

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL
CURSO DE MESTRADO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Dissertação de Mestrado

Modelagem de Sistemas Biológicos: Ritmo Circadiano

Stefânia da Silveira Glaeser

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Modelagem Computacional
da Universidade Federal do Rio Grande- FURG,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Modelagem Computacional

Orientador: Prof. Dr. Adriano De Cezaro
Co-orientadora: Profª. Drª Fabiana Travessini De Cezaro

Rio Grande, 2016

Dados de catalogação na fonte:

colocar NOME DO BIBLIOTECÁRIO – CRB-colocar número do crb do bibliotecário
Biblioteca Central – FURG

A999a Glaeser, Stefânia da Silveira

Modelagem de Sistemas Biológicos: Ritmo Circadiano /
Stefânia da Silveira Glaeser. – Rio Grande, 2016. – 125 f: gráf. –
Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Mode-
lagem Computacional. Universidade Federal do Rio Grande. Rio
Grande, 2016. – Orientador Adriano De Cezaro; Co-orientador
Fabiana Travessini De Cezaro.

1. Ritmo Circadiano. 2. Modelagem. 3. Osciladores. 4. Dor.
I. Cezaro, Adriano De. II. Cezaro, Fabiana Travessini De.
III. Título.

CDD: 999.9

Banca examinadora:

Prof. Dr. Adriano De Cezaro - FURG (Orientador)

Prof^a. Dr^a. Diana Francisca Adamatti - FURG

Prof. Dr. Maicon Marques Alves - UFSC

*Dedico este trabalho aos meus pais Jorge e Ione,
ao meu esposo Ilson Junior,
e ao meu irmão Daniel.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, Uno e Trino, pelo seu infinito amor, e a Maria Santíssima por sua intercessão e amor de mãe.

Aos meus pais, esposo, irmão, e todos familiares e amigos pela compreensão da ausência e pelo apoio incansável.

Aos meus colegas do mestrado, em especial a minha amiga Marcilene, pela ajuda e companheirismo.

Aos meus orientadores e amigos, Adriano e Fabiana, pelo incentivo, paciência e orientação.

A Universidade Federal do Rio Grande e ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional pelo espaço.

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul pela bolsa de estudos.

Foi o tempo que dedicaste à tua rosa que a fez tão importante.
— ANTOINE DE SAINT-EXUPÉRY

RESUMO

O ritmo circadiano governa a maioria das atividades inconscientes de todos os seres vivos. Alterações prolongadas oriundas de influências externas, como dor crônica, podem causar desajustes em diversas funções importantes do corpo humano. Uma maneira de propormos ações para minimizar os efeitos das alterações no ritmo circadiano influenciados por interferências externas é modelarmos e estudarmos as propriedades matemáticas deste modelo, principalmente o ritmo circadiano sob influência externa da dor. Usaremos como base o modelo de fase proposto por Strogatz [16], o qual analisa o ritmo circadiano relacionando o ciclo sono-vigília ao ciclo da temperatura corporal pelo acoplamento de dois osciladores não lineares que descrevem estes ciclos. Incorporamos um novo oscilador, o qual descreve o ciclo da dor ao modelo de fase e analisaremos as diferentes possibilidades de acoplamento. O modelo que adotaremos é uma primeira abordagem que não tem o intuito de representar a realidade em detalhes, mas acreditamos que ele possa capturar os elementos chave dos dados experimentais. Em outras palavras, adotaremos um sistema de osciladores acoplados, modelados por um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) de primeira ordem. Para tal sistema obtemos resultados de boa colocação, existência, unicidade e dependência continua dos dados iniciais. Uma das vantagens da simplicidade do sistema proposto é que este pode ser resolvido analiticamente sob certas hipóteses simplificadoras. Assim, nos permite analisar os resultados através, de considerações matemáticas simples, sem a necessidade de imposições biológicas específicas.

Palavras-chave: Ritmo Circadiano, Modelagem, Osciladores, Dor.

ABSTRACT

The circadian rhythm governs most of the unconscious activities of all living beings. Prolonged changes from external influences such as chronic pain, can cause imbalances in several important functions of the human body. One way to propose actions to minimize the effects of changes in the circadian rhythm influenced by external interference is to model and study the mathematical properties of this model, especially the circadian rhythm under external influence of pain. We use based on the phase model proposed by Strogatz [16], which analyzes the circadian rhythm relating sleep-wake cycle to body temperature cycle by coupling two nonlinear oscillators which describe these cycles. We incorporate a new oscillator, which describes the pain cycle phase to model and analyze the different possibilities of coupling. The model that has been adopted is a first approach that it is not intended to represent reality in detail, but we believe that it can capture the key elements of the experimental data. In other words, we adopted one coupled oscillator system, modeled by a system of ordinary differential equations (ODE's) of first order. For this system we obtain results of good placement, existence, uniqueness and dependence continues for initial data. One of the advantages of simplicity of the proposed system is that it can be solved analytically under certain simplifying assumptions. Thus, it allows us to analyze the results through simple mathematical considerations, without the need for specific biological constraints.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Modelo de fase de Strogatz	35
Figura 2	Caso 1 de acoplamento	46
Figura 3	Caso 2 de acoplamento	67
Figura 4	Caso 3 de acoplamento	83
Figura 5	Caso 4 de acoplamento	100
Figura 6	Caso Strogatz Sincronizado	102
Figura 7	Caso Strogatz Dessincronizado	103
Figura 8	Situação 1 Sincronizado	104
Figura 9	Situação 1 Dessincronizado	104
Figura 10	Situação 1 Misto 1	105
Figura 11	Situação 1 Misto 2	106
Figura 12	Situação 2 Sincronizado	107
Figura 13	Situação 2 Dessincronizado	107
Figura 14	Situação 2 Misto 1	108
Figura 15	Situação 2 Misto 2	108
Figura 16	Situação 3 Sincronizado	109
Figura 17	Situação 3 Dessincronizado	109
Figura 18	Situação 3 Misto 1	110
Figura 19	Situação 3 Misto 2	110
Figura 20	Situação 4 Sincronizado	111
Figura 21	Situação 4 Dessincronizado	111
Figura 22	Situação 4 Misto 1	112
Figura 23	Situação 4 Misto 2	112
Figura 24	Situação 5 Sincronizado	113
Figura 25	Situação 5 Dessincronizado	113
Figura 26	Situação 5 Misto 1	114
Figura 27	Situação 5 Misto 2	114
Figura 28	Situação 6 Sincronizado	115
Figura 29	Situação 6 Dessincronizado	115
Figura 30	Situação 6 Misto 1	116
Figura 31	Situação 6 Misto 2	116

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1 RITMOS E CICLOS BIOLÓGICOS	14
1.1 Ritmo Circadiano	14
1.2 Ciclo temperatura corporal	15
1.3 Ciclo atividade-reposo	15
1.4 Ciclo dor	15
1.5 Sincronização e Dessincronização	15
2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	17
2.1 Boa colocação para sistemas de EDO's	18
2.1.1 Soluções maximais	20
2.2 Dependência nas condições iniciais e nos parâmetros	22
2.2.1 Dependência Lipschitz	22
2.2.2 Dependência C^K	26
2.3 Soluções Globais	34
3 MODELO DE STROGATZ	35
3.1 Estrutura	35
3.2 Sincronização	37
3.3 Dessincronização	38
4 MODELO INFLUENCIADO PELA DOR	45
4.1 Caso 1	45
4.1.1 Situação 1	46
4.1.2 Situação 2	58
4.2 Caso 2	66
4.2.1 Situação 3	67
4.2.2 Situação 4	75
4.3 Caso 3	82
4.3.1 Situação 5	83
4.3.2 Situação 6	91
4.4 Caso 4	100
5 ANÁLISES DOS MODELOS	101
5.1 Modelo de Strogatz	102
5.2 Modelo influenciado pela dor	103
5.2.1 Caso 1	103

5.2.2	Caso 2	108
5.2.3	Caso 3	112
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	117
REFERÊNCIAS		118
ANEXO A	GRÁFICOS	120
A.1	Caso 1 - Situação 1	121

INTRODUÇÃO

A cronobiologia é um ramo das Ciências Biológicas que visa estudar os ritmos biológicos e os relógios biológicos que geram estes ritmos. Os ritmos biológicos se referem às mudanças cíclicas que se repetem regularmente em um determinado tempo e estão relacionadas às alterações dos processos fisiológicos [15]. Como principal característica, estes ritmos biológicos governam a maioria das atividades inconscientes de todos os seres vivos.

O ritmo circadiano regula diversas funções importantes do corpo humano, a determinação de um modelo que represente os dados reais de forma fidedigna poderá ser utilizado para gerar procedimentos médicos mais eficientes. Descobrir como se comporta o ritmo circadiano de um paciente antes, durante e depois de um processo cirúrgico, por exemplo, pode melhorar procedimentos médicos em pacientes futuros como o tempo de internação, a dependência de efeitos químicos para controlar a dor e entre outros procedimentos.

Uma forma de analisarmos o ritmo circadiano é modelá-lo e estudarmos as propriedades matemáticas deste modelo. Usaremos como base o modelo de fase do matemático Steven Henry Strogatz [17] o qual relaciona o ciclo da atividade-reposo ao ciclo da temperatura corporal, a fim de modelar o ritmo circadiano. Nossa proposta de modelar este ritmo consiste em relacionar estes dois ciclos e também o ciclo da dor.

Cada ciclo biológico destes será conduzido por um oscilador não-linear. Desta forma, acoplaremos estes osciladores e estudaremos as equações dinâmicas obtidas. Precisamos considerar a sincronização e/ou dessincronização entre os ciclos a fim de concluir se o ritmo circadiano está sincronizado ou dessincronizado.

No Capítulo 1 definiremos ritmo circadiano, os ciclos biológicos utilizados e as condições para que estes ciclos tenham uma relação de sincronização ou de dessincronização, a fim de possibilitar ao leitor um melhor compreendimento dos termos que serão utilizados ao longo trabalho.

Visando a análise matemática dos modelos, apresentaremos no capítulo 2 um breve estudo de EDO's com definições, teoremas, corolários, proposições e demonstrações que serão abordados ao decorrer do trabalho. No capítulo seguinte, entraremos na apresentação do modelo de Strogatz, que relaciona o ciclo da temperatura corporal ao ciclo da atividade-reposo para modelar o ritmo circadiano.

Nossa proposta de modelagem estará disposta do Capítulo 4, em que acoplaremos o oscilador condutor da dor ao sistema de fase apresentado no Capítulo 3 por Strogatz. Explicitamos aqui que nossa proposta de modelagem apresenta característica inovadoras que precisamos devidamente estudá-las. Logo, no Capítulo 5 analisaremos os diferentes casos de acoplamento para os osciladores, estipulando valores aos parâmetros e gerando gráficos que nos trazem características do ritmo circadiano.

Por fim, deixaremos nossas considerações finais e nossas propostas futuras de estudo no Capítulo 6, visto que ainda temos muito para estudar a fim de obter um modelo que represente os dados reais de forma fidedigna. E finalmente apresentaremos as referências bibliográficas.

1 RITMOS E CICLOS BIOLÓGICOS

Os ritmos biológicos se classificam de acordo com o seu período aproximado, representado pela tabela 1.

Tabela 1: Ritmos biológicos

Ritmo	ciclo
circameral	<i>12 horas</i>
circadiano	<i>24 horas</i>
circalunar	<i>28 dias</i>
circanual	<i>365 dias</i>

Estes ritmos, em alguns casos, apresentam o prefixo ultra, que representa um ciclo maior que o estimado, e em outros casos, o prefixo infra que representa um ciclo menor que o estimado [12].

1.1 Ritmo Circadiano

O ritmo circadiano é como um marca-passos localizado no cérebro, que regula os ritmos materiais e psicológicos do ser humano, ele influencia na digestão em vigília, na renovação das células e entre outras funções.

Este relógio que monitora o ciclo de atividades do corpo humano localiza-se, especificamente, no núcleo supraquiasmático. Esse núcleo é conectado a outras partes do cérebro e assim funciona como um marca-passos que regula o ritmo [2].

Ao dizer que o ritmo circadiano tem um ciclo de 24 horas, significa que fazemos as mesmas atividades, de modo geral, num horário aproximado todos os dias. Consequentemente, se não tivermos um ritmo circadiano sincronizado, a funcionalidade diária dos órgãos será afetada, o que pode gerar mal estar e algumas doenças [13, 4].

1.2 Ciclo temperatura corporal

A temperatura corporal está intimamente relacionada com a agitação molecular, quanto maior a temperatura de um corpo, maior é agitação de suas moléculas, vice-versa.

A variação térmica circadiana é um fenômeno natural e geralmente não ultrapassa os 0.6°C (1°F). Variações acima deste patamar são consideradas de alerta, urgência pelos especialistas. No entanto, naturalmente a temperatura corporal é menor pela manhã, aumenta ao longo do dia e é máxima pelo início da noite [10], gerando assim um ciclo periódico.

O controle da temperatura corporal é feita pelo hipotálamo, que é uma região do encéfalo, localizado abaixo do tálamo e acima da hipófise.

1.3 Ciclo atividade-reposo

O ciclo atividade-reposo, ou também chamado de ciclo sono-vigília, é um ciclo periódico (ou com pouca interferência) que representa o período em dormimos ou ficamos acordados diariamente. Assim como o controle da temperatura corporal, a regulagem do sono é feita pelo hipotálamo.

Existe uma relação do ciclo atividade-reposo com aspectos externos [4], ou seja, a claridade do dia/noite, refeições diferentes e viagens, são alguns destes aspectos que podem influenciar no período.

1.4 Ciclo dor

A dor é um dos componentes essenciais de defesa do organismo. Ela pode ser definida como uma experiência subjetiva que pode estar associada à lesão real ou potencial nos tecidos, podendo ser descrita tanto em termos destas lesões quanto por ambas as características [3].

O tálamo, localizado acima do hipotálamo, é responsável pela sensação de dor.

Neste trabalho temos o interesse de verificar a influência da dor como um agente externo nos ciclos da atividade-reposo e da temperatura.

1.5 Sincronização e Dessincronização

A relação entre dois ou mais ciclos, sejam eles o ciclo da temperatura corporal, o ciclo da atividade-reposo, ou mesmo o ciclo da dor, pode ser sincronizada ou dessincronizada.

A definição de sincronização consiste no ato de duas ou mais coisas estarem em sincronia, interagirem com perfeita interação ou conexão e ao mesmo tempo. Assim, pode-se dizer que se a relação entre dois ou mais ciclos é sincronizada, então estes ciclos estão prefeitamente interados.

Visto isso, a definição de dessincronização é o oposto de sincronização. Assim, diz-se que se a relação entre dois ou mais ciclos é dessincronizada, então estes ciclos não estão prefeitamente interados ou mesmo sincronizados.

Matematicamente falando, se considerarmos estes ciclos descritos por osciladores não lineares, tais ciclos apresentam uma frequência intrínseca, que é a regulariedade do ciclo, e uma força de acoplamento, que determina o quanto um ciclo influencia no outro. Temos dois casos:

- 1- Se a soma das forças de acoplamento for maior que o módulo da diferença das frequências intrínsecas, então a relação entre estes osciladores é sincronizada. Isto acontece pelo fato das forças de acoplamento terem maior influencia no sistema e consequentemente tais ciclos se sincronizam.
- 2- Se a soma das forças de acoplamento for menor que o módulo da diferença das frequências intrínsecas, então a relação entre estes osciladores é dessincronizada. Isto acontece pelo fato das forças de acoplamento não terem tanta influencia no sistema e consequentemente a frequência intrínseca de cada oscilador permanecerá inalterada (ou quase isso) deixando o sistema dessincronizado.

Por fim, se todos os ciclos analisados e utilizados para modelarem ritmo circadiano estiverem sincronizados, então podemos dizer que o ritmo circadiano está sincronizado, caso contrário o ritmo circadiano está dessincronizado.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados de equações diferenciais ordinárias (EDO's) [11, 6, 8, 7, 5] que serão usadas ao longo do trabalho.

Uma equação é dita equação diferencial ordinária quando envolve as derivadas de uma função desconhecida de uma só variável independente, ou seja, é uma equação que a incógnita é uma função que aparece na equação em forma de suas derivadas.

As equações diferenciais são utilizadas em diversas áreas, como na Biologia, Física, Econômica e principalmente na Matemática e Engenharias visando uma melhor (ou única) descrição dos problemas estudados.

Um sistema formado por uma equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n e n condições complementares que determinam, em um mesmo valor da variável independente, o valor da função incógnita e de suas derivadas é chamado de problema de valor inicial (PVI). As condições complementares são ditas condições iniciais.

As equações estudadas neste capítulo, e depois ao longo do trabalho, são equações diferenciais da forma

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $u = (\theta_i, \theta_j)$, com $i, j \in \mathbb{N}$ e u_0 pertence ao subconjunto U de \mathbb{R}^m . Temos portanto, um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

A solução da equação acima é uma função $u = u(t) = u(t; u_0)$, que indica o estado do sistema no instante t , a partir do estado inicial u_0 no instante $t = t_0 = 0$. Uma equação do tipo (2.1), com $f = f(u) = f(\theta_1, \theta_2)$ não envolvendo a variável t explicitamente, é dita autônoma. O mapeamento $(t, u_0) \rightarrow (t; u_0)$ é dito um sistema dinâmico ou fluxo, que pode ser global ou local, ou seja, se as soluções $u = u(t; u_0)$ estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, ou apenas em um certo intervalo contendo $t = t_0$.

Consideremos $f : \mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, definida em algum subconjunto \mathcal{W}

de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, o sistema (2.1) toma a forma

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

com $(t_0, u_0) \in \mathcal{W}$. Uma equação da forma (2.2), com f dependendo da variável t explicitamente é dita não-autônoma. A solução da equação (2.2) é uma função $u = u(t) = u(t; t_0, u_0)$, que indica o estado do sistema no instante t , a partir do estado inicial u_0 no instante $t = t_0$. O mapeamento $(t, t_0, u_0) \rightarrow (t; t_0, u_0)$ é dito um processo que pode ser global ou local, em que também, se as soluções $u = u(t; u_0)$ estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, ou apenas em um certo intervalo contendo $t = 0$.

Buscaremos ao longo deste capítulo estudar existência, unicidade e estabilidade das soluções de EDO's, onde

- Existência da solução - o fenômeno representado pode, efetivamente, ocorrer dentro das condições estudadas.
- Unicidade da solução - mudanças nas condições iniciais dadas no sistema implica em soluções diferentes.
- Estabilidade da solução - pequenas modificações introduzidas no sistema, acarretam em pequenas modificações na solução do sistema.

Por simplicidade vale mostrar que um problema que satisfaça as premissas de existência, unicidade e dependência contínua dos dados é dito um problema bem posto no sentido de Hadamard.

2.1 Boa colocação para sistemas de EDO's

Nesta seção abordaremos as condições necessárias e suficientes para garantir que o problema (2.2) é bem posto no sentido de Hadamard.

Iniciaremos apresentando a definição de função Lipschitziana.

Definição 2.1 Uma função $f(t, u)$, $(t, u) \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ é dita Lipschitziana com solução a segunda variável de $f \in Lip_x(\mathcal{W})$.

O próximo resultado garante a existência de uma única solução para o PVI (2.2).

Teorema 2.2 (Picard-Lindelöf) Sejam $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e $\mathcal{W} = \{(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; |u - u_0| \leq r, |t - t_0| \leq \delta\}$, $r, \delta > 0$. Se $f \in Lip_u(\mathcal{W})$, então existe um único $u \in C^1([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \mathbb{R}^m)$, tal que $(t, u(t)) \in \mathcal{W}$, satisfaz o PVI (2.2), onde $\epsilon = \min\{\delta, r/M\}$ e $M = \max_{\mathcal{W}}|f|$.

Demonstração 2.3 (Existência) Seja $I = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ e defina em I a sequência de funções

$$u_0(t) \equiv u_0, \quad u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_{n-1}(s)) ds, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Por indução, obtemos

$$|u_n(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_{n-1}(s))| ds \leq M|t - t_0| \leq m \frac{r}{M} = r,$$

de modo que $(t, u_n(t)) \in \mathcal{W}, \forall t \in I$. Agora,

$$|u_1(t) - u_0(t)| \leq M|t - t_0|,$$

e, por indução,

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_{n-1}(t)| &\leq \int_{t_0}^t L|u_{n-1}(s) - u_{n-2}(s)| ds \leq \frac{L^{n-1}M}{(n-1)!} \int_{t_0}^t |s - t_0|^{n-1} ds \\ &\leq \frac{L^{n-1}M|t - t_0|^n}{n!} \leq \frac{L^{n-1}M\epsilon^n}{n!}, \\ \implies |u_{n+m}(t) - u_n(t)| &\leq \sum_{j=1}^{n+m} |u_j(t) - u_{j-1}(t)| \leq \frac{M}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{L^j \epsilon^j}{j!} = \frac{M}{L} \frac{L^n \epsilon^n}{n!} e^{\epsilon L}, \\ \implies u_n &\rightarrow u \in C(I, \mathbb{R}^m) \text{ uniformemente.} \end{aligned}$$

No limite:

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

de modo que u é C^1 em I , $u' = f(t, u)$, $u(t_0) = u_0$ e, como \mathcal{W} é fechado, $(t, u(t)) \in \mathcal{W}$.

(Unicidade) Se $y \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ também é tal que $t, y(t) \in \mathcal{W}$, $y' = f(t, y)$ e $y(t_0 = u_0)$, então, em $[t_0, t_0 + \epsilon]$, $w(t) = |y(t) - u(t)|$ satisfaz

$$w(t) \leq \int_{t_0}^t Lw(s) ds.$$

Integrando em t de t_0 a t_1 , com $t_0 < t_1 \leq t_0 + \epsilon$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} w(t) dt &\leq L \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^t w(s) ds dt = L \int_{t_0}^t \int_s^{t_1} w(s) dt ds \\ &= L \int_{t_0}^{t_1} w(s)(t_1 - s) ds \leq L(t_1 - t_0) \int_{t_0}^{t_1} w(t) dt, \end{aligned}$$

de modo que para $0 < t - t_0 < L^{-1}$ temos $w(t) = 0$. É fácil continuar essa argume-

tor para concluir que em todo o intervalo $[t_0, t_0 + \epsilon]$, $w \equiv 0$, ou seja, $y(t) \equiv x(t)$. A demonstração é análoga em $[t_0 - \epsilon, t_0]$ (ou apenas inverta o tempo). Uma outra demonstração de unicidade pode ser obtida através do lema de Gronwall, que veremos depois para a continuidade das soluções em relação à condição inicial u_0 . \square

Observação 2.4 A continuidade de f em t pode ser relaxada para incluir termos independentes de x que sejam descontínuos ou até distribuições [11].

Teorema 2.5 (Peano) Seja $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, e seja $\mathcal{W} = \{(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; |u - u_0| \leq r, |t - t_0| \leq \delta\}$, $r, s > 0$. Se $f \in C(\mathcal{W}, \mathbb{R}^m)$, então existe $u \in C^1((t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon), \mathbb{R}^m)$, tal que $(t, u(t)) \in \mathcal{W}$, $u' = f(t, u)$ e $u(t_0) = u_0$, onde $\epsilon = \min\{\delta, r/M\}$ e $M = \max_{\mathcal{W}}|f|$.

Demonstração 2.6 Pelo Teorema de Stone-Weierstrass [5], \exists polinômios $p_n \rightarrow f$ uniformemente em \mathcal{W} (que podemos tomar tais que $\max_{\mathcal{W}}|f - p_n| \leq 1/n$). Então pelo Teorema de Picard, existe uma solução $u_n \in C^1(I_n, \mathbb{R}^m)$ de $u'_n = p_n(t, u_n)$, $x_n(t_0) = u_0$, com $(t, u_n(t)) \in \mathcal{W}$, onde $I_n = [t_0 - \epsilon_n, t_0 + \epsilon_n]$ e $\epsilon_n = \min\{\delta, r/(M + n^{-1})\}$. Como \mathcal{W} é limitado, $\{u_n\}_n$ é uniformemente limitada. Além disso,

$$|u_n(t) - u_n(s)| \leq \int_s^t |p_n(\tau, u_n(\tau))| d\tau \leq (M + n^{-1})|t - s| \leq (M + 1)|t - s|,$$

ou seja, $\{u_n\}_n$ é equicontínua. O Teorema de Arzela-Ascoli [5] nos diz que existe $u \in C(I, \mathbb{R})$ e uma subsequência $u_{n_j} \rightarrow u$ pontualmente em $I = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) = \bigcup_n I_n$ e uniformemente em qualquer subintervalo compacto de I . No limite quando $j \rightarrow \infty$, obtemos

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

de modo que $u \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$, $u' = f(t, u)$ e $x(t_0) = u_0$. \square

Observação 2.7 O Teorema de Peano não garante a unicidade, no entanto as hipóteses sobre f foram relatadas.

2.1.1 Soluções maximais

Os Teoremas de Picard e de Peano não garantem um intervalo máximo de existência da solução. Nesta subseção trataremos dos resultados que garantem maximilidade do intervalo onde as soluções existem.

Definição 2.8 (Solução maximial) Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_{loc,u}(\mathcal{W})$. Para cada $(t_0, u_0) \in \mathcal{W}$, defina o intervalo $I_m(t_0, u_0)$ como sendo a união de todos os intervalos $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 tais que existe $u \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ com $(t, u(t)) \in \mathcal{W}$,

$u' = f(t, u)$ e $u(t_0) = u_0$. (Note que pelo Teorema de Picard existe pelo menos um intervalo I dessa forma.) Pela unicidade de soluções, garantida pelo Teorema de Picard, duas soluções definidas respectivamente em intervalos I e J como acima coincidem na intersecção $I \cap J$ e, portanto, podemos concluir que há uma única solução em todo o intervalo aberto $I_m(t_0, u_0)$, que denotamos por $u(t; t_0, u_0)$.

Definição 2.9 Denotamos por $T_m^+(t_0, u_0)$ e $T_m^-(t_0, u_0)$ o supremo e o ínfimo, respectivamente, do intervalo $I_m(t_0, u_0)$. Então $I_m(t_0, u_0) = (T_m^-(t_0, u_0), T_m^+(t_0, u_0))$, com $-\infty \leq T_m^-(t_0, u_0) < t_0 < T_m^+(t_0, u_0) < +\infty$. Além disso, definimos $I_m^+(t_0, u_0) = [t_0, T_m^+(t_0, u_0))$ e $I_m^-(t_0, u_0) = (T_m^-(t_0, u_0), t_0]$. No caso autônomo, definimos $I_m(u_0) = I_m(0, u_0)$, $T_m^+(u_0) = T_m^+(0, u_0)$, $T_m^-(u_0) = T_m^-(0, u_0)$, $I_m^+(u_0) = [0, T_m^+(u_0))$ e $I_m^-(u_0) = (T_m^-, 0]$.

Teorema 2.10 Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_u(\mathcal{W})$. Seja $(t_0, u_0) \in \mathcal{W}$. Então

$$(t, u(t; t_0, u_0)) \rightarrow \partial\mathcal{W}, \quad \text{quando} \quad t \nearrow T_m^+(t_0, u_0) \quad \text{e} \quad t \searrow T_m^-(t_0, u_0),$$

no sentido de que $\forall K \subset \mathcal{W}$ compacto, existe $I \subset I_m(t_0, u_0)$ compacto tal que $(t, u(t; t_0, u_0)) \in \mathcal{W} \setminus K, \forall t \in I_m(t_0, u_0) \setminus I$.

Demonstração 2.11 Se o resultado fosse falso, teríamos $T^+(t_0, u_0) < +\infty$ e existiriam um compacto $K \subset \mathcal{W}$ e uma sequência $t_j \nearrow T_m^+(t_0, u_0)$ tais que $(t_j, u(t_j)) \in K, \forall j$, onde $u(t_j) = u(t_j, t_0, u_0)$. (Ou então teríamos algo análogo para $T_m^-(t_0, u_0)$.) Sendo K compacto, então $dist(w, \partial\mathcal{W}) \geq \epsilon, \forall w \in K$, para algum $\epsilon > 0$. Considerando, então, a família de equações

$$\begin{cases} y'_j = f(t, y_j) \\ y_j(t_j) = u(t_j) \end{cases}$$

teríamos, pelo Teorema de Picard, soluções únicas y_j definidas, respectivamente, em intervalos $[t_j - \tau_j, t_j + \tau_j]$, onde $\tau_j = \min\{\delta_j, r_j/M_j\}$, com $\delta_j, r_j > \epsilon/2$ e $M_j \leq \max_{B_{\epsilon/2}(K)}|f|$. Com isso, $\tau_j \geq \tau$ para algum $\tau > 0$ e existiria um $J \in \mathbb{N}$ tal que $T_m^+ - \tau < t_J < T_m^+$ onde $T_m^+ = T_m^+(t_0, u_0)$, de forma que $t_J + \tau > T_m^+$.

Basta agora mostrar que

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & T_m^-(t_0, u_0) < t \leq t_J, \\ y_J(t_j), & t_j < t < t_J + \tau, \end{cases}$$

seria solução de $\tilde{u}' = f(f, \tilde{u})$ com $\tilde{u}(t_0) = u_0$, pois ela estaria definida além de T_m^+ o que seria uma contradição com a definição de T_m^+ .

Para $t > t_J$,

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(t) &= y_J(t) = y_J(t_J) + \int_{t_J}^t f(s, y_J(s)) \, ds \\
 &= u(t_J) + \int_{t_J}^t f(s, \tilde{u}(s)) \, ds \\
 &= u(t_0) + \int_{t_0}^{t_J} f(s, u(s)) \, ds + \int_{t_J}^t f(s, \tilde{u}(s)) \, ds \\
 &= u_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{u}(s)) \, ds,
 \end{aligned}$$

o que obviamente também valeria para $T_m^-(t_0, u_0) < t \leq t$. Portanto, \tilde{u} seria C^1 e seria uma solução em $(T_m^-(t_0, u_0), T_J + \tau)$ com $T_J] = \tau > T_m^+$, o que completa a demonstração.

□

Observação 2.12 Se $\mathcal{W} = (a, +\infty) \times \mathcal{U}$, então o teorema acima diz que ou $T_m^+(t_0, u_0) = +\infty$ ou $T_m^+(t_0, u_0) < +\infty$ e, nesse caso, $x(t; t_0, u_0) \rightarrow \partial\mathcal{U}$, quando $t \nearrow T_m^+(t_0, u_0)$. Em particular, se $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, então ou $T_m^+(t_0, u_0) = +\infty$ ou $T_m^+(t_0, u_0) < +\infty$ e, nesse caso, $|u(t, t_0, u_0)| \rightarrow +\infty$ quando $t \nearrow T_m^+(t_0, u_0)$. Analogamente para $T_m^-(t_0, u_0)$.

Corolário 2.13 A demonstração acima de que \tilde{u} é solução de $\tilde{u}' = f(t, \tilde{u})$ com $\tilde{u}(t_0) = u_0$ mostra que $u(t; t_1, u(t_1; t_0, u_0)) = u(t; t_0, u_0)$, $\forall (t_0, u_0) \in \mathcal{W}$, $\forall t, t_1 \in I_m(t_0, u_0)$, com $I_m(t_1, u(t_1; t_0, u_0)) = I_m(t_0, u_0)$.

2.2 Dependência nas condições iniciais e nos parâmetros

Para garantir que o problema (2.1) é bem posto no sentido de Hadamard, vamos tentar aqui estabelecer a dependência contínua. Faremos isso assumindo hipóteses sobre a função f .

2.2.1 Dependência Lipschitz

Antes de analisarmos o que é possível obter em termos de estabilidade (dependência contínua) vamos ao seguinte Lema, conhecido como Lema de Gronwall [8].

Lema 2.14 (Gronwall) Sejam $\xi, \beta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas tais que $\beta \geq 0$ e

$$\xi(t) \leq \xi_0 + \int_{t_0}^t \beta(s)\xi(s) \, ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1],$$

para algum $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Então,

$$\xi(t) \leq \xi_0 e^{\int_{t_0}^t \beta(s) \, ds}, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Demonstração 2.15 Defina

$$\begin{aligned}
 \eta(t) &= \xi_0 + \int_{t_0}^t \beta(s) ds. \\
 \implies \eta &\in C^1([t_0, t_1]), \quad \xi(t) \leq \eta(t) \quad e \quad \eta'(t) = \beta(t)\xi(t) \leq \beta(t)\eta(t), \\
 \implies \left(\eta(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(s) ds} \right)' &\leq 0 \implies \eta(t)e^{-\int_{t_0}^t \beta(s) ds} - \eta(t_0) \leq 0, \\
 \implies \xi(t) &\leq \eta(t) \leq \eta(t_0)e^{\int_{t_0}^t \beta(s) ds} = \xi_0 e^{\int_{t_0}^t \beta(s) ds}.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 2.16 Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e seja $f \in Lip_u(\mathcal{W})$ com constante de Lipschitz L . Então, para quaisquer (t_0, u_1) e (t_0, u_2) em \mathcal{W} temos

$$|u(t; t_0, u_1) - u(t; t_0, u_2)| \leq |u_1 - u_2|e^{L|t-t_0|},$$

para todo $t \in I_m(t_0, u_1) \cap I_m(t_0, u_2)$.

Demonstração 2.17 Usando a forma integral da equação diferencial, temos que a função $w(t) = |u(t; t_0, u_1) - u(t; t_0, u_2)|$ satisfaz

$$w(t) \leq |u_1 - u_2| + L \int_{t_0}^t w(s) ds,$$

para todo $t \in [t_0, T_m^+(t_0, u_1)) \cap [t_0, T_m^+(t_0, u_2))$. Uma aplicação do lema de Gronwall a w prova o resultado desejado quando $t \geq t_0$. O resultado para $t < t_0$ pode ser obtido invertendo-se o tempo e utilizando-se a equação diferencial por $\tau \mapsto u(-\tau, t_0, u_0)$. □

Corolário 2.18 Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_u(\mathcal{W})$. Então, para qualquer compacto $K \subset \mathcal{W}$, existe $L_K \geq 0$ tal que para quaisquer (t_0, u_1) e (t_0, u_2) em K temos

$$|u(t; t_0, u_1) - u(t; t_0, u_2)| \leq |u_1 - u_2|e^{L_K|t-t_0|},$$

para todo $t \in I_m(t_0, u_1) \cap I_m(t_0, u_2)$ tal que $u(s; t_0, u_1), u(s; t_0, u_2) \in K$, para todo s entre t_0 e t .

Demonstração 2.19 Basta considerar f restrita ao compacto K e aplicar o Teorema 2.2.3. □

Corolário 2.20 Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_u(\mathcal{W})$. Dados $(t_0, u_1), (t_0, u_2) \in \mathcal{W}$ e dado um intervalo I incluído compactamente em $I_m(t_0, u_1) \cap I_m(t_0, u_2)$, existe $L_I \geq 0$ tal que

$$|u(t; t_0, u_1) - u(t; t_0, u_2)| \leq |u_1 - u_2|e^{L_I|t-t_0|},$$

para todo $t \in I$.

