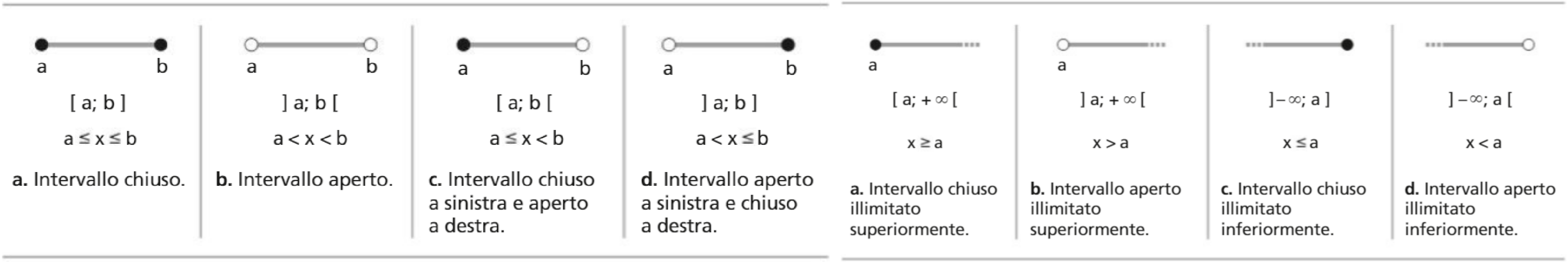
Limiti

Intervalli e intorni, definizione, teoremi e calcolo

Intervalli e intorni

- INTERVALLO = particolare sottoinsieme dei numeri reali che corrisponde ad un segmento (limitato) o una semiretta (illimitato) della retta reale.



- INTORNO DI UN PUNTO: qualsiasi intervallo aperto contenente il punto (completo).

$$I(x_0) = \,]x_0 - \delta_1;\ x_0 + \delta_2[\,,$$

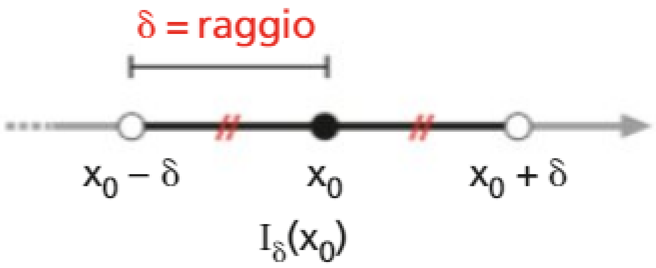
con δ_1, δ_2 numeri reali positivi.

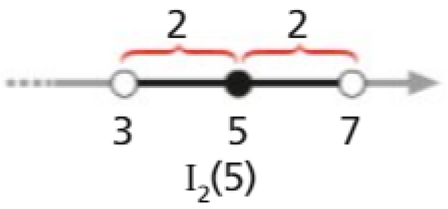
ESEMPIO: l'intervallo]3; 6[è un intorno del punto 5, poiché:

$$I(5) =]5 - 2; 5 + 1]$$

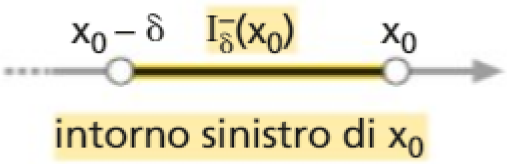
Proprietà degli intorni

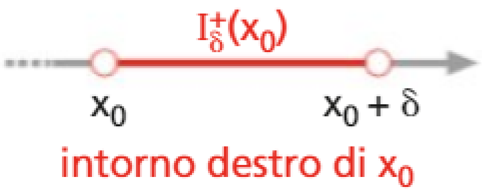
- Se $\delta_1 = \delta_2$ → intorno circolare





- Se $\delta_2 = 0$ → intorno sinistro
- Se $\delta_1 = 0$ → intorno destro





- L'intersezione tra due o più intorni di un punto è ancora intorno del punto stesso. Se tutti gli intorni sono circolari, l'intersezione rimane intorno circolare.

Intorni di infinito

- INTORNO DI MENO INFINITO: intervallo illimitato inferiormente, cioè del tipo $]-\infty; a[$

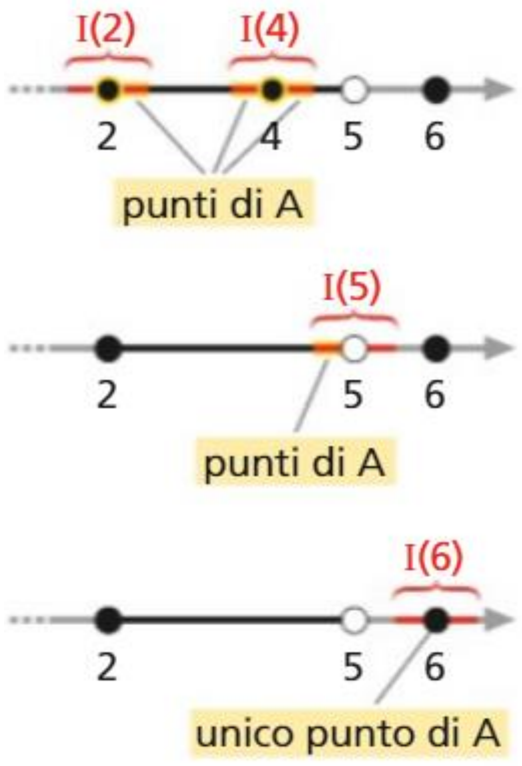
$$I(-\infty) =]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R}: x < a\}, \text{ con } a \text{ numero reale arbitrario;}$$

- INTORNO DI PIU' INFINITO: intervallo illimitato superiormente, cioè del tipo $]b; +\infty[$

$$I(+\infty) =]b; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}: x > b\}, \text{ con } b \text{ numero reale arbitrario}$$

Punti di accumulazione

Il numero x_0 è un punto di accumulazione per l'insieme A reale se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A.



ESEMPIO: L'insieme A = [2; 5[U {6} ha infiniti punti di accumulazione. Infatti, ogni punto dell'intervallo [2; 5[è un punto di accumulazione, così come lo è anche l'estremo 5 dell'intervallo, anche se non appartiene ad A. Il punto x = 6, invece, non è un punto di accumulazione di A.

