- se f'=g' in tutto l'intervallo, allora f e g differiscono per una costante

TEOREMA DI ROLLE

Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ tale che

- $f(x)$ è continua in $[a, b]$,
- $f(x)$ è derivabile in $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$,

Esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che $f'(c) = 0$.



TEOREMA DI CAUCHY

Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nell'intervallo $[a; b]$ e derivabili in ogni punto interno a questo intervallo e inoltre in $]a; b[$ è sempre $g'(x) \neq 0$, allora esiste almeno un punto c interno ad $[a; b]$ in cui si ha:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

cioè il rapporto fra gli incrementi delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[a; b]$ è uguale al rapporto fra le rispettive derivate calcolate in un particolare punto c interno all'intervallo.

TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

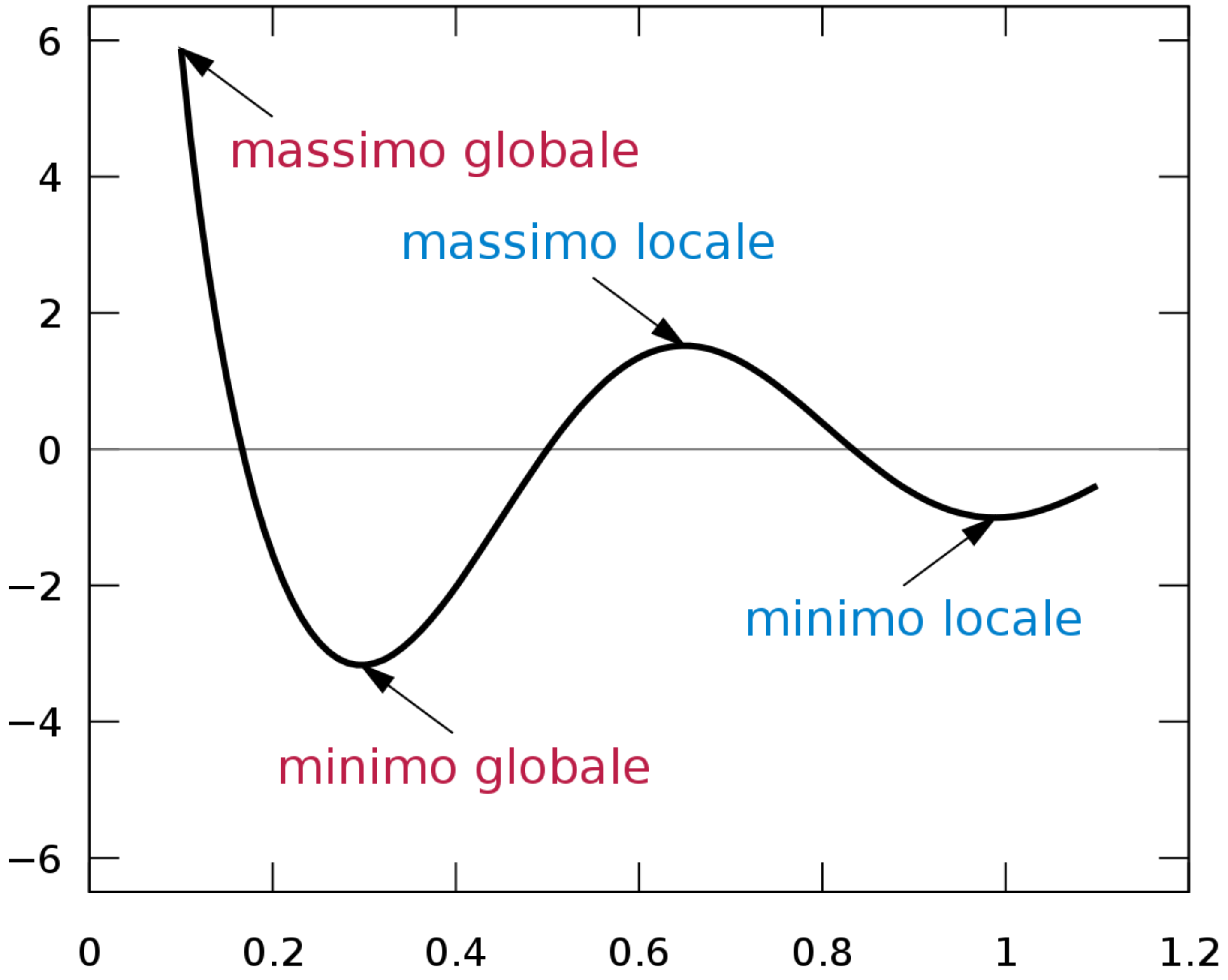
Date due funzioni $f(x)$ e $\mathrm{g}(x)$ definite nell'intorno I di un punto x_0, se