Demonstração 2.21 Basta aplicar o corolário anterior ao conjunto (compacto em \mathcal{W})

$$K = \{u(t; t_0, u_1); t \in \tilde{I}\} \cup \{u(t; t_0, u_2); t \in \tilde{I}\},$$

onde \tilde{I} é o menor intervalo que contém I , t_1 e t_2 . \square

Teorema 2.22 Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e seja $f \in Lip_u(\mathcal{W})$ limitada. Seja L a constante de Lipschitz de f em relação a u e seja M o supremo de f em \mathcal{W} . Então, para quaisquer (t_1, u_1) e (t_2, u_2) em \mathcal{W} com $t_1 \in I_m(t_2, u_2)$ e $t_2 \in I_m(t_1, u_2)$, temos

$$|u(t; t_1, u_1) - u(t; t_2, u_2)| \leq \{|u_1 - u_2| + M|t_1 - t_2|\}e^{L(\min(|t-t_1|, |t-t_2|))},$$

para todo $t \in I_m(t_1, u_1) \cap I_m(t_2, u_2)$.

Demonstração 2.23 Como

$$u(t; t_i, u_i) = u_i + \int_{t_i}^t f(s, u(s; t_i, u_i)) ds, \quad i = 1, 2,$$

a diferença $w(t) = |u(t; t_1, u_1) - u(t; t_2, u_2)|$ satisfaz, em $[t_i, +\infty) \cap I_m(t_1, u_1) \cap I_m(t_2, u_2)$, para $i = 1$ ou $i = 2$,

$$\begin{aligned} w(t) &\leq |u_1 - u_2| \\ &+ \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, u(t; t_j, u_j)) ds \right| + \int_{t_i}^t |f(s, u(s; t_1, u_1)) - f(s, u(s; t_2, u_2))| ds \\ &\leq |u_1 - u_2| + M_K|t_1 - t_2| + L_K \int_{t_i}^t w(s) ds, \end{aligned}$$

onde $j = 1$, se $i = 2$, e $j = 2$ se $i = 1$. O resultado para $t \geq t_0$ pode agora ser facilmente obtido com o uso do lema de Gronwall. O resultado para $t < t_0$ pode ser obtido invertendo-se o tempo. \square

Corolário 2.24 Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_u(\mathcal{W})$. Então, para qualquer compacto $K \subset \mathcal{W}$, existem constantes $L_K, M_K \geq 0$ tais que para quaisquer (t_1, u_1) e (t_2, u_2) em K com $t_1 \in I_m(t_2, u_2)$ e $t_2 \in I_m(t_1, u_1)$, temos

$$|u(t; t_1, u_1) - u(t; t_2, u_2)| \leq \{|u_1 - u_2| + M_K|t_1 - t_2|\}e^{L_K(\min(|t-t_1|, |t-t_2|))},$$

para todo $t \in I_m(t_1, u_1) \cap I_m(t_2, u_2)$ tal que $u(s; t_1, u_1), u(s; t_2, u_2) \in K$ para todo s entre t_1 e t e entre t_2 e t .

Demonstração 2.25 Basta considerarmos f restrita ao compacto K e aplicar o Teorema 2.22.

□

Corolário 2.26 Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_u(\mathcal{W})$. Dados $(t_1, u_1), (t_2, u_2) \in \mathcal{W}$ e dado um intervalo I incluído compactamente em $I_m(t_1, u_1) \cap I_m(t_2, u_2)$, existem $L_1, M_1 \geq 0$ tais que

$$|u(t; t_1, u_1) - u(t; t_2, u_2)| \leq \{|u_1 - u_2| + M_I |t_1 - t_2|\} e^{L_I(\min(|t-t_1|, |t-t_2|))},$$

para todo $t \in I$.

Demonstração 2.27 Basta aplicar o corolário anterior ao conjunto (compacto \mathcal{W})

$$K = \{u(t; t_1, u_1); t \in \tilde{I}\} \cup \{u(t; t_2, u_2); t \in \tilde{I}\},$$

onde \tilde{I} é o menor intervalo que contém I , t_1 e t_2 . □

Proposição 2.28 Seja $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ aberto e seja $f \in Lip_u(\mathcal{W})$. Seja $\mathcal{D} = \{(t, t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m; (t_0, u_0) \in \mathcal{W} \text{ e } t \in I_m(t_0, u_0)\}$, que é o domínio de definição da solução $u(t; t_0, u_0)$ da equação $u' = f(t, u)$, $u(t_0) = u_0$. Então \mathcal{D} é aberto e a transformação $(t_0, u_0) \mapsto u(t; t_0, u_0)$ é localmente Lipschitz contínua onde estiver definida.

Demonstração 2.29 Pelo resultado de existência local da solução é facil deduzir que qualquer ponto da forma (t_0, t_0, u_0) com $(t_0, u_0) \in \mathcal{W}$, é interior a \mathcal{D} com $T \neq t_0$. Vamos considerar o caso em que $T > t_0$, pois o outro caso é análogo.

Como o intervalo $[t_0, T]$ é compacto e \mathcal{W} é aberto, existe um compacto $K \subset \mathcal{W}$ que é uma vizinhança do conjunto compacto $u([t_0, u_0], t_0, u_0)$. Mais precisamente, sendo $u([t_0, u_0], t_0, u_0)$ compacto, existe um $\epsilon > 0$ tal que a bola fechada em \mathbb{R}^m de raio ϵ e centrada em $x(t, t_0, u_0)$ está toda contida em K para qualquer $t \in [t_0, T]$. Note que com isso temos $T_m^-(t_0, u_0) < t_0 - \epsilon < T + \epsilon < T_m^+(t_0, u_0)$ pelo Teorema 2.10.

Sejam L_K e M_K como no Corolário 2.9 para o compacto K . Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\delta(1 + M_K)e^{L_K(T + \epsilon - t_0)} < \epsilon$, que implica, em particular, em $\delta < \epsilon$, de modo que $u(t; t_0, u_0)$ está definida para $t \in [t_0 - \delta, T + \epsilon]$. Então, para qualquer (t_1, u_1) tal que $|t_1 - t_0| + |u_1 - u_0| < \delta < \epsilon$, temos pelo Corolário 2.9 que

$$\begin{aligned} |u(t; t_1, u_1) - u(t; t_0, u_0)| &\leq \{|u_1 - u_0| + M_K |t_1 - t_0|\} e^{L_K(\min(t - t_1, t - t_0))} \\ &\leq (1 + M_K)\delta e^{L_K(T + \epsilon - t_0)} < \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $t \in [t_0 - \delta, T + \epsilon] \cap I_m(t_1, u_1)$. Portanto, $u(t; t_1, u_1) \in K$ para todo $t \in [t_0 - \delta, T + \epsilon] \cap I_m(t_1, u_1)$. Pelo Teorema 2.10, $u(t; t_1, u_1)$ se “aproxima” do bordo $\partial\mathcal{W}$, e, portanto, sai do compacto K , quando t se “aproxima” dos extremos de $I_m(t_1, u_1)$. Logo necessariamente $[t_0 - \delta, T + \epsilon] \subset I_m(t_1, u_1)$. Em outras palavras, o conjunto $\{(t, u_1, t_1); |t - T| < \epsilon, |t_1 - t_0| + |u_1 - u_0| < \delta\}$ está contido em \mathcal{D} , o que mostra que \mathcal{D} é aberto. A continuidade Lipschitz segue da estimativa acima.

□

Observação 2.30 Note que a Proposição 2.11 mostra que a aplicação $(t_0, u_0) \mapsto T_m^+(t_0, u_0)$ é semicontínua inferior em \mathcal{W} e a aplicação $(t_0, u_0) \mapsto T_m^-(t_0, u_0)$ é semicontínua superior em \mathcal{W} .

2.2.2 Dependência C^K

Nesta seção trataremos da dependência contínua da solução $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ do problema

$$\begin{cases} u' = f(t, u, \lambda), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}^l$, $l \in \mathbb{N}$, é um parâmetro (ou vários) do problema.

Um de nossos propósitos é analisar a dependência do problema (3.1)-(3.2) com relação as constantes de acoplamento e as frequências intrínsecas. Para tal utilizamos o Teorema de Ponto Fixo citado no seguinte teorema.

Teorema 2.31 (Ponto Fixo de Banach-Cacciopoli) Seja (M, d) um espaço métrico completo e $T : M \rightarrow M$ uma contração, isto é, $\exists \theta \in [0, 1)$, tal que $d(T(y), T(x)) \leq \theta d(y, x)$, $\forall y, x \in M$. Então, existe um único ponto fixo $\bar{u} \in M$, isto é, $\bar{u} = T(\bar{u})$, e, além disso, $\forall u_0 \in M$, $T^n(u_0) \rightarrow \bar{u}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração 2.32 Seja $u_0 \in M$ e considere a sequência $u_n = T^n(u_0) = T(u_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$d(u_{n+1}, u_n) = d(T(u_n), T(u_{n-1})) \leq \theta d(u_n, u_{n-1}) \leq \dots \leq \theta^n d(T(u_0), u_0).$$

Logo,

$$d(u_{n+m}, u_n) \leq \sum_{j=n}^{n+m-1} d(u_{j+1}, u_j) \leq \sum_{j=n}^{n+m} \theta^j d(T(u_0), u_0) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(T(u_0), u_0).$$

Portanto, $\{u_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy em M e converge para um certo $\bar{u} \in M$, pois M é completo. Pela continuidade de T , passando ao limite na relação $u_n = T(u_{n-1})$ obtemos $\bar{u} = T(\bar{u})$. Se $y \in M$ é tal que $y = T(y)$, então $d(\bar{u}, y) = d(T(\bar{u}), T(y)) \leq \theta d(\bar{u}, y)$, logo $\bar{u} = y$ pois $\theta \neq 1$. Como u_0 é arbitrário e \bar{u} é único, as contas acima mostram que $T^n(u_0) \rightarrow \bar{u}$, $\forall u_0 \in M$. □

Corolário 2.33 Seja (M, d) um espaço métrico completo e $T : M \rightarrow M$ um operador contínuo tal que T^K seja uma contração para algum $k \in \mathbb{N}$. Então existe um único ponto fixo $\bar{x} \in M$ de T e para qualquer $u_0 \in M$, temos $T^n(u_0) \rightarrow \bar{x}$.

Demonstração 2.34 Aplique o teorema anterior a T^K para achar um ponto fixo $\bar{u} \in M$ de T^K . Tome $u_0 = T(\bar{u})$ de modo que

$$\bar{u} = \lim_n T^{nK}(T(\bar{u})) = \lim_n T(T^{nK}(\bar{u})) = T(\lim_n T^{nK}(\bar{u})) = T(\bar{u}),$$

o que mostra que \bar{u} é o ponto fixo de T . A unicidade, agora, é facil e a convergência segue do fato de que qualquer subsequência da forma $T^{nk+l}(u_0) = T^{nk}(T^l(u_0))$ converge para \bar{u} , quando $n \rightarrow \infty$, onde $l = 0, 1, 2, \dots, k-1$. \square

Teorema 2.35 (Princípio da Contração Uniforme) Sejam X e Y espaços de Banach, $U \subset X$, $V \subset Y$ abertos e $T : \bar{U} \times V \rightarrow \bar{U}$ uma contração uniforme em \bar{U} , isto é, existe $\theta \in [0, 1)$ tal que $d(T(u_1, y) - T(u_2, y)) \leq \theta d(u_1 - u_2)$, $\forall u_1, u_2 \in \bar{U}$, $\forall y \in V$. Seja $g(y)$ o único ponto fixo de $T(\cdot, y)$ em \bar{U} , $g : V \rightarrow \bar{U}$. Se $T \in C^k(\bar{U} \times V, X)$, $k \in \mathbb{N}$, então $g \in C^k(V, X)$. (T analítico $\Rightarrow g$ analítico, também.)

Demonstração 2.36 (Continuidade)

$$\begin{aligned} g(y_1) - g(y_2) &= T(g(y_1), y_1) - T(g(y_2), y_2) \\ &= T(g(y_1), y_1) - T(g(y_1), y_2) + T(g(y_1), y_2) - T(g(y_2), y_2), \\ \Rightarrow d(g(y_1) - g(y_2)) &\leq d(T(g(y_1), y_1) - T(g(y_1), y_2)) = \theta d(g(y_1) - g(y_2)). \end{aligned}$$

Como $0 \leq \theta < 1$ e T é contínuo,

$$d(g(y_1) - g(y_2)) \leq \frac{1}{1-\theta} d(T(g(y_1), y_1) - T(g(y_1), y_2)) \rightarrow 0,$$

quando $y_2 \rightarrow y_1$, o que prova a continuidade de $g = g(y)$.

(Diferenciabilidade) Da relação $g(y) = T(g(y), y)$, temos formalmente

$$D_y g(y) = D_x T(g(y), y) D_y g(y) + D_y T(g(y), y).$$

Portanto $D_y g(y) \in \mathcal{L}(Y, X)$, se existir, é ponto fixo do operador $\Phi : \mathcal{L}(Y, X) \times Y \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ definido por

$$\Phi(M, y) = D_x T(g(y), y) M + D_y T(g(y), y),$$

que é contínuo quando T é C^1 . Note que $\|D_x T(g(y), y)\| \leq \theta$, para todo $y \in V$, de forma que

$$\|\Phi(M_1, y) - \Phi(M_2, y)\| \leq \theta \|M_1 - M_2\|.$$

Sendo Φ uma contração uniforme, temos para cada $y \in V$ um ponto fixo $M(y)$. Precisamos mostrar que $M(y)$ é de fato a diferencial de $g(y)$.

Temos que

$$\begin{aligned}
& |g(y+h) - g(y) - M(y)h| \\
= & |T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)M(y)h - D_y T(g(y), y)h| \\
\leq & |T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y)) \\
& - D_y T(g(y), y)h| + |D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y) - M(y)h)| \\
\leq & |T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y)) \\
& - D_y T(g(y), y)h| + \theta |g(y+h) - g(y) - M(y)h|.
\end{aligned}$$

E ainda

$$\begin{aligned}
& \frac{|g(y+h) - g(y) - M(y)h|}{|h|} \\
\leq & \left(\frac{1}{1-\theta} \right) \left(\frac{|T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y)|}{|h|} \right. \\
& \left. + \frac{-D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y)) - D_y T(g(y), y)h|}{|h|} \right) \\
\leq & \left(\frac{1}{1-\theta} \right) \left(\frac{|T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y))|}{|g(y+h) - g(y)| + |h|} \right. \\
& \left. + \frac{-D_y T(g(y), y)h|}{|g(y+h) - g(y)| + |h|} \right) \left(\frac{|g(y+h) - g(y)| + |h|}{|h|} \right)
\end{aligned}$$

Mas T é C^1 de modo que por continuidade existe uma constante $K \geq 0$ tal que para $|h|$ suficientemente pequeno temos

$$|g(y+h) - g(y)| \leq \text{(usando 2.4)} \leq \frac{1}{1-\theta} |T(g(y), y+h) - T(g(y), y)| \leq \frac{1}{1-\theta} K |h|.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
& \frac{|g(y+h) - g(y) - M(y)h|}{|h|} \\
\leq & \left(\frac{1}{1-\theta} \right) \left(\frac{|T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y))|}{|g(y+h) - g(y)| + |h|} \right. \\
& \left. + \frac{-D_y T(g(y), y)h|}{|g(y+h) - g(y)| + |h|} \right) \left(1 + \frac{K}{1-\theta} \right).
\end{aligned}$$

Quando $|h| \rightarrow 0$, temos $|g(y+h) - g(y)| \rightarrow 0$ pela estimativa acima, de modo que o quociente

$$\begin{aligned}
& \frac{|T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)(g(y+h) - g(y)) - D_y T(g(y), y)h|}{|g(y+h) - g(y)| + |h|} \\
\rightarrow & 0,
\end{aligned}$$

pela definição de $T(x, y)$ ser diferenciável em (x, y) . Portanto,

$$\frac{|g(y+h) - g(y) - M(y)h|}{|h|} \rightarrow 0, \quad \text{quando } h \rightarrow 0,$$

mostrando que $g = g(y)$ é diferenciável com $D_y g(y) = M(y)$.

(Continuidade C^k) Prosseguimos por indução. Assim, sendo T de classe C^k , temos que Φ definido acima é de classe C^{k-1} , de forma que seu ponto fixo $D_y g(y)$ é C^{k-1} em y pela hipótese de indução, o que implica em $g = g(y)$ ser de classe C^k . \square

Com o princípio da contração uniforme, podemos facilmente provar o teorema da função implícita e, consequentemente, o da função inversa, como mostramos a seguir.

Teorema 2.37 (Função Implícita) Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $U \subset X$ e $V \subset Y$ abertos e $(u_0, y_0) \in U \times V$. Seja $F : U \times V \rightarrow Z$ de classe C^k , $k \geq 1$, com $F(u_0, y_0) = 0$ e $D_u F(u_0, y_0)$ inversível com inversa limitada. Então existem $U_0 \times V_0 \subset U \times V$ vizinhança aberta de (u_0, y_0) e $\varphi : V_0 \rightarrow U_0$ de classe C^k tais que $F(\varphi(y), y) = 0$, $\forall y \in V_0$. Mais precisamente, temos que $F(u, y) = 0$, com $(u, y) \in U_0 \times V_0$, se e somente se $u = \varphi(y)$. (E se F é analítica, então φ é analítica.)

Demonstração 2.38 Temos

$$F(u, y) = 0 \iff D_u F(u_0, y_0)^{-1} F(u, y) = 0 \iff u = u - D_u F(u_0, y_0)^{-1} F(u, y).$$

Defina $\Phi : U \times V \rightarrow Z$ por $\Phi(u, y) = u - D_u F(u_0, y_0)F(u, y)$. Note que Φ é C^k . Além disso,

$$D_u \Phi(u_0, y_0) = I - D_u F(u_0, y_0)^{-1} D_u F(u_0, y_0) = I - I = 0,$$

onde I é o operador identidade em X . Com isso, fixando um $\theta \in (0, 1)$, temos

$$\|D_x \Phi(u, y)\| \leq \theta < 1, \quad \forall (u, y) \in U_1 \times V_1,$$

em uma certa vizinhança $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ de (u_0, y_0) . Logo,

$$|\Phi(u_1, y) - \Phi(u_2, y)| \leq \theta |u_1 - u_2|, \quad \forall (u_1, y), (u_2, y) \in U_1 \times V_1.$$

Podemos, também, assumir, graças à continuidade de $D_y F$, que nessa mesma vizinhança $U_1 \times V_1$ de (u_0, y_0) , temos $\|D_y F(u, y)\| \leq K$, para algum $K \geq 0$.

Seja agora $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\bar{U}_0 \subset U_1$, onde $U_0 = \{u \in U; |u - u_0| < \epsilon\}$. Seja também $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $V_0 = \{y \in V; |y - y_0| < \delta\}$ e tal que $V_0 \subset V_1$ e $\delta < (1 - \theta)\epsilon/K$. Então,

$$\begin{aligned} |\Phi(u, y) - u_0| &= |\Phi(u, y) - \Phi(u_0, y_0)| \leq |\Phi(u, y) - \Phi(u_0, y)| + |\Phi(u_0, y) - \Phi(u_0, y_0)| \\ &\leq \theta |u - y_0| + K |y - y_0| \leq \theta \epsilon + K \delta < \epsilon, \quad \forall (u, y) \in \bar{U}_0 \times V_0. \end{aligned}$$

Logo, $\Phi : \bar{U}_0 \times V_0 \rightarrow U_0$ é de classe C^k e é uma contração uniforme. Portanto, o ponto fixo $g(y) = \Phi(g(y), y)$ é de classe C^k e é a função procurada tal que $F(g(y), y) = 0$. Como o ponto fixo $g(y)$ é único em U_0 segue que $F(u, y) = 0$, $(u, y) \in U_0 \times V_0$ se e somente se $u = g(y)$. \square

Observação 2.39 A função $\Phi = \Phi(u, y)$ que aparece na demonstração do teorema da função inversa está associada ao método de Newton para achar zero de funções. De fato, sendo $\Phi(\cdot, y)$ uma contração, a sequência $u_n = \Phi(u_{n-1}, y)$ converge para o zero $g(y)$ de $\Phi(\cdot, y)$. Nessa forma, esse método é apropriado para achar zero de funções por continuação, isto é, conhecendo-se o zero u_0 de $F(\cdot, y)$ pode-se achar o zero de $F(\cdot, y)$ para y próximo de y_0 . (Note que precisamos de $D_u F^{-1}$ no ponto (u_0, y_0) .)

Teorema 2.40 (Função Inversa) Sejam X e Y espaços de Banach. $U \subset X$ aberto, $u_0 \in U$ e $f : U \rightarrow Y$ de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$, com $Df(u_0)$ inversível e com inversa limitada. Então existem $U_0 \subset U$ e $V_0 \subset Y$, vizinhanças abertas de u_0 e $f(u_0)$, respectivamente, e uma função $g : V_0 \rightarrow U_0$ de classe C^k tal que $g(f(u)) = u$, $\forall u \in U_0$, e $f(g(y)) = y$, $\forall y \in V_0$. (f analítica $\Rightarrow g$ analítica.)

Demonstração 2.41 Aplique o teorema da função implícita à função $(u, y) \rightarrow f(u) - y : U \times Y \rightarrow X \times Y$. Com isso, obtemos $g : V_0 \rightarrow U_1$ de classe C^k , com U_1 e V_0 vizinhanças abertas de u_0 e $f(u_0)$, respectivamente, e tal que $f(x) = y$, com $(x, y) \in U_1 \times V_0$, se e somente se $u = g(y)$. Seja, então, $U_0 = f^{-1}(V_0) \cap U_1$, de modo que $U_0 \subset U_1$ também é uma vizinhança aberta de u_0 . Além disso, é fácil ver que $f(g(y)) = y$, $\forall y \in V_0$ e $g(f(u)) = u$, $\forall u \in U_0$. \square

Observação 2.42 Os teoremas da função implícita e da função inversa são de fato equivalentes. Para provar o teorema da função implícita a partir do da função inversa, note que a hipótese de $D_x F(u_0, y_0)$ ser inversível com inversa limitada implica em X ser isomorfo a Z e que podemos construir uma função $\Phi : U \times V \rightarrow X \times Y$ definida por $\Phi(u, y) = (D_u F(u_0, y_0)^{-1}F(u, y), y)$ que é inversível com inversa limitada em (u_0, y_0) , pois $D\Phi(u_0, y_0)$ tem a forma

$$D\Phi(u_0, y_0) = \begin{bmatrix} I_u & * \\ 0 & I_Y \end{bmatrix},$$

onde I_X e I_Y são os operadores identidade em X e Y , respectivamente. O teorema da função inversa garante, então, a existência da inversa Φ^{-1} de classe C^k em uma vizinhança de (u_0, y_0) . Pela forma de $\Phi(u, y)$, é fácil ver que $\Phi^{-1}(u, y)$ tem a forma $\Phi^{-1}(u, y) = (\Psi(u, y), y)$. Temos, então, que $u = D_u F(u_0, y_0)^{-1}F(\Psi(u, y), y)$. Fazendo $u = 0$, obtemos $0 = D_u F(u_0, y_0)^{-1}F(\Psi(0, y), y)$, logo $F(\Psi(0, y), y) = 0$, de modo que $g(y) = \Psi(0, y)$ é a função procurada.

Voltemos para a dependência das soluções de uma equação diferencial nas condições iniciais e nos parâmetros.

Teorema 2.43 Sejam $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e $\Lambda \subset \mathbb{R}^l$ abertos. Seja $f : \mathcal{W} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$. Seja $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ a solução de

$$\begin{cases} u' = f(t, u, \lambda), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

que está definida em $\mathcal{D} = \{(t, t_0, u_0, \lambda)\}; (t_0, u_0, \lambda) \in \mathcal{W} \times \Lambda$, $t \in I_m(t_0, u_0, \lambda)$, onde $I_m(t_0, u_0, \lambda)$ é o intervalo maximal de existência de cada solução. Então \mathcal{D} é aberto, $(t, t_0, u_0, \lambda) \mapsto u(t, t_0, u_0, \lambda)$ é de classe C^k em \mathcal{D} e $t \mapsto u(t, t_0, u_0, \lambda)$ é de classe C^{k+1} em $I_m(t_0, u_0, \lambda)$ com $\partial_t^{k+1}u(t, t_0, u_0, \lambda)$ contínua em \mathcal{D} .

Demonstração 2.44 A demonstração do fato de \mathcal{D} ser aberto segue como na demonstração da Proposição 2.32.

Seja $V \subset \mathcal{W}$ aberto incluído compactamente em \mathcal{W} . Logo, para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a vizinhança fechada \bar{V}_ϵ de raio ϵ do compacto \bar{V} está contida em \mathcal{W} . Seja M o máximo de f no compacto \bar{V}_ϵ e seja L a constante de Lipschitz de f em relação a u em \bar{V}_ϵ . Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\delta \leq \epsilon/2$, $\delta M \leq \epsilon/2$ e $\delta L \leq 1/2$. Vamos mostrar, utilizando o teorema do ponto fixo uniforme, que para qualquer $(t_0, u_0, \lambda) \in V \times \Lambda$, a solução $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ está definida no mesmo intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ e é de classe C^k em (t, t_0, u_0, λ) .

Considere a mudança de variáveis $\tau = (t - t_0)$ e seja $y(\tau) = u((t_0 + \tau) - u_0)$, de modo que $y = y(\tau; t_0, u_0, \lambda)$ satisfaz a equação

$$y'(\tau) = f(t_0 + \tau, y(\tau), \lambda), \quad y(0) = u_0. \quad (2.4)$$

Com isso, se $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ está definido para $t_0 - \delta \leq t \leq t_0 + \delta$ e é tal que $|u(t; t_0, u_0, \lambda) - u_0| \leq \epsilon/2$ nesse intervalo, então $y(\tau; t_0, u_0, \lambda)$ está definido em $[-\delta, \delta]$, é tal que $|y(\tau; t_0, u_0, \lambda) - u_0| \leq \epsilon/2$ é o ponto fixo de

$$\Phi(y, u_0, \lambda)(\tau) = u_0 + \int_0^\tau f(t_0 + s, y(s), \lambda) ds, \quad \forall \tau \in [-\delta, \delta].$$

O domínio de definição de Φ é $\Sigma \times V \times \Lambda$, onde

$$\Sigma = \{y \in C([- \delta, \delta]; \mathbb{R}^m); |y(t) - u_0| \leq \epsilon/2, \forall t \in [-\delta, \delta]\},$$

que é a bola fechada de raio $\epsilon/2$ e centro em $\equiv u_0$ do espaço de Banach das funções contínuas de $[-\delta, \delta]$ em \mathbb{R}^m com a norma do máximo $\|y\| = \max_{[-\delta, \delta]} |y(t)|$. Note que Φ está bem definido nesse domínio pois no integrando da definição de Φ , temos $(t_0 +$

$s, y(s)) \in \overline{V}_\epsilon \subset \mathcal{W}$ quando $y \in \Sigma$. De fato, $(t_0, u_0) \in V$ e $|(t_0 + s, y(s)) - (t_0, u_0)| \leq |s| + |y(s) - u_0| \leq \delta + \epsilon/2 \leq \epsilon$.

Sendo f de classe C^k , segue que Φ também é de classe C^k . Temos, também, que

$$|\Phi(y, t_0, u_0, \lambda)(\tau) - u_0| \leq M|\tau| \leq M\delta \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \tau \in [-\delta, \delta].$$

Logo $\Phi(y, t_0, u_0, \lambda) \in \Sigma$. Além disso,

$$\begin{aligned} |\Phi(y_1, t_0, u_0, \lambda)(\tau) - \Phi(y_2, t_0, u_0, \lambda)| &\leq L \left| \int_0^\tau |y_1(s) - y_2(s)| ds \right| \\ &\leq \delta L \|y_1 - y_2\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|, \quad \forall \tau \in [-\delta, \delta] \end{aligned}$$

pois $\delta L < 1/2$. Então,

$$\|\Phi(y_1, t_0, u_0, \lambda) - \Phi(y_2, t_0, u_0, \lambda)\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|,$$

o que mostra que $\Phi : \Sigma \times V \times \Lambda \rightarrow \Sigma$ é uma contração uniforme. Como f é de classe C^k , então Φ também é de classe C^k . Portanto, pelo princípio da contração uniforme (Teorema 2.35), existe $y = y(t_0, u_0, \lambda) : V \times \Lambda \rightarrow \Sigma$ de classe C^k que é ponto fixo de $\Phi(\cdot, t_0, u_0, \lambda)$. Então, $y(\tau; t_0, u_0, \lambda)$ é solução de (2.4) e, com isso, temos $u(t; t_0, u_0, \lambda) = y(t - t_0; t_0, u_0, \lambda)$ de classe C^k em $(t_0, u_0, \lambda) \in V \times \Lambda$.

Quando à regularidade em t , podemos deduzir por indução que u é de classe C^{k+1} em t , pelo menos localmente, isto é, em $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, e é C^k juntamente nas variáveis (t, t_0, u_0, λ) . De fato, como a norma em Σ é a forma do máximo e $y = y(t_0, u_0, \lambda)$ é contínua com valores em Σ , segue que $u = u(t; t_0, u_0, \lambda)$ é contínua juntamente em (t, t_0, u_0, λ) . Da equação diferencial, segue, então, que $\partial_t u$ é contínua em $(t; t_0, u_0, \lambda)$. Assumindo por indução que u é de classe C^j em (t, t_0, u_0, λ) , para $j < k$, temos, pela equação diferencial $u' = f(t, u)$, que u é de classe C^{j+1} em t com ∂_t^{j+1} dependendo continuamente em todas as variáveis $(t; t_0, u_0, \lambda)$. Como $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ é também de classe C^k , logo C^{j+1} , em (t_0, u_0, λ) , segue que u é C^{j+1} juntamente em $(t; t_0, u_0, \lambda)$. Isso completa a indução, mostrando que u é C^k em $(t; t_0, u_0, \lambda)$. Da equação diferencial $u' = f(t, u, \lambda)$, concluímos finalmente, que ∂_t^{k+1} existe e é contínua em $(t; t_0, u_0, \lambda)$.

Para estender essa regularidade para $t \in I_m(t_0, u_0)$ longe de t_0 , note que, pelo Corolário 2.17, podemos dividir o intervalo $[t_0, t]$ em subintervalos de extremos $t_0 < t_0 + \delta < t_0 + 2\delta < \dots < t_0 + n\delta < t$ e escrever

$$\begin{aligned} x(t; t_0, u_0, \lambda) &= u(t; t_0 + n\delta, u(t_0 + n\delta; t_0, u_0, \lambda), \lambda) \\ &= u(t; t_0 + n\delta, u(t_0 + n\delta; t_0 + (n-1)\delta, \dots, u(t_0 + \delta, t_0, u_0, \lambda), \dots, \lambda, \lambda)). \end{aligned}$$

Portanto, enquanto t for tal que a solução entre t_0 e t está toda contida em V , temos

que $u(t; t_0, u_0, \delta)$ se escreve como uma composição finita de funções com a regularidade desejada, e, portanto, também tem essa regularidade.

Como V é aberto arbitrário incluído compactamente no aberto \mathbb{W} , podemos estender esse resultado para todo o \mathbb{W} e para todo o intervalo aberto de definição das soluções, completando a demonstração. \square

Observação 2.45 Vimos, primeiramente, que se $f = f(t, u)$ é contínua em (t, u) e Lipschitz em u , então $u(t; t_0, u_0)$ é C^1 em t e Lipschitz em (t_0, u_0) . Vimos, em seguida, que se $f(t, u, \lambda)$ é C^k em (t, u, λ) , $k \in \mathbb{N}$, então $u(t; t_0, u_0)$ é C^k em (t, t_0, u_0, λ) e C^{k+1} em t com $\partial_t^{k+1}u(t; t_0, u_0, \lambda)$ contínua em $(t; t_0, u_0, \lambda)$. Mas podemos ter uma informação mais precisa olhando para a demonstração do Teorema 2.43:

A regularidade em u_0 depende apenas da regularidade de $f(t, u, \lambda)$ em u . Mais precisamente, se $f(t, u, 1\lambda)$ é contínua em (t, u) e é C^k em u , então $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ é C^k em u_0 . Para isso, note que Φ na demonstração do Teorema 2.43 é de classe C^k em (z, u_0) e os outros parâmetros t_0 e λ podem ser mantidos fixos na aplicação do teorema do ponto fixo uniforme.

A regularidade apenas em t_0 depende, em geral, da regularidade de $f = f(t, u, \lambda)$ em (t, u) e não apenas em t . Mesmo que f seja C^∞ em t , mas apenas C^k em u , a solução $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ é, em geral, apenas C^k em t_0 , a menos que f seja independente de t e, nesse caso, a regularidade em t_0 é a mesma que a em t , ou seja, C^{k+1} , o que veremos em seguida.

A regularidade de $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ em λ depende da regularidade de $f(t, u, \lambda)$ em (u, λ) . Mais precisamente, se $f(t, u, \lambda)$ é contínua em (t, u, λ) e é C^k em (u, λ) , então $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ é C^k em (u_0, λ) . Para isso, note que Φ na demonstração do Teorema 2.43 é de classe C^k em (z, u_0, λ) e o outro parâmetro t_0 pode ser mantido fixo na aplicação do teorema do ponto fixo uniforme.

A regularidade de $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ em t é a mesma que a regularidade de $f(t, u, \lambda)$ em (t, u) “mais um”. Mais precisamente, se $f(t, u, \lambda)$ é C^k em (t, u) , então $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ é C^{k+1} em t com $\partial_t^{k+1}u(t; t_0, u_0, \lambda)$ contínua em $(t; t_0, u_0)$, o que pode ser deduzido através da equação diferencial $u' = f(t, u)$.

Não veremos a regularidade analítica em detalhes, mas, por exemplo, se $f = f(t, u, \lambda)$ é analítica em (u, λ) , então $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ é analítica em (t_0, u_0, λ) , e se $f = f(t, u, \lambda)$ é analítica em (t, u, λ) , então $u(t; t_0, u_0, \lambda)$ é analítica em (t, t_0, u_0, λ) .