Arriviamo alla definizione di limite di una funzione (1)

Consideriamo la funzione

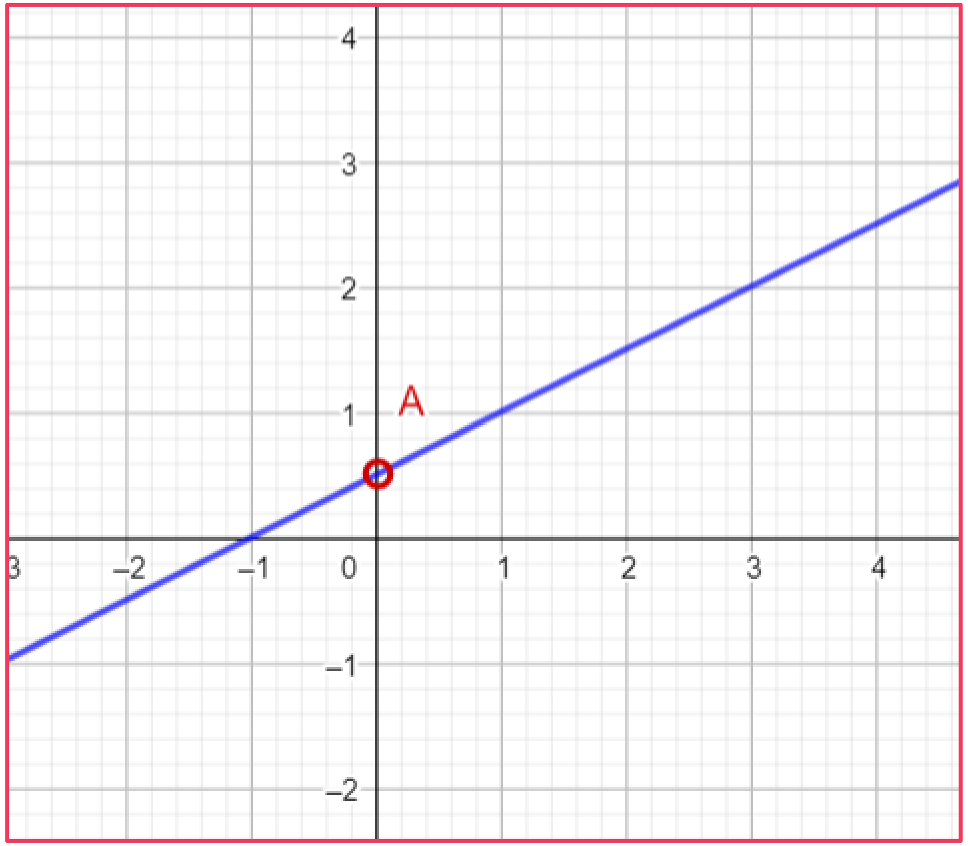
$$f(x) = y = \frac{x^2 + x}{2x}$$

Il suo dominio è $\mathbb{R} - \{0\}$.

Tolto il suo comportamento in 0, la funzione è perfettamente sovrapponibile alla retta

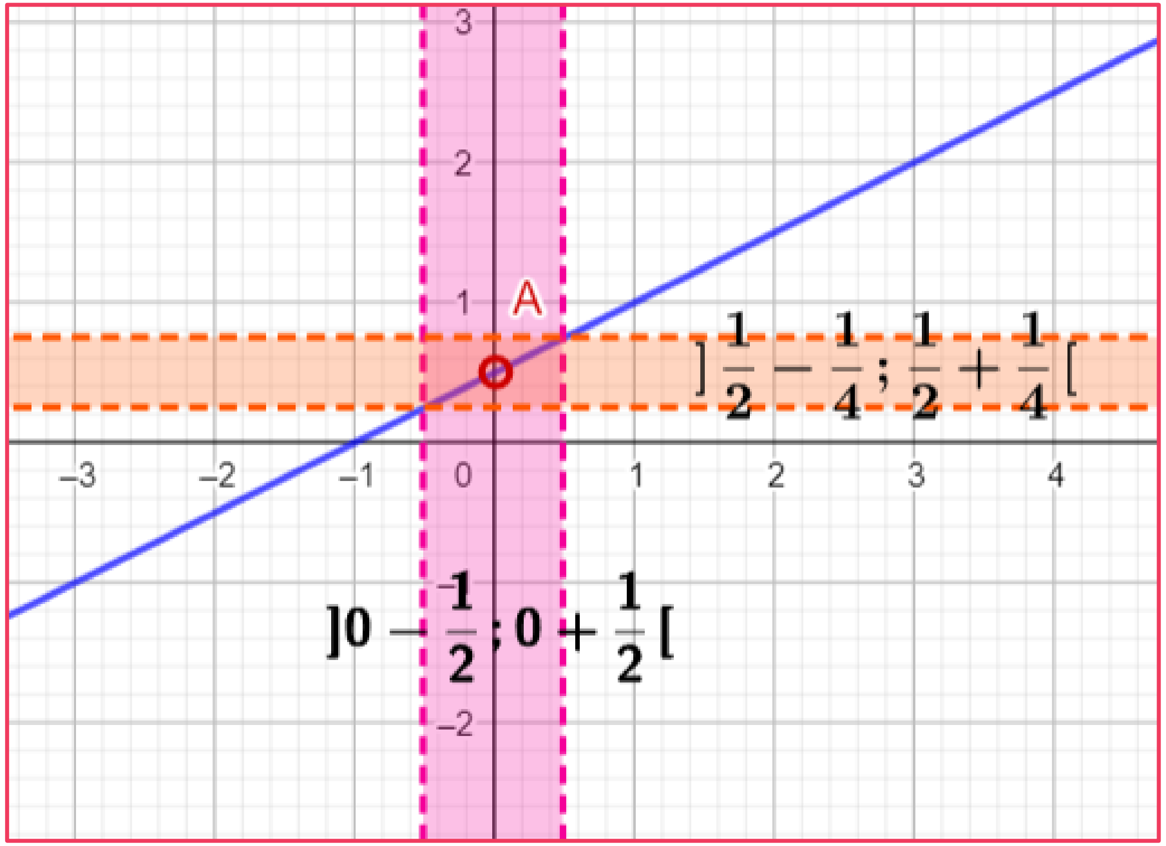
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Quale sarà il comportamento di questa funzione per x che si avvicina a 0?