- $f(x)$ e $\mathrm{g}(x)$ sono continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $f(x)$ e $\mathrm{g}(x)$ sono derivabili in I tranne alpiù x_0,
- $\mathrm{g}'(x) \neq 0$ in I tranne x_0,
- esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$,

Allora esiste anche il limite del rapporto tra le due funzioni, e si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

CRESCENZA E DECRESCENZA, MASSIMI E MINIMI



CRESCENZA E DERIVATE

Per ogni funzione derivabile vale che:

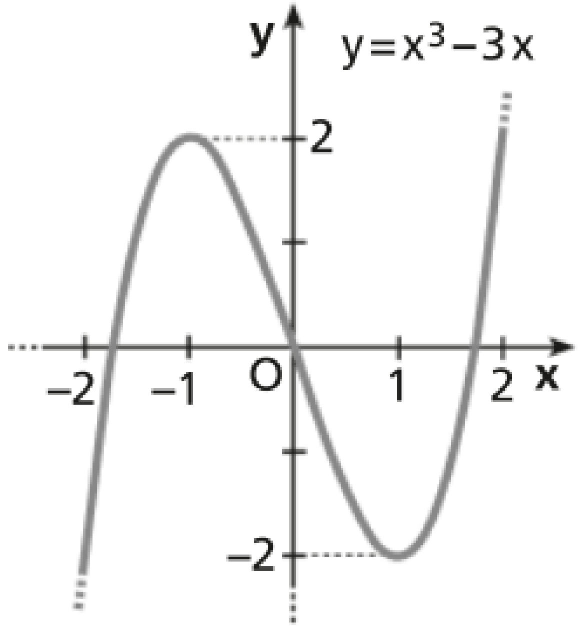
- se $f'>0$ in un intervallo, allora lì f è crescente;
- se $f'<0$ in un intervallo, allora lì f è decrescente.

TEOREMA DI FERMAT

Nei punti di massimo e minimo (dove la funzione cambia da crescente a decrescente) la derivata prima della funzione è nulla.

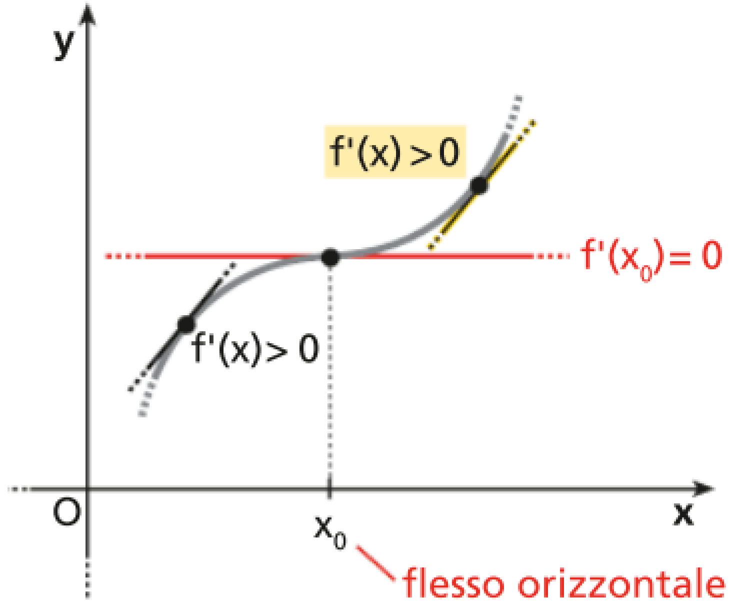
Il contrario è <u>quasi</u> sempre vero → **flessi a tangente orizzontale**