Finalmente, o estudo da regularidade em λ poderia ter sido reduzido ao caso do da regularidade em u considerando o sistema equivalente

$$\begin{cases} u' &= f(t, x, \lambda), \\ \lambda' &= 0, \\ u(t_0) &= u_0, \\ \lambda(t_0) &= \lambda_0. \end{cases}$$

2.3 Soluções Globais

Proposição 2.46 Seja $f \in Lip_u(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ com

$$|f(t, u)| \leq a|u| + b, \quad \forall (t, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m,$$

onde $a, b \geq 0$. Então, $I_m(t_0, u_0) = \mathbb{R}$ para todo $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Demonstração 2.47 Temos,

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \right| \\ &\leq |u_0| + \left| \int_{t_0}^t a|u(s)| + b \, ds \right| \\ &\leq |u_0| + b|t - t_0| + a \left| \int_{t_0}^t |u(s)| \, ds \right|. \end{aligned}$$

Portanto, usando o Lema de Gronwall, obtemos

$$|u(t)| \leq (|u_0| + b|t - t_0|)e^{a|t-t_0|},$$

logo $u(t)$ é limitado para t limitado. Então, pelo Teorema 2.14, segue que $T_m^-(t_0, u_0) = -\infty$ e $T_m^+(t_0, u_0) = +\infty$, isto é, $I_m(t_0, u_0) = \mathbb{R}$. \square

3 MODELO DE STROGATZ

Neste Capítulo apresentaremos o modelo do ritmo circadiano, proposto por Strogatz [17], obtido através da relação do ciclo atividade-reposo ou ciclo sono-vigília, com o ciclo da temperatura corporal. Estes ciclos são conduzidos por osciladores não-lineares acoplados.

3.1 Estrutura

Consideremos $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ dois osciladores de fase. As fases são olhadas como pontos sobre a circunferência (t), do círculo unitário ou, equivalentemente, como o conjunto de números complexos de módulo 1. A forma de acoplamento é representado pela figura 1.

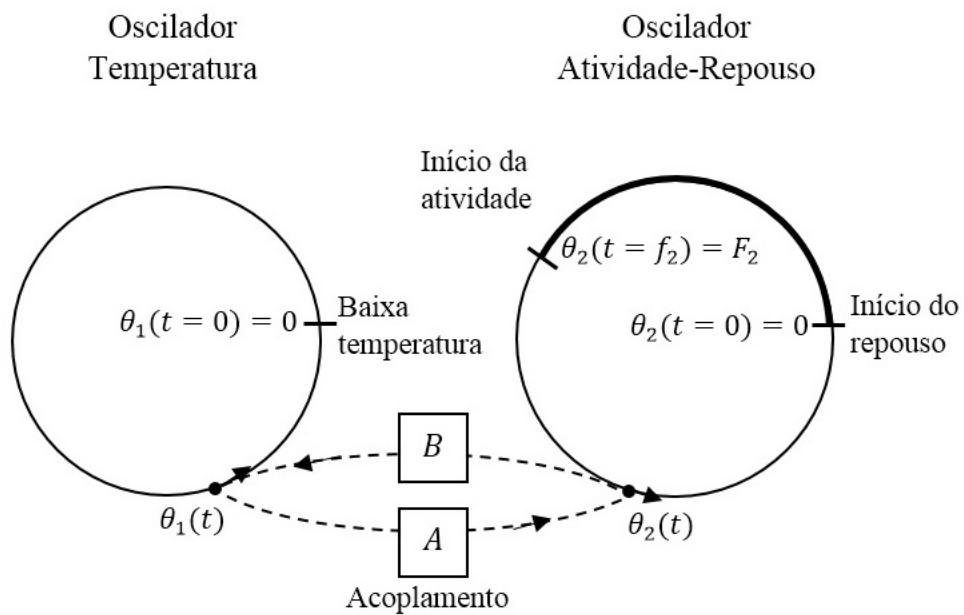


Figura 1: Modelo de fase de Strogatz

As equações dinâmicas do modelo de fase são dadas por

$$\dot{\theta}_1(t) = \omega_1 - B \cos(2\pi(\theta_2(t) - \theta_1(t))) \quad (3.1)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2 + A \cos(2\pi(\theta_1(t) - \theta_2(t))) \quad (3.2)$$

onde ω_1 e ω_2 são as frequências intrínsecas. Os parâmetros A e B são forças de acoplamento, isto é, determinam o quanto um dos osciladores influencia no outro. Os parâmetros ω_1, ω_2, A, B são positivos ou não nulos.

O sinais que antecedem as forças de acoplamento são determinados pela posição dos osciladores, visto que quando os osciladores movem-se no sentido anti-horário a força de acoplamento do oscilador $\theta_2(t)$ é contrária ao movimento do oscilador $\theta_1(t)$, logo o sinal é negativo, já a força de acoplamento do oscilador $\theta_1(t)$ coincide com o sentido do oscilador $\theta_2(t)$ o que faz o sinal ser positivo.

O oscilador $\theta_1(t)$ descreve o ciclo da temperatura corporal, enquanto o oscilador $\theta_2(t)$ conduz o ciclo da atividade-reposo (sono-vigília).

O sono (reposo) é definido por uma fração f_2 do ciclo $\theta_2(t)$. Supomos aqui que o repouso perdure por todo o período $[0, f_2]$. Assim, temos que

$$\theta_2(t_0 = 0) = 0 \quad (3.3)$$

e ainda que $\theta_2(t) = 0$ para qualquer $0 \leq t \leq f_2$.

No início da atividade temos

$$\theta_2(t = f_2) = F_2. \quad (3.4)$$

Também, é sabido que no início do repouso a temperatura é baixa. Assim, a menos de uma mudança de escala, podemos considerar que

$$\theta_1(t_0 = 0) = 0. \quad (3.5)$$

A equação 3.5 significa que o ponto no oscilador $\theta_1(t)$ está na fase “zero”, considerando como sendo o ponto mínimo no ciclo da temperatura endógena (interior).

Para estudarmos a sincronização e dessincronização entre os osciladores, consideremos a diferença de fase

$$\psi(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t) \quad (3.6)$$

e derivando (3.6) em relação a t , das equações (3.1) e (3.2), obtemos que

$$\dot{\psi}(t) = \Omega - D \cos(2\pi\psi(t)) \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{cases} \Omega &= \omega_1 - \omega_2 \\ D &= A + B. \end{cases}$$

Aqui Ω é a diferença das frequências intrínsecas dos dois osciladores e D é o acoplamento total do sistema.

3.2 Sincronização

Utilizando a definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização é ocorre quando $D > |\Omega|$. Considerando o caso sincronizado assumimos que

$$k = \left| \frac{D}{\Omega} \right| > 1.$$

Em seguida, a fase de relação sincronizada internamente $\psi(t)$ é obtida através da solução de (3.7), de modo que $\dot{\psi}(t) = 0$ tem uma solução, ou seja

$$\begin{aligned} \Omega - D \cos(2\pi\psi(t)) = 0 &\iff \cos(2\pi\psi(t)) = \frac{\Omega}{D} \\ &\iff 2\pi\psi(t) = \arccos\left(\frac{\Omega}{D}\right) \iff \psi(t) = \pm \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{\Omega}{D}\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Estas são duas soluções implícitas em (3.8). Temos que a solução estável é aquela que $d\dot{\psi}/d\psi < 0$ [9, 14]. O intervalo definido para \arccos é $[0, \pi]$, assim

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{\Omega}{D}\right) \quad (3.9)$$

é a solução estável.

De (3.9) também podemos encontrar a frequência de “compromisso” ω_α^* adotada pelo sistema sincronizado, ou seja, o tempo que o sistema leva para completar um ciclo. Assim, durante a sincronia interna, substituindo a equação (3.9) no sistema (3.1)-(3.2), obtemos que

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1(t) &= \omega_1 - B \left(\frac{\Omega}{D} \right) = \omega_1 - B \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{A + B} \right) \\ \dot{\theta}_2(t) &= \omega_2 + A \left(\frac{\Omega}{D} \right) = \omega_2 + A \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{A + B} \right). \end{aligned}$$

Sendo $\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_2(t) = \omega_\alpha^*$ durante a sincronização, obtemos que

$$\omega_\alpha^* = \frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B}. \quad (3.10)$$

Esta frequência difere da frequência intrínseca ω_1 e ω_2 por valores $\Delta\omega_1$ e $\Delta\omega_2$, em que

$$\Delta\omega_1 = \omega_\alpha^* - \omega_1 = \frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} - \omega_1 = -\frac{B(\omega_1 - \omega_2)}{A + B} = -\frac{B\Omega}{D},$$

e da mesma maneira

$$\Delta\omega_2 = \omega_\alpha^* - \omega_2 = \frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A+B} - \omega_2 = \frac{A(\omega_1 - \omega_2)}{A+B} = \frac{A\Omega}{D}.$$

Notemos que as frequências durante a sincronização dos osciladores são deslocados de seus valores intrínsecos na proporção das forças de acoplamento, ou seja,

$$\left| \frac{\Delta\omega_1}{\Delta\omega_2} \right| = \left| \frac{B}{A} \right|.$$

Observemos que $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ são encontrados pela integração da equação (3.10) em relação a t , assim

$$\int_0^{f_2} \dot{\theta}_1(t) dt = \int_0^{f_2} \dot{\theta}_2(t) dt. \quad (3.11)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a (3.11), temos que

$$\theta_1(f_2) - \theta_1(0) = \theta_2(f_2) - \theta_2(0) + \text{const}$$

Das condições iniciais (3.3), (3.5), e por (3.4), temos que

$$\text{const} = \theta_1(f_2) - F_2.$$

Portanto, no caso sincronizado, a solução do sistema (3.1)-(3.2), com condições iniciais (3.3) e (3.5) é dado analiticamente por

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A+B} \right) t \quad (3.12)$$

$$\theta_2(t) = \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A+B} \right) t + \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A+B} \right) f_2 - F_2. \quad (3.13)$$

3.3 Dessincronização

Utilizando a definição de dessincronização apresentada na seção 1.5, temos que a dessincronização ocorre quando $D < |\Omega|$. Para o caso dessincronizado assumimos que

$$k = \left| \frac{D}{\Omega} \right| < 1.$$

O tempo está dimensionado de modo que

$$\dot{\psi}(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}.$$

Seja β o batimento de frequência entre os osciladores $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$, ou seja, o tempo em que a diferença de fase leva para completar um ciclo. Então

$$\frac{1}{\beta} = \int_0^{1/\beta} dt = \int_0^1 \frac{d\psi(t)}{\dot{\psi}(t)} = \int_0^1 \frac{d\psi(t)}{\Omega - D \cos(2\pi\psi(t))}. \quad (3.14)$$

Observemos que a função cosseno com frequência 2π é simétrica no intervalo $[0, 1]$. Assim, podemos reescrever (3.14) como

$$\frac{1}{\beta} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\psi(t)}{\Omega - D \cos(2\pi\psi(t))}. \quad (3.15)$$

Consideremos a seguinte mudança de variáveis

$$\rho(t) = \tan(\pi\psi(t)). \quad (3.16)$$

Então,

$$\cos(2\pi\psi(t)) = \frac{1 - \rho(t)^2}{1 + \rho(t)^2} \quad (3.17)$$

e

$$d\psi(t) = \frac{d\rho(t)}{\pi(1 + \rho(t)^2)}. \quad (3.18)$$

Como

$$\psi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \psi(1) = \frac{1}{2} \quad (3.19)$$

temos que

$$\rho(0) = 0 \quad \text{e} \quad \rho\left(\frac{1}{2}\right) = \tan\frac{\pi}{2} = +\infty. \quad (3.20)$$

Das equações (3.16)-(3.20), podemos reescrevemos (3.15) como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta} &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\frac{d\rho(t)}{\pi(1+\rho(t)^2)}}{\Omega - D \left(\frac{1-\rho(t)^2}{1+\rho(t)^2} \right)} \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi(1+\rho(t)^2)} \right) \cdot \left(\frac{1+\rho(t)^2}{\Omega + \Omega\rho(t)^2 - D + D\rho(t)^2} \right) d\rho(t) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(\Omega - D) + (\Omega + D)\rho(t)^2} \\
&= \frac{2}{\pi(\Omega + D)} \int_0^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{\left(\sqrt{\frac{\Omega - D}{\Omega + D}} \right)^2 + \rho(t)^2}. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

E, assim integramos indefinidamente (3.21) em relação a t , logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta} &= \left(\frac{2}{\pi(\Omega + D)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega - D}{\Omega + D}}} \right) \cdot \left(\arctan \left(\frac{\rho(t)}{\sqrt{\frac{\Omega - D}{\Omega + D}}} \right) \right) \\
&= \left(\frac{2}{\pi(\Omega + D)} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{\Omega + D}}{\sqrt{\Omega - D}} \right) \cdot \left(\arctan \left(\frac{\rho(t)\sqrt{\Omega + D}}{\sqrt{\Omega - D}} \right) \right). \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Como $D < |\Omega|$, temos $\rho(t) \rightarrow +\infty$ e, assim

$$\arctan \left(\frac{\rho(t)\sqrt{\Omega + D}}{\sqrt{\Omega - D}} \right) \cong \frac{\pi}{2}$$

Portanto, a equação (3.22) toma a forma

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{(\sqrt{\Omega + D}) \cdot (\sqrt{\Omega - D})} = \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 - D^2}}.$$

E a frequência de batimento satisfaz

$$\beta = (\Omega^2 - D^2)^{1/2} = \Omega \left(1 - \frac{D^2}{\Omega^2} \right)^{1/2}. \tag{3.23}$$

Temos dois casos especiais:

- (i) Para $D = 0$, ou seja, $A + B = 0$, a frequência de batimento se reduz a $\beta = \Omega = \omega_1 - \omega_2$, isto é, a frequência de batimentos não interativos. Em outras palavras, não há interação entre os osciladores, as forças de acoplamento são nulas, dadas que não podem ser negativas.
- (ii) Segue de (3.23) que $D \rightarrow |\Omega|$. Neste caso o sistema aproxima-se do acoplamento

crítico, ou seja, é o momento em que o sistema passa de dessincronizado para sincronizado e assim o batimento de frequência é nulo.

Seja τ_{ar} o período do ciclo atividade-reposo. Como a função $\cos(2\pi\psi(t))$ assume os valores extremos +1 ou -1, segue da equação (3.2) que o tempo τ_{ar} necessário para que $\theta_2(t)$ completar um ciclo é dada por

$$\frac{1}{\omega_2 + A} \leq \tau_{ar} \leq \frac{1}{\omega_2 - A}. \quad (3.24)$$

A equação (3.24) prevê limites grosseiros para τ_{ar} . Estimativas mais satisfatórias podem ser obtidas encontrando a solução exata de (3.1)-(3.2) no caso dessincronizado.

Analisaremos um caso especial do modelo, isto é, o caso em que $B = 0$. Neste caso particular não há parecer para o oscilador condutor da atividade-reposo, ou seja, não há força de acoplamento saindo do oscilador 2. Esta é uma primeira aproximação razoável para o valor de τ_{ar} .

Da condição inicial (3.5), temos que $\theta_1(0) = 0$. Dimensionalizando o tempo de forma que

$$\omega_1 = \lambda,$$

segue de (3.1) que

$$\theta_1(t) = \lambda t.$$

No caso em que $B = 0$, as equações (3.1) e (3.2) são simplificadas como

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1(t) &= \lambda \\ \dot{\theta}_2(t) &= \omega_2 + A \cos(2\pi(\theta_1(t) - \theta_2(t))). \end{aligned}$$

Da derivada da equação (3.6) em relação a t , obtemos

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t) = \Omega - D \cos(2\pi\psi(t)) \quad (3.25)$$

com

$$\begin{cases} \Omega &= \omega_1 - \omega_2 = \lambda_1 - \omega_2 \\ D &= A + B = A. \end{cases}$$

Redimensionando outra vez o tempo, temos

$$T(t) = \Omega t \quad (3.26)$$

e deixando

$$\dot{\psi}(T) = \frac{d\psi(T)}{dT}.$$

Em seguida a equação (3.25) toma a forma

$$\dot{\psi}(T) = 1 - \frac{D}{\Omega} \cos(2\pi\psi(T)) = 1 - k \cos(2\pi\psi(T)) \quad (3.27)$$

A equação (3.27) pode ser resolvida por separação de variáveis, seguido de integração. Assim obtemos que

$$T(t) + \text{const} = \int \frac{d\psi(T)}{1 - k \cos(2\pi\psi(T))}. \quad (3.28)$$

Consideremos a seguinte mudança de variáveis

$$x(T) = \tan(\pi\psi(T)).$$

Então,

$$\cos(2\pi\psi(T)) = \frac{1 - x(T)^2}{1 + x(T)^2}$$

e

$$d\psi(T) = \frac{dx(T)}{\pi(1 + x(T)^2)}.$$

Portanto, com as equações (3.29)-(3.29), reescrevemos (3.28) como

$$\begin{aligned} T(t) + \text{const} &= \int \frac{\frac{dx(T)}{\pi(1 + x(T)^2)}}{1 - k \left(\frac{1 - x(T)^2}{1 + x(T)^2} \right)} \\ &= \int \left(\frac{dx(T)}{\pi(1 + x(T)^2)} \right) \cdot \left(\frac{1 + x(T)^2}{1 - k + x(T)^2 + kx(T)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int \frac{dx(T)}{(1 - k) + (1 + k)x(T)^2} = \frac{1}{\pi(1 + k)} \int \frac{dx(T)}{\left(\sqrt{\frac{1 - k}{1 + k}} \right)^2 + x(T)^2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Assim, (3.29) toma a forma

$$\begin{aligned}
 T(t) + \text{const} &= \left(\frac{1}{\pi(1+k)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}} \right) \cdot \left(\arctan \left(\frac{x(T)}{\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}} \right) \right) \\
 \iff (T(t) + \text{const})(\pi\sqrt{1-k^2}) &= \arctan \left(\frac{x(T)}{\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}} \right) \\
 \iff \tan \left((T(t) + \text{const})(\pi\sqrt{1-k^2}) \right) &= \frac{x(T)}{\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}} \\
 \iff \left(\sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \right) \tan \left((T(t) + \text{const})(\pi\sqrt{1-k^2}) \right) &= x(T). \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

Voltamos para variável $\psi(T)$, logo

$$\begin{aligned}
 \tan(\pi\psi(T)) &= \left(\sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \right) \tan \left((T(t) + \text{const})(\pi\sqrt{1-k^2}) \right) \\
 \iff \psi(T) &= \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \right) \tan \left((T(t) + \text{const})(\pi\sqrt{1-k^2}) \right) \right). \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

De (3.26), obtemos que

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \right) \tan \left((\Omega t + D(0))(\pi\sqrt{1-k^2}) \right) \right)$$

sendo

$$\begin{aligned}
 D(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi\psi(0)) \right) \\
 k &= \frac{D}{\lambda - \omega_2}.
 \end{aligned}$$

Assim, pela diferença de fase (3.6), obtemos que

$$\theta_2(t) = \theta_1(t) - \psi(t).$$

Portanto, no caso dessincronizado e com $B = 0$ a solução do sistema (3.1)-(3.2), com

condições iniciais (3.3) e (3.5) é dado por

$$\theta_1(t) = \lambda t \quad (3.32)$$

$$\theta_2(t) = \lambda t - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \right) \tan \left((\Omega t + D(0))(\pi\sqrt{1-k^2}) \right) \right). \quad (3.33)$$

4 MODELO INFLUENCIADO PELA DOR

Neste capítulo analisaremos quatro diferentes formas de acoplamento ao sistema de fase de Strogatz [16], conforme apresentado no capítulo 3, de forma a incorporar o efeito externo da dor na modelagem. Estas análises seguirão o mesmo método apresentado por Strogatz em cada um dos casos.

Considerando $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ e $\theta_3(t)$ três osciladores não-lineares, de modo que ω_1 , ω_2 e ω_3 são as frequências intrínsecas e A , B e C são as forças de acoplamento. Todos os parâmetros são considerados positivos ou nulos. O oscilador $\theta_1(t)$ descreve o ciclo da temperatura corporal, o oscilador $\theta_2(t)$ descreve o ciclo da atividade-reposo e o oscilador $\theta_3(t)$ descreve o ciclo da dor.

Além das considerações de Strogatz para os osciladores $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$, afirmamos que no início do repouso não há evidências de dor, ou seja,

$$\theta_3(t = 0) = 0, \quad (4.1)$$

em outras palavras, o ponto t no oscilador $\theta_3(t)$ está na fase 0, igualmente ao oscilador $\theta_1(t)$, sendo também o ponto mínimo no ciclo da dor.

O momento em que a dor surge é dado por

$$\theta_3(t = f_3) = F_3, \quad (4.2)$$

ou seja, supomos que não há evidências de dor por todo o período $[0, f_3]$, $\theta_3(t) = 0$ para qualquer $0 \leq t \leq f_3$.

A estrutura de acoplamento é representada nas seções a seguir.

4.1 Caso 1

Neste primeiro caso consideramos que a dor não influencia diretamente na temperatura, e da mesma forma a temperatura não influencia diretamente na dor. Porém, como nosso sistema não é linear, a dor influencia de forma indireta na temperatura e é influenciada de forma indireta por ela. Desta forma, acoplamos o oscilador que conduz o ciclo da

dor apenas ao oscilador que conduz o ciclo atividade-reposo, representado pela Figura 2.

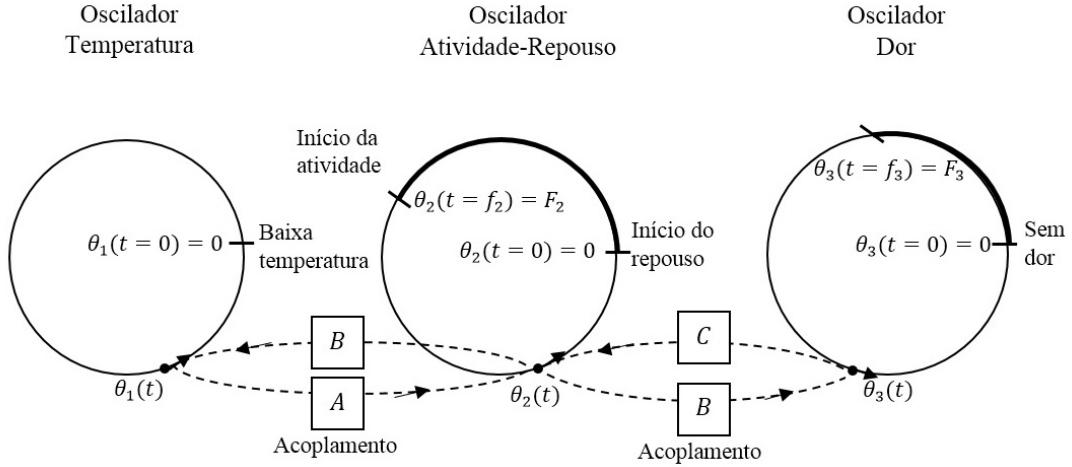


Figura 2: Caso 1 de acoplamento

Para analisarmos tal sistema vamos considerar dois osciladores como sendo um oscilador principal. Temos duas formas de fazermos isso, tais serão apresentadas a seguir.

4.1.1 Situação 1

4.1.1.1 Estrutura

Oscilador principal

Seja $\Theta_{12}(t)$ o oscilador principal, formado pelos osciladores $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$, de modo que um influencia no outro diretamente, ou seja, a temperatura influencia e é influenciada diretamente pelo ciclo da atividade-reposo. Consideraremos que no início do ciclo da temperatura e no início do ciclo atividade-reposo, a temperatura é baixa e não há movimento, assim, a menos de uma mudança de escala, podemos considerar que

$$\Theta_{12}(t_0 = 0) = 0. \quad (4.3)$$

Vamos agora analisar as propriedades deste oscilador principal. Como já descrito no capítulo 3 as equações dinâmicas são dadas pelas equações (3.1) e (3.2). Reescremos elas,

$$\dot{\theta}_1(t) = \omega_1 - B \cos(2\pi(\theta_2(t) - \theta_1(t))) \quad (4.4)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2 + A \cos(2\pi(\theta_1(t) - \theta_2(t))). \quad (4.5)$$

Considere a diferença de fase

$$\psi_1(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t). \quad (4.6)$$

Derivando a equação (4.6) em relação a t e subtraindo as equações (4.4) e (4.5),

obtemos

$$\dot{\psi}_1(t) = \Omega_1 - D_1 \cos(2\pi\psi_1(t)) \quad (4.7)$$

onde

$$\begin{cases} \Omega_1 &= \omega_1 - \omega_2 \\ D_1 &= A + B \end{cases}$$

Neste caso Ω_1 é a diferença das frequências intrínsecas no oscilador principal e D_1 é o acoplamento total neste oscilador.

Sistema total

Analizando agora a relação entre o oscilador principal $\Theta_{12}(t)$ com o oscilador que conduz o ciclo da dor $\theta_3(t)$, as equações dinâmicas do modelo são dadas por

$$\dot{\Theta}_{12}(t) = \Omega_1 - C \cos(2\pi(\theta_3(t) - \Theta_{12}(t))) \quad (4.8)$$

$$\dot{\theta}_3(t) = \omega_3 + D_1 \cos(2\pi(\Theta_{12}(t) - \theta_3(t))). \quad (4.9)$$

Consideremos então, a diferença de fase

$$\psi_2(t) = \Theta_{12}(t) - \theta_3(t). \quad (4.10)$$

Derivando (4.10) em relação a t e subtraindo as equações (4.8) e (4.9) obtemos

$$\dot{\psi}_2(t) = \Omega_2 - D_2 \cos(2\pi\psi_2(t)) \quad (4.11)$$

onde

$$\begin{cases} \Omega_2 &= \Omega_1 - \omega_3 = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 \\ D_2 &= D_1 + C = A + B + C. \end{cases}$$

Observemos que Ω_2 é a diferença das frequências intrínsecas entre o oscilador principal e o oscilador $\theta_3(t)$ e D_2 é o acoplamento total deste sistema.

4.1.1.2 Sincronização Geral

Oscilador Principal

Pela definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização no oscilador principal ocorre quando $D_1 > |\Omega_1|$. Então assumimos que

$$k_1 = \left| \frac{D_1}{\Omega_1} \right| > 1.$$

A fase de relação sincronizada internamente $\psi_1(t)$ é obtida através da resolução de (4.7), de modo que $\dot{\psi}_1(t) = 0$ tenha uma solução. Da equação (3.8), com a renomeação das variáveis com o índice 1, obtemos que

$$\psi_1(t) = \pm \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_1}{D_1} \right).$$

Temos duas soluções implícitas, de [17] a solução estável é aquela que $d\dot{\psi}/d\psi < 0$. Tomando o intervalo $[0, \pi]$ para arccos,

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_1}{D_1} \right) \quad (4.12)$$

é a solução estável.

Usando (4.12) podemos encontrar a frequência de “compromisso” $\omega_{\alpha_1}^*$ adotada pelo sistema sincronizado do oscilador principal. Durante a sincronia interna obtemos (4.4) e (4.5) como sendo

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1(t) &= \omega_1 - B \left(\frac{\Omega_1}{D_1} \right) = \omega_1 - B \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{A + B} \right) \\ \dot{\theta}_2(t) &= \omega_2 + A \left(\frac{\Omega_1}{D_1} \right) = \omega_2 + A \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{A + B} \right). \end{aligned}$$

Sendo $\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_2(t) = \omega_{\alpha_1}^*$, logo

$$\omega_{\alpha_1}^* = \frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B}. \quad (4.13)$$

E ainda, a frequência intrínseca de cada oscilador é dada por

$$\begin{aligned} \Delta\omega_1 &= \omega_{\alpha_1}^* - \omega_1 = -\frac{B\Omega_1}{D_1} \\ \Delta\omega_2 &= \omega_{\alpha_1}^* - \omega_2 = \frac{A\Omega_1}{D_1}. \end{aligned}$$

As frequências, durante a sincronização, dos osciladores são deslocados de seus valores intrínsecos na proporção das forças de acoplamento, ou seja,

$$\left| \frac{\Delta\omega_1}{\Delta\omega_2} \right| = \left| \frac{B}{A} \right|.$$

Observemos que $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ são encontrados pela integração da equação (4.13) em relação a t , assim

$$\int_0^{f_2} \dot{\theta}_1(t) dt = \int_0^{f_2} \dot{\theta}_2(t) dt. \quad (4.14)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a (4.14), obtemos

$$\theta_1(f_2) - \theta_1(0) = \theta_2(f_2) - \theta_2(0) + \text{const.}$$

Das condições iniciais (3.3) e (3.5), e ainda por (3.4), temos que

$$\text{const} = \theta_1(f_2) - F_2.$$

Logo, no caso sincronizado, a solução do sistema (4.4)-(4.5), com condições iniciais (3.3) e (3.5) é dado por

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} \right) t \quad (4.15)$$

$$\theta_2(t) = \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} \right) t + \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} \right) f_2 - F_2. \quad (4.16)$$

Sistema Total

Também pela definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização entre o oscilador principal e o oscilador condutor da dor ocorre quando $D_2 > |\Omega_2|$. Então assumimos que

$$k_2 = \left| \frac{D_2}{\Omega_2} \right| > 1.$$

A fase de relação sincronizada internamente $\psi_2(t)$ é obtido através da resolução de (4.11), de modo que $\dot{\psi}_2(t) = 0$ tem uma solução. Da equação (3.8), com a renomeação das variáveis com o índice 2, obtemos que

$$\psi_2(t) = \pm \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_2}{D_2} \right).$$

Das duas soluções implícitas, de [17] a solução estável é aquela em que $d\dot{\psi}/d\psi < 0$, logo tomamos o intervalo $[0, \pi]$ para a função cosseno, e

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_2}{D_2} \right) \quad (4.17)$$

é a solução estável.

Usando (4.17) podemos encontrar a frequência de “compromisso” $\omega_{\alpha_2}^*$ adotada pelo

sistema sincronizado. Durante a sincronia interna obtemos (4.8) e (4.9) como sendo

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}_{12}(t) &= \Omega_1 - C \left(\frac{\Omega_2}{D_2} \right) = \omega_1 - \omega_2 - C \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 - \omega_3}{A + B + C} \right) \\ \dot{\theta}_3(t) &= \omega_3 + D_1 \left(\frac{\Omega_2}{D_2} \right) = \omega_3 + (A + B) \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 - \omega_3}{A + B + C} \right).\end{aligned}$$

Sendo $\dot{\Theta}_{12}(t) = \dot{\theta}_3(t) = \omega_{\alpha_2}^*$, logo

$$\omega_{\alpha_2}^* = \frac{(A + B)(\omega_1 - \omega_2) + C\omega_3}{A + B + C}. \quad (4.18)$$

E, ainda, a frequência intrínseca de cada oscilador é dada por

$$\begin{aligned}\Delta\Omega_1 &= \omega_{\alpha_2}^* - \Omega_1 = -\frac{\Omega_2 C}{D_2} \\ \Delta\omega_3 &= \omega_{\alpha_2}^* - \omega_3 = \frac{\Omega_2 D_1}{D_2}.\end{aligned}$$

As frequências, durante a sincronização, dos osciladores são deslocados de seus valores intrínsecos na proporção das forças de acoplamento, ou seja,

$$\left| \frac{\Delta\Omega_1}{\Delta\omega_3} \right| = \left| \frac{C}{A + B} \right|.$$

Observemos que $\Theta_{12}(t)$ e $\theta_3(t)$ são encontrados pela integração da equação (4.18) em relação a t , assim

$$\int_0^{f_3} \dot{\Theta}_{12}(t) dt = \int_0^{f_3} \dot{\theta}_3(t) dt. \quad (4.19)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a (4.19), temos que

$$\Theta_{12}(f_3) - \Theta_{12}(0) = \theta_3(f_3) - \theta_3(0) + \text{const.}$$

Das condições iniciais (4.1) e (4.3), e por (4.2), temos

$$\text{const} = \Theta_{12}(f_3) - F_3.$$

Logo, no caso sincronizado, a solução do sistema (4.8)-(4.9), com condições iniciais

(4.1) e (4.3) é dado por

$$\Theta_{12}(t) = \left(\frac{(A+B)(\omega_1 - \omega_2) + C\omega_3}{A+B+C} \right) t \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \theta_3(t) &= \left(\frac{(A+B)(\omega_1 - \omega_2) + C\omega_3}{A+B+C} \right) t \\ &\quad + \left(\frac{(A+B)(\omega_1 - \omega_2) + C\omega_3}{A+B+C} \right) f_3 - F_3. \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.1.1.3 Dessincronização Geral

Oscilador principal

Da definição de dessincronização disposta na seção 1.5, temos que a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_1 < |\Omega_1|$. Então assumimos que

$$k_1 = \left| \frac{D_1}{\Omega_1} \right| < 1.$$

O tempo está dimensionado de modo que

$$\dot{\psi}_1(t) = \frac{d\psi_1(t)}{dt}.$$

O batimento de frequência β_1 entre os osciladores $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ é obtido por

$$\frac{1}{\beta_1} = \int_0^{1/\beta_1} dt = \int_0^1 \frac{d\psi_1(t)}{\dot{\psi}_1(t)} = \int_0^1 \frac{d\psi_1(t)}{\Omega_1 - D_1 \cos(2\pi\psi_1(t))}. \quad (4.22)$$

Da equação (3.23), com a renomeação das variáveis com o índice 1, a frequência de batimento β_1 satisfaz

$$\beta_1 = (\Omega_1^2 - D_1^2)^{1/2} = \Omega_1 \left(1 - \frac{D_1^2}{\Omega_1^2} \right)^{1/2}.$$

Os dois casos especiais são

- (i) Para $D_1 = 0$, isto é, $A + B = 0$, a frequência de batimento se reduz a $\beta_1 = \Omega_1 = \omega_1 - \omega_2$, isto é, não há interação entre os osciladores, pois as forças de acoplamento são nulas.
- (ii) Segue de (4.23) que $D_1 \rightarrow |\Omega_1|$, isto é, $(A + B) \rightarrow |(\omega_1 - \omega_2)|$, isto é, nos aproximamos do acoplamento crítico, em que o sistema mude de dessincronizado para sincronizado.

Seja τ_{ar} o período do ciclo atividade-reposo. Veja que a função $\cos(2\pi\psi_1(t))$ assume os valores extremos +1 ou -1, segue da equação (4.5) que o tempo τ_{ar} necessário para

que $\theta_2(t)$ completar um ciclo é dada por

$$\frac{1}{\omega_2 + A} \leq \tau_{ar} \leq \frac{1}{\omega_2 - A}. \quad (4.23)$$

A equação (4.23), prevê limites grosseiros para τ_{ar} . Estimativas mais satisfatórias podem ser obtidas encontrando a solução exata de (4.4)-(4.5) no caso dessincronizado.

Um caso especial do modelo a ser analisado é o caso em que $B = 0$. Neste caso particular não há parecer para o oscilador condutor da atividade-reposo. Esta é uma primeira aproximação razoável para o valor de τ_{ar} .