Arriviamo alla definizione di limite di una funzione (2)

x	y
1	1
-1	0
½	¾
- ½	¼



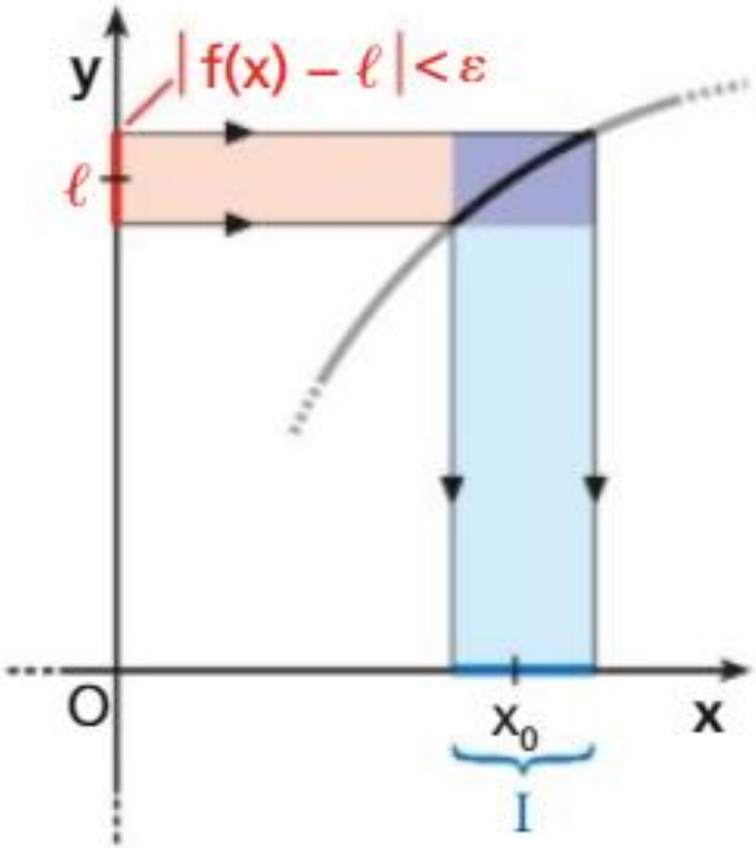
Consideriamo intorni del punto $x_0 = 0$ sempre più piccoli: le immagini di tali intorni attraverso la funzione f si riducono ad essere intorni sempre più piccoli centrati nel punto $y_0 = \frac{1}{2}$.
La funzione non potrà mai assumere quel valore, ma ci si avvicinerà sempre di più, tendendo ad ½ per x che tende a 0.

Definizione di limite di una funzione

La funzione $f(x)$, definita nel dominio D, ha come limite il numero reale l per x che tende ad x_0 punto di accumulazione di D quando, per qualunque numero $\mathcal{E}$ scelto piccolo a piacere, si può trovare un intorno completo $\mathrm{I}(x_0)$ tale che

$$|f(x) - l| < \mathcal{E}$$

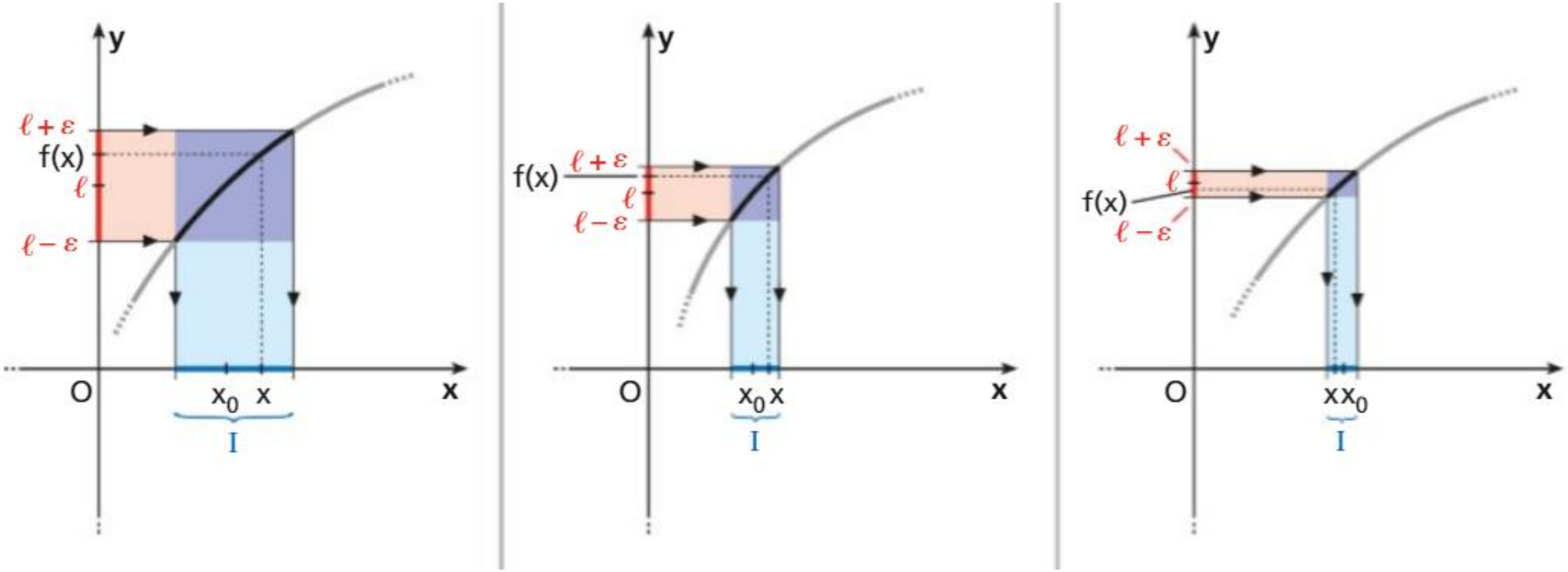
per ogni $x \in I(x_0) \cap D$, diverso al più da x_0.



Si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Interpretazione geometrica

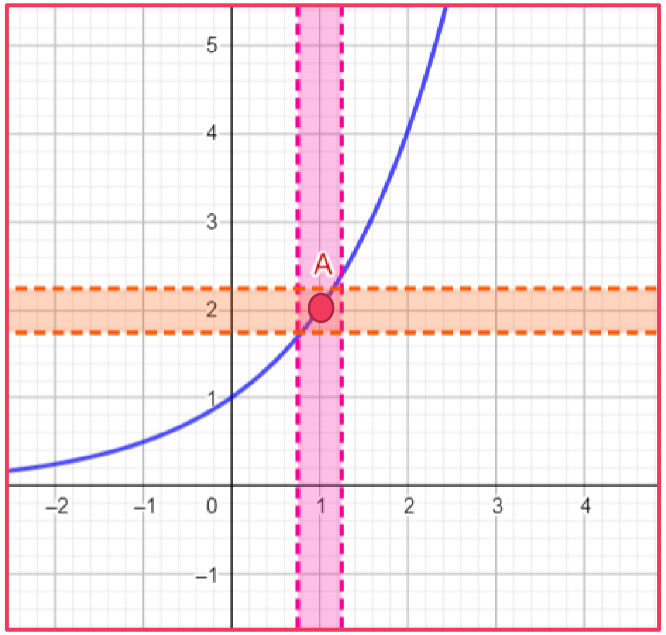


N.B. questa definizione consente solo di verificare il limite se lo conosciamo già, ma non di calcolarlo.

