Cal-2 | Limites e Conti.

14.2 Exercícios

1. Suponha que $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3,1)$? E se a função f for contínua?

2. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
(a) A temperatura externa como função da latitude, da longitude e do tempo.
(b) A altura acima do nível do mar como função da longitude, da latitude e do tempo.
(c) O custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e do tempo gasto.

3–4 Utilize uma tabela de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. Em seguida, explique por que sua conjectura está correta.

3. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$ **4.** $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5–22 Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} (x^2y^3 - 4y^2)$ **6.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}$

7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi/2)} y \operatorname{sen}(x - y)$ **8.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} e^{\sqrt{2x-y}}$

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$ **10.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$

11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos y}{3x^2 + y^2}$ **12.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

13. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **14.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$

15. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2\cos y}{x^2 + y^4}$ **16.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^4 + y^4}$

17. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$ **18.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$

19. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,1/3)} e^{y^2}\operatorname{tg}(xz)$ **20.** $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

21. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$ **22.** $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

23–24 Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

23. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$ **24.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

25–26 Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$, $f(x,y) = 2x + 3y - 6$

26. $g(t) = t + \ln t$, $f(x,y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

27–28 Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida, utilize a fórmula para explicar o que você observou.

27. $f(x,y) = e^{1/(x-y)}$ **28.** $f(x,y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29–38 Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

29. $F(x,y) = \dfrac{xy}{1 + e^{x-y}}$ **30.** $F(x,y) = \cos\sqrt{1 + x - y}$

31. $F(x,y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$ **32.** $H(x,y) = \dfrac{e^x + e^y}{e^{xy} - 1}$

33. $G(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

34. $G(x,y) = \ln(1 + x - y)$

35. $G(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 4)$

36. $G(x,y) = \operatorname{tg}^{-1}((x + y)^{-2})$

37. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

38. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

39–41 Utilize coordenadas polares para determinar o limite. [Se (r, θ) são as coordenadas polares do ponto (x, y) com $r \geq 0$, observe que $r \to 0^+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

41. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

42. No início desta seção consideramos a função

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e conjecturamos com base na evidência numérica que $f(x, y) \to 1$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. Utilize coordenadas polares para comprovar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.

43. Trace o gráfico e analise a continuidade da função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy} & \text{se } xy \neq 0 \\ 1 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

44. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \text{ ou } y \geq x^4 \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ por qualquer caminho da forma $y = mx^a$ passando por $(0, 0)$ com $0 < a < 4$.
(b) Independentemente do item (a), mostre que f é descontínua em $(0, 0)$.
(c) Mostre que f é descontínua em duas curvas inteiras.

45. Mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ é contínua em $\mathbb{R}^n$. [*Dica*: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Se $\mathbf{c} \in V_n$, mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

9- $f(x,y) = \dfrac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2} =$

Note que:

$f(x,0) = \dfrac{x^4}{x^2} = x^2$ e

$f(0,y) = \dfrac{-4y^2}{2y^2} = -2$

Como os valores são diferentes o limite não existe!

13- $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ Note que:

$f(x,0) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{x}{|x|}$ e $f(0,y) = \dfrac{y}{|y|}$

Verificar se o limite existe.

$0 \leq \left| \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |x|$ sanduíche!

Com $|x| \to 0$ então $(x,y) \to (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

14- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ = Note que

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+yx+y^2)$, assim

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = 0$

17- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2ye^y}{x^4+4y^2}$ = Note que

$f(x,0)=0$ e $f(0,y)=0$

Contudo, para $f(x,x^2)$ temos

$$\frac{x^2.x^2e^{x^2}}{x^4+4x^4} = \frac{x^4.e^{x^2}}{5x^4} = \frac{e^{x^2}}{5} \neq 0$$

Ou seja $f(x,0) = \dfrac{e^0}{5} = \dfrac{1}{5} \neq 0$

Logo na curva $x^2=y$ o limite não existe!

25- $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$, $f(x,y) = 2x + 3y - 6$

Sendo assim,

$h(x,y) = g(f(x,y)) =$

$(2x+3y-6)^2 + \sqrt{(2x+3y-6)}$

Para ser contínua devemos ter:

$2x + 3y - 6 \geq 0 \rightarrow y \geq 3 - \frac{2x}{3}$

ou seja, domínio

$D = \{(x,y) \mid y \geq 3 - \frac{2x}{3}\}$

35-

$G(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 4)$

Para ser contínua devemos ter

$x^2 + y^2 + 4 > 0 \rightarrow x^2 + y^2 > -4$

Com x e $y \in \mathbb{R}$ isso É verdade

Para todo $\mathbb{R}$

41-) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2} =$

Coordenadas Polares: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ Subst:

$\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{e^{-r^2}-1}{r^2} = \dfrac{0}{0} \leftarrow$ L'Hospital

$\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{(-2r)e^{-r^2}}{2r} = -e^{-r^2} = -e^{0} = \underline{-1}$ //