Da condição inicial (3.5), temos que $\theta_1(0) = 0$. Dimensionalizando o tempo de forma que

$$\omega_1 = \lambda_1,$$

segue de (4.4) que

$$\theta_1(t) = \lambda_1 t.$$

No caso em que $B = 0$, as equações (4.4) e (4.5) são simplificadas

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1(t) &= \lambda_1 \\ \dot{\theta}_2(t) &= \omega_2 + A \cos(2\pi(\theta_1(t) - \theta_2(t))). \end{aligned}$$

Derivando a equação (4.6) em relação a t , obtemos que

$$\dot{\psi}_1(t) = \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t) = \Omega_1 - D_1 \cos(2\pi\psi_1(t)) \quad (4.24)$$

com

$$\begin{cases} \Omega_1 = \omega_1 - \omega_2 = \lambda_1 - \omega_2 \\ D_1 = A + B = A. \end{cases}$$

Redimensionalizando outra vez o tempo, temos

$$T_1(t) = \Omega_1 t \quad (4.25)$$

e deixando

$$\dot{\psi}_1(t) = \frac{d\psi_1(t)}{dT_1(t)}.$$

Em seguida a equação (4.24) toma a forma

$$\dot{\psi}_1(T_1) = 1 - \frac{D_1}{\Omega_1} \cos(2\pi\psi_1(T_1)) = 1 - k_1 \cos(2\pi\psi_1(T_1)).$$

A equação (4.26) pode ser resolvida por separação de variáveis. Da equação (3.31), com a renomeação das variáveis com o índice 1, obtemos que

$$\psi_1(T_1) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_1}{1+k_1}} \right) \tan \left((T_1(t) + \text{const})(\pi\sqrt{1-k_1^2}) \right) \right). \quad (4.26)$$

De (4.25) e (4.26), temos que

$$\psi_1(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_1}{1+k_1}} \right) \tan \left((\Omega_1 t + D_1(0))(\pi\sqrt{1-k_1^2}) \right) \right).$$

sendo

$$\begin{aligned} D_1(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi\psi_1(0)) \right) \\ k_1 &= \frac{A}{\lambda_1 - \omega_2}. \end{aligned}$$

Assim, pela diferença de fase (4.6), obtemos que

$$\theta_2(t) = \theta_1(t) - \psi_1(t).$$

Portanto, no caso dessincronizado e com $B = 0$ a solução do sistema (4.4)-(4.5), com condições iniciais (3.3) e (3.5) é dado por

$$\theta_1(t) = \lambda_1 t \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \lambda_1 t - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_1}{1+k_1}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_1 t + D_1(0))(\pi\sqrt{1-k_1^2}) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Sistema total

Pela definição de dessincronização apresentada na seção 1.5, temos que a dessincronização entre o oscilador principal e o oscilador condutor da dor ocorre quando $D_2 < |\Omega_2|$. Então assumimos que

$$k_2 = \left| \frac{D_2}{\Omega_2} \right| < 1.$$

O tempo está dimensionado de modo que

$$\dot{\psi}_2(t) = \frac{d\psi_2(t)}{dt}.$$

O batimento de frequência β_2 entre os osciladores $\Theta_{12}(t)$ e $\theta_3(t)$ é obtido por

$$\frac{1}{\beta_2} = \int_0^{1/\beta_2} dt = \int_0^1 \frac{d\psi_2(t)}{\dot{\psi}_2(t)} = \int_0^1 \frac{d\psi_2(t)}{\Omega_2 - D_2 \cos(2\pi\psi_2(t))}. \quad (4.29)$$

Da equação (3.23), com a renomeação das variáveis com o índice 2, a frequência de batimento β_2 satisfaz

$$\beta_2 = (\Omega_2^2 - D_2^2)^{1/2} = \Omega_2 \left(1 - \frac{D_2^2}{\Omega_2^2}\right)^{1/2}. \quad (4.30)$$

Os dois casos especiais são

- (i) Para $D_2 = 0$, isto é, $A + B + C = 0$, a frequência de batimento se reduz a $\beta_2 = \Omega_2 = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$, isto é, não há interação entre os osciladores, pois as forças de acoplamento são todas nulas.
- (ii) Segue de (4.30) que $D_2 \rightarrow |\Omega_2|$, isto é, $(A + B + C) \rightarrow |(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)|$, ou seja, o sistema aproxima-se do acoplamento crítico.

Seja τ_d o período do ciclo da dor, pela a função $\cos(2\pi\psi_2(t))$ assume os valores extremos $+1$ ou -1 , segue da equação (4.9) que o tempo τ_d necessário para que $\theta_3(t)$ completar um ciclo é dada por

$$\frac{1}{\omega_3 + D_1} \leq \tau_d \leq \frac{1}{\omega_3 - D_1}. \quad (4.31)$$

A equação (4.31), prevê limites grosseiros para τ_d . Estimativas mais satisfatórias podem ser obtidas encontrando a solução exata de (4.8)-(4.9).

Considerando o caso especial analisado no oscilador principal, tal que $B = 0$, e ainda considerando que $C = 0$, ou seja, a força de acoplamento do oscilador $\theta_3(t)$ é também nula, teremos uma primeira aproximação razoável para o valor de τ_d .

Da equação (4.24) temos que

$$\omega_1 = \lambda_1.$$

Da condição inicial (4.3), em que $\Theta_{12}(0) = 0$. Dimensionaismos o tempo de forma que

$$\Omega_1 = \lambda_2, \quad (4.32)$$

com $\lambda_1 > 0$, segue de (4.8) e (4.32) que

$$\dot{\Theta}_{12}(t) = \lambda_2 t. \quad (4.33)$$

No caso em que $B = C = 0$, as equações (4.8) e (4.9), são simplificadas como

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_{12}(t) &= \lambda_2 \\ \dot{\theta}_3(t) &= \omega_3 + A \cos(2\pi(\Theta_{12}(t) - \theta_3(t))). \end{aligned}$$

Derivando a equação (4.10) em relação a t , obtemos

$$\dot{\psi}_2(t) = \dot{\Theta}_{12}(t) - \dot{\theta}_3(t) = \Omega_2 - D_2 \cos(2\pi\psi_2(t)) \quad (4.34)$$

com

$$\begin{cases} \Omega_2 &= \lambda_2 - \omega_3 \\ D_2 &= A. \end{cases}$$

Redimensionando outra vez o tempo, temos

$$T_2(t) = \Omega_2 t \quad (4.35)$$

e deixando

$$\dot{\psi}_2(t) = \frac{d\psi_2(t)}{dT_2(t)}.$$

Em seguida a equação (4.34) toma a forma

$$\dot{\psi}_2(T_2) = 1 - \frac{D_2}{\Omega_2} \cos(2\pi\psi_2(T_2)) = 1 - k_2 \cos(2\pi\psi_2(t)).$$

A equação (4.36) pode ser resolvida por separação de variáveis. Da equação (3.31), com a renomeação das variáveis com o índice 2, obtemos que

$$\psi_2(T_1) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_2}{1+k_2}} \right) \tan \left((T_2(t) + \text{const})(\pi \sqrt{1-k_2^2}) \right) \right). \quad (4.36)$$

De (4.35) e (4.36), temos que

$$\psi_2(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_2}{1+k_2}} \right) \tan \left((\Omega_2 t + D_2(0))(\pi \sqrt{1-k_2^2}) \right) \right),$$

sendo

$$\begin{aligned} D_2(0) &= \arctan\left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi\psi_2(0))\right) \\ k_2 &= \frac{A}{\lambda_2 - \omega_3}. \end{aligned}$$

Assim, pela diferença de fase (4.10), obtemos que

$$\theta_3(t) = \Theta_{12}(t) - \psi_2(t).$$

Portanto, no caso dessincronizado e com $B = C = 0$, a solução do sistema (4.8)-(4.9), com condições iniciais (4.1) e (4.3) é dado por

$$\Theta_{12}(t) = \lambda_2 t \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \theta_3(t) &= \lambda_2 t - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\left(\sqrt{\frac{1-k_2}{1+k_2}}\right)\right. \\ &\quad \left.\tan\left((\Omega_2 t + D_2(0))(\pi\sqrt{1-k_2^2})\right)\right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

4.1.1.4 Misto

Oscilador principal sincronizado e sistema total dessincronizado

A sincronização no oscilador principal foi analisada na primeira parte da subseção 4.1.1.2. Da mesma maneira, a dessincronização no sistema total foi analisada na segunda parte da subseção 4.1.1.3.

A diferença que encontramos, é que neste caso não precisamos considerar $\omega_1 = \lambda_1$, nem $B = 0$, pois não consideramos o oscilador principal dessincronizado, as demais restrições se igualam.

Pela definição de sincronização e dessincronização apresentadas na seção 1.5, temos que a sincronização no oscilador principal ocorre quando $D_1 > |\Omega_1|$ e a dessincronização no sistema total ocorre quando $D_2 < |\Omega_2|$. Então assumimos que

$$\begin{aligned} k_1 &= \left|\frac{D_1}{\Omega_1}\right| > 1 \\ k_2 &= \left|\frac{D_2}{\Omega_2}\right| < 1. \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que o oscilador principal é sincronizado e o sistema total é dessincronizado, com $C = 0$ e condições iniciais (3.3), (3.5), (4.1) e (4.3), as soluções

dos sistemas (4.4)-(4.5) e (4.8)-(4.9) são dadas por

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} \right) t \quad (4.39)$$

$$\theta_2(t) = \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} \right) t + \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} \right) f_2 - F_2 \quad (4.40)$$

e

$$\Theta_{12}(t) = \lambda_2 t \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \theta_3(t) &= \lambda_2 t - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_2}{1+k_2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_2 t + D_2(0))(\pi \sqrt{1-k_2^2}) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \lambda_2 \\ \Omega_2 &= \lambda_2 - \omega_3 \\ k_2 &= \frac{D_2}{\Omega_2} = \frac{A+B}{\lambda_2 - \omega_3} \\ D_2(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_2(0)) \right). \end{aligned}$$

Oscilador principal dessincronizado e sistema total sincronizado

A dessincronização no oscilador principal foi analisada na primeira parte da subseção 4.1.1.3. Assim, reescreveremos a análise e equações principais. Da mesma maneira, a sincronização no sistema total foi analisada na segunda parte da subseção 4.1.1.2.

Utilizando a definição de sincronização e dessincronização apresentadas na seção 1.5, temos que a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_1 < |\Omega_1|$ e a sincronização no sistema total ocorre quando $D_2 > |\Omega_2|$. Então assumimos que

$$\begin{aligned} k_1 &= \left| \frac{D_1}{\Omega_1} \right| < 1. \\ k_2 &= \left| \frac{D_2}{\Omega_2} \right| > 1. \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que o oscilador principal é dessincronizado e o sistema total é sincronizado, com $B = 0$ e condições iniciais (3.3), (3.5), (4.1) e (4.3) as soluções dos

sistemas (4.4)-(4.5) e (4.8)-(4.9) são dadas por

$$\theta_1(t) = \lambda_1 t \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \lambda_1 t - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_1}{1+k_1}} \right) \tan \left((\Omega_1 t + D_1(0))(\pi \sqrt{1-k_1^2}) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

e

$$\Theta_{12}(t) = \left(\frac{(A+B)(\omega_1 - \omega_2) + C\omega_3}{A+B+C} \right) t \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \theta_3(t) &= \left(\frac{(A+B)(\omega_1 - \omega_2) + C\omega_3}{A+B+C} \right) t \\ &\quad + \left(\frac{(A+B)(\omega_1 - \omega_2) + C\omega_3}{A+B+C} \right) f_3 - F_3. \end{aligned} \quad (4.46)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \lambda_1 - \omega_2 \\ k_1 &= \frac{A}{\lambda_1 - \omega_2} \\ D_1(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi\psi_1(0)) \right). \end{aligned}$$

4.1.2 Situação 2

A partir daqui as análises a serem feitas nesta situação e nas duas situações dos casos 2 e 3 seguem os mesmos passos das análises feitas nas seções 4.1.1.1, 4.1.1.2 e 4.1.1.3, assim alteramos os devidos parâmetros e apresentaremos apenas as equações de maior relevância.

4.1.2.1 Estrutura

Oscilador principal

Seja ($\Theta_{23}(t)$) o oscilador principal, formado pelos osciladores $\theta_2(t)$ e $\theta_3(t)$, de modo que um influencia no outro diretamente, ou seja, o ciclo atividade repouso influencia e é influenciado diretamente pelo ciclo da dor. Consideraremos que no início do ciclo da dor e no início do ciclo da atividade-reposo, a dor é nula e não há movimento. Assim, a menos de uma mudança de escala, podemos considerar que

$$\Theta_{23}(t_0 = 0) = 0. \quad (4.47)$$

As equações dinâmicas deste oscilador principal são dadas por

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2 - C \cos(2\pi(\theta_3(t) - \theta_2(t))) \quad (4.48)$$

$$\dot{\theta}_3(t) = \omega_3 + B \cos(2\pi(\theta_2(t) - \theta_3(t))). \quad (4.49)$$

A diferença de fase é

$$\psi_3(t) = \theta_2(t) - \theta_3(t), \quad (4.50)$$

onde

$$\dot{\psi}_3(t) = \Omega_3 - D_3 \cos(2\pi\psi_3(t)) \quad (4.51)$$

e

$$\begin{cases} \Omega_3 &= \omega_2 - \omega_3 \\ D_3 &= B + C \end{cases}$$

Ω_3 é a diferença das frequências intrínsecas no oscilador principal e D_3 é o acoplamento total neste oscilador.

Sistema total

Analizando agora a relação entre o oscilador que conduz o ciclo da temperatura $\theta_1(t)$ com o oscilador principal $\Theta_{23}(t)$, as equações dinâmicas do modelo são

$$\dot{\theta}_1(t) = \omega_1 - D_3 \cos(2\pi(\Theta_{23}(t) - \theta_1(t))) \quad (4.52)$$

$$\dot{\Theta}_{23}(t) = \Omega_3 + A \cos(2\pi(\theta_1(t) - \Theta_{23}(t))). \quad (4.53)$$

A diferença de fase considerada aqui é

$$\psi_4(t) = \theta_1(t) - \Theta_{23}(t), \quad (4.54)$$

com

$$\dot{\psi}_4(t) = \Omega_4 - D_4 \cos(2\pi\psi_4(t)) \quad (4.55)$$

e

$$\begin{cases} \Omega_4 &= \omega_1 - \Omega_3 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 \\ D_4 &= A + D_3 = A + B + C. \end{cases}$$

Ω_4 é a diferença das frequências intrínsecas entre o oscilador $\theta_1(t)$ e o oscilador

principal, e D_4 é o acoplamento total deste sistema.

4.1.2.2 Sincronização Geral

Oscilador Principal

Considerando a definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização no oscilador principal ocorre quando $D_3 > |\Omega_3|$. Então assumimos que

$$k_3 = \left| \frac{D_3}{\Omega_3} \right| > 1.$$

E assim

$$\psi_3(t) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_3}{D_3} \right) \quad (4.56)$$

é a solução estável.

Substituindo (4.56) no sistema (4.48)-(4.49) e sendo $\dot{\theta}_2(t) = \dot{\theta}_3(t) = \omega_{\alpha_1}^*$, obtemos que

$$\omega_{\alpha_3}^* = \frac{B\omega_2 + C\omega_3}{B + C}. \quad (4.57)$$

Notemos que $\theta_2(t)$ e $\theta_3(t)$ são encontrados pela integração da equação (4.57) em relação a t , assim

$$\int_0^{f_2} \dot{\theta}_2(t) dt = \int_0^{f_2} \dot{\theta}_3(t) dt. \quad (4.58)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a (4.58), temos que

$$\theta_2(f_2) - \theta_2(0) = \theta_3(f_2) - \theta_3(0) + \text{const}.$$

Das condições iniciais (3.3)-(4.1), e ainda por (3.4), obtemos que

$$\text{const} = -\theta_3(f_2) + F_2.$$

Logo no caso sincronizado a solução do sistema (4.48)-(4.49), com condições iniciais (3.3) e (4.1) é dado por

$$\theta_2(t) = \left(\frac{B\omega_2 + C\omega_3}{B + C} \right) t \quad (4.59)$$

$$\theta_3(t) = \left(\frac{B\omega_2 + C\omega_3}{B + C} \right) t - \left(\frac{B\omega_2 + C\omega_3}{B + C} \right) f_2 + F_2. \quad (4.60)$$

Sistema Total

Também pela definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização entre o oscilador condutor da dor e o oscilador principal ocorre quando $D_4 > |\Omega_4|$. Então assumimos que

$$k_4 = \left| \frac{D_4}{\Omega_4} \right| > 1.$$

E assim

$$\psi_4(t) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_4}{D_4} \right) \quad (4.61)$$

é a solução estável.

Substituindo (4.61) no sistema (4.52)-(4.53) e sendo $\dot{\theta}_1(t) = \dot{\Theta}_{23}(t) = \omega_{\alpha_4}^*$, obtemos que

$$\omega_{\alpha_4}^* = \frac{A\omega_1 + (B+C)(\omega_2 - \omega_3)}{A + B + C}. \quad (4.62)$$

Observemos que $\theta_1(t)$ e $\Theta_{23}(t)$ são encontrados pela integração da equação (4.62) em relação a t , assim

$$\int_0^{f_1} \dot{\theta}_1(t) dt = \int_0^{f_1} \dot{\Theta}_{23}(t) dt, \quad (4.63)$$

aqui consideramos um $\theta_1(f_1) = F_1$ qualquer, em nenhum momento definimos que a temperatura permanece nula no intervalo $[0, f_1]$, a única afirmação é que $f_1 > 0$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a (4.1.2.2), temos que

$$\theta_1(f_1) - \theta_1(0) = \Theta_{23}(f_1) - \Theta_{23}(0) + \text{const}.$$

Das condições iniciais (3.5) e (4.47), temos que

$$\text{const} = -\Theta_{23}(f_1) + F_1.$$

Logo no caso sincronizado a solução do sistema (4.52)-(4.53), com condições iniciais (3.5) e (4.47), é dado por

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + (B+C)(\omega_2 - \omega_3)}{A + B + C} \right) t \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{23}(t) &= \left(\frac{A\omega_1 + (B+C)(\omega_2 - \omega_3)}{A + B + C} \right) t \\ &\quad - \left(\frac{A\omega_1 + (B+C)(\omega_2 - \omega_3)}{A + B + C} \right) f_1 + F_1. \end{aligned} \quad (4.65)$$

4.1.2.3 Dessincronização Geral

Oscilador principal

Da definição de dessincronização disposta na seção 1.5, temos que a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_3 < |\Omega_3|$. Então assumimos que

$$k_3 = \left| \frac{D_3}{\Omega_3} \right| < 1.$$

O batimento de frequência β_3 satisfaz

$$\beta_3 = (\Omega_3^2 - D_3^2)^{1/2} = \Omega_3 \left(1 - \frac{D_3^2}{\Omega_3^2} \right)^{1/2}.$$

Consideramos

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ \omega_3 &= \lambda_3, \end{aligned}$$

logo

$$\theta_3(t) = \lambda_3 t.$$

Redimensionalisando o tempo de forma que

$$T_3(t) = \Omega_3 t \quad (4.66)$$

e, renomeando as variáveis da equação (3.31) com o índice 3, obtemos que

$$\psi_3(T_3) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_3}{1+k_3}} \right) \tan \left((T_3(t) + \text{const})(\pi \sqrt{1-k_3^2}) \right) \right). \quad (4.67)$$

De (4.66) e (4.67), obtemos que

$$\psi_3(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_3}{1+k_3}} \right) \tan \left((\Omega_3 t + D_3(0))(\pi \sqrt{1-k_3^2}) \right) \right).$$

sendo

$$\begin{aligned} D_3(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_3(0)) \right) \\ k_3 &= \frac{C}{\omega_2 - \lambda_3}. \end{aligned}$$

Assim, pela diferença de fase (4.51), obtemos que

$$\theta_2(t) = \theta_3(t) + \psi_3(t).$$

Portanto, no caso dessincronizado e com $B = 0$, a solução do sistema (4.48)-(4.49), com condições iniciais (3.5) e (4.1) é dado por

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \lambda_3 t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_3}{1+k_3}} \right) \tan \left((\Omega_3 t + D_3(0))(\pi \sqrt{1-k_3^2}) \right) \right) \\ &\quad (4.68) \end{aligned}$$

$$\theta_3(t) = \lambda_3 t. \quad (4.69)$$

Sistema total

Pela definição de dessincronização apresentada na seção 1.5, temos que a dessincronização entre o oscilador condutor da temperatura e o oscilador principal ocorre quando $D_4 < |\Omega_4|$. Então assumimos que

$$k_4 = \left| \frac{D_4}{\Omega_4} \right| < 1.$$

O batimento de frequência β_4 satisfaz

$$\beta_4 = (\Omega_4^2 - D_4^2)^{1/2} = \Omega_4 \left(1 - \frac{D_4^2}{\Omega_4^2} \right)^{1/2}.$$

Consideramos

$$A = 0$$

$$\Omega_3 = \lambda_4,$$

logo

$$\Theta_{23}(t) = \lambda_4 t.$$

Redimensionalisando o tempo de forma que

$$T_4(t) = \Omega_4 t \quad (4.70)$$

e renomeando as variáveis da equação (3.31) com o índice 4, obtemos que

$$\psi_4(T_4) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_4}{1+k_4}} \right) \tan \left((T_4(t) + \text{const})(\pi \sqrt{1-k_4^2}) \right) \right). \quad (4.71)$$

De (4.70) e (4.71), obtemos que

$$\psi_4(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_4}{1+k_4}} \right) \tan \left((\Omega_4 t + D_4(0))(\pi \sqrt{1-k_4^2}) \right) \right).$$

sendo

$$D_4(0) = \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_4(0)) \right) \quad (4.72)$$

$$k_4 = \frac{C}{\omega_1 - \lambda_4}. \quad (4.73)$$

Assim, pela diferença de fase (4.54), obtemos que

$$\theta_1(t) = \Theta_{23}(t) + \psi_4(t).$$

Portanto, no caso dessincronizado e com $A = B = 0$ a solução do sistema (4.52)-(4.53), com condições iniciais (3.5) e (4.47) é dado por

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \lambda_4 t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_4}{1+k_4}} \right) \tan \left((\Omega_4 t + D_4(0))(\pi \sqrt{1-k_4^2}) \right) \right) \\ &\quad (4.74) \end{aligned}$$

$$\Theta_{23}(t) = \lambda_4 t. \quad (4.75)$$

4.1.2.4 Misto

Oscilador principal sincronizado e sistema total dessincronizado

A sincronização no oscilador principal foi analisada na primeira parte da subseção 4.1.2.2. Da mesma maneira, a dessincronização no sistema total foi analisada na segunda parte da subseção 4.1.2.3.

A diferença que encontramos, é que neste caso não precisamos considerar $\omega_3 = \lambda_3$, nem $B = 0$, pois não consideramos o oscilador principal dessincronizado, as demais restrições se igualam.

Pelas definições de sincronização e dessincronização apresentadas na seção 1.5, temos que a sincronização no oscilador principal ocorre quando $D_3 > |\Omega_3|$ e a dessincronização

no oscilador principal ocorre quando $D_4 < |\Omega_4|$. Então assumimos que

$$\begin{aligned} k_3 &= \left| \frac{D_3}{\Omega_3} \right| > 1 \\ k_4 &= \left| \frac{D_4}{\Omega_4} \right| < 1. \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que o oscilador principal é sincronizado e o sistema total é dessincronizado e com $A = 0$, as soluções dos sistemas (4.48)-(4.49) e (4.52)-(4.53), com condições iniciais (3.3), (3.5), (4.1) e (4.47) são dadas por

$$\theta_2(t) = \left(\frac{B\omega_2 + C\omega_3}{B + C} \right) t \quad (4.76)$$

$$\theta_3(t) = \left(\frac{B\omega_2 + C\omega_3}{B + C} \right) t - \left(\frac{B\omega_2 + C\omega_3}{B + C} \right) f_2 + F_2. \quad (4.77)$$

e

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \lambda_4 t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1 - k_4}{1 + k_4}} \right) \tan \left((\Omega_4 t + D_4(0))(\pi \sqrt{1 - k_4^2}) \right) \right) \\ &\quad (4.78) \end{aligned}$$

$$\Theta_{23}(t) = \lambda_4 t \quad (4.79)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \omega_2 - \omega_3 \\ \Omega_4 &= \omega_1 - \lambda_4 \\ k_4 &= \frac{D_4}{\Omega_4} = \frac{B + C}{\omega_1 - \lambda_4} \\ D_4(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_4(0)) \right). \end{aligned}$$

Oscilador principal dessincronizado e sistema total sincronizado

A dessincronização no oscilador principal foi analisada na primeira parte da subseção 4.1.2.3. Do mesmo modo, a sincronização no sistema total foi analisada na segunda parte da subseção 4.1.2.2, as principais equações da análise serão apresentadas a seguir.

Utilizando as definições de sincronização e dessincronização apresentadas na seção 1.5, temos que a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_3 < |\Omega_3|$ e a

sincronização no sistema total ocorre quando $D_4 > |\Omega_4|$. Então assumimos que

$$\begin{aligned} k_3 &= \left| \frac{D_3}{\Omega_3} \right| < 1 \\ k_4 &= \left| \frac{D_4}{\Omega_4} \right| > 1. \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que o oscilador principal é dessincronizado e o sistema total é sincronizado, com $B = 0$ e condições iniciais (3.3), (3.5), (4.1) e (4.47), as soluções dos sistemas (4.48)-(4.49) e (4.52)-(4.53), são dadas por

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \lambda_3 t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_3}{1+k_3}} \right) \tan \left((\Omega_3 t + D_3(0))(\pi \sqrt{1-k_3^2}) \right) \right) \quad (4.80) \\ \theta_3(t) &= \lambda_3 t. \end{aligned}$$

e

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + (B+C)(\omega_2 - \omega_3)}{A+B+C} \right) t \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{23}(t) &= \left(\frac{A\omega_1 + (B+C)(\omega_2 - \omega_3)}{A+B+C} \right) t \\ &\quad - \left(\frac{A\omega_1 + (B+C)(\omega_2 - \omega_3)}{A+B+C} \right) f_1 + F_1. \end{aligned} \quad (4.83)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \omega_2 - \lambda_3 \\ k_3 &= \frac{D_3}{\Omega_3} = \frac{C}{\omega_2 - \lambda_3} \\ D_3(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi\psi_3(0)) \right). \end{aligned}$$

4.2 Caso 2

Neste caso consideramos que a dor não influencia diretamente na atividade-reposo, e da mesma forma a atividade-reposo não influencia diretamente na dor. Porém, como nosso sistema não é linear a dor influencia de forma indireta na atividade-reposo e é influenciada de forma indireta por ela. Desta forma, acoplamos o oscilador que conduz o ciclo da dor apenas ao oscilador que conduz o ciclo da temperatura, representado pela Figura 3.

Para analisarmos tal sistema vamos considerar dois osciladores como sendo um oscilador principal. Temos duas formas de fazermos isso, tais serão apresentadas a seguir.

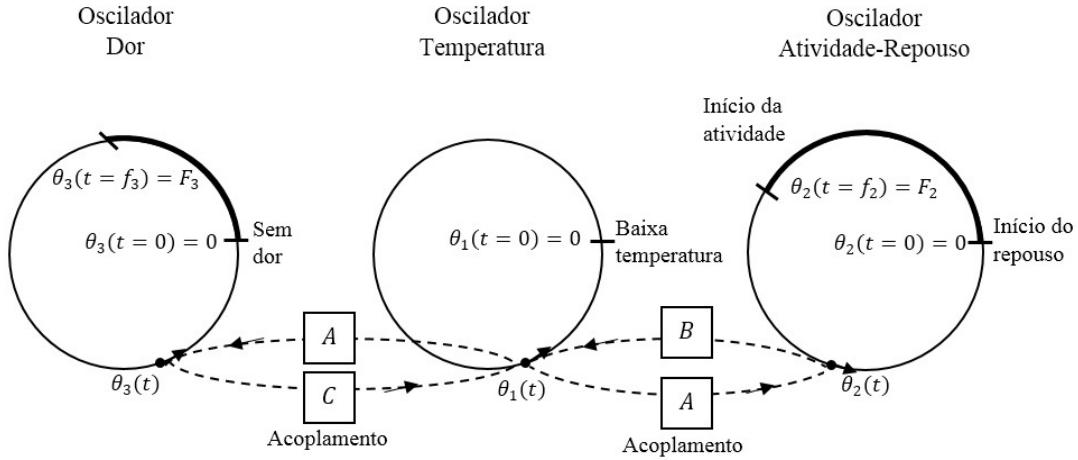


Figura 3: Caso 2 de acoplamento

4.2.1 Situação 3

4.2.1.1 Estrutura

Oscilador principal

Seja $(\Theta_{31}(t))$ o oscilador principal, formado pelos osciladores $\theta_3(t)$ e $\theta_1(t)$, de modo que um influencia no outro diretamente, ou seja, a dor influencia e é influenciada diretamente pela temperatura. Consideraremos que no início do ciclo da dor e no início do ciclo da temperatura, a dor é nula e a temperatura é baixa, assim, a menos de uma mudança de escala, podemos considerar que

$$\Theta_{31}(t_0 = 0) = 0. \quad (4.84)$$

As equações dinâmicas deste oscilador principal são

$$\dot{\theta}_3(t) = \omega_3 - A \cos(2\pi(\theta_1(t) - \theta_3(t))) \quad (4.85)$$

$$\dot{\theta}_1(t) = \omega_1 + C \cos(2\pi(\theta_3(t) - \theta_1(t))). \quad (4.86)$$

A diferença de fase no oscilador principal é

$$\psi_5(t) = \theta_3(t) - \theta_1(t), \quad (4.87)$$

onde

$$\dot{\psi}_5(t) = \Omega_5 - D_5 \cos(2\pi\psi_5(t)) \quad (4.88)$$

e

$$\begin{cases} \Omega_5 = \omega_3 - \omega_1 \\ D_5 = A + C. \end{cases}$$

Ω_5 é a diferença das frequências intrínsecas no oscilador principal e D_5 é o acoplamento total neste oscilador.

Sistema total

Analizando agora a relação entre o oscilador principal ($\Theta_{31}(t)$) com o oscilador que conduz o ciclo atividade-reposo ($\theta_2(t)$), as equações dinâmicas do modelo são

$$\dot{\Theta}_{31}(t) = \Omega_5 - B \cos(2\pi(\theta_2(t) - \Theta_{31}(t))) \quad (4.89)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2 + D_5 \cos(2\pi(\Theta_{31}(t) - \theta_2(t))). \quad (4.90)$$

A diferença de fase considerada aqui é

$$\psi_6(t) = \Theta_{31}(t) - \theta_2(t). \quad (4.91)$$

com

$$\dot{\psi}_6(t) = \Omega_6 - D_6 \cos(2\pi\psi_6(t)) \quad (4.92)$$

e

$$\begin{cases} \Omega_6 = \Omega_5 - \omega_2 = \omega_3 - \omega_1 - \omega_2 \\ D_6 = D_5 + B = A + B + C. \end{cases}$$

Ω_6 é a diferença das frequências intrínsecas entre o oscilador principal e o oscilador $\theta_2(t)$, e D_6 é o acoplamento total deste sistema.

4.2.1.2 Sincronização Geral

Oscilador Principal

Pela definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização no oscilador principal ocorre quando $D_5 > |\Omega_5|$. Então assumimos que

$$k_5 = \left| \frac{D_5}{\Omega_5} \right| > 1.$$

E assim

$$\psi_5(t) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_5}{D_5} \right) \quad (4.93)$$

é a solução estável.

Substituindo (4.93) no sistema (4.85)-(4.86) e sendo $\dot{\theta}_3(t) = \dot{\theta}_1(t) = \omega_{\alpha_5}^*$, obtemos que

$$\omega_{\alpha_5}^* = \frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A + C}. \quad (4.94)$$

Notemos que $\theta_3(t)$ e $\theta_1(t)$ são encontrados pela integração da equação (4.94) em relação a t , assim

$$\int_0^{f_3} \dot{\theta}_3(t) dt = \int_0^{f_3} \dot{\theta}_1(t) dt. \quad (4.95)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a (4.95), temos que

$$\theta_3(f_3) - \theta_3(0) = \theta_1(f_3) - \theta_1(0) + \text{const.}$$

Das condições iniciais (4.1) e (3.5), e ainda por (4.2), obtemos que

$$\text{const} = -\theta_1(f_3) + F_3.$$

Logo no caso sincronizado a solução do sistema (4.85)-(4.86), com condições iniciais (3.5) e (4.1), é dado por

$$\theta_3(t) = \left(\frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A + C} \right) t \quad (4.96)$$

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A + C} \right) t - \left(\frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A + C} \right) f_3 + F_3. \quad (4.97)$$

Sistema Total

Também pela definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização entre o oscilador principal e o oscilador condutor do ciclo atividade-reposo ocorre quando $D_6 > |\Omega_6|$. Então assumimos que

$$k_6 = \left| \frac{D_6}{\Omega_6} \right| > 1.$$

E assim

$$\psi_6(t) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_6}{D_6} \right) \quad (4.98)$$

é a solução estável.