Casistica possibile

- esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

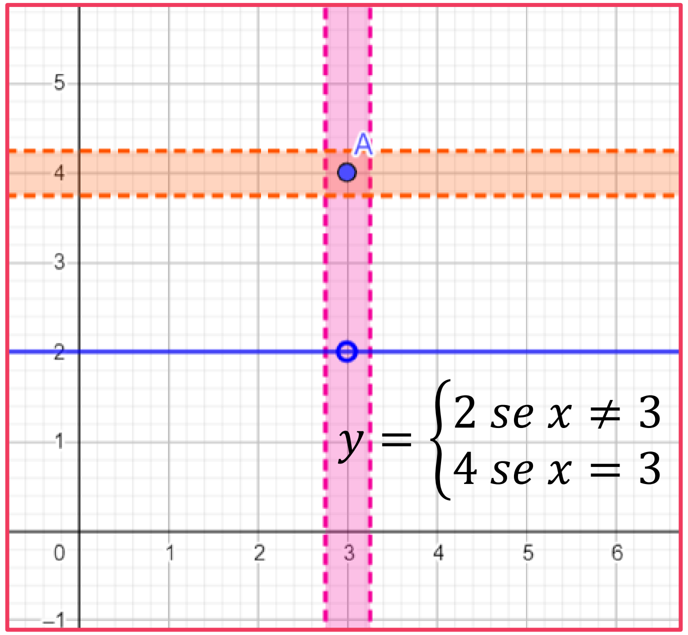
  e $l = f(x_0)$



$$\lim_{x \to 1} 2^x = 2$$
e $2 = 2^1$

- esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

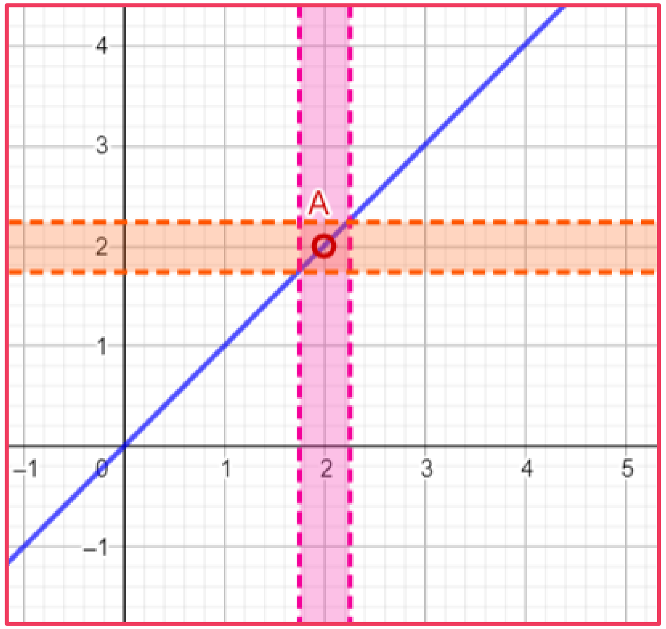
  e $l \neq f(x_0)$



$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$
e $2 \neq f(3)$

- esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

  e non esiste $f(x_0)$

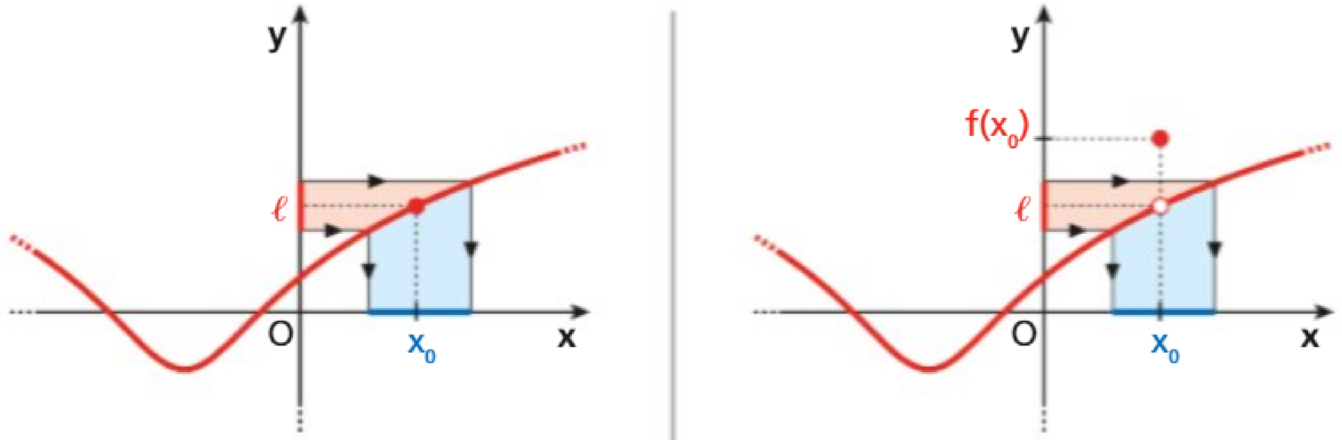


$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = 2$$
e $f(2)$ non esiste

Definizione di continuità

La funzione $f(x)$ è **continua** nel punto x_0 quando esiste il limite di tale funzione per $x \to x_0$ e tale limite è uguale al valore $f(x_0)$ della funzione calcolata in x_0, cioè

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$



a. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $f(x_0) = \ell$, quindi $\boldsymbol{f(x)}$ **è continua in** $\boldsymbol{x_0}$.

b. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $f(x_0) \neq \ell$, quindi $\boldsymbol{f(x)}$ **non è continua in** $\boldsymbol{x_0}$.

