17. $x = t^3 - 3t, \quad y = t^2 - 3$

25. Mostre que a curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t \cos t$ tem duas tangentes em $(0, 0)$ e encontre suas equações. Esboce a curva.

27. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à trocoide $x = r\theta - d \operatorname{sen} \theta$, $y = r - d \cos \theta$ em termos de θ. (Veja o Exercício 40, na Seção 10.1.)
(b) Mostre que, se $d < r$, então a trocoide não tem uma tangente vertical.

41. $x = 1 + 3t^2, \quad y = 4 + 2t^3, \quad 0 \leq t \leq 1$

42. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2} - 2t, \quad 0 \leq t \leq 2$

43. $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t \cos t, \quad 0 \leq t \leq 1$

53. Mostre que o comprimento total da elipse $x = a \operatorname{sen} \theta$, $y = b \cos \theta$, $a > b > 0$, é

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

onde e é a excentricidade da elipse ($e = c/a$, com $c = \sqrt{a^2 - b^2}$).

17)

$x = t^3 - 3t$
$y = t^2 - 3$ $\rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 3 = 0 \therefore t = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$

$\frac{dy}{dt} = 2t = 0 \therefore t = 0$

Se $t=0$ temos:

$x = 0$ e $y = -3 \rightarrow (0,-3)$

Se $t = 1$ temos:

$x = -2$, $y = -2 \rightarrow (-2,-2)$

Se $t=-1$ temos:

$x = 2$ e $y = -2 \rightarrow (2,-2)$

$\therefore$

25)

$x = \cos t$

$y = \operatorname{sen} t \cdot \cos t$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\operatorname{sen} t \\ \dfrac{dy}{dt} = -\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = \cos 2t \end{cases}$$

No Ponto (0,0)

$x = 0 \rightarrow \cos t = 0 \rightarrow \cos t = \cos \frac{\pi}{2}$

1º Caso: $t = \frac{\pi}{2}$ ou

2º Caso: $t + \frac{\pi}{2} = 2\pi \rightarrow t = \frac{3\pi}{2}$

$y = 0 \rightarrow \underbrace{\operatorname{sen} t \cdot \cos t}_{\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}} = 0 \rightarrow \operatorname{sen} 2t = 0$

Assim: $\operatorname{sen} 2t = \operatorname{sen} 0$

1º Caso: $2t = 0 \rightarrow t = 0$ ou

2º Caso: $2t + 0 = \pi \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Subst. em $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos 2t}{\operatorname{sen} t}$ temos

$t=0$ Nope!!!

$t = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos(\pi)}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})} = -1$

daí: $y = -x$ é uma solução

$t = \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos(3\pi)}{\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2})} = 1$

daí, $y = x$ também é solução!

27)

$x = r\theta - d\,\text{sen}\,\theta$

$y = r - d\cos\theta$

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \theta - d\cos\theta \\ \dfrac{dy}{dt} = d\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{d\,\text{sen}\,\theta}{\theta - d\cos\theta}}$$

b) devemos ter $d<r$, pois

Se $0 < d < r \rightarrow |d\cos\theta| < d < r$

$\rightarrow -d\cos\theta > -d > -r$

$\rightarrow \underbrace{r - d\cos\theta}_{y} > r - d > \cancel{r - r}^{\,0}$

$\rightarrow y > r - d$ Com essa condição não

Possui tangente vertical... $\boxed{E}$

29)

$x = 3t^2 + 1$

$y = t^3 - 1$

devemos ter: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

com $\frac{dx}{dt} = 6t$ e

$\frac{dy}{dt} = 3t^2$ Assim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{6t} = \frac{1}{2} \xrightarrow{t \neq 0} \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{t = 1}$$

---

41)

$x = 1 + 3t^2$

$y = 4 + 2t^3$

$$L = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt$$

com $\frac{dx}{dt} = 6t$ e

$\frac{dy}{dt} = 6t^2$

Sendo Assim,

$$L = \int_0^t \sqrt{(6t)^2 + (6t^2)}\, dt \rightarrow \int_0^t 6t\sqrt{1 + t^2}\, dt$$

fazendo: $u = 1 + t^2$ subst:

$du = 2t.dt$

$$L = \int_0^t 6t\sqrt{u} \cdot \frac{du}{2t} \rightarrow \int_0^t 3\sqrt{u}\,du =$$

$$3 \cdot \frac{2 \cdot u^{2/3}}{3} = 2(1+t^2)\Big|_0^1 = \ldots$$

Continue...

43)

$x = t \cdot \operatorname{sen} t$

$y = t \cdot \cos t$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = t \cdot \cos t + \operatorname{sen} t \\ \dfrac{dy}{dt} = -t \operatorname{sen} t + \cos t \end{cases}$$

$$L = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt \rightarrow$$

$$L = \int_0^t \sqrt{\underbrace{(t \cdot \cos t + \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - t \operatorname{sen} t)^2}_{t^2+1 \text{ (Tenha Fé...)}}}\, dt$$

$$L = \int_0^t \sqrt{t^2+1}\, dt =$$

$\boxed{\text{Fizemos em sala ou tentamos...}}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{t^2+1} \cdot t + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{t^2+1} + t\right)\Big|_0^3$$

53)

$X = a\,\text{Sen}\,\theta$

$y = b\,\text{Cos}\,\theta$

$e = \dfrac{c}{a}$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a\,\text{Cos}\,\theta \\ \dfrac{dy}{dt} = b\,\text{sen}\,\theta \quad \text{assim} \\ \left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = \end{cases}$$

Sabemos que: $\text{sen}^2 t + \text{Cos}^2 t = 1$

$a^2\,\text{Cos}^2\theta + b^2\,\text{sen}^2\theta =$

$a^2(1 - \text{sen}^2\theta) + b^2\,\text{sen}^2\theta =$

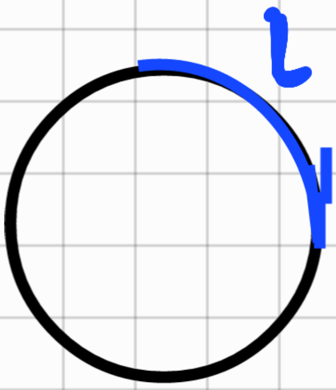
$$a^2 - \text{Sen}^2\theta\,\underbrace{(a^2 - b^2)}_{c^2} = a^2 - c^2\,\text{sen}^2\theta$$

$a^2\left(1 - \dfrac{c^2}{a^2}\cdot\text{Sen}^2\theta\right)$ Logo

$$\sqrt{a^2\left(1 - \underbrace{\dfrac{c^2}{a^2}}_{e^2}\cdot\text{Sen}^2\theta\right)} = a\sqrt{1 - e^2\,\text{sen}^2\theta}\,.$$

Finalmente: $L = \displaystyle\int_0^{\pi/2} a\cdot\sqrt{1 - e^2\,\text{Sen}^2\theta}\,d$

obs:



no intervalo $0 < t < \frac{\pi}{2}$

L corresponde a $\frac{1}{4}$ da curva, logo seu comprimento total será:

$$4 \cdot \int_0^{\pi/2} a\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \dots$$

$$4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$