Substituindo (4.98) no sistema(4.89)-(4.90) e tendo $\dot{\Theta}_{31} = \dot{\theta}_2 = \omega_{\alpha_6}^*$, obtemos que

$$\omega_{\alpha_6}^* = \frac{(A + C)(\omega_3 - \omega_1) + B\omega_2}{A + B + C}. \quad (4.99)$$

Observemos que $\Theta_{31}(t)$ e $\theta_2(t)$ são encontrados pela integração da equação (4.99) em relação a t , assim

$$\int_0^{f_2} \dot{\Theta}_{31}(t) dt = \int_0^{f_2} \dot{\theta}_2(t) dt. \quad (4.100)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a (4.100), temos que

$$\Theta_{31}(f_2) - \Theta_{31}(0) = \theta_2(f_2) - \theta_2(0) + \text{const}.$$

Das condições iniciais (3.3) e (4.84), e ainda por (3.4), obtemos que

$$\text{const} = \Theta_{31}(f_2) - F_2.$$

Logo no caso sincronizado a solução do sistema (4.89)-(4.90), com condições iniciais (3.3) e (4.84), é dado por

$$\Theta_{31}(t) = \left(\frac{(A + C)(\omega_3 - \omega_1) + B\omega_2}{A + B + C} \right) t \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \left(\frac{(A + C)(\omega_3 - \omega_1) + B\omega_2}{A + B + C} \right) t \\ &\quad + \left(\frac{(A + C)(\omega_3 - \omega_1) + B\omega_2}{A + B + C} \right) f_2 - F_2. \end{aligned} \quad (4.102)$$

4.2.1.3 Dessincronização Geral

Oscilador principal

Da definição de dessincronização disposta na seção 1.5, temos que a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_5 < |\Omega_5|$. Então assumimos que

$$k_5 = \left| \frac{D_5}{\Omega_5} \right| < 1.$$

O batimento de frequência β_5 satisfaz

$$\beta_5 = (\Omega_5^2 - D_5^2)^{1/2} = \Omega_5 \left(1 - \frac{D_5^2}{\Omega_5^2} \right)^{1/2}.$$

Consideramos

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ \omega_3 &= \lambda_5, \end{aligned}$$

logo

$$\theta_3(t) = \lambda_5 t.$$

Redimensionalisando o tempo de forma que

$$T_5(t) = \Omega_5 t \quad (4.103)$$

e, renomeando as variáveis da equação (3.31) com o índice 5, obtemos que

$$\psi_5(T_5) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_5}{1+k_5}} \right) \tan \left((T_5(t) + \text{const})(\pi \sqrt{1-k_5^2}) \right) \right). \quad (4.104)$$

De (4.103) e (4.104), obtemos que

$$\psi_5(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_5}{1+k_5}} \right) \tan \left((\Omega_5 t + D_5(0))(\pi \sqrt{1-k_5^2}) \right) \right).$$

sendo

$$\begin{aligned} D_5(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_5(0)) \right) \\ k_5 &= \frac{C}{\lambda_5 - \omega_1}. \end{aligned}$$

Assim, pela diferença de fase (4.87), obtemos que

$$\theta_1(t) = \theta_3(t) - \psi_5(t).$$

Portanto, no caso dessincronizado a solução do sistema (4.85)-(4.86), com $A = 0$ e condições iniciais (3.5) e (4.1), é dado por

$$\theta_3(t) = \lambda_5 t \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \lambda_5 t - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_5}{1+k_5}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_5 t + D_5(0))(\pi \sqrt{1-k_5^2}) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.106)$$

Sistema total

Pela definição de dessincronização apresentada na seção 1.5, temos que a dessincronização entre o oscilador principal e o oscilador condutor da dor ocorre quando $D_6 < |\Omega_6|$. Então assumimos que

$$k_6 = \left| \frac{D_6}{\Omega_6} \right| < 1.$$

O batimento de frequência β_6 satisfaz

$$\beta_6 = (\Omega_6^2 - D_6^2)^{1/2} = \Omega_6 \left(1 - \frac{D_6^2}{\Omega_6^2} \right)^{1/2}.$$

Consideramos

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ \Omega_5 &= \lambda_6, \end{aligned}$$

logo

$$\Theta_{31} = \lambda_6 t.$$

Redimensionalisando o tempo de forma que

$$T_6(t) = \Omega_6 t \quad (4.107)$$

e, renomeando as variáveis da equação (3.31) com o índice 6, obtemos que

$$\psi_6(T_6) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_6}{1+k_6}} \right) \tan \left((T_6(t) + \text{const})(\pi \sqrt{1-k_6^2}) \right) \right). \quad (4.108)$$

De (4.107) e (4.108), obtemos que

$$\psi_6(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_6}{1+k_6}} \right) \tan \left((\Omega_6 t + D_6(0))(\pi \sqrt{1-k_6^2}) \right) \right)$$

sendo

$$D_6(0) = \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_6(0)) \right) \quad (4.109)$$

$$k_6 = \frac{C}{\lambda_6 - \omega_3}. \quad (4.110)$$

Pela diferença de fase (4.91), obtemos que

$$\theta_2(t) = \Theta_{31}(t) - \psi_6(t).$$

Portanto, no caso dessincronizado a solução do sistema (4.89)-(4.90), com $A = B = 0$ e condições iniciais (3.3) e (4.84), é dado por

$$\Theta_{31}(t) = \lambda_5 t \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \lambda_5 t - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_6}{1+k_6}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_6 t + D_6(0))(\pi \sqrt{1-k_6^2}) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.112)$$

4.2.1.4 Misto

Oscilador principal sincronizado e sistema total dessincronizado

A sincronização no oscilador principal foi analisada na primeira parte da subseção 4.2.1.2. Da mesma maneira, a dessincronização no sistema total foi analisada na segunda parte da subseção 4.2.1.3, as principais equações da análise serão apresentadas a seguir.

A diferença que encontramos, é que neste caso não precisamos considerar $\omega_3 = \lambda_5$, nem $A = 0$, pois não consideramos o oscilador principal dessincronizado, as demais restrições se igualam.

Pelas definições de sincronização e dessincronização apresentadas na seção 1.5, temos que a sincronização no oscilador principal ocorre quando $D_5 > |\Omega_5|$ e a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_6 < |\Omega_6|$. Então assumimos que

$$\begin{aligned} k_5 &= \left| \frac{D_5}{\Omega_5} \right| > 1 \\ k_6 &= \left| \frac{D_6}{\Omega_6} \right| < 1. \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que o oscilador principal é sincronizado e o sistema total é dessincronizado, com $B = 0$ e condições iniciais (3.3), (3.5), (4.1) e (4.84) as soluções dos sistemas (4.85)-(4.86) e (4.89)-(4.90) são dadas por

$$\theta_3(t) = \left(\frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A+C} \right) t \quad (4.113)$$

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A+C} \right) t - \left(\frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A+C} \right) f_3 + F_3. \quad (4.114)$$

e

$$\Theta_{31}(t) = \lambda_6 t \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \lambda_6 t - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_6}{1+k_6}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_6 t + D_6(0))(\pi \sqrt{1-k_6^2}) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.116)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_5 &= \lambda_6 \\ \Omega_6 &= \lambda_6 - \omega_2 \\ k_6 &= \frac{D_6}{\Omega_6} = \frac{A+C}{\lambda_6 - \omega_2} \\ D_6(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_6(0)) \right). \end{aligned}$$

Oscilador principal dessincronizado e sistema total sincronizado

A dessincronização no oscilador principal foi analisada na primeira parte da subseção 4.2.1.3. Do mesmo modo, a sincronização no sistema total foi analisada na segunda parte da subseção 4.2.1.2, reescreveremos as principais equações da análise.

Utilizando as definições de sincronização e dessincronização apresentadas na seção 1.5, temos que a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_5 < |\Omega_5|$ e a sincronização entre o oscilador principal e o oscilador condutor da dor ocorre quando $D_6 > |\Omega_6|$. Então assumimos que

$$\begin{aligned} k_5 &= \left| \frac{D_5}{\Omega_5} \right| < 1 \\ k_6 &= \left| \frac{D_6}{\Omega_6} \right| > 1. \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que o oscilador principal é dessincronizado e o sistema total é sincronizado, com $A = 0$ e condições iniciais (3.3), (3.5), (4.1) e (4.84) as soluções dos sistemas (4.85)-(4.86) e (4.89)-(4.90), são dadas por

$$\theta_3(t) = \lambda_5 t \quad (4.117)$$

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \lambda_5 t - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_5}{1+k_5}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_5 t + D_5(0))(\pi \sqrt{1-k_5^2}) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.118)$$

e

$$\Theta_{31}(t) = \left(\frac{(A+C)(\omega_3 - \omega_1) + B\omega_2}{A+B+C} \right) t \quad (4.119)$$

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \left(\frac{(A+C)(\omega_3 - \omega_1) + B\omega_2}{A+B+C} \right) t \\ &\quad + \left(\frac{(A+C)(\omega_3 - \omega_1) + B\omega_2}{A+B+C} \right) f_2 - F_2 \end{aligned} \quad (4.120)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_5 &= \lambda_5 - \omega_2 \\ k_5 &= \frac{D_5}{\Omega_5} = \frac{C}{\lambda_5 - \omega_2} \\ D_5(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi\psi_5(0)) \right). \end{aligned}$$

4.2.2 Situação 4

4.2.2.1 Estrutura

Oscilador principal

Seja $(\Theta_{12}(t))$ o oscilador principal, formado pelos osciladores $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$, de modo que um influencia no outro diretamente, ou seja, o ciclo da temperatura influencia e é influenciado diretamente pelo ciclo atividade-reposo.

No caso 1, observe que tal sistema foi analisado, em que também os osciladores $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ formavam o oscilador principal $\Theta_{12}(t)$. Aproveitando as mesmas considerações e análises feitas na seção 4.1.1.1, em que as equações dinâmicas do modelo são

$$\dot{\theta}_1(t) = \omega_1 - B \cos(2\pi(\theta_2(t) - \theta_1(t))) \quad (4.121)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2 + A \cos(2\pi(\theta_1(t) - \theta_2(t))) \quad (4.122)$$

A diferença de fase é

$$\psi_7(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t). \quad (4.123)$$

onde

$$\dot{\psi}_7(t) = \Omega_7 - D_7 \cos(2\pi\psi_7(t)) \quad (4.124)$$

e

$$\begin{cases} \Omega_7 = \omega_1 - \omega_2 \\ D_7 = A + B. \end{cases}$$

Ω_7 é a diferença das frequências intrínsecas no oscilador principal e D_7 é o acoplamento total neste oscilador.

Sistema total

Analizando agora a relação entre o oscilador que conduz o ciclo da dor $\theta_3(t)$ com o oscilador principal $\Theta_{12}(t)$, as equações dinâmicas do modelo são

$$\dot{\theta}_3(t) = \omega_3 - D_7 \cos(2\pi(\Theta_{12}(t) - \theta_3(t))) \quad (4.125)$$

$$\dot{\Theta}_{12}(t) = \Omega_7 + C \cos(2\pi(\theta_3(t) - \Theta_{12}(t))). \quad (4.126)$$

A diferença de fase considerada é

$$\psi_8(t) = \theta_3(t) - \Theta_{12}(t), \quad (4.127)$$

onde

$$\dot{\psi}_8(t) = \Omega_8 - D_8 \cos(2\pi\psi_8(t)) \quad (4.128)$$

e

$$\begin{cases} \Omega_8 = \omega_3 - \Omega_7 = \omega_3 - \omega_1 + \omega_2 \\ D_8 = A + D_7 = A + B + C. \end{cases}$$

Ω_8 é a diferença das frequências intrínsecas entre o oscilador $\theta_3(t)$ e o oscilador principal, e D_8 é o acoplamento total deste sistema.

4.2.2.2 Sincronização Geral

Oscilador Principal

Considerando a definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização no oscilador principal ocorre quando $D_7 > |\Omega_7|$, assim assumimos que

$$k_7 = \left| \frac{D_7}{\Omega_7} \right| > 1.$$

E assim, da subseção 4.1.1.2, reescrevemos a solução do sistema (4.121)-(4.122) que é dado por

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} \right) t \quad (4.129)$$

$$\theta_2(t) = \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} \right) t + \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} \right) f_2 - F_2. \quad (4.130)$$

Sistema Total

Também pela definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização entre o oscilador condutor da dor e o oscilador principal ocorre quando $D_8 > |\Omega_8|$. Então assumimos que

$$k_8 = \left| \frac{D_8}{\Omega_8} \right| > 1.$$

E assim

$$\psi_8(t) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_8}{D_8} \right) \quad (4.131)$$

é a solução estável.

Substituindo (4.131) no sistema (4.125)-(4.126) e sendo $\dot{\theta}_3(t) = \dot{\Theta}_{12}(t) = \omega_{\alpha_8}^*$, obtemos que

$$\omega_{\alpha_8}^* = \frac{(A + B)(\omega_1 - \omega_2) + C\omega_3}{A + B + C}. \quad (4.132)$$

Observemos que $\theta_3(t)$ e $\Theta_{12}(t)$ são encontrados pela integração da equação (4.132) em relação a t , assim

$$\int_0^{f_3} \dot{\theta}_3(t) dt = \int_0^{f_3} \dot{\Theta}_{12}(t) dt. \quad (4.133)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a (4.133), temos que

$$\theta_3(f_3) - \theta_3(0) = \Theta_{12}(f_3) - \Theta_{12}(0) + \text{const}.$$

Das condições iniciais (4.1) e (4.3), e ainda por (4.2), temos

$$\text{const} = -\Theta_{12}(f_3) + F_3.$$

Logo no caso sincronizado a solução do sistema (4.125)-(4.126), com condições iniciais (4.1) e (4.3), é dado por

$$\theta_3(t) = \left(\frac{C\omega_3 + (A + B)(\omega_1 - \omega_2)}{A + B + C} \right) t \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{12}(t) &= \left(\frac{C\omega_3 + (A + B)(\omega_1 - \omega_2)}{A + B + C} \right) t \\ &\quad - \left(\frac{C\omega_3 + (A + B)(\omega_1 - \omega_2)}{A + B + C} \right) f_3 + F_3. \end{aligned} \quad (4.135)$$

4.2.2.3 Dessincronização Geral

Oscilador principal

Da definição de dessincronização disposta na seção 1.5, temos que a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_7 < |\Omega_7|$. Então assumimos que

$$k_7 = \left| \frac{D_7}{\Omega_7} \right| < 1.$$

O batimento de frequência β_7 satisfaz

$$\beta_7 = (\Omega_7^2 - D_7^2)^{1/2} = \Omega_7 \left(1 - \frac{D_7^2}{\Omega_7^2} \right)^{1/2}.$$

Consideramos

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ \omega_1 &= \lambda_7, \end{aligned}$$

logo

$$\theta_1(t) = \lambda_7 t. \quad (4.136)$$

Redimensionalisando o tempo de forma que

$$T_7(t) = \Omega_7 t$$

e, renomeando as variáveis da equação (3.31) com o índice 7, obtemos que

$$\psi_7(T_7) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_7}{1+k_7}} \right) \tan \left((\Omega_7 t + \text{const})(\pi \sqrt{1-k_7^2}) \right) \right). \quad (4.137)$$

De (4.136) e (4.138), obtemos que

$$\psi_7(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_7}{1+k_7}} \right) \tan \left((\Omega_7 t + D_7(0))(\pi \sqrt{1-k_7^2}) \right) \right)$$

sendo

$$\begin{aligned} D_7(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_7(0)) \right) \\ k_7 &= \frac{A}{\lambda_7 - \omega_2}. \end{aligned}$$

Assim, pela diferença de fase (4.123), temos que

$$\theta_2(t) = \theta_1(t) - \psi_7(t). \quad (4.138)$$

Portanto, no caso dessincronizado a solução do sistema (4.121)-(4.122), com $B = 0$ e condições iniciais (3.3) e (3.5), é dado por

$$\theta_1(t) = \lambda_7 t \quad (4.139)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \lambda_7 t - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_7}{1+k_7}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_7 t + D_7(0))(\pi \sqrt{1-k_7^2}) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.140)$$

Sistema total

Pela definição de dessincronização apresentada na seção 1.5, temos que a dessincronização entre o oscilador condutor da temperatura e o oscilador principal ocorre quando $D_8 < |\Omega_8|$. Então assumimos que

$$k_8 = \left| \frac{D_8}{\Omega_8} \right| < 1.$$

O batimento de frequência β_8 satisfaz

$$\beta_8 = (\Omega_8^2 - D_8^2)^{1/2} = \Omega_8 \left(1 - \frac{D_8^2}{\Omega_8^2} \right)^{1/2}.$$

Consideramos

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ \Omega_7 &= \lambda_8, \end{aligned}$$

logo

$$\Theta_{12}(t) = \lambda_8 t.$$

Redimensionalisando o tempo de forma que

$$T_8(t) = \Omega_8 t \quad (4.141)$$

e renomeando as variáveis da equação (3.31) com o índice 8, obtemos que

$$\psi_8(T_8) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_8}{1+k_8}} \right) \tan \left((T_8(t) + \text{const})(\pi \sqrt{1-k_8^2}) \right) \right). \quad (4.142)$$

De (4.141) e (4.143), obtemos que

$$\psi_8(T_8) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_8}{1+k_8}} \right) \tan \left((\Omega_8 t + D_8(0))(\pi \sqrt{1-k_8^2}) \right) \right),$$

sendo

$$\begin{aligned} D_8(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_8(0)) \right) \\ k_8 &= \frac{A}{\omega_3 - \lambda_8}. \end{aligned}$$

Assim, pela diferença de fase (4.127) obtemos

$$\theta_3(t) = \Theta_{12}(t) + \psi_8(t). \quad (4.143)$$

Portanto, no caso dessincronizado, com $B = C = 0$ e condições iniciais (4.1) e (4.3), a solução do sistema (4.125)-(4.126) é dado por

$$\begin{aligned} \theta_3(t) &= \lambda_8 t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_8}{1+k_8}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_8 t + D_8(0))(\pi \sqrt{1-k_8^2}) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.144)$$

$$\Theta_{12}(t) = \lambda_8 t. \quad (4.145)$$

4.2.2.4 Misto

Oscilador principal sincronizado e sistema total dessincronizado

A sincronização no oscilador principal foi analisada na primeira parte da subseção 4.2.2.2. Da mesma maneira, a dessincronização no sistema total foi analisada na segunda parte da subseção 4.2.2.3, apresentaremos as principais equações da análise.

A diferença que encontramos, é que neste caso não precisamos considerar $\omega_1 = \lambda_7$, nem $B = 0$, pois não consideramos o oscilador principal dessincronizado, as demais restrições se igualam.

Pelas definições de sincronização e dessincronização apresentadas na seção 1.5, temos que a sincronização no oscilador principal ocorre quando $D_7 > |\Omega_7|$ e a dessincronização

no oscilador principal ocorre quando $D_8 < |\Omega_8|$. Então assumimos que

$$\begin{aligned} k_7 &= \left| \frac{D_7}{\Omega_7} \right| > 1 \\ k_8 &= \left| \frac{D_8}{\Omega_8} \right| < 1. \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que o oscilador principal é sincronizado e o sistema total é dessincronizado, com $A = B = 0$ e condições iniciais (3.3), (3.5), (4.1) e (4.3) as soluções dos sistemas (4.121)-(4.122) e (4.125)-(4.126), são dadas por

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} \right) t \quad (4.146)$$

$$\theta_2(t) = \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} \right) t + \left(\frac{A\omega_1 + B\omega_2}{A + B} \right) f_2 - F_2. \quad (4.147)$$

e

$$\begin{aligned} \theta_3(t) &= \lambda_8 t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1 - k_8}{1 + k_8}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_8 t + D_8(0))(\pi \sqrt{1 - k_8^2}) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.148)$$

$$\Theta_{12}(t) = \lambda_8 t \quad (4.149)$$

$$(4.150)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_7 &= \omega_1 - \omega_2 \\ \Omega_8 &= \omega_3 - \lambda_8 \\ k_8 &= \frac{D_8}{\Omega_8} = \frac{A + B}{\omega_3 - \lambda_8} \\ D_8(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_8(0)) \right). \end{aligned}$$

Oscilador principal dessincronizado e sistema total sincronizado

A dessincronização no oscilador principal foi analisada na primeira parte da subseção 4.2.2.3. Do mesmo modo, a sincronização no sistema total foi analisada na segunda parte da subseção 4.2.2.2, as principais equações da análise serão apresentadas a seguir.

Utilizando as definições de sincronização e dessincronização apresentadas na seção 1.5, temos que a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_7 < |\Omega_7|$ e a

sincronização no sistema total ocorre quando $D_8 > |\Omega_8|$. Então assumimos que

$$\begin{aligned} k_7 &= \left| \frac{D_7}{\Omega_7} \right| < 1 \\ k_8 &= \left| \frac{D_8}{\Omega_8} \right| > 1. \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que o oscilador principal é dessincronizado e o sistema total é sincronizado, com $B = 0$ e condições iniciais (3.3), (3.5), (4.1) e (4.3) as soluções dos sistemas (4.121)-(4.122) e (4.125)-(4.126), são dadas por

$$\theta_1(t) = \lambda_7 t \quad (4.151)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \lambda_7 t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_7}{1+k_7}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \tan \left((\Omega_7 t + D_7(0))(\pi \sqrt{1-k_7^2}) \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.152)$$

e

$$\theta_3(t) = \left(\frac{C\omega_3 + (A+B)(\omega_1 - \omega_2)}{A+B+C} \right) t \quad (4.153)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{12}(t) &= \left(\frac{C\omega_3 + (A+B)(\omega_1 - \omega_2)}{A+B+C} \right) t \\ &\quad - \left(\frac{C\omega_3 + (A+B)(\omega_1 - \omega_2)}{A+B+C} \right) f_3 + F_3. \end{aligned} \quad (4.154)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_7 &= \lambda_7 - \omega_2 \\ k_7 &= \frac{D_7}{\Omega_7} = \frac{A}{\lambda_7 - \omega_2} \\ D_7(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi\psi_7(0)) \right). \end{aligned}$$

4.3 Caso 3

Neste caso, consideramos que a temperatura não influencia diretamente na atividade-reposo, e da mesma forma a atividade-reposo não influencia diretamente na temperatura. Porém, como nosso sistema não é linear a temperatura influencia de forma indireta na atividade-reposo e é influenciada de forma indireta por ela. Desta forma, acoplamos o oscilador que conduz o ciclo da dor pela esquerda ao oscilador que conduz o ciclo da temperatura e pela direita ao oscilador condutor do ciclo-atividade repouso, representado pela Figura 4.

Para analisarmos tal sistema vamos considerar dois osciladores como sendo um os-

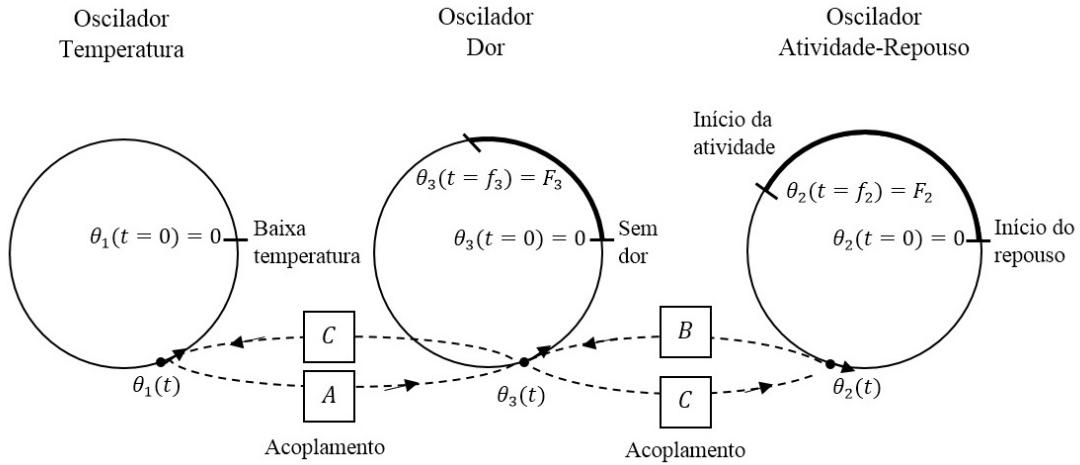


Figura 4: Caso 3 de acoplamento

cilador principal. Temos duas formas de fazermos isso, tais serão apresentadas a seguir.

4.3.1 Situação 5

4.3.1.1 Estrutura

Oscilador principal

Seja $\Theta_{13}(t)$ o oscilador principal, formado pelos osciladores $\theta_1(t)$ e $\theta_3(t)$, de modo que um influencia no outro diretamente, ou seja, a temperatura influencia e é influenciada diretamente pela dor. Consideraremos que no início do ciclo da temperatura e no início do ciclo da dor, a temperatura é baixa e a dor é nula, assim, a menos de uma mudança de escala, podemos considerar que

$$\Theta_{13}(t_0 = 0) = 0. \quad (4.155)$$

As equações dinâmicas deste modelo são

$$\dot{\theta}_1(t) = \omega_1 - C \cos(2\pi(\theta_3(t) - \theta_1(t))) \quad (4.156)$$

$$\dot{\theta}_3(t) = \omega_3 + A \cos(2\pi(\theta_1(t) - \theta_3(t))). \quad (4.157)$$

A diferença de fase é

$$\psi_9(t) = \theta_1(t) - \theta_3(t), \quad (4.158)$$

onde

$$\dot{\psi}_9(t) = \Omega_9 - D_9 \cos(2\pi\psi_9(t)) \quad (4.159)$$

e

$$\begin{cases} \Omega_9 &= \omega_1 - \omega_3 \\ D_9 &= A + C. \end{cases}$$

Ω_9 é a diferença das frequências intrínsecas no oscilador principal e D_9 é o acoplamento total neste oscilador.

Sistema total

Analizando agora a relação entre o oscilador principal ($\Theta_{13}(t)$) com o oscilador que conduz o ciclo atividade-reposo ($\theta_2(t)$), as equações dinâmicas do modelo são

$$\dot{\Theta}_{13}(t) = \Omega_9 - B \cos(2\pi(\theta_2(t) - \Theta_{13}(t))) \quad (4.160)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2 + D_9 \cos(2\pi(\Theta_{13}(t) - \theta_2(t))). \quad (4.161)$$

A diferença de fase é

$$\psi_{10}(t) = \Theta_{13}(t) - \theta_2(t), \quad (4.162)$$

com

$$\dot{\psi}_{10}(t) = \Omega_{10} - D_{10} \cos(2\pi\psi_{10}(t)) \quad (4.163)$$

e

$$\begin{cases} \Omega_{10} &= \Omega_9 - \omega_2 = \omega_1 - \omega_3 - \omega_2 \\ D_{10} &= D_9 + B = A + B + C. \end{cases}$$

Ω_{10} é a diferença das frequências intrínsecas entre o oscilador principal e o oscilador $\theta_2(t)$, e D_{10} é o acoplamento total deste sistema.

4.3.1.2 Sincronização Geral

Oscilador Principal

Pela definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização no oscilador principal ocorre quando $D_9 > |\Omega_9|$. Então assumimos que

$$k_9 = \left| \frac{D_9}{\Omega_9} \right| > 1.$$

E assim

$$\psi_9(t) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_9}{D_9} \right) \quad (4.164)$$

é a solução estável.

Substituindo (4.164) no sistema (4.156)-(4.157) e sendo $\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_3(t) = \omega_{\alpha_9}^*$, obtemos que

$$\omega_{\alpha_9}^* = \frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A + C}. \quad (4.165)$$

Notemos que $\theta_1(t)$ e $\theta_3(t)$ são encontrados pela integração da equação (4.165) em relação a t , assim

$$\int_0^{f_3} \dot{\theta}_1(t) dt = \int_0^{f_3} \dot{\theta}_3(t) dt. \quad (4.166)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a (4.166), temos que

$$\theta_1(f_3) - \theta_1(0) = \theta_3(f_3) - \theta_3(0) + \text{const}.$$

Das condições iniciais (3.5) e (4.1), e ainda por (4.2), obtemos que

$$\text{const} = \theta_1(f_3) - F_3.$$

Logo, no caso sincronizado a solução do sistema (4.156)-(4.157), com condições iniciais (3.5) e (4.1), é dado por

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A + C} \right) t \quad (4.167)$$

$$\theta_3(t) = \left(\frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A + C} \right) t + \left(\frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A + C} \right) f_3 - F_3. \quad (4.168)$$

Sistema Total

Também pela definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização entre o oscilador principal e o oscilador condutor da dor ocorre quando $D_{10} > |\Omega_{10}|$. Então assumimos que

$$k_{10} = \left| \frac{D_{10}}{\Omega_{10}} \right| > 1.$$

E assim

$$\psi_{10}(t) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_{10}}{D_{10}} \right) \quad (4.169)$$

é a solução estável.

Substituindo (4.169) no sistema (4.160)-(4.161), e sendo $\dot{\Theta}_{13} = \dot{\theta}_2 = \omega_{\alpha_{10}}^*$, obtemos

que

$$\omega_{\alpha_{10}}^* = \frac{(A + C)(\omega_1 - \omega_3) + B\omega_2}{A + B + C}. \quad (4.170)$$

Observe que $\Theta_{13}(t)$ e $\theta_2(t)$ são encontrados pela integração da equação (4.170) em relação a t , assim

$$\int_0^{f_2} \dot{\Theta}_{13}(t) dt = \int_0^{f_2} \dot{\theta}_2(t) dt. \quad (4.171)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a (4.171), temos que

$$\Theta_{13}(f_2) - \Theta_{13}(0) = \theta_2(f_2) - \theta_2(0) + \text{const.}$$

Das condições iniciais (3.3) e (4.155), e ainda por (3.4), temos

$$\text{const} = \Theta_{13}(f_2) - F_2.$$

Logo no caso sincronizado a solução do sistema (4.160)-(4.161), com condições iniciais (4.3) e (4.155), é dado por

$$\Theta_{13}(t) = \left(\frac{(A + C)(\omega_1 - \omega_3) + B\omega_2}{A + B + C} \right) t \quad (4.172)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \left(\frac{(A + C)(\omega_1 - \omega_3) + B\omega_2}{A + B + C} \right) t \\ &\quad + \left(\frac{(A + C)(\omega_1 - \omega_3) + B\omega_2}{A + B + C} \right) f_2 - F_2. \end{aligned} \quad (4.173)$$

4.3.1.3 Dessincronização Geral

Oscilador principal

Da definição de dessincronização disposta na seção 1.5, temos que a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_9 < |\Omega_9|$. Então assumimos que

$$k_9 = \left| \frac{D_9}{\Omega_9} \right| < 1.$$

O batimento de frequência β_9 satisfaz

$$\beta_9 = (\Omega_9^2 - D_9^2)^{1/2} = \Omega_9 \left(1 - \frac{D_9^2}{\Omega_9^2} \right)^{1/2}.$$

Consideramos

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ \omega_3 &= \lambda_9 \end{aligned}$$

logo

$$\theta_3(t) = \lambda_9 t.$$

Redimensionanlisando o tempo de forma que

$$T_9(t) = \Omega_9 t \quad (4.174)$$

e, renomeando as variáveis da equação (3.31) com o índice 9, obtemos que

$$\psi_9(T_9) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_9}{1+k_9}} \right) \tan \left((T_9(t) + \text{const})(\pi \sqrt{1-k_9^2}) \right) \right). \quad (4.175)$$

De (4.174) e (4.176), obtemos que

$$\psi_9(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_9}{1+k_9}} \right) \tan \left((\Omega_9 t + D_9(0))(\pi \sqrt{1-k_9^2}) \right) \right).$$

sendo

$$\begin{aligned} D_9(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_9(0)) \right) \\ k_9 &= \frac{C}{\omega_1 - \lambda_9}. \end{aligned}$$

Assim, pela diferença de fase (4.158), obtemos que

$$\theta_1(t) = \theta_3(t) + \psi_9(t). \quad (4.176)$$

Portanto no caso dessincronizado, com $A = 0$ e condições iniciais (3.5) e (4.1), a solução do sistema (4.156)-(4.157) é dado por

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \lambda_9 t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_9}{1+k_9}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_9 t + D_9(0))(\pi \sqrt{1-k_9^2}) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.177)$$

$$\theta_3(t) = \lambda_9 t. \quad (4.178)$$

Sistema total

Pela definição de dessincronização apresentada na seção 1.5, temos que a dessincronização entre o oscilador principal e o oscilador condutor da atividade-reposo ocorre quando $D_{10} < |\Omega_{10}|$. Então assumimos que

$$k_{10} = \left| \frac{D_{10}}{\Omega_{10}} \right| < 1.$$

O batimento de frequência β_{10} satisfaz

$$\beta_{10} = (\Omega_{10}^2 - D_{10}^2)^{1/2} = \Omega_{10} \left(1 - \frac{D_{10}^2}{\Omega_{10}^2} \right)^{1/2}. \quad (4.179)$$

Consideramos

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ \Omega_9 &= \lambda_{10}, \end{aligned}$$

logo

$$\Theta_{13}(t) = \lambda_{10} t.$$

Redimensionalisando o tempo de forma que

$$T_{10}(t) = \Omega_{10} t \quad (4.180)$$

e, renomeando as variáveis da equação (3.31) com o índice 10, obtemos que

$$\psi_{10}(T_{10}) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_{10}}{1+k_{10}}} \right) \tan \left((T_{10} + \text{const})(\pi \sqrt{1-k_{10}^2}) \right) \right). \quad (4.181)$$

De (4.180) e (4.182), obtemos que

$$\psi_{10}(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_{10}}{1+k_{10}}} \right) \tan \left((\Omega_{10} t + D_{10}(0))(\pi \sqrt{1-k_{10}^2}) \right) \right).$$

sendo

$$\begin{aligned} D_{10}(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_{10}(0)) \right) \\ k_{10} &= \frac{C}{\lambda_{10} - \omega_3}. \end{aligned}$$

Assim, pela diferença de fase (4.162), temos que

$$\theta_2(t) = \Theta_{13}(t) + \psi_{10}(t). \quad (4.182)$$

Portanto, no caso dessincronizado, com $A = B = 0$ e condições iniciais (3.3) e (4.84), a solução do sistema (4.160)-(4.161) é dado por

$$\Theta_{13}(t) = \lambda_{10}t \quad (4.183)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \lambda_{10}t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_{10}}{1+k_{10}}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_{10}t + D_{10}(0))(\pi \sqrt{1-k_{10}^2}) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.184)$$

4.3.1.4 Misto

Oscilador principal sincronizado e sistema total dessincronizado

A sincronização no oscilador principal foi analisada na primeira parte da subseção 4.3.1.2. Da mesma maneira, a dessincronização no sistema total foi analisada na segunda parte da subseção 4.3.1.3, as principais equações da análise serão apresentadas a seguir.

A diferença que encontramos, é que neste caso não precisamos considerar $\omega_3 = \lambda_9$, nem $A = 0$, pois não consideramos o oscilador principal dessincronizado, as demais restrições se igualam.

Pelas definições de sincronização e dessincronização apresentadas na seção 1.5, temos que a sincronização no oscilador principal ocorre quando $D_9 > |\Omega_9|$ e a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_{10} < |\Omega_{10}|$. Então assumimos que

$$\begin{aligned} k_9 &= \left| \frac{D_9}{\Omega_9} \right| > 1 \\ k_{10} &= \left| \frac{D_{10}}{\Omega_{10}} \right| < 1. \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que o oscilador principal é sincronizado e o sistema total é dessincronizado, com $B = 0$ e condições iniciais (3.3), (3.5), (4.1) e (4.155), as soluções dos sistemas (4.156)-(4.157) e (4.89)-(4.90), são dadas por

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A+C} \right) t \quad (4.185)$$

$$\theta_3(t) = \left(\frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A+C} \right) t + \left(\frac{A\omega_1 + C\omega_3}{A+C} \right) f_3 - F_3. \quad (4.186)$$

e

$$\Theta_{13}(t) = \lambda_9 t \quad (4.187)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \lambda_9 t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_{10}}{1+k_{10}}} \right) \tan \left((\Omega_{10} t + D_{10}(0))(\pi \sqrt{1-k_{10}^2}) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.188)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_9 &= \lambda_2 \\ \Omega_{10} &= \lambda_2 - \omega_2 \\ k_{10} &= \frac{D_{10}}{\Omega_{10}} = \frac{A+C}{\lambda_2 - \omega_2} \\ D_{10}(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_{10}(0)) \right). \end{aligned}$$

Oscilador principal dessincronizado e sistema total sincronizado

A dessincronização no oscilador principal foi analisada na primeira parte da subseção 4.3.1.3. Do mesmo modo, a sincronização no sistema total foi analisada na segunda parte da subseção 4.3.1.2, reescreveremos as principais equações da análise.