Funzioni continue più «famose»

- funzioni costanti $y = k$
- funzioni polinomiali (es. quadratiche) $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$
- funzioni radici nel loro dominio $y = \sqrt[n]{x}$
- funzioni goniometriche $y = \cos x \quad y = \sin x \qquad y = \tan x$ (nel suo dominio)
- funzioni esponenziali $y = a^x$
- funzioni logaritmiche nel loro dominio $y = \log_a x$

Limite destro e limite sinistro

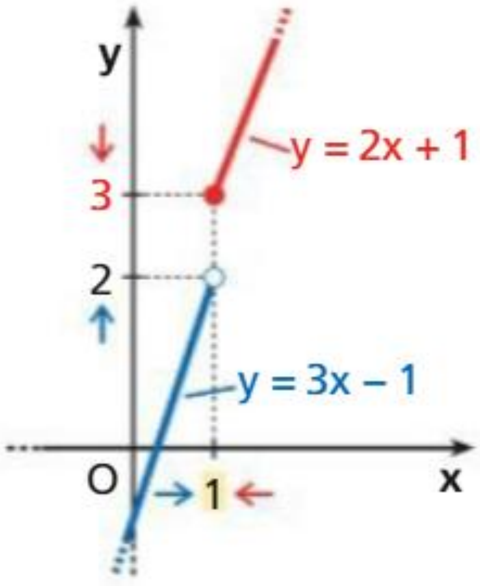
- Limite DESTRO: quando prendo un intorno solo destro di x_0, cioè $x \rightarrow x_0$ restando sempre maggiore di esso, e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

- Limite SINISTRO: quando prendo un intorno solo sinistro di x_0, cioè $x \rightarrow x_0$ restando sempre minore di esso, e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \ \wedge \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$



N.B.: se limite destro e sinistro non coincidono, allora non esiste il limite.

Limite infinito di una funzione

Consideriamo la funzione

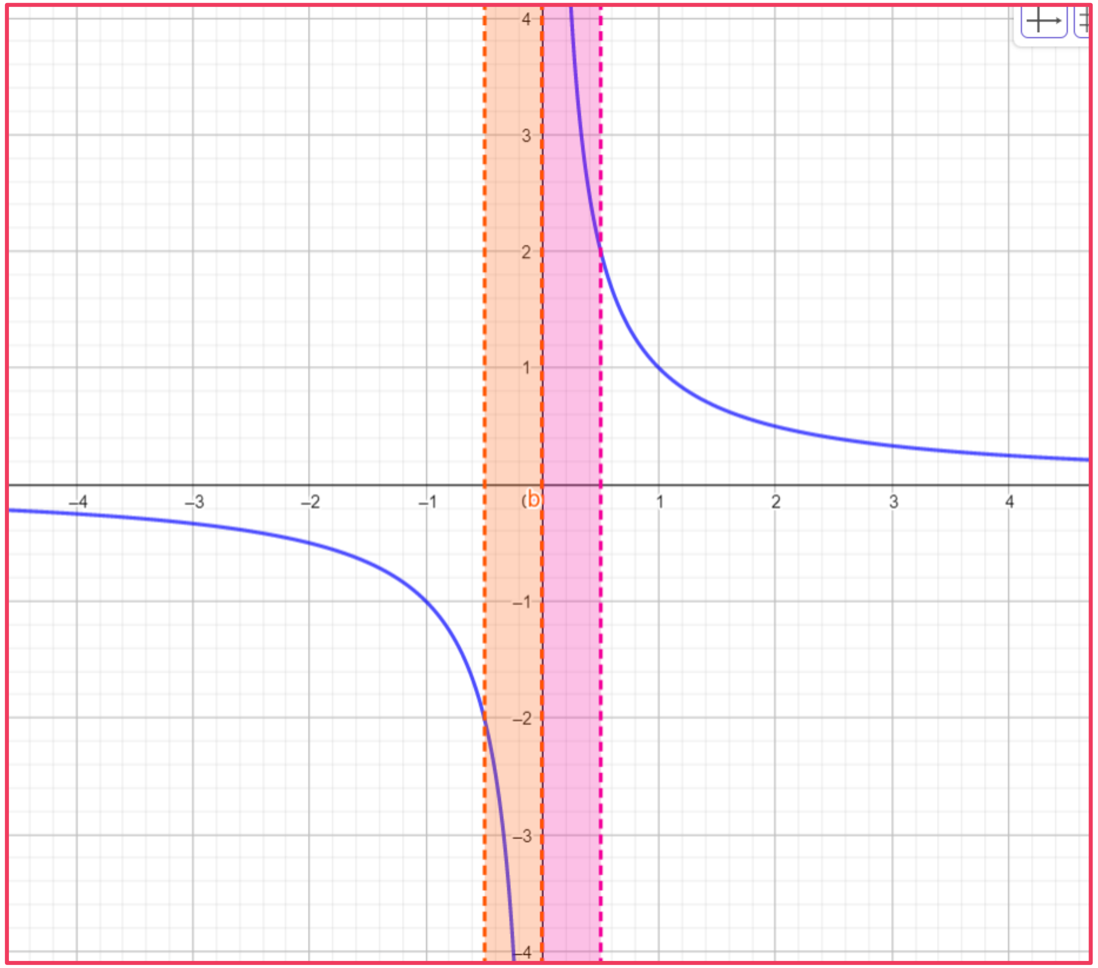
$$f(x) = y = \frac{1}{x}$$

Il suo dominio è $\mathbb{R} - \{0\}$.

Notiamo dal grafico che la funzione cresce man mano che si avvicina a 0 da destra, mentre decresce quando si avvicina a 0 da sinistra:

x	y
$1/2$	2
$1/8$	8
$1/20$	20
$1/1000$	1000

x	y
$-1/2$	-2
$-1/8$	-8
$-1/20$	-20
$-1/1000$	-1000



Definizioni di limite infinito

Una funzione $f(x)$ di dominio D tende a $\pm\infty$ per $x \rightarrow x_0$ se, per qualsiasi numero positivo M grande a piacere, si può determinare un intorno completo $\mathrm{I}(x_0)$ tale che