MASSIMI, MINIMI E FLESSI



- MASSIMO = punto maggiore in un certo intervallo (relativo) o in assoluto (assoluto) della funzione: se x_0 è punto di massimo, allora $f(x) < f(x_0)$ in un intorno.
- MINIMO = punto minore in un certo intervallo (relativo) o in assoluto (assoluto) della funzione: se x_0 è punto di minimo, allora $f(x) < f(x_0)$ in un intorno.
- FLESSO = punto in cui la funzione cambia di concavità.

Sia minimi che massimi che un certo tipo di flessi (a tangente orizzontale) si trovano ponendo f'=0 e trovando i suoi zeri.



IN SINTESI

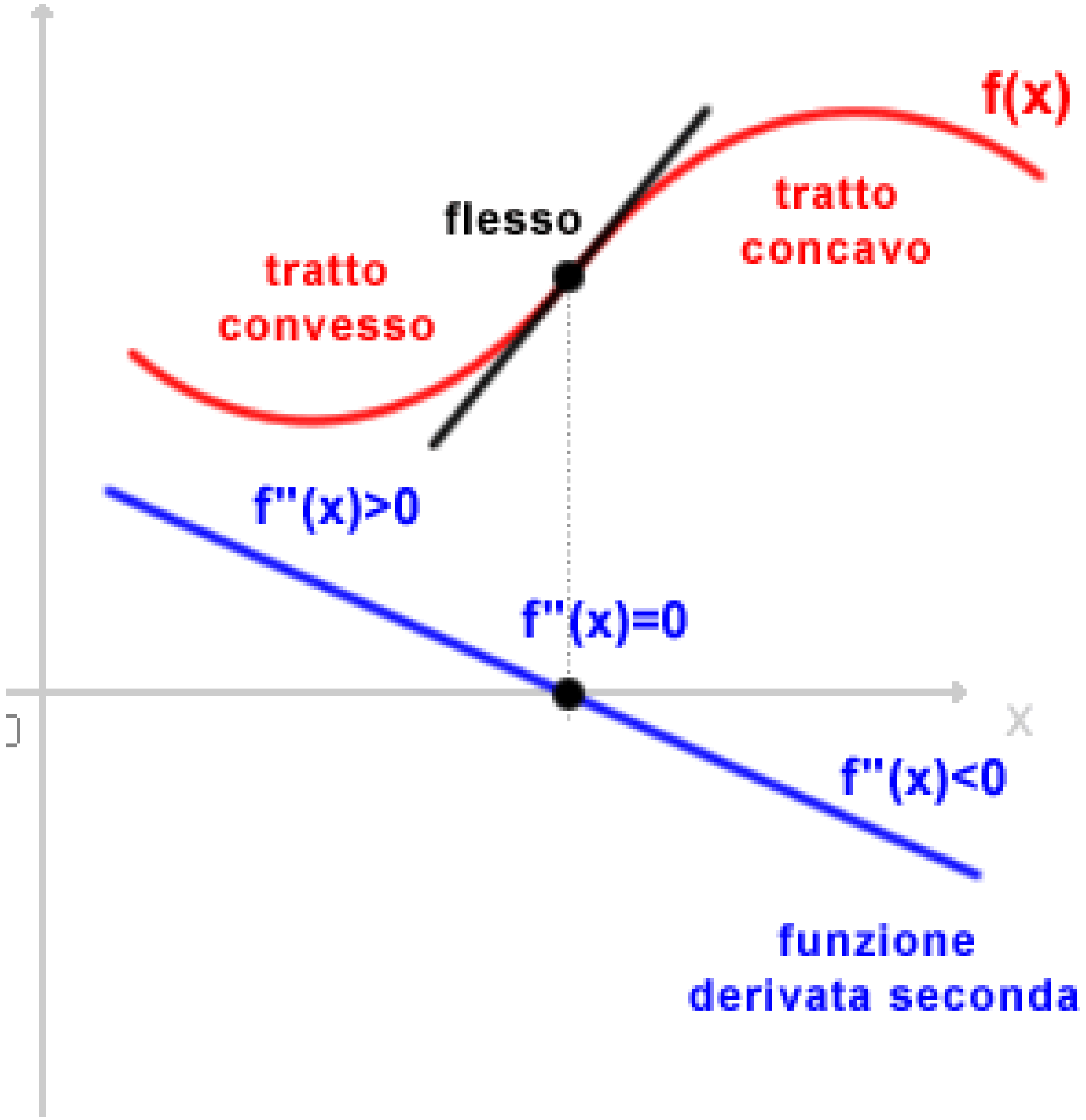
Data una funzione $f(x)$ continua, per la **ricerca dei massimi e dei minimi relativi e dei flessi orizzontali** con lo studio del segno della derivata prima:

- calcoliamo $f'(x)$ e determiniamo il suo dominio per trovare gli eventuali punti in cui la funzione non è derivabile (cuspidi, flessi verticali, punti angolosi);
- risolviamo l'equazione $f'(x) = 0$ per trovare i punti stazionari;
- studiamo il segno di $f'(x)$ per trovare i punti di massimo e minimo *relativo* (anche non stazionari) e i punti di flesso a tangente orizzontale.

Massimi e minimi → il segno di f' cambia

Flessi a tangente orizzontale → il segno di f' NON cambia

FLESSI, CONCAVITÀ E DERIVATA SECONDA



LA DERIVATA SECONDA ED IL SUO SIGNIFICATO

DERIVATA SECONDA = derivata della derivata prima

Il segno della derivata seconda stabilisce la concavità della funzione:

- $f''>0 \rightarrow$ concavità verso l’alto
- $f''<0 \rightarrow$ concavità verso il basso

FLESSI

FLESSO = punto in cui la funzione cambia di concavità.

Per cercare i flessi:

- pongo f''=0 e trovo i punti stazionari della derivata secobda;
- analizzo il segno della derivata intorno agli zeri: se f'' cambia effettivamente di segno, allora è un flesso;
- se x_0 è un punto di flesso, se esso annulla anche la derivata prima è un flesso orizzontale, altrimenti è obliquo.
- dove la derivata seconda è positiva avrò concavità verso l'alto e viceversa.

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

Per risolvere problemi di ottimizzazione:

- cerchiamo la **funzione obiettivo** da rendere massima o minima;
- poniamo le **condizioni** (o **vincoli**) relative alla variabile indipendente;
- determiniamo i massimi o i minimi della funzione;
- fra i valori trovati, accettiamo solo quelli che soddisfano le condizioni poste.

ESEMPIO

Tra tutte le coppie di numeri con somma 20, trovare quella che minimizza la somma dei quadrati.

Condizioni: $a + b = 20$ $\qquad$ $a^2 + b^2\ minimo$

Dalla prima condizione si ricava che $b = 20 - a$, dunque, in x, la funzione da minimizzare è:

$$y = x^2 + (20 - x)^2$$

Calcolo la su derivata prima e la pongo uguale a zero:

$$y' = 2x + 2(20 - x) \cdot (-1) = 4x - 40 = 0 \rightarrow x = 10\ minimo$$

Allora in due numeri saranno 10 e 10.