Utilizando a definição de dessincronização apresentada na seção 1.5, temos que a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_9 < |\Omega_9|$ e a sincronização entre o oscilador principal e o oscilador condutor da dor ocorre quando $D_{10} > |\Omega_{10}|$. Então assumimos que

$$\begin{aligned} k_9 &= \left| \frac{D_9}{\Omega_9} \right| < 1 \\ k_{10} &= \left| \frac{D_{10}}{\Omega_{10}} \right| > 1. \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que o oscilador principal é dessincronizado e o sistema total é sincronizado, com $A = 0$ a solução dos sistemas (4.85)-(4.86) e (4.160)-(4.161), com condições iniciais (3.3), (3.5), (3.3) e (4.1) são dadas por

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \lambda_9 t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_9}{1+k_9}} \right) \tan \left((\Omega_9 t + D_9(0))(\pi \sqrt{1-k_9^2}) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.189)$$

$$\theta_3(t) = \lambda_9 t. \quad (4.190)$$

e

$$\Theta_{13}(t) = \left(\frac{(A+C)(\omega_1 - \omega_3) + B\omega_2}{A+B+C} \right) t \quad (4.191)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \left(\frac{(A+C)(\omega_1 - \omega_3) + B\omega_2}{A+B+C} \right) t \\ &\quad + \left(\frac{(A+C)(\omega_1 - \omega_3) + B\omega_2}{A+B+C} \right) f_2 - F_2. \end{aligned} \quad (4.192)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_9 &= \omega_1 - \lambda_9 \\ k_9 &= \frac{D_9}{\Omega_9} = \frac{C}{\omega_1 - \lambda_9} \\ D_9(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi\psi_9(0)) \right). \end{aligned}$$

4.3.2 Situação 6

4.3.2.1 Estrutura

Oscilador principal

Seja $(\Theta_{32}(t))$ o oscilador principal, formado pelos osciladores $\theta_3(t)$ e $\theta_2(t)$, de modo que um influencia no outro diretamente, ou seja, o ciclo da dor influencia e é influenciado diretamente pelo ciclo da atividade-reposo. Consideraremos que no início do ciclo da atividade-reposo e no início do ciclo da dor, não há movimento e a dor é nula. Assim, a menos de uma mudança de escala, podemos considerar que

$$\Theta_{32}(t_0 = 0) = 0. \quad (4.193)$$

As equações dinâmicas deste modelo são

$$\dot{\theta}_3(t) = \omega_2 - B \cos(2\pi(\theta_2(t) - \theta_3(t))) \quad (4.194)$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2 + C \cos(2\pi(\theta_3(t) - \theta_2(t))). \quad (4.195)$$

Considere a diferença de fase

$$\psi_{11}(t) = \theta_3(t) - \theta_2(t), \quad (4.196)$$

onde

$$\dot{\psi}_{11}(t) = \Omega_{11} - D_{11} \cos(2\pi\psi_{11}(t)) \quad (4.197)$$

e

$$\begin{cases} \Omega_{11} = \omega_3 - \omega_2 \\ D_{11} = B + C. \end{cases}$$

Ω_{11} é a diferença das frequências intrínsecas no oscilador principal e D_{11} é o acoplamento total neste oscilador.

Sistema total

Analizando agora a relação entre o oscilador que conduz o ciclo da temperatura ($\theta_1(t)$) com o oscilador principal ($\Theta_{32}(t)$), as equações dinâmicas do modelo são

$$\dot{\theta}_1(t) = \omega_1 - D_{11} \cos(2\pi(\Theta_{32}(t) - \theta_1(t))) \quad (4.198)$$

$$\dot{\Theta}_{32}(t) = \Omega_{11} + A \cos(2\pi(\theta_1(t) - \Theta_{32}(t))). \quad (4.199)$$

A diferença de fase é

$$\psi_{12}(t) = \theta_1(t) - \Theta_{32}(t), \quad (4.200)$$

com

$$\dot{\psi}_{12}(t) = \Omega_{12} - D_{12} \cos(2\pi\psi_{12}(t)) \quad (4.201)$$

e

$$\begin{cases} \Omega_{12} = \omega_1 - \Omega_{11} = \omega_1 - \omega_3 + \omega_2 \\ D_{12} = A + D_{11} = A + B + C. \end{cases} \quad (4.202)$$

Ω_{12} é a diferença das frequências intrínsecas entre o oscilador $\theta_1(t)$ e o oscilador principal, e D_{12} é o acoplamento total deste sistema.

4.3.2.2 Sincronização Geral

Oscilador Principal

Considerando a definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização no oscilador principal ocorre quando $D_{11} > |\Omega_{11}|$. Então assumimos que

$$k_{11} = \left| \frac{D_{11}}{\Omega_{11}} \right| > 1.$$

E assim

$$\psi_{11}(t) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_1}{D_{11}} \right) \quad (4.203)$$

é a solução estável.

Substituindo (4.203) no sistema (4.194)-(4.195) e sendo $\dot{\theta}_3(t) = \dot{\theta}_2(t) = \omega_{\alpha_{11}}^*$, obtemos que

$$\omega_{\alpha_3}^* = \frac{C\omega_3 + B\omega_2}{C + B}. \quad (4.204)$$

Notemos que $\theta_3(t)$ e $\theta_2(t)$ são encontrados pela integração da equação (4.204) em relação a t , assim

$$\int_0^{f_2} \dot{\theta}_3(t) dt = \int_0^{f_2} \dot{\theta}_2(t) dt. \quad (4.205)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a (4.205), temos que

$$\theta_3(f_2) - \theta_3(0) = \theta_2(f_2) - \theta_2(0) + \text{const.}$$

Das condições iniciais (4.1)-(3.3), e ainda por (3.4), temos

$$\text{const} = \theta_3(f_2) - F_2.$$

Logo no caso sincronizado a solução do sistema (4.194)-(4.195), com condições iniciais (3.3) e (4.1), é dado por

$$\theta_3(t) = \left(\frac{C\omega_3 + B\omega_2}{C + B} \right) t \quad (4.206)$$

$$\theta_2(t) = \left(\frac{C\omega_3 + B\omega_2}{C + B} \right) t + \left(\frac{C\omega_3 + B\omega_2}{C + B} \right) f_2 - F_2. \quad (4.207)$$

Sistema Total

Também pela definição de sincronização apresentada na seção 1.5, temos que a sincronização entre o oscilador condutor da dor e o oscilador principal ocorre quando $D_{12} > |\Omega_{12}|$. Então assumimos que

$$k_{12} = \left| \frac{D_{12}}{\Omega_{12}} \right| > 1.$$

E assim

$$\psi_{12}(t) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{\Omega_{12}}{D_{12}} \right) \quad (4.208)$$

é a solução estável.

Substituindo (4.208) no sistema (4.198)-(4.199) e sendo $\dot{\theta}_1(t) = \dot{\Theta}_{23}(t) = \omega_{\alpha_4}^*$, obtemos

mos que

$$\omega_{\alpha_4}^* = \frac{A\omega_1 + (B + C)(\omega_2 - \omega_3)}{A + B + C}. \quad (4.209)$$

Observemos que $\theta_1(t)$ e $\Theta_{32}(t)$ são encontrados pela integração da equação (4.209) em relação a t , assim

$$\int_0^{f_1} \dot{\theta}_1(t) dt = \int_0^{f_1} \dot{\Theta}_{32}(t) dt, \quad (4.210)$$

aqui consideramos um $f_1 = F_1$ qualquer, em nenhum momento definimos que a temperatura permanece nula no intervalo $[0, f_1]$, a única afirmação é que $f_1 > 0$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a (4.3.2.2), temos que

$$\theta_1(f_1) - \theta_1(0) = \Theta_{32}(f_1) - \Theta_{32}(0) + \text{const.}$$

Das condições iniciais (3.5)-(4.193), obtemos que

$$\text{const} = -\Theta_{32}(f_1) + F_1.$$

Logo no caso sincronizado a solução do sistema (4.198)-(4.199), com condições iniciais (3.5) e (4.193), é dado por

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + (B + C)(\omega_3 - \omega_2)}{A + B + C} \right) t \quad (4.211)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{32}(t) &= \left(\frac{A\omega_1 + (B + C)(\omega_3 - \omega_2)}{A + B + C} \right) t \\ &\quad - \left(\frac{A\omega_1 + (B + C)(\omega_3 - \omega_2)}{A + B + C} \right) f_1 + F_1. \end{aligned} \quad (4.212)$$

4.3.2.3 Dessincronização Geral

Oscilador principal

Da definição de dessincronização disposta na seção 1.5, temos que a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_{11} < |\Omega_{11}|$. Então assumimos que

$$k_{11} = \left| \frac{D_{11}}{\Omega_{11}} \right| < 1.$$

O batimento de frequência β_{11} satisfaz

$$\beta_{11} = (\Omega_{11}^2 - D_{11}^2)^{1/2} = \Omega_{11} \left(1 - \frac{D_{11}^2}{\Omega_{11}^2} \right)^{1/2}.$$

Consideramos

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ \omega_3 &= \lambda_{11}, \end{aligned}$$

logo

$$\theta_3(t) = \lambda_{11}t.$$

Redimensionalisando o tempo de forma que

$$T_{11}(t) = \Omega_{11}t \quad (4.213)$$

e, renomeando as variáveis da equação (3.31) com o índice 11, obtemos que

$$\psi_{11}(T_{11}) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_{11}}{1+k_{11}}} \right) \tan \left((T_{11}(t) + \text{const})(\pi \sqrt{1-k_{11}^2}) \right) \right). \quad (4.214)$$

De (4.213) e (4.214), obtemos que

$$\psi_{11}(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_{11}}{1+k_{11}}} \right) \tan \left((\Omega_{11}t + D_{11}(0))(\pi \sqrt{1-k_{11}^2}) \right) \right)$$

sendo

$$\begin{aligned} D_{11}(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_{11}(0)) \right) \\ k_{11} &= \frac{C}{\lambda_{11} - \omega_2}. \end{aligned}$$

Assim, pela diferença de fase (4.197), temos que

$$\theta_2(t) = \theta_3(t) - \psi_{11}(t).$$

Portanto, no caso dessincronizado e com $B = 0$ a solução do sistema (4.194)-(4.195), com condições iniciais (3.3) e (4.1) é dado por

$$\theta_3(t) = \lambda_{11}t \quad (4.215)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \lambda_{11}t - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_{11}}{1+k_{11}}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_{11}t + D_{11}(0))(\pi \sqrt{1-k_{11}^2}) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.216)$$

Sistema total

Pela definição de dessincronização apresentada na seção 1.5, temos que a dessincronização entre o oscilador condutor da temperatura e o oscilador principal ocorre quando $D_{12} < |\Omega_{12}|$. Então assumimos que

$$k_{12} = \left| \frac{D_{12}}{\Omega_{12}} \right| < 1.$$

O batimento de frequência β_{12} satisfaz

$$\beta_{12} = (\Omega_{12}^2 - D_{12}^2)^{1/2} = \Omega_{12} \left(1 - \frac{D_{12}^2}{\Omega_{12}^2} \right)^{1/2}.$$

Consideramos

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ \Omega_{11} &= \lambda_{12}, \end{aligned}$$

logo

$$\Theta_{32}(t) = \lambda_{12} t.$$

Redimensionalisando o tempo de forma que

$$T_{12}(t) = \Omega_{12} t \quad (4.217)$$

e renomeando as variáveis da equação (3.31) com o índice 12, obtemos que

$$\psi_{12}(T_{12}) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_{12}}{1+k_{12}}} \right) \tan \left((T_{12}(t) + \text{const})(\pi \sqrt{1-k_{12}^2}) \right) \right). \quad (4.218)$$

De (4.217) e (4.218), obtemos que

$$\psi_{12}(t) = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_{12}}{1+k_{12}}} \right) \tan \left((\Omega_{12} t + D_{12}(0))(\pi \sqrt{1-k_{12}^2}) \right) \right)$$

sendo

$$\begin{aligned} D_{12}(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi \psi_{12}(0)) \right) \\ k_{12} &= \frac{C}{\omega_1 - \lambda_{12}}. \end{aligned}$$

Assim, pela diferença de fase (4.200), temos que

$$\theta_1(t) = \Theta_{32}(t) + \psi_{12}(t).$$

Portanto no caso dessincronizado, com $A = B = 0$ e condições iniciais (3.5) e (4.193), a solução do sistema (4.198)-(4.199) é dado por

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \lambda_{12}t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_{12}}{1+k_{12}}} \right) \tan \left((\Omega_{12}t + D_{12}(0))(\pi\sqrt{1-k_{12}^2}) \right) \right) \\ &\quad (4.219) \end{aligned}$$

$$\Theta_{32}(t) = \lambda_{12}t. \quad (4.220)$$

4.3.2.4 Misto

Oscilador principal sincronizado e sistema total dessincronizado

A sincronização no oscilador principal foi analisada na primeira parte da subseção 4.3.2.2. Da mesma maneira, a dessincronização no sistema total foi analisada na segunda parte da subseção 4.3.2.3, apresentaremos as principais equações da análise.

A diferença que encontramos, é que neste caso não precisamos considerar $\omega_3 = \lambda_{11}$, nem $B = 0$, pois não consideramos o oscilador principal dessincronizado, as demais restrições se igualam.

Pelas definições de sincronização e dessincronização apresentadas na seção 1.5, temos que a sincronização ocorre no oscilador principal quando $D_{11} > |\Omega_{11}|$ e a dessincronização ocorre no sistema total quando $D_{12} < |\Omega_{12}|$. Então assumimos que

$$\begin{aligned} k_{11} &= \left| \frac{D_{11}}{\Omega_{11}} \right| > 1 \\ k_{12} &= \left| \frac{D_{12}}{\Omega_{12}} \right| < 1. \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que o oscilador principal é sincronizado e o sistema total é dessincronizado, com $A = B = 0$ e condições iniciais (3.3), (3.5), (4.1) e (4.193) as soluções dos sistemas (4.194)-(4.195) e (4.198)-(4.199), são dadas por

$$\theta_3(t) = \left(\frac{C\omega_3 + B\omega_2}{C+B} \right) t + \left(\frac{C\omega_3 + B\omega_2}{C+B} \right) f_2 - F_2 \quad (4.221)$$

$$\theta_2(t) = \left(\frac{C\omega_3 + B\omega_2}{C+B} \right) t \quad (4.222)$$

e

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \lambda_{12}t + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_{12}}{1+k_{12}}} \right) \tan \left((\Omega_{12}t + D_{12}(0))(\pi\sqrt{1-k_{12}^2}) \right) \right) \end{aligned}\quad (4.223)$$

$$\Theta_{32}(t) = \lambda_{12}t \quad (4.224)$$

$$(4.225)$$

com

$$\begin{aligned}\Omega_{11} &= \omega_3 - \omega_2 \\ \Omega_{12} &= \omega_1 + \lambda_{12} \\ k_{12} &= \frac{D_{12}}{\Omega_{12}} = \frac{B+C}{\omega_1 + \lambda_{12}} \\ D_{12}(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi\psi_{12}(0)) \right).\end{aligned}$$

Oscilador principal dessincronizado e sistema total sincronizado

A dessincronização no oscilador principal foi analisada na primeira parte da subseção 4.3.2.3. Do mesmo modo, a sincronização no sistema total foi analisada na segunda parte da subseção 4.1.2.2, as principais equações da análise serão apresentadas a seguir.

Utilizando as definições de sincronização e dessincronização apresentadas na seção 1.5, temos que a dessincronização no oscilador principal ocorre quando $D_{11} < |\Omega_{11}|$ a sincronização entre o oscilador principal e o oscilador condutor da dor ocorre quando $D_4 > |\Omega_4|$. Então assumimos que

$$k_{11} = \left| \frac{D_{11}}{\Omega_{11}} \right| < 1 \quad (4.226)$$

$$k_{12} = \left| \frac{D_{12}}{\Omega_{12}} \right| > 1. \quad (4.227)$$

Portanto no caso dessincronizado, com $B = 0$ e condições iniciais (4.1) e (3.3), a solução do sistema (4.194)-(4.195) é dado por

Portanto, no caso em que o oscilador principal é dessincronizado e o sistema total é sincronizado, com $B = 0$ e condições iniciais (3.3), (3.5), (4.1) e (4.193), as soluções dos

sistemas (4.194)-(4.195) e (4.198)-(4.199) são dadas por

$$\theta_3(t) = \lambda_{11}t \quad (4.228)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \lambda_{11}t - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\left(\sqrt{\frac{1-k_{11}}{1+k_{11}}} \right) \right. \\ &\quad \left. \tan \left((\Omega_{11}t + D_{11}(0))(\pi\sqrt{1-k_{11}^2}) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.229)$$

e

$$\theta_1(t) = \left(\frac{A\omega_1 + (B+C)(\omega_3 - \omega_2)}{A+B+C} \right) t \quad (4.230)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{32}(t) &= \left(\frac{A\omega_1 + (B+C)(\omega_3 - \omega_2)}{A+B+C} \right) t \\ &\quad - \left(\frac{A\omega_1 + (B+C)(\omega_3 - \omega_2)}{A+B+C} \right) f_1 + F_1. \end{aligned} \quad (4.231)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \lambda_{11} - \omega_2 \\ k_{11} &= \frac{D_{11}}{\Omega_{11}} = \frac{C}{\lambda_{11} - \omega_2} \\ D_{11}(0) &= \arctan \left(\frac{1}{\pi} \tan(\pi\psi_{11}(0)) \right). \end{aligned}$$

4.4 Caso 4

Neste caso consideramos que a temperatura influencia diretamente na atividade-reposo e é diretamente influenciada por ela; consideramos que a atividade-reposo influencia diretamente na dor e é influenciada diretamente por ela; consideramos que a dor influencia diretamente na temperatura e é influenciada diretamente por ela. Desta forma, acoplamos o oscilador que conduz o ciclo da dor ao oscilados que ondulam o ciclo da temperatura e também ao oscilador que conduz o ciclo-atividade repouso, representado pela Figura 5.

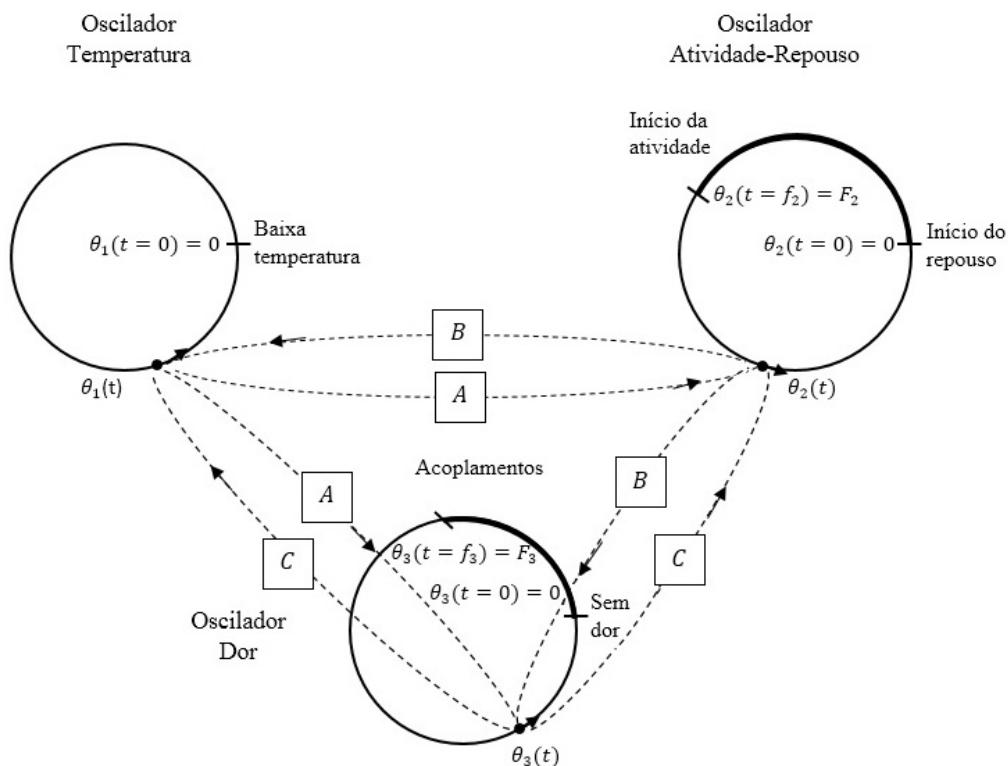


Figura 5: Caso 4 de acoplamento

Observe aqui, que diferente dos casos anteriores, não podemos considerar dois osciladores como sendo um oscilador principal, visto que não existe apenas um oscilador (do meio) que receba duas forças de acoplamento, mas todos os três osciladores recebem.

Pensando nisso, esta forma de acoplamento será um dos trabalhos futuros a serem estudados. O objetivo será encontrar uma outra forma de análise, visando talvez um método distinto do apresentado por Strogatz.

5 ANÁLISES DOS MODELOS

Neste capítulo estabeleceremos alguns valores para os parâmetros dos casos estudados, a fim de analisar o comportamento do ritmo circadiano para um paciente que se encontre na possível situação.

Definimos que o valor dado para cada frequência equivale ao número de vezes que o ciclo sofreu alterações “bruscas” em um dia, ou seja, ω_1 que é a frequência do ciclo da temperatura corporal representa quantas vezes a temperatura sofreu mudança, ω_2 que é a frequência do ciclo da atividade-reposo representa quantas vezes uma pessoa mudou do estado de repouso (dormindo) para o estado de movimento (não dormindo). Por fim, ω_3 que é a frequência do ciclo da dor, representa quantas vezes houve evidências de dor.

Definimos também, que os parâmetros f_2 equivale a fração do dia que a pessoa permaneceu em repouso, e f_3 equivale a fração do dia em que não houve evidências de dor. Relacionamos tais parâmetros as frequências ω_2 e ω_3 , respectivamente. Os parâmetros F_2 e F_3 , sendo $0 \leq F_2 \leq 1$ e $0 \leq F_3 \leq 1$, foram fixados tais que $F_2 = 0.1$, considerando que quando ocorre a mudança do estado de repouso para o estado de movimento não há uma grande movimentação, e $F_3 = 0.3$, considerando que a “proporção” inicial da dor é de 30%.

Em cada situação estabelecemos um valor que se encaixe nas estimativas e que não fuja da realidade, notemos que existem um vasta quantia de possibilidades, mas que apenas algumas foram consideradas.

A ferramenta utilizada para gerar os gráficos é o scilab [1] que é uma ferramenta de distribuição gratuita e de código livre, disponível em várias plataformas.

Para entendermos como funciona o ritmo circadiano, é preciso deixar claro que os gráficos geram uma característica do ritmo circadiano e não o ritmo circadiano em si, onde tal característica ainda precisa ser estudada. Notemos também, que cada dia está definido pelo intervalo $i < t < i + 1$ com $i \in \mathbb{Z}$.

5.1 Modelo de Strogatz

Para uma pessoa em condições “normais”, como já citamos na seção 1.2, a temperatura corporal é menor pela manhã, aumenta ao longo do dia e é máxima pelo início da noite, portanto sofre três importantes alterações ao longo do dia, logo consideramos $\omega_1 = 3$.

Normalmente uma pessoa dorme uma terça parte das 24 horas continuamente, ou seja, sofre duas importantes alterações e, assim, definimos $\omega_2 = 2$ e $f_2 = 1/3$.

Strogatz afirma em seu trabalho que quanto maior a frequência, menor é a força de acoplamento. A fim de tentar imitar a realidade, seguir as ideias de Strogatz e satisfazer a definição de sincronização definimos por fim que $A = 3$ e $B = 4$. Logo, utilizando as equações (3.12) e (3.13), que são as soluções para o caso sincronizado, obtemos o gráfico representado pela figura 6.

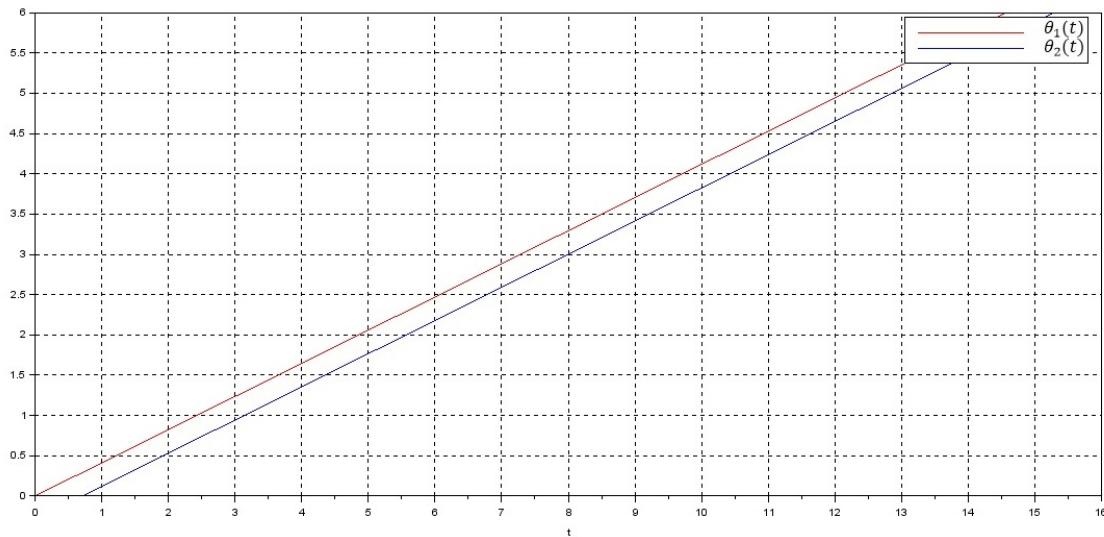


Figura 6: Caso Strogatz Sincronizado

Observamos pelo gráfico, dado pela figura 6, que no período diário, ou seja, quando termina um dia e começa outro, o sistema permanece com as mesmas características, isto é, observamos sempre duas retas paralelas, logo tal característica sugere um ritmo circadiano sincronizado.

No caso dessincronizado, definimos que $A = 0.75$, visto que $B = 0$ e precisamos satisfazer a definição de dessincronização. Definimos também que $\lambda = 3$, pois $\lambda = \omega_1$. Portanto, com as equações (3.32) e (3.33) obtemos o gráfico representado pela figura 7.

Nesta situação, observamos pelo gráfico, dado pela figura 7, que no período diário a equação $\theta_1(t)$ que descreve o ciclo da temperatura corporal segue sem alterações, sendo apenas influenciada pela frequência da temperatura, pois consideramos a força de acoplamento que sai do oscilador $\theta_2(t)$ como nula. Já a equação $\theta_2(t)$ que descreve o ciclo da atividade-reposo, observada em cada intervalo diário, não apresenta as mesmas carac-

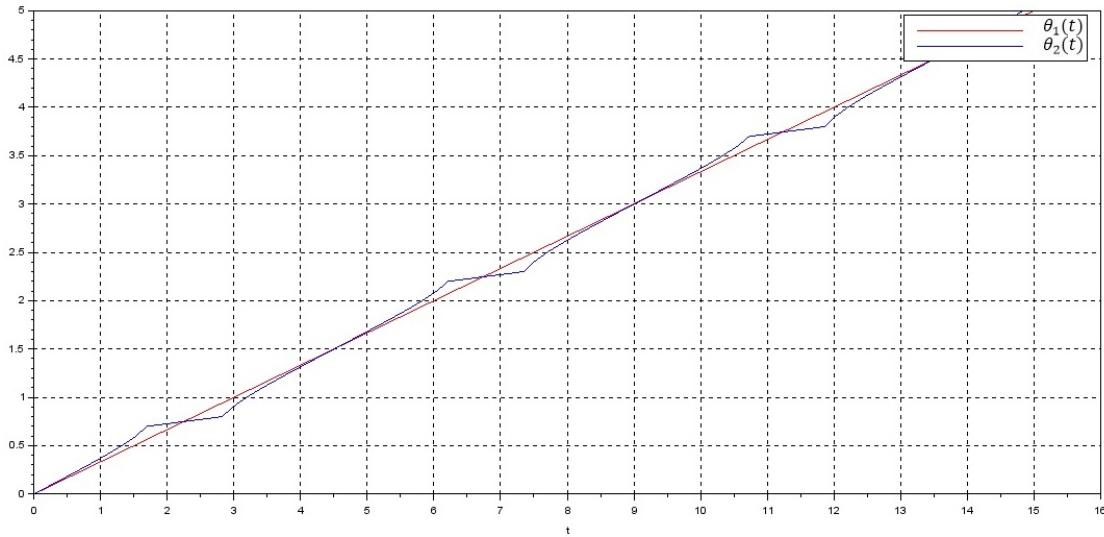


Figura 7: Caso Strogatz Dessincronizado

terísticas, o que assim nos sugere um ritmo circadiano dessincronizado.

5.2 Modelo influenciado pela dor

Definimos algumas relações entre as frequências intrínsecas representadas pela tabela 2. Temos que, quando há influência da dor há uma grande possibilidade da frequência da temperatura corporal e da frequência da atividade-reposo não apresentarem os valores normais, como na seção 5.1, assim surgiu a necessidade de definir algumas relações entre as frequências.

Tabela 2: Relações entre as frequências

Relação 1	$\omega_3 > \omega_1 > \omega_2$
Relação 2	$\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$
Relação 3	$\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$
Relação 4	$\omega_1 > \omega_3 > \omega_2$
Relação 5	$\omega_2 > \omega_1 > \omega_3$
Relação 6	$\omega_2 > \omega_3 > \omega_1$

Notemos que as relações que envolvem igualdade entre as frequências não foram consideradas porque obteríamos uma grande quantidade de possibilidades, optamos então por restrigir este número, mas é possível considerar estas relações.

5.2.1 Caso 1

5.2.1.1 Situação 1

Relação 1

Neste primeiro caso e primeira situação, sem perda de generalidade, definimos as frequências tais que $\omega_1 = 6$, $\omega_2 = 4$, e $\omega_3 = 8$.

Para satisfazer as condições do caso sincronizado, os parâmetros foram considerados tais que $f_2 = \frac{1}{4}$, $f_3 = \frac{1}{8}$, $A = 12$, $B = 16$ e $C = 8$. Logo, com as equações (4.15), (4.16), (4.20) e (4.21), obtemos o gráfico representado pela figura 8.

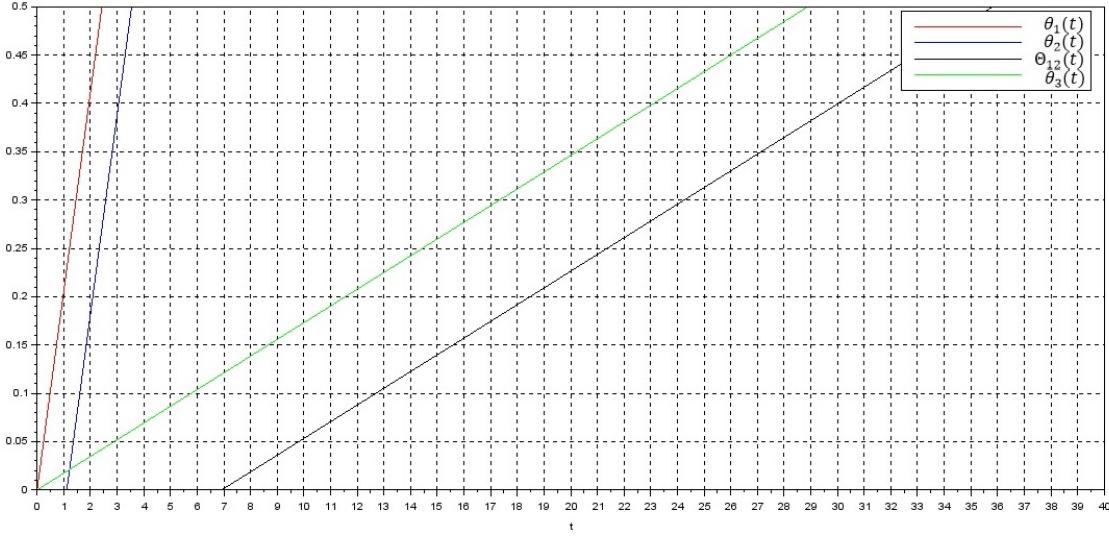


Figura 8: Situação 1 Sincronizado

Observamos pelo gráfico, dado pela figura 8 que, como no caso de Strogatz no período diário, o sistema permanece com as mesmas características, ou seja, tal característica sugere um ritmo circadiano sincronizado.

A partir daqui, consideramos $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 2$.

Para o caso dessincronizado, com $B = C = 0$, consideramos que $A = 1.5$ e, com as equações (4.27), (4.28), (4.37) e (4.38), obtemos o gráfico representado pela figura 9.

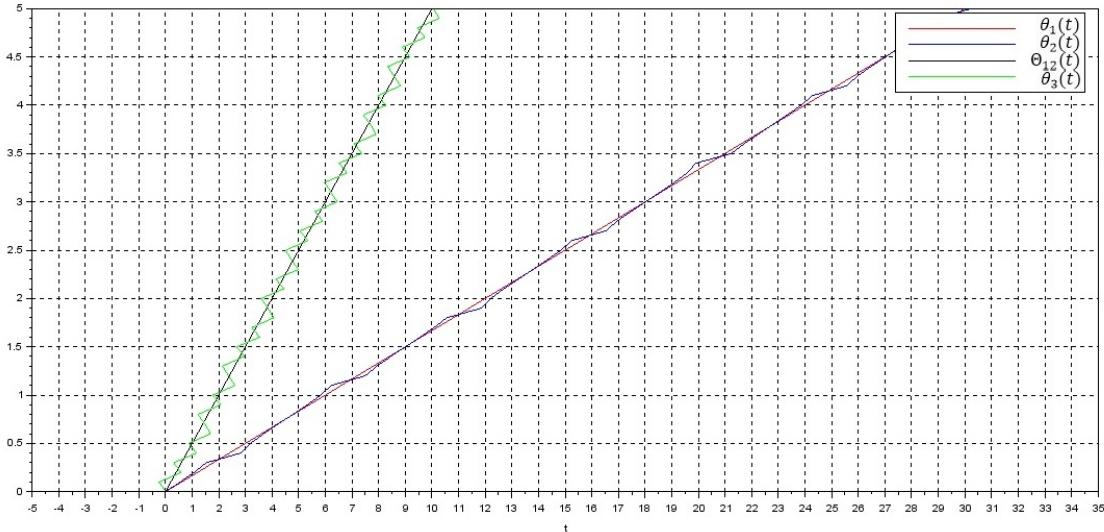


Figura 9: Situação 1 Dessincronizado

Nesta situação, observamos pelo gráfico, dado pela figura 9, que as equações $\theta_1(t)$ e $\Theta_{12}(t)$ que descrevem os ciclos da temperatura corporal e do oscilador principal seguem sem alterações, sendo apenas influenciadas pelas frequências da temperatura e do oscilador principal, pois consideramos as forças de acoplamento que saem dos osciladores $\theta_2(t)$ e $\theta_3(t)$ como nulas. Já as equações $\theta_2(t)$ e $\theta_3(t)$ que descrevem os ciclos da atividade-reposo e da dor, observadas em cada intervalo diário, não apresentam como característica uma repetição neste período, mas em um período maior, logo tal característica nos sugere um ritmo circadiano dessincronizado.