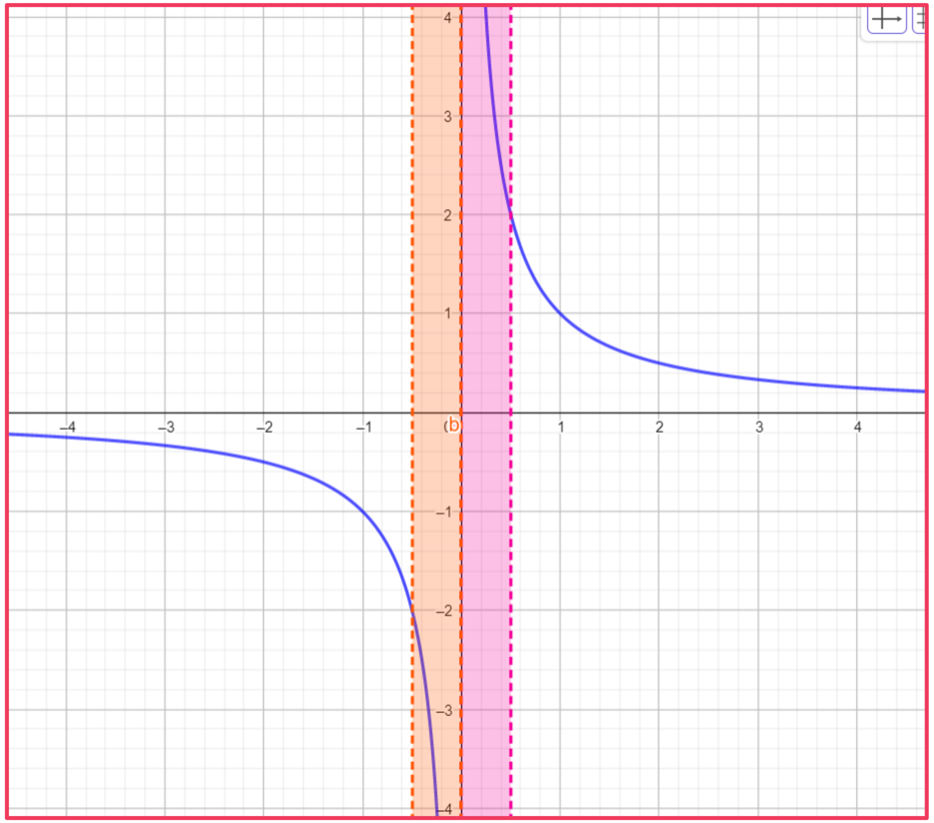
$$f(x) > M\ (per + \infty)\ oppure\ f(x) < -M\ (per\ \ -\infty)$$

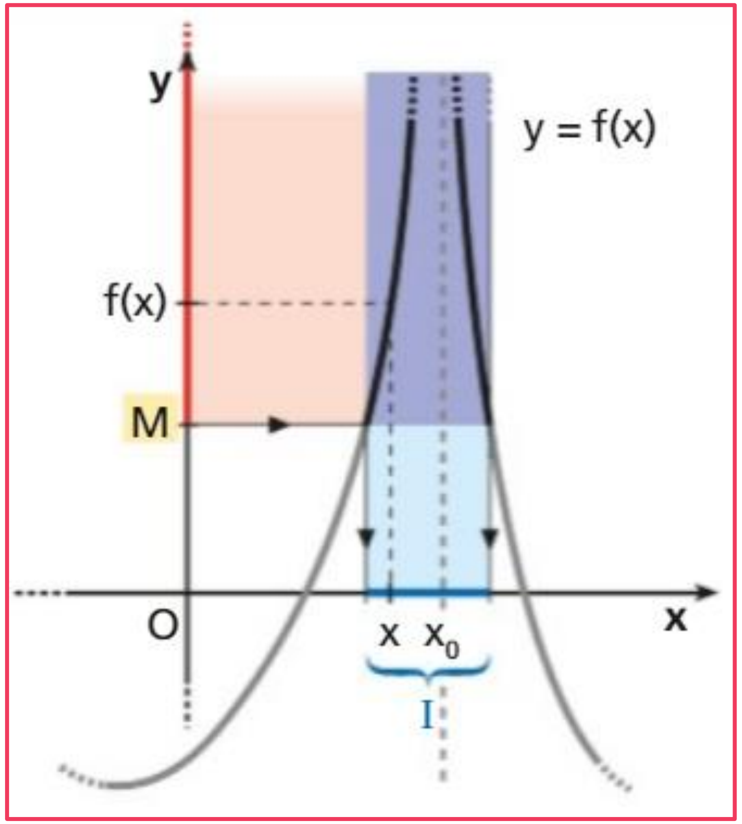
per ogni $x \in I(x_0) \cap D$, diverso al più da x_0.

Si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Esempi di grafici





Limite per x_0 che tende a infinito

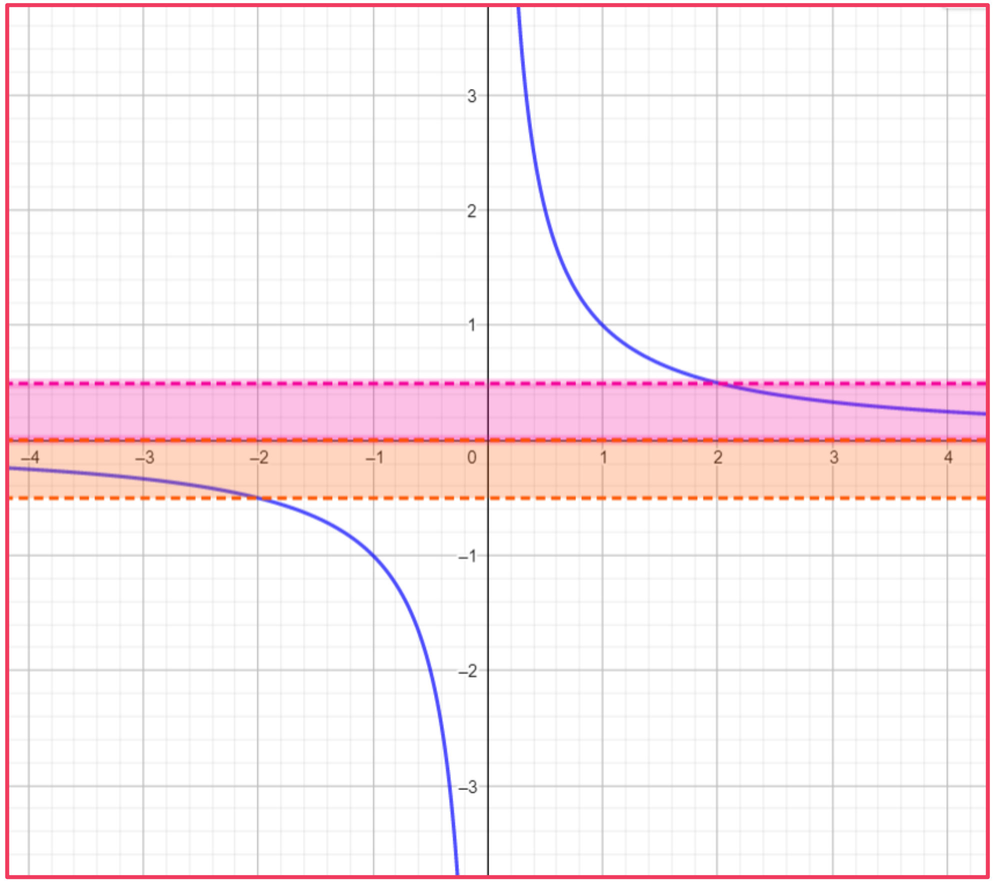
Consideriamo la funzione

$$f(x) = y = \frac{1}{x}$$

Il suo dominio è $\mathbb{R} - \{0\}$.

Notiamo dal grafico che la funzione, man mano che x cresce, si avvicina a 0 da sopra, mentre se x decresce si avvicina a 0 da sotto:

x	y	x	y
2	$1/_2$	-2	$-1/_2$
8	$1/_8$	-8	$-1/_8$
20	$1/_{20}$	-20	$-1/_{20}$
1000	$1/_{1000}$	-1000	$-1/_{1000}$



Definizioni di limite per x_0 che tende a infinito

Una funzione $f(x)$ di dominio D tende a l per $x \to +\infty$ $(-\infty)$ se, per qualsiasi numero positivo ε piccolo a piacere, si può trovare un numero positivo M grande a piacere tale che

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

per ogni $x > M$ $(x < -M)$ preso nel dominio di f.

Si scrive

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$$

Limite infinito per x_0 che tende a infinito

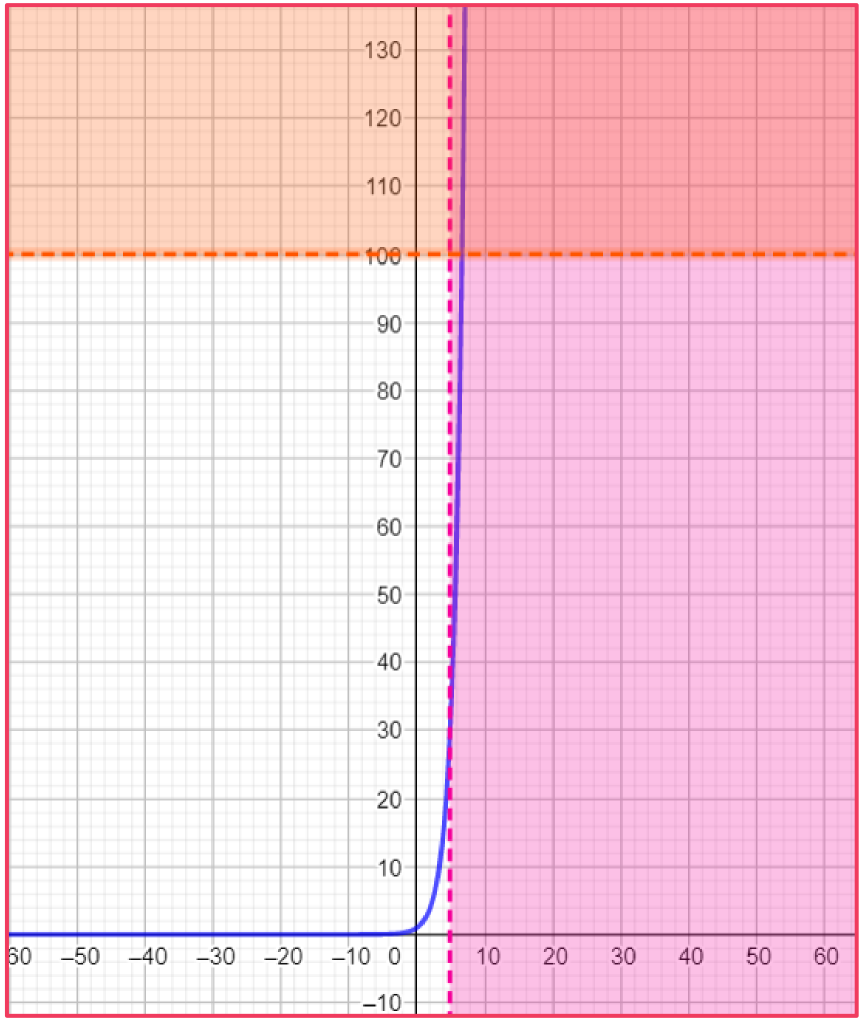
Consideriamo la funzione

$$f(x) = y = 2^x$$

Il suo dominio è $\mathbb{R}$.

Notiamo dal grafico che la funzione, man mano che x cresce, cresce sempre di più:

x	y
2	4
8	64
20	400
1000	1000000



Definizioni di limite infinito per x_0 che tende a infinito

Una funzione $f(x)$ di dominio D tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$ se, per qualsiasi numero positivo K grande a piacere, si può trovare un numero positivo M grande a piacere tale che

$$f(x) > K \; (f(x) < -K)$$

per ogni $x > M$ $(x < -M)$ preso nel dominio di f.

Si scrive

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Teorema di unicità del limite

Se esiste il limite l di $f(x)$ per $x \to x_0$, allora esso è unico.

$$\exists! \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Teorema di permanenza del segno

Se una funzione $f(x)$ ammette limite finito l per x che tende a x_0 ed essa, in un intorno $I(x_0)$ essa è:

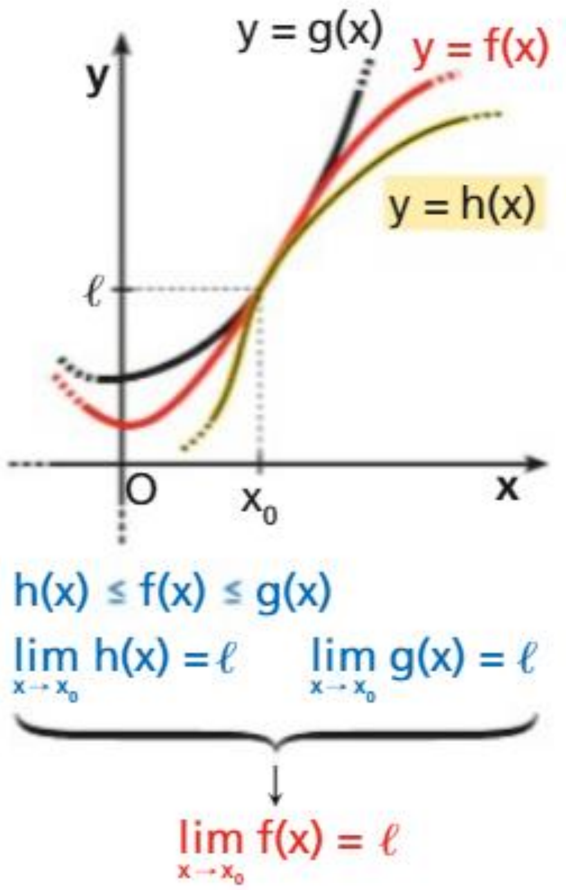
- positiva o nulla, allora $l \geq 0$;
- negativa o nulla, allora $l \leq 0$.

Teorema del confronto

Siano $f(x), g(x), h(x)$ tre funzioni definite in un intorno $\mathrm{I}(x_0)$, escluso al più il punto x_0. Se in ogni punto di $I(x_0) - \{x_0\}$ risulta

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

e il limite delle due funzioni $h(x)$ e $g(x)$, per $x \to x_0$ è uno stesso numero l, allora anche il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ è uguale ad l.