Agora, os parâmetros considerados para o caso em que o oscilador principal é sincronizado e o sistema total é dessincronizado e com $C = 0$, são tais que $A = 1$ e $B = 2$ e, considerando as equações (4.39), (4.40), (4.41) e (4.42), obtemos o gráfico representado pela figura 10.

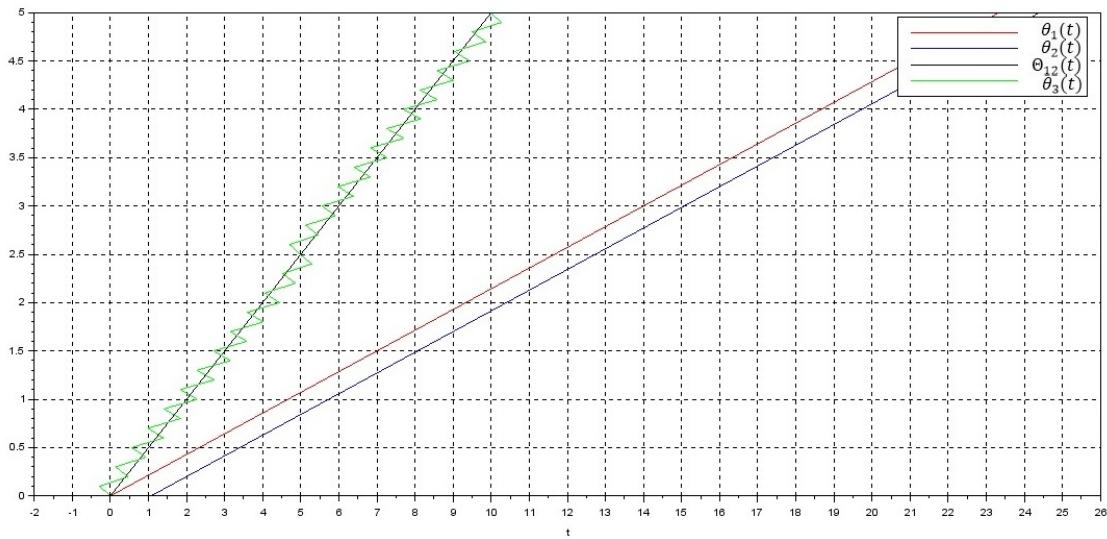


Figura 10: Situação 1 Misto 1

No caso misto 1, observamos pelo gráfico, dado pela figura 10, que as equações $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ tem as mesmas características, se observarmos dia-dia, isto é, são sempre retas paralelas, o que nos sugere um ritmo circadiano sincronizado. A equação $\Theta_{12}(t)$ que descreve o ciclo do oscilador principal segue sem alterações, sendo apenas influenciada pela sua frequência, visto que a força de acoplamento que sai do oscilador $\theta_3(t)$ é nula, mas a equação $\theta_3(t)$ que descreve o ciclo da dor, observada em cada intervalo diário, não apresenta repetição neste período, mas em um período maior. Então, de um modo geral, podemos dizer que o ritmo circadiano obtido através destas características será dessincronizado.

Por fim, os parâmetros considerados para o caso em que o oscilador principal é dessincronizado e o sistema total é sincronizado e com $B = 0$, são tais que $A = 1$ e $C = 6$ logo, com as equações (4.43), (4.44), (4.45) e (4.46), obtemos o gráfico representado pela figura 11.

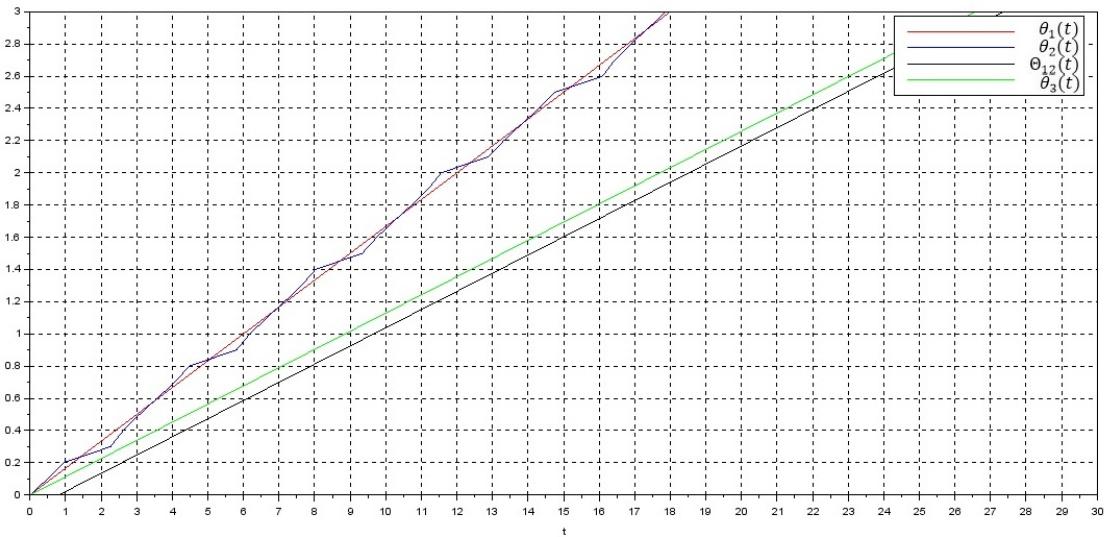


Figura 11: Situação 1 Misto 2

Similar ao sistema misto 1, se observarmos o gráfico em que o sistema é misto 2, dado pela figura 11, vimos que temos duas equações que apresentam características de um ritmo circadiano sincronizado, sendo elas $\Theta_{12}(t)$ e $\theta_3(t)$, mas a equação que descreve o ciclo atividade-reposo, $\theta_2(t)$ tem um período maior que o diário, mesmo que a equação $\theta_1(t)$ esteja sendo apenas influencia pela sua frequência intrínseca, logo, de um modo geral, o ritmo circadiano obtido com tais características será dessincronizado.

As equações utilizadas e análises apresentadas em cada gráfico das próximas relações são as mesmas utilizadas e apresentadas nesta relação, o que difere uma relação da outra são os valores estipulados para as frequências e parâmetros definindo assim se o gráfico será crescente ou não e seu coeficiente angular e o período. Assim, a fim de não nos tornarmos repetitivos deixaremos nos anexos a tabela com os valores dados aos parâmetros e os gráficos obtidos nas demais relações da situação 1, portanto, nos demais casos apresentaremos apenas a relação 1 e quais foram os valores dados aos parâmetros e equações utilizadas, em outras palavras, apenas apresentaremos aqui a relação 1 para todas as situações, mas que, em anexo trazemos as demais relações da situação 1

5.2.1.2 Situação 2

Relação 1

Nesta situação, sem perda de generalidade, definimos as frequências tais que $\omega_1 = 6$, $\omega_2 = 4$, e $\omega_3 = 8$.

Para satisfazer as condições do caso sincronizado, os parâmetros foram considerados tais que $f_2 = \frac{1}{4}$, $f_1 = \frac{1}{6}$, $F_1 = 0.2$, onde f_1 e F_1 são pontos escolhidos quaisquer. $A = 12$, $B = 16$ e $C = 8$. Logo, com as equações (4.59), (4.60), (4.64) e (4.65), obtemos o gráfico representado pela figura 12.

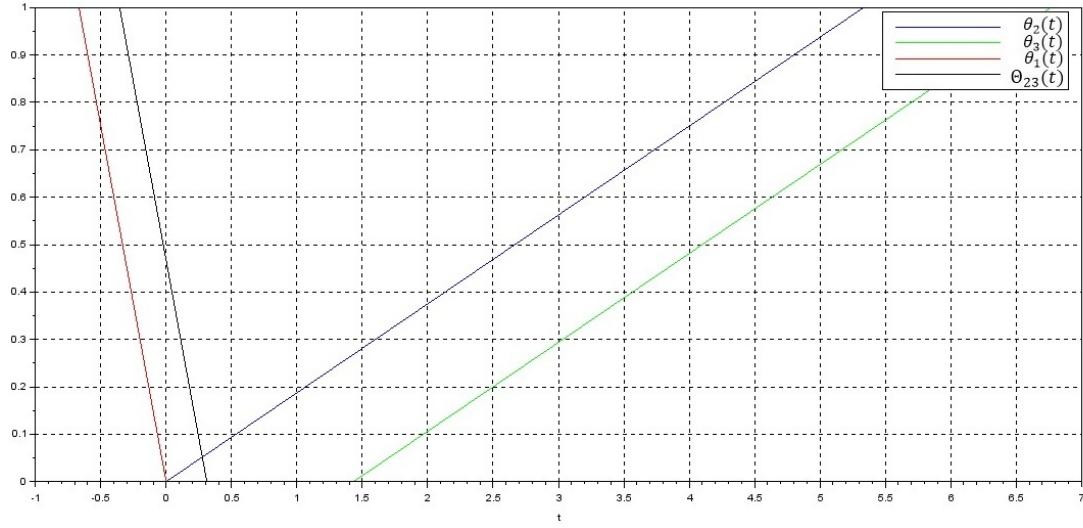


Figura 12: Situação 2 Sincronizado

Consideramos a partir daqui que $\lambda_3 = 8$ e $\lambda_4 = -4$. Para o caso dessincronizado, com $A = B = 0$, consideramos que $C = 1.5$ e, com as equações (4.68), (4.69), (4.74) e (4.75), obtemos o gráfico representado pela figura 13.

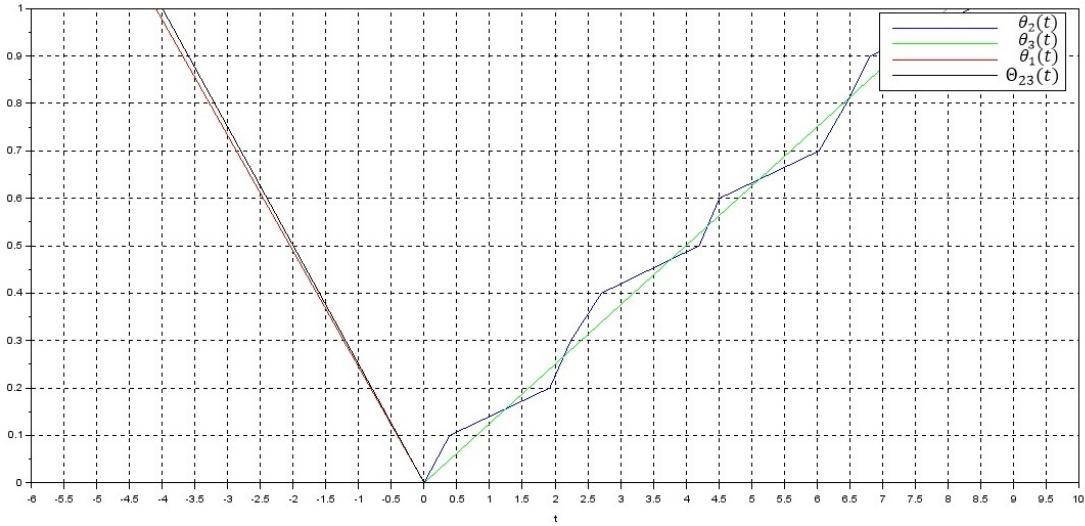


Figura 13: Situação 2 Dessincronizado

Os parâmetros considerados para o caso em que o oscilador principal é sincronizado e o sistema total é dessincronizado e com $A = 0$, são tais que $B = 4$ e $C = 3$ e, considerando as equações (4.76), (4.77), (4.78) e (4.79), obtemos o gráfico representado pela figura 14.

Por fim, os parâmetros considerados para o caso em que o oscilador principal é dessincronizado e o sistema total é sincronizado e com $B = 0$, são tais que $A = 10$ e $C = 1$ logo, com as equações (4.80), (4.81), (4.82) e (4.83), obtemos o gráfico representado pela figura 15.

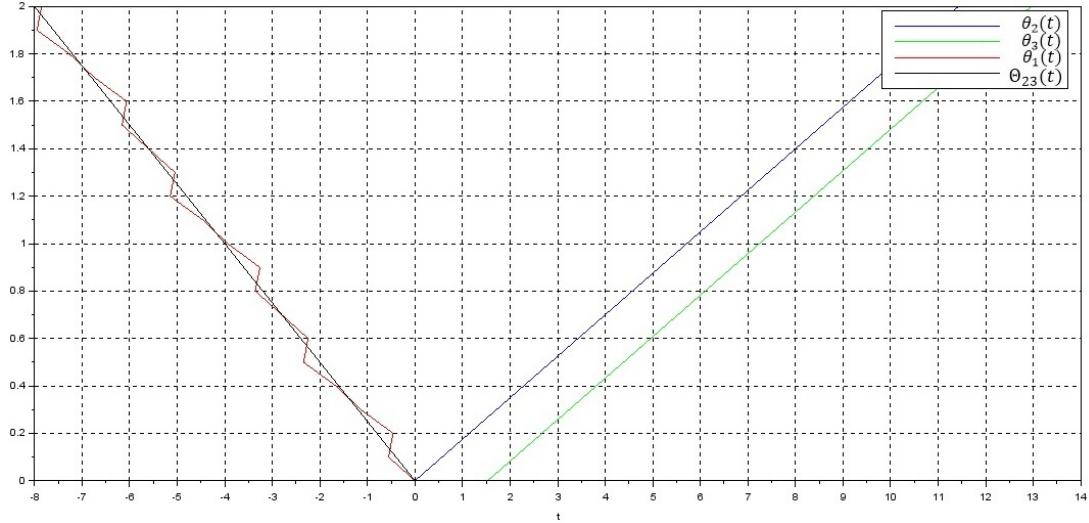


Figura 14: Situação 2 Misto 1

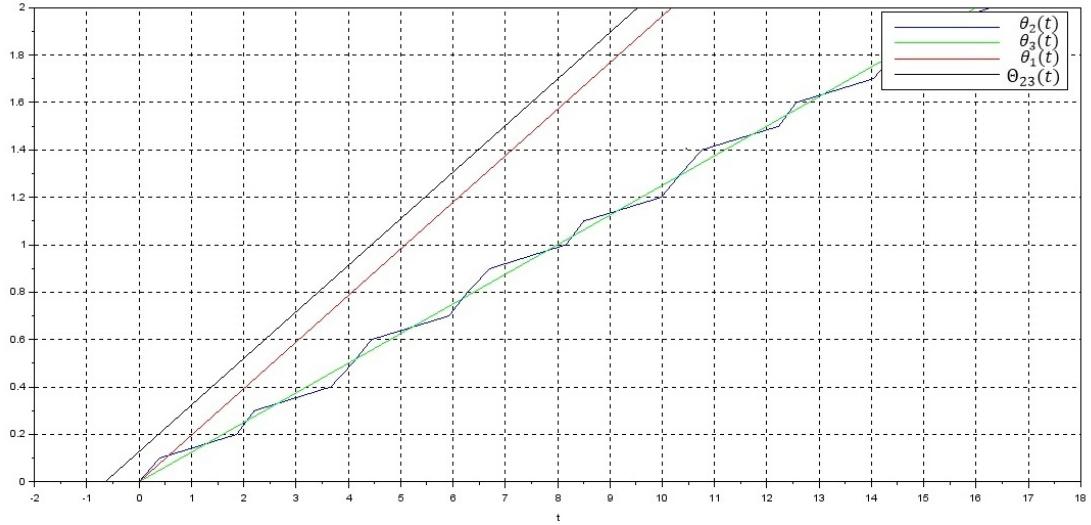


Figura 15: Situação 2 Misto 2

5.2.2 Caso 2

5.2.2.1 Situação 3

Relação 1

Nesta situação, sem perda de generalidade, definimos as frequências tais que $\omega_1 = 7$, $\omega_2 = 4$, e $\omega_3 = 8$.

Para satisfazer as condições do caso sincronizado, os parâmetros foram considerados tais que $f_2 = \frac{1}{4}$, $f_3 = \frac{1}{8}$, $A = 10$, $B = 16$ e $C = 8$. Logo, com as equações (4.96), (4.97), (4.101) e (4.102), obtemos o gráfico representado pela figura 16.

Consideramos a partir daqui que $\lambda_5 = 8$ e $\lambda_6 = 1$. Para o caso dessincronizado, com $A = B = 0$, consideramos que $C = 0.8$ e, com as equações (4.139), (4.106), (4.111) e

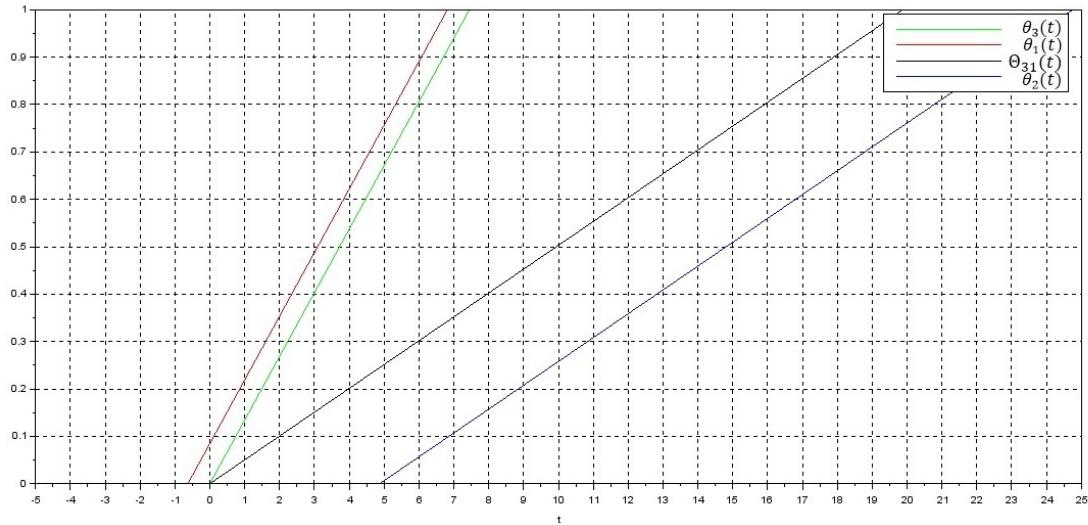


Figura 16: Situação 3 Sincronizado

(4.112), obtemos o gráfico representado pela figura 17.

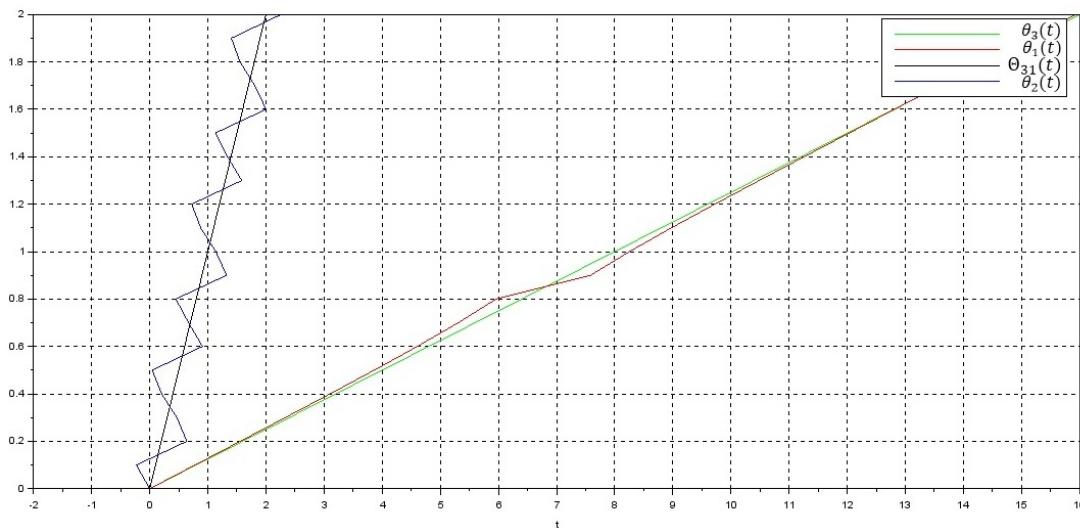


Figura 17: Situação 3 Dessincronizado

Os parâmetros considerados para o caso em que o oscilador principal é sincronizado e o sistema total é dessincronizado e com $B = 0$, são tais que $A = 1$ e $C = 0.8$ e, considerando as equações (4.113), (4.114), (4.115) e (4.116), obtemos o gráfico representado pela figura 18.

Por fim, os parâmetros considerados para o caso em que o oscilador principal é dessincronizado e o sistema total é sincronizado e com $A = 0$, são tais que $B = 3$ e $C = 0.8$ logo, com as equações (4.117), (4.118), (4.119) e (4.120), obtemos o gráfico representado pela figura 19.

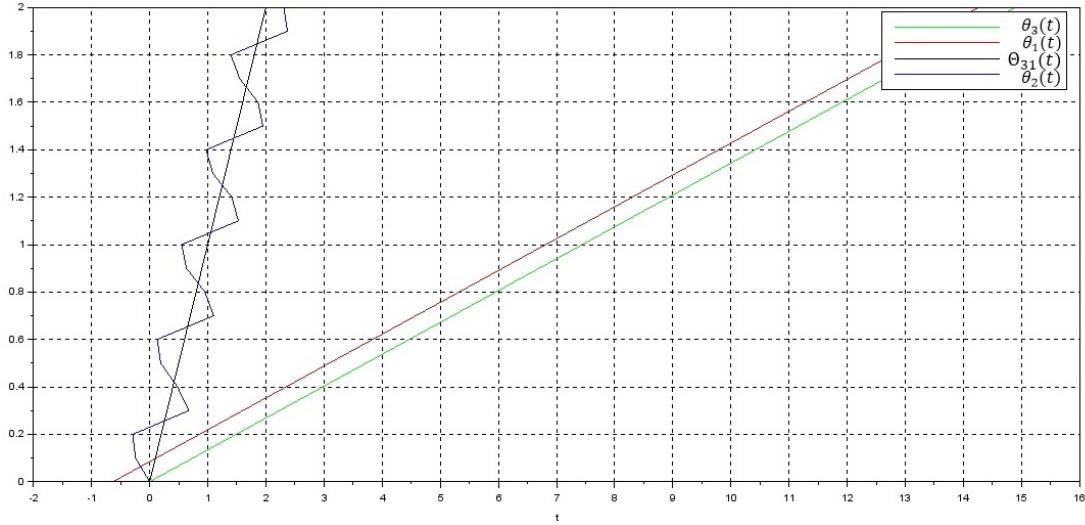


Figura 18: Situação 3 Misto 1

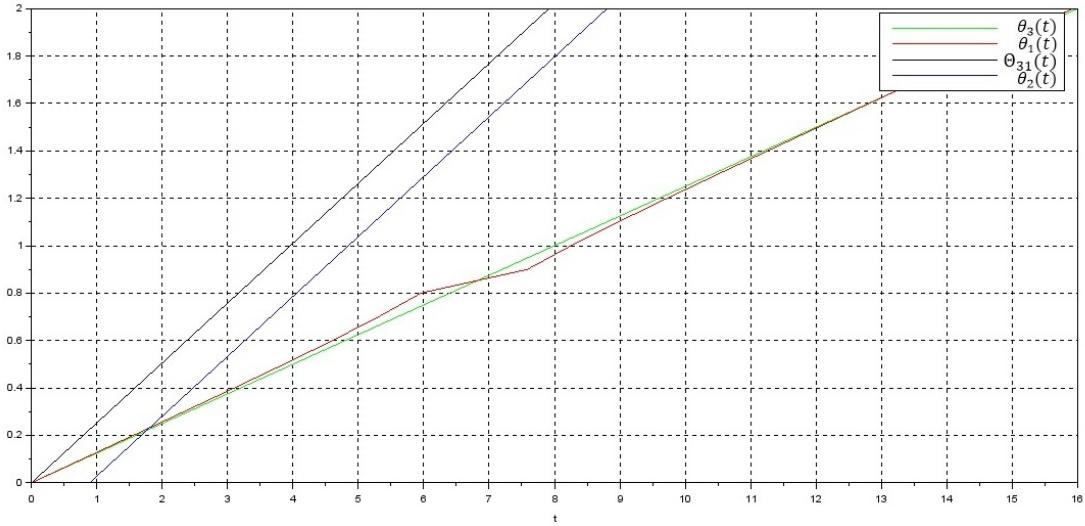


Figura 19: Situação 3 Misto 2

5.2.2.2 Situação 4

Relação 1

Nesta situação, sem perda de generalidade, definimos as frequências tais que $\omega_1 = 6$, $\omega_2 = 4$, e $\omega_3 = 8$.

Para satisfazer as condições do caso sincronizado, os parâmetros foram considerados tais que $f_2 = \frac{1}{4}$, $f_3 = \frac{1}{8}$, $A = 12$, $B = 16$ e $C = 8$. Logo, com as equações (4.129), (4.130), (4.134) e (4.135), obtemos o gráfico representado pela figura 20.

Consideramos a partir daqui que $\lambda_7 = 6$ e $\lambda_8 = 2$. Para o caso dessincronizado, com $B = C = 0$, consideramos que $A = 1.5$ e, com as equações (4.139), (4.178), (4.144) e (4.145), obtemos o gráfico representado pela figura 21.

Os parâmetros considerados para o caso em que o oscilador principal é sincronizado

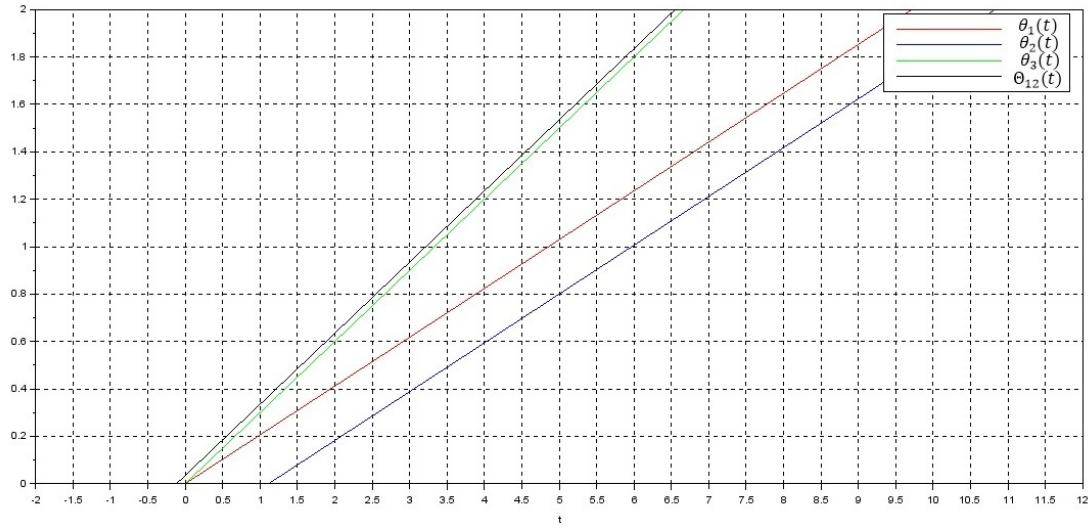


Figura 20: Situação 4 Sincronizado

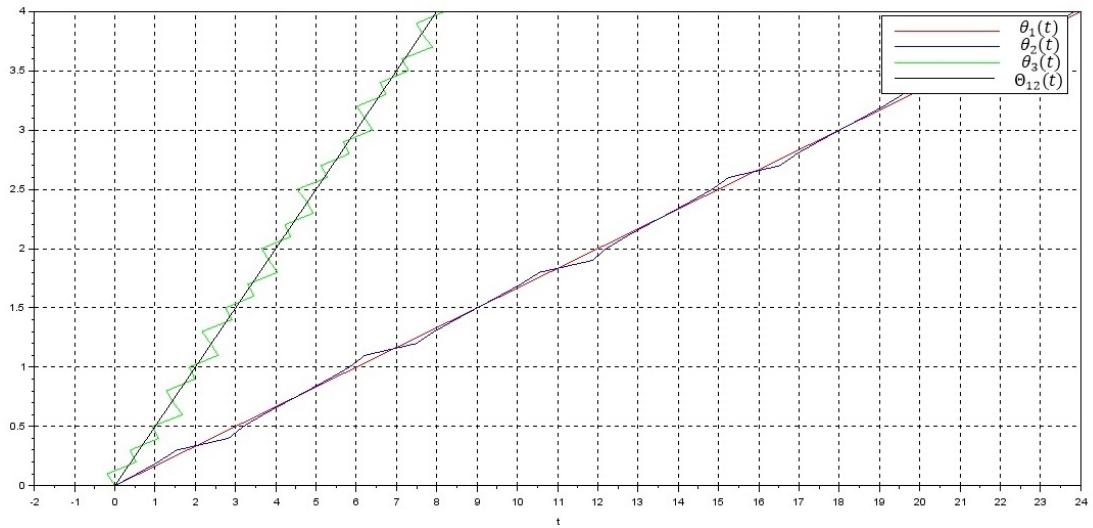


Figura 21: Situação 4 Dessincronizado

e o sistema total é dessincronizado e com $C = 0$, são tais que $A = 2$ e $B = 3$ e, considerando as equações (4.146), (4.147), (4.148) e (4.150), obtemos o gráfico representado pela figura 22.

Por fim, os parâmetros considerados para o caso em que o oscilador principal é dessincronizado e o sistema total é sincronizado e com $B = 0$, são tais que $A = 1$ e $C = 6$ logo, com as equações (4.151), (4.152), (4.153) e (4.154), obtemos o gráfico representado pela figura 23.

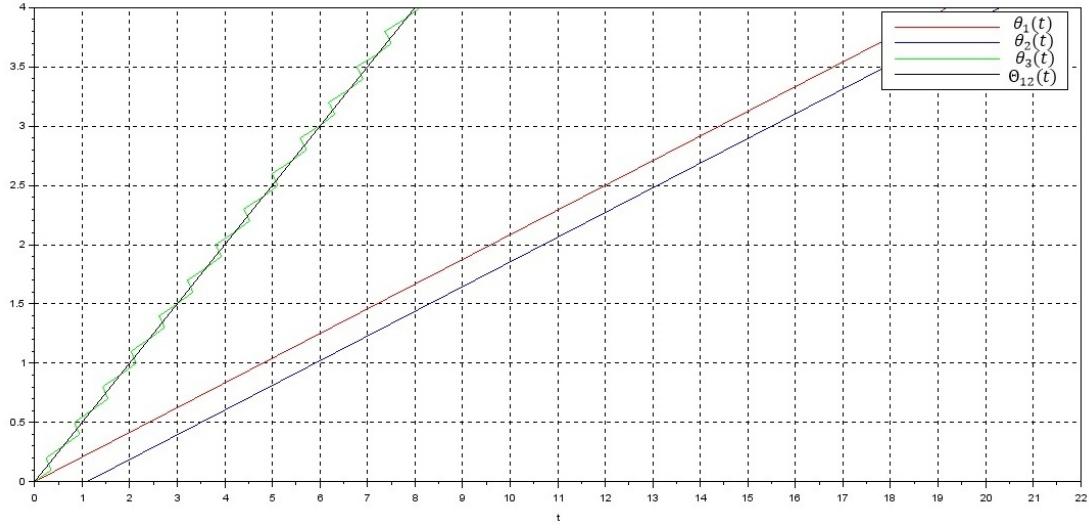


Figura 22: Situação 4 Misto 1

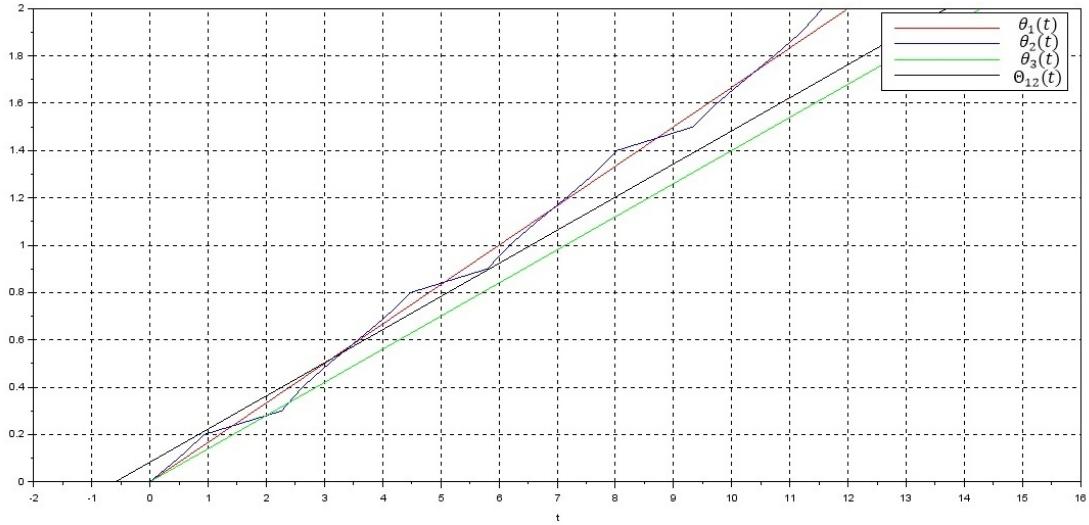


Figura 23: Situação 4 Misto 2

5.2.3 Caso 3

5.2.3.1 Situação 5

Relação 1

Nesta situação, sem perda de generalidade, definimos as frequências tais que $\omega_1 = 6$, $\omega_2 = 4$, e $\omega_3 = 8$.

Para satisfazer as condições do caso sincronizado, os parâmetros foram considerados tais que $f_2 = \frac{1}{4}$, $f_3 = \frac{1}{8}$, $A = 12$, $B = 16$ e $C = 8$. Logo, com as equações (4.167), (4.168), (4.172) e (4.173), obtemos o gráfico representado pela figura 24.