$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-2x}{x-2\operatorname{sen} x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\qquad \lim_{f(x)\to 0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}=1$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{(x-3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(5^x-1)}{5^x-1}$$

CALCOLO DEI LIMITI

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{x^3+2x^2-3x-4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3+x}}{e^{-x}+e^{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Limiti di funzioni elementari

Funzioni elementari continue → se il limite è per $x \to x_0$ finito, basta calcolare $f(x_0)$

Se il limite è per $x \to \pm\infty$ e/o è infinito…

- $y = x^n \;\to\; \ldots$
- $y = \sqrt[n]{x} \;\to\; \ldots$
- $y = a^x \;\to\; \ldots$
- $y = \log_a x \;\to\; \ldots$
- $y = \sin x\,, y = \cos x \;\to\; \ldots$

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{1}{0^\pm} \to \pm\infty \\ \dfrac{1}{\pm\infty} \to 0 \end{array}}$$

Funzioni non continue → si studiano i limiti agli estremi del dominio:

$$y = \operatorname{tg} x \qquad\qquad y = \frac{1}{x}$$

Algebra dei limiti

- SOMMA DEI LIMITI: $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
- PRODOTTO COSTANTE PER LIMITE: $\lim_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$
- PRODOTTO DI LIMITI: $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$
- QUOZIENTE DI LIMITI: $\lim_{x \to x_0} [f(x)/g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) / \lim_{x \to x_0} g(x)$
- POTENZA DI LIMITI: $\lim_{x \to x_0} \left[f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x \to x_0} f(x)^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$ (base >0)

In caso di limite infinito?

FORME DETERMINATE

- $l \pm \infty$
- $\pm\infty \pm \infty$
- $\pm\infty \cdot l$
- $l/\pm\infty$
- $\pm\infty/l$
- l^{∞}
- ∞^{l}

FORME INDETERMINATE

- $+\infty - \infty$
- $\pm\infty \cdot 0$
- $0/0$
- ∞/∞
- 0^{0}
- ∞^{0}
- 1^{∞}

Forma indeterminata $+\infty - \infty$

- Funzioni POLINOMIALI: raccolgo x alla potenza maggiore

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+2x^2-x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\searrow 0 \qquad \searrow 0$$

- Funzioni RAZIONALI: razionalizzo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-3}}{x+\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2-3)}{x+\sqrt{x^2-3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+\sqrt{x^2-3}} = 0$$

Forma indeterminata $\pm\infty \cdot 0$

- Funzioni GONIOMETRICHE: uso formule per risolverla

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

- Altre funzioni: lo riporto alla forma indeterminata $0/0$ oppure ∞/∞

Forma indeterminata ∞/∞

Se ho una funzione razionale, raccolgo la potenza maggiore di x sia a numeratore che a denominatore, altrimenti uso la gerarchia degli infiniti.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+3x^2+1}{x^3+2x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+4}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+4x}{2x^3+3x^2+1}$$

Forma indeterminata $0/0$

Scompongo la funzione fratta (numeratore e denominatore) in modo da semplificare.
Il numero a cui tende x mi dà l'indicazione del polinomio che posso raccogliere.

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x^2+7x+10}=\lim_{x\to -5}\frac{\cancel{(x+5)}(x-5)}{(x+2)\cancel{(x+5)}}=\lim_{x\to -5}\frac{x-5}{x+2}=\frac{-10}{-3}=\frac{10}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x^2+2x)}{\cancel{x}(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x-1}=0$$

Forme indeterminate $0^0, \infty^0, 1^\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$\lim_{x \to 0^+} (x^2 + 2x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln\left(x^2+2x\right)^{\frac{1}{\ln x}}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}\ln(x(x+2))} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln x + \ln(x+2)}{\ln x}} =$$

$\ln 2$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{1+\frac{\ln(x+2)}{\ln x}} = e \cdot \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{\ln(x+2)}{\ln x}} = e \cdot 1 = e$$

$-\infty$

0

Limiti notevoli

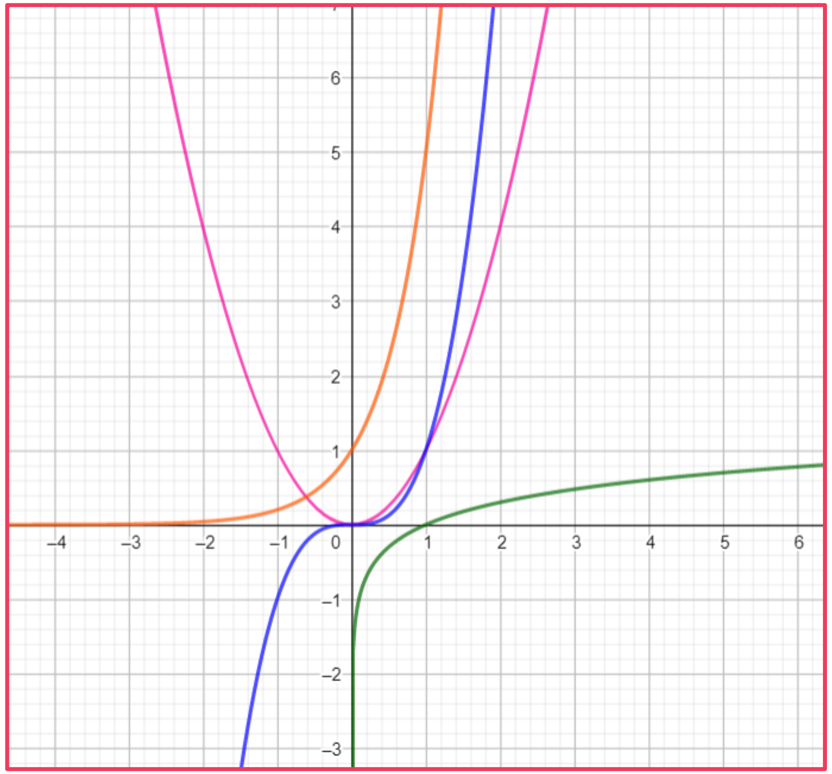
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Gerarchia degli infiniti

Se ci si imbatte in una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ dove sono presenti funzioni di tipo diverso, bisogna ricordare che:

$$(\log_a x)^n \ll x^k \ll b^x$$

cioè, le esponenziali vanno ad infinito più rapidamente di tutte le funzioni, seguite dalle potenze di x, mentre i logaritmi sono i più lenti.



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^{100}} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^{23}}{x} = 0$$