Consideramos a partir daqui que $\lambda_9 = 8$ e $\lambda_{10} = -2$. Para o caso dessincronizado, com $A = B = 0$, consideramos que $C = 1.5$ e, com as equações (4.177), (4.178), (4.183)

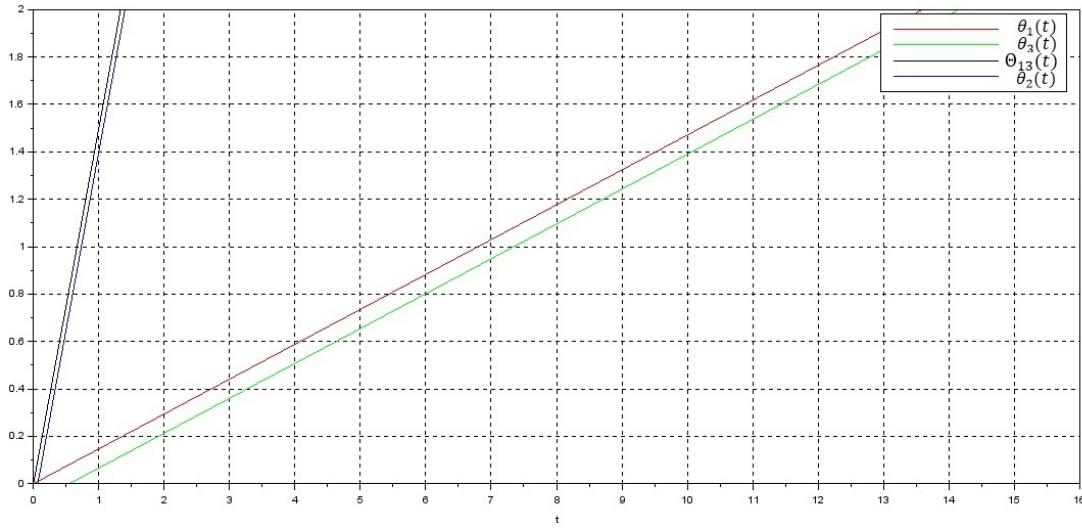


Figura 24: Situação 5 Sincronizado

e (4.184), obtemos o gráfico representado pela figura 25.

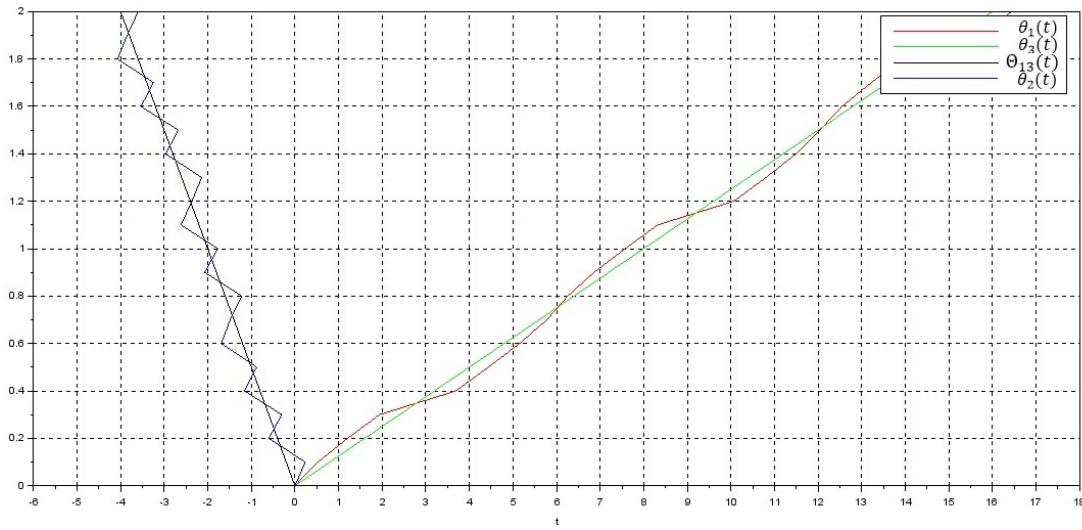


Figura 25: Situação 5 Dessincronizado

Os parâmetros considerados para o caso em que o oscilador principal é sincronizado e o sistema total é dessincronizado e com $A = 0$, são tais que $B = 4$ e $C = 3$ e, considerando as equações (4.185), (4.186), (4.187) e (4.188), obtemos o gráfico representado pela figura 26.

Por fim, os parâmetros considerados para o caso em que o oscilador principal é dessincronizado e o sistema total é sincronizado e com $B = 0$, são tais que $A = 2$ e $C = 3$ logo, com as equações (4.189), (4.190), (4.191) e (4.192), obtemos o gráfico representado pela figura 27.

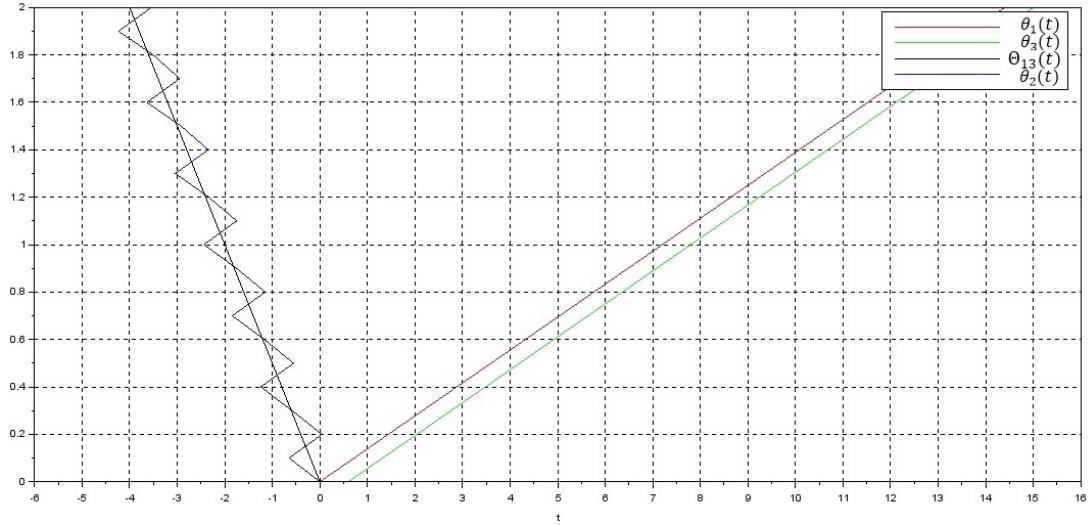


Figura 26: Situação 5 Misto 1

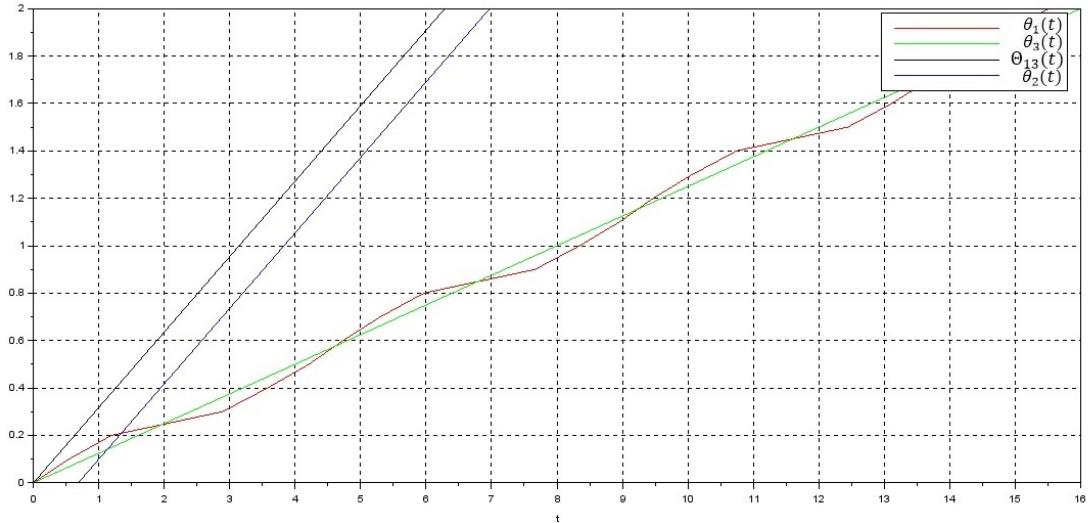


Figura 27: Situação 5 Misto 2

5.2.3.2 Situação 6

Relação 1

Nesta situação, sem perda de generalidade, definimos as frequências tais que $\omega_1 = 7$, $\omega_2 = 6$, e $\omega_3 = 8$.

Para satisfazer as condições do caso sincronizado, os parâmetros foram considerados tais que $f_2 = \frac{1}{6}$, $f_1 = \frac{1}{7}$, $F_1 = 0.2$, onde f_1 e F_1 são pontos escolhidos quaisquer. $A = 12$, $B = 16$ e $C = 8$. Logo, com as equações (4.206), (4.207), (4.211) e (4.212), obtemos o gráfico representado pela figura 28.

Consideramos a partir daqui que $\lambda_{11} = 8$ e $\lambda_{12} = 2$. Para o caso dessincronizado, com $A = B = 0$, consideramos que $C = 1$ e, com as equações (4.215), (4.216), (4.219) e (4.220), obtemos o gráfico representado pela figura 29.

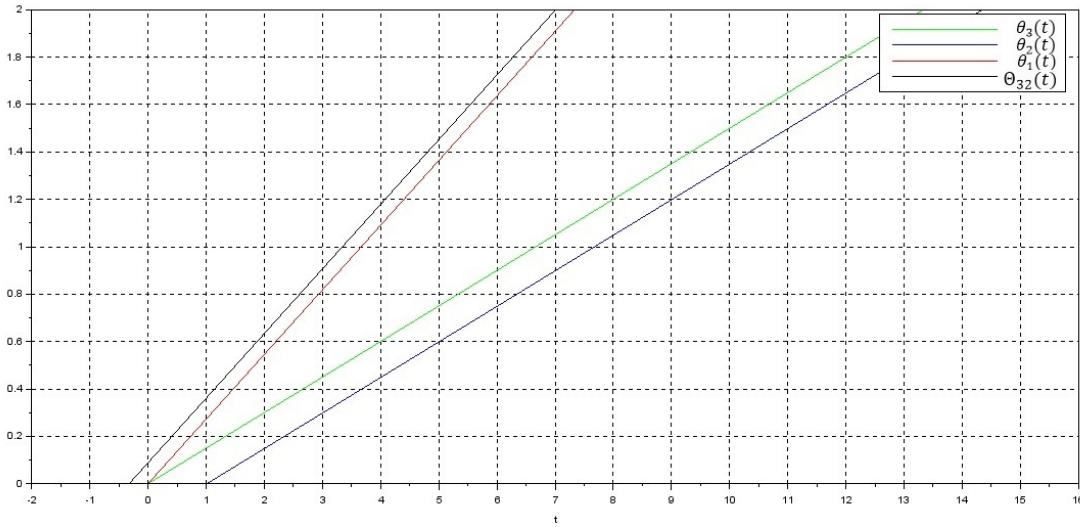


Figura 28: Situação 6 Sincronizado

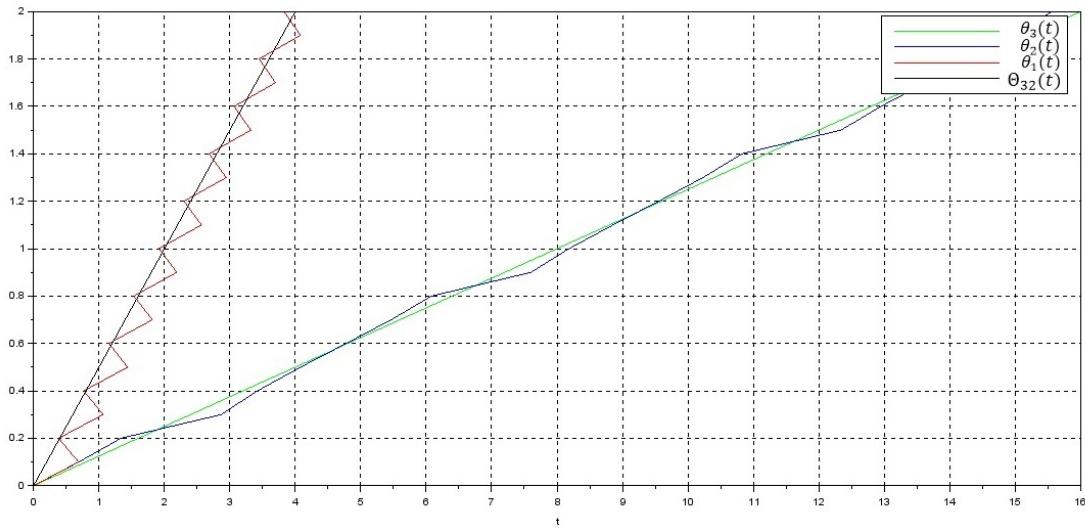


Figura 29: Situação 6 Dessincronizado

Os parâmetros considerados para o caso em que o oscilador principal é sincronizado e o sistema total é dessincronizado e com $A = 0$, são tais que $B = 1$ e $C = 2$ e, considerando as equações (4.221), (4.222), (4.223) e (4.225), obtemos o gráfico representado pela figura 30.

Por fim, os parâmetros considerados para o caso em que o oscilador principal é dessincronizado e o sistema total é sincronizado e com $B = 0$, são tais que $A = 5$ e $C = 1$ logo, com as equações (4.228), (4.229), (4.230) e (4.231), obtemos o gráfico representado pela figura 31.

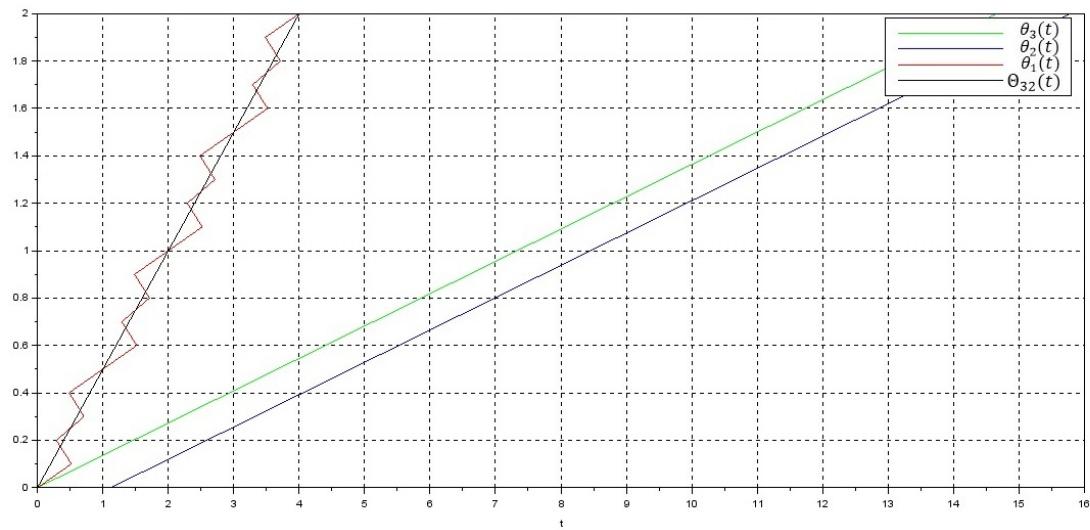


Figura 30: Situação 6 Misto 1

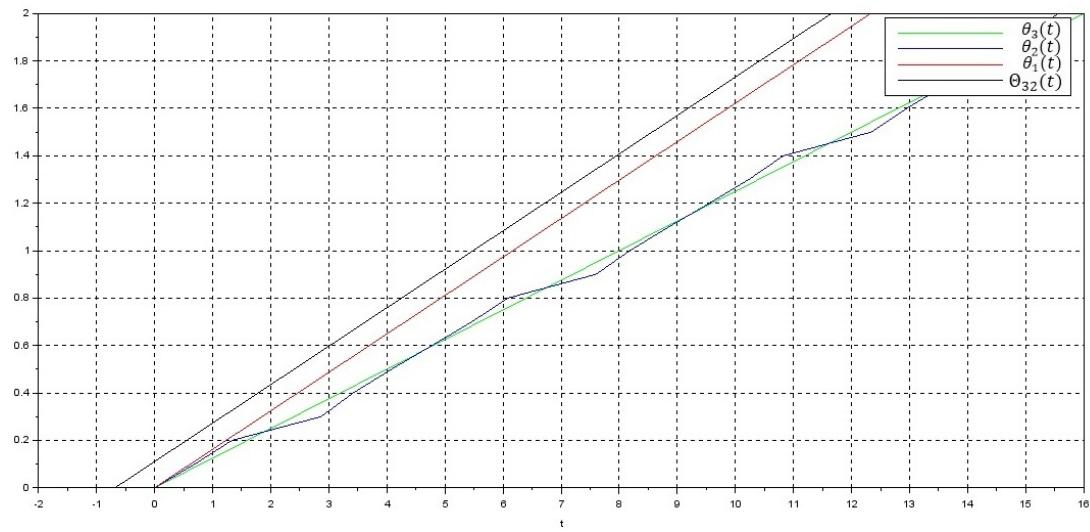


Figura 31: Situação 6 Misto 2

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do trabalho podemos observar a simplicidade dos modelos estudados, tais modelos ainda não podem garantir de forma fidedigna a modelagem do ritmo circadiano, mas temos uma primeira abordagem que pode ser facilmente discutida com pesquisadores da área médica, visto que tais soluções existem, são únicas e dependem continuamente dos dados iniciais como garantimos.

Em relação aos diferentes casos e situações não se pode ainda classificar como “mais realístico” algum deles, visto que as características são grandes. O que podemos dizer é que disponibilizamos uma quantidade de situações que enquadraram diferentes perfis, e que assim seria necessário trabalhar com dados reais para melhor estudá-los.

O professor Dr. Wolnei Caumo (UFRGS) nos disponibilizou um banco de dados reais que foram obtidos pela medição do ritmo circadiano de pacientes num período antes, durante e depois de um processo cirúrgico. Tais pacientes eram mulheres que fizeram uma cirurgia de retirada do útero. Temos assim o objetivo de classificar cada paciente em uma das relações definidas e com isso calibrar nossos parâmetros em cada um dos casos e situações.

Em relação a estipulação de valores para as frequências e parâmetros acreditamos que as forças de acoplamento são as que mais precisam ser estudadas, pois precisamos encontrar uma forma de relacioná-las com as frequências de cada ciclo e em cada situação. Os demais parâmetros e as frequências também precisam ser mais estudados, mas estes estão claramente relacionados com cada pessoa.

Temos também o intuito de obter uma forma de solucionar o caso 4 de acoplamento e assim, aplicar a forma de resolução nos demais casos, podendo comparar as soluções.

Um outra finalidade que pretendemos alcançar é resolver a dessincronização de forma analítica sem precisar definir uma das forças de acoplamento como sendo nula, dando mais realidade ao modelo. E ainda de forma analítica encontrar a relação exata entre o oscilador principal e os osciladores que o geraram em cada situação.

Por fim, esperamos contribuir com a área médica gerando procedimentos mais eficientes.

REFERÊNCIAS

- [1] J. P. Chancelier. *Scilab*. Scilab enterprises, França, 1990.
- [2] J. J. Chiesa. *Patrones Del Ritmo De Actividad Motora Como Expresión De La Plasticidad Del Sistema Circadiano*. PhD thesis, Universitat de Barcelona, Octubre 2005.
- [3] J. A. da Silva and N. P. Ribeiro-Filho. A dor como um problema psicofísico. *Sociedade Brasileira para o Estudo da Dor*, 12(2):138–151, abr-jun 2011.
- [4] K. M. de Almondes and J. F. de Araújo. Padrão do ciclo sono-vigília e sua relação com a ansiedade em estudantes universitários. In *Estudos de Psicologia*, pages 37–43, 2003.
- [5] D. G. de Figueiredo. *Análise de fourier e equações diferenciais parciais*. Projeto Euclides, São Paulo, 1977.
- [6] D. G. de Figueiredo and A. F. Neves. *Equações Diferenciais Aplicadas*. IMPA, Rio de Janeiro, 3 edition, 2015.
- [7] C. I. Doering and A. O. Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 5 edition, 2014.
- [8] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Society, 2 edition, 2010.
- [9] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Robert and Krieger Publishing Company, Florida, 2 edition, 1980.
- [10] S. Magalhães, R. R. Albuquerque, J. C. Pinto, and A. L. Moreira. Texto de apoio. In *Termorregulação*, page 20. Porto, 2001.
- [11] J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman and Company, New York, 2 edition, 1993.

- [12] J. E. E. Martínez. *Fenómenos de Sincronización y Modelos Matemáticos*. PhD thesis, Universidad Veracruzana, Xalapa De Enríquez, México, Febrero 2012.
- [13] J. Maximiano. Um olhar cronobiológico sobre o coração e a depressão. *PsiLogos*, pages 54–62, 2008.
- [14] R. M. May. *Stability and Complexity in model Ecosystems*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2 edition, 1974.
- [15] A. Minati, M. G. de Santana, and M. T. de Mello. A influência dos ritmos circadianos no desempenho físico. *RBCM*, 14(1):75–86, 2006.
- [16] S. H. Strogatz. *The Mathematical Structure of the Human Sleep-Wake Cycle*. Springer-Verlag, 1986.
- [17] S. H. Strogatz. Human sleep and circadian rhythms: a simple model based on two coupled oscillators. *Journal of Mathematical Biology*, pages 327–347, 1987.

ANEXO A GRÁFICOS

Apresentaremos em cada página a seguir os valores e os gráficos obtidos das demais relações da situação 1, ou seja, da relação 2 situação 1, relação 3 situação 1, relação 4 situação 1, relação 5 situação 1 e por fim, relação 6 situação 1, respectivamente. Dos demais casos não serão apresentadas as demais relações.

A.1 Caso 1 - Situação 1

Relação 2

Definimos as frequências como sendo $\omega_1 = 4$, $\omega_2 = 6$ e $\omega_3 = 8$. Os parâmetros definidos estão representados na tabela 3.

Tabela 3: Parâmetros Situação 1 - Relação 2

Parâmetro	Sincronizado	Dessincronizado	Misto 1	Misto 2
f_2	1/6	-	1/6	1/6
f_3	1/8	-	1/8	1/8
A	16	1.33	3	1
B	12	0	2	0
C	8	0	0	10
λ_1	-	4	4	4
λ_2	-	-2	-2	-2

Os gráficos obtidos são dados pela figura 32, na ordem da tabela.

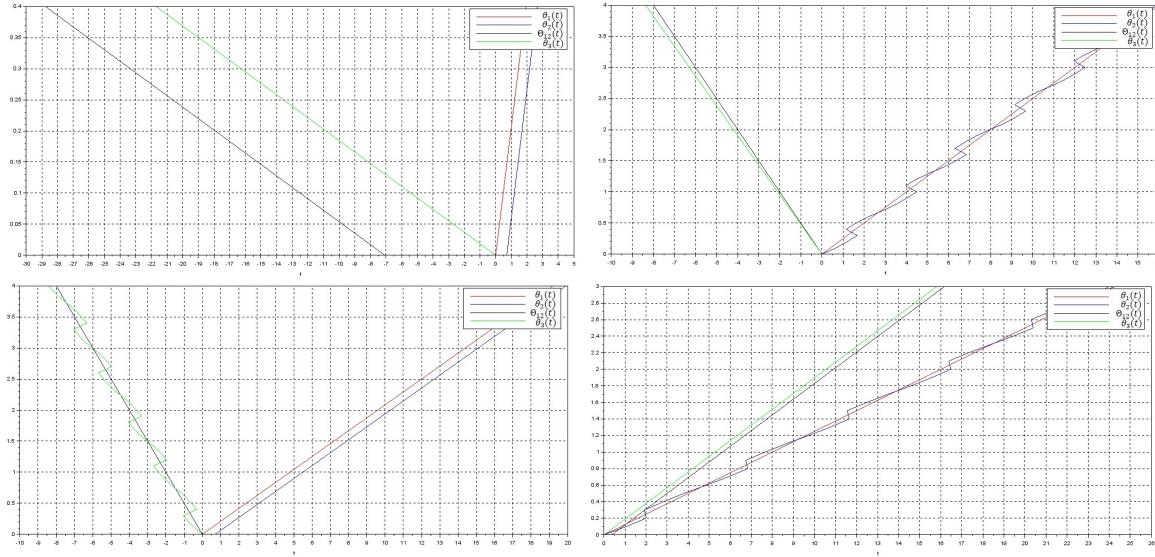


Figura 32: Situação 1 Relação 2

Relação 3

Definimos as frequências como sendo $\omega_1 = 5$, $\omega_2 = 4$ e $\omega_3 = 3$. Os parâmetros definidos estão representados na tabela 4.

Tabela 4: Parâmetros Situação 1 - Relação 3

Parâmetro	Sincronizado	Dessincronizado	Misto 1	Misto 2
f_2	1/4	-	1/4	1/4
f_3	1/3	-	1/3	1/3
A	5	0.83	0.8	0.8
B	8	0	1	0
C	9	0	0	2
λ_1	-	5	5	5
λ_2	-	1	1	1

Os gráficos obtidos são dados pela figura 33, na ordem da tabela.

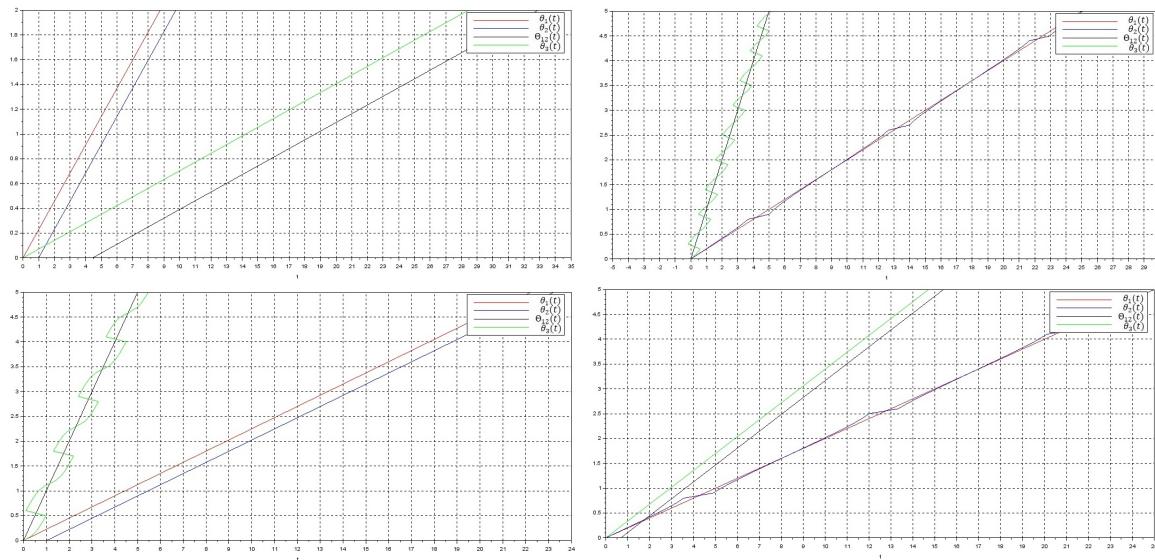


Figura 33: Situação 1 Relação 3

Relação 4

Definimos as frequências como sendo $\omega_1 = 6$, $\omega_2 = 4$ e $\omega_3 = 5$. Os parâmetros definidos estão representados na tabela 5.

Tabela 5: Parâmetros Situação 1 - Relação 4

Parâmetro	Sincronizado	Dessincronizado	Misto 1	Misto 2
f_2	1/4	-	1/4	1/4
f_3	1/5	-	1/5	1/5
A	6	0.88	1	1
B	12	0	1.5	0
C	10	0	0	3
λ_1	-	6	6	6
λ_2	-	4	4	4

Os gráficos obtidos são dados pela figura 34, na ordem da tabela.

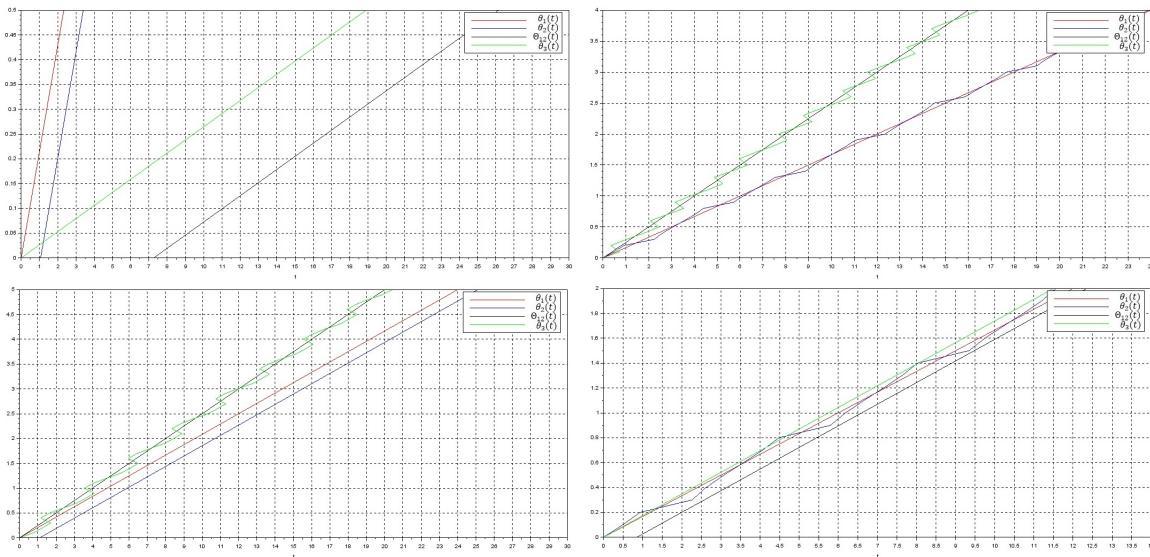


Figura 34: Situação 1 Relação 4

Relação 5

Definimos as frequências como sendo $\omega_1 = 4$, $\omega_2 = 6$ e $\omega_3 = 3$. Os parâmetros definidos estão representados na tabela 6.

Tabela 6: Parâmetros Situação 1 - Relação 5

Parâmetro	Sincronizado	Dessincronizado	Misto 1	Misto 2
f_2	1/6	-	1/6	1/6
f_3	1/3	-	1/3	1/3
A	8	1.33	2	1
B	6	0	1	0
C	9	0	0	5
λ_1	-	4	4	4
λ_2	-	-2	-2	-2

Os gráficos obtidos são dados pela figura 35, na ordem da tabela.

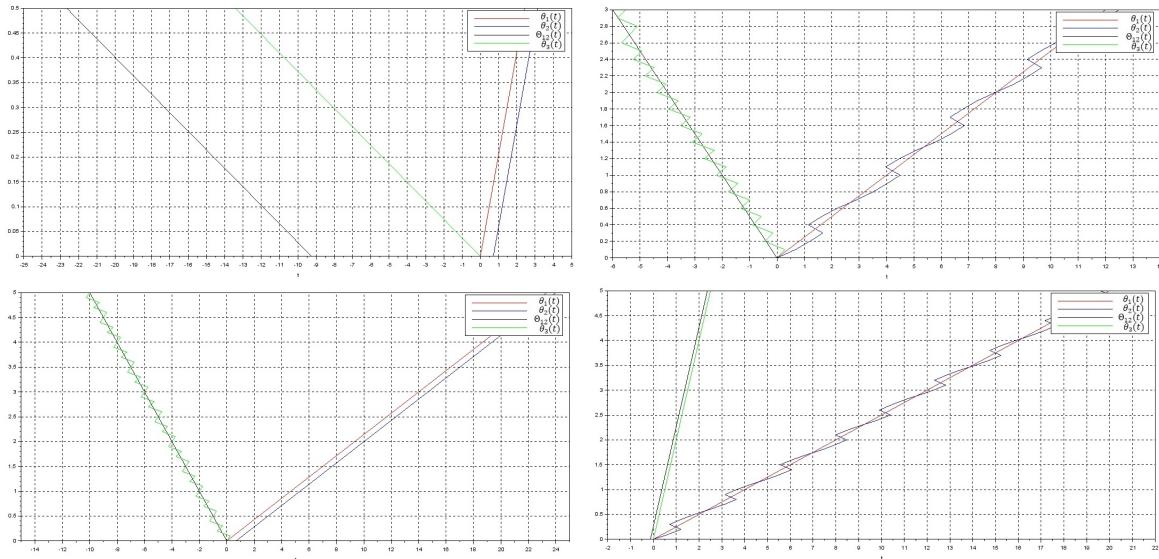


Figura 35: Situação 1 Relação 5

Relação 6

Definimos as frequências como sendo $\omega_1 = 4$, $\omega_2 = 7$ e $\omega_3 = 6$. Os parâmetros definidos estão representados na tabela 7.

Tabela 7: Parâmetros Situação 1 - Relação 6

Parâmetro	Sincronizado	Dessincronizado	Misto 1	Misto 2
f_2	1/7	-	1/7	1/7
f_3	1/6	-	1/6	1/6
A	16	2	5	2
B	7	0	2	0
C	12	0	0	8
λ_1	-	4	4	4
λ_2	-	-3	-3	-3

Os gráficos obtidos são dados pela figura 36, na ordem da tabela.

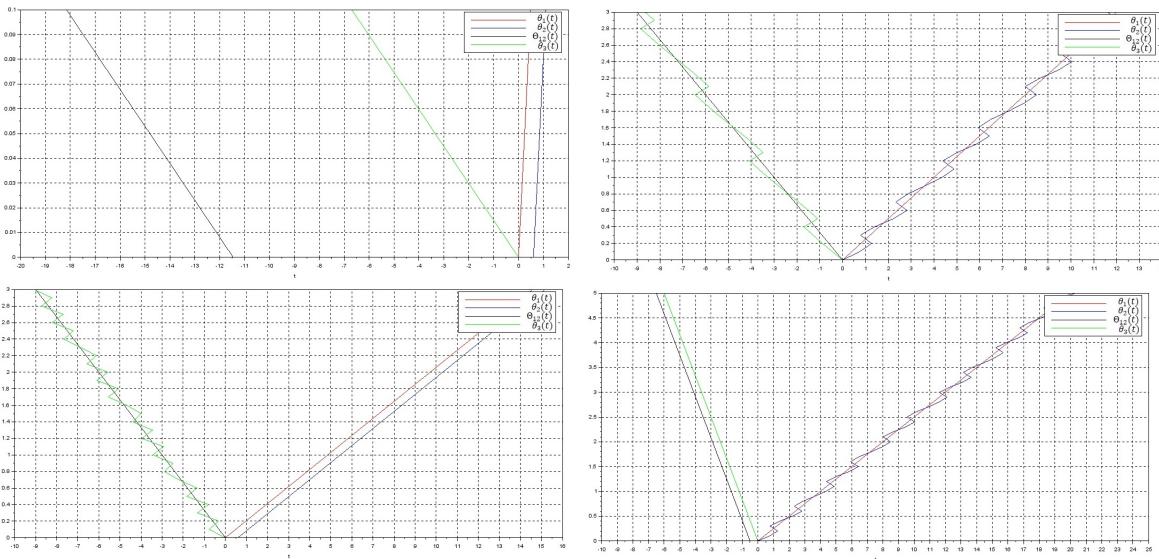


Figura 36: Situação 1 Relação 6