Контрольная работа
Вариант 82

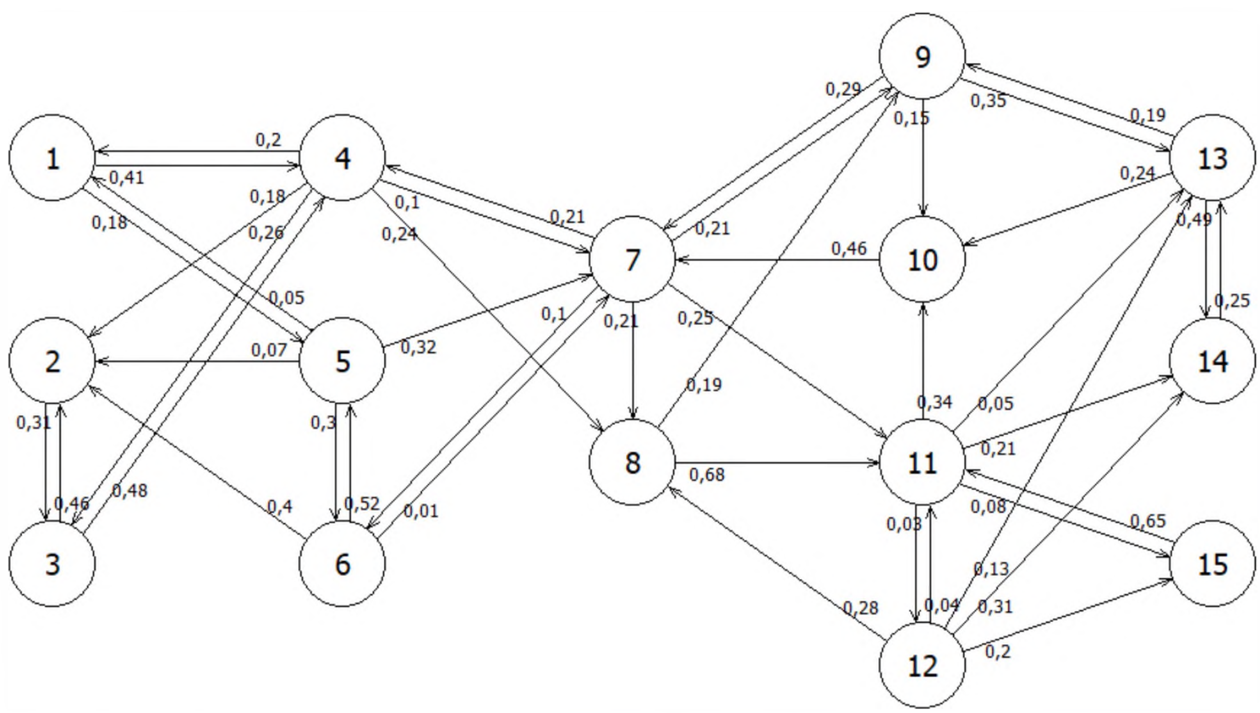
В этом файле содержатся формулировки заданий, формулы и письменные ответы (схемы, системы уравнений). Для рассчета используется вызов методов, реализованных в Task_1 и Task_2. Вы так же можете запустить эти файлы для вывода рассчитанных значений с комментариями.

Задание 1

Реализация Task_1

```
from modules.Task_1 import *
```

Система имеет 15 дискретных состояний. Изменение состояний происходит в дискретные моменты времени с заданной вероятность. Схема марковского процесса изображена на рисунке.




```
Task1 = Task_1(np.array([[0, 0, 0, 0.41, 0.18, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                          [0, 0, 0.31, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                          [0, 0.46, 0, 0.48, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                          [0.2, 0.18, 0.26, 0, 0, 0, 0.1, 0.24, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                          [0.05, 0.07, 0, 0, 0, 0.3, 0.32, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                          [0, 0.4, 0, 0, 0.52, 0, 0.01, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                          [0, 0, 0, 0.21, 0, 0.1, 0, 0.21, 0.21, 0, 0.25, 0, 0, 0, 0],
                          [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.19, 0, 0.68, 0, 0, 0, 0],
                          [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.29, 0, 0, 0.15, 0, 0, 0.35, 0, 0],
                          [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.46, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                          [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.34, 0, 0.03, 0.05, 0.21, 0.08]
                          [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.28, 0, 0, 0.04, 0, 0.13, 0.31, 0.2],
                          [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.19, 0.24, 0, 0, 0, 0.49, 0],
                          [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.25, 0, 0],
                          [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.65, 0, 0, 0, 0]]))
```

1) вероятность того, что за 7 шагов система перейдет из состояния 2 в состояние 7

$$\left\| p_{ij}^{(k)} \right\| = \left\| p_{ij}^{(k-1)} \right\| \times P = P \times P \times \cdots \times P = P^k$$

In [20]:
```
Task1.Par_1(7, 2, 7)
```

Out[20]: 0.0302709586656

2) вероятности состояний системы спустя 6 шагов, если в начальный момент вероятность состояний были следующими
A=(0,06; 0,01; 0,14; 0,1; 0,14; 0,06; 0,06; 0,1; 0,05; 0,05; 0,08; 0,05; 0,01; 0,01; 0,08)

$$\mathrm{A(k)} = \mathrm{A(k-1)} \times P = \mathrm{A(0)} \times P \times \cdots \times P = \mathrm{A(0)} \times P^k$$

In [21]:
```
Task1.Par_2(6, (0.06, 0.01, 0.14, 0.1, 0.14, 0.06, 0.06, 0.1, 0.05, 0.05, 0.08, 0.05, 0.01, 0.01, 0.08))
```

Out[21]:
```
array([0.02582531, 0.17556265, 0.07571832, 0.06631878, 0.02200177,
       0.01793998, 0.08540404, 0.04092715, 0.04728388, 0.11669832,
       0.08637117, 0.00286466, 0.06320472, 0.16071088, 0.01316836])
```

3) вероятность первого перехода за 6 шагов из состояния 13 в состояние 1

$$\hat{p}_{ij}^{(k)} = \sum_{m \neq j} p_{im} \hat{p}_{mj}^{(k-1)}$$

In [22]:
```
Task1.Par_3(6, 13, 1)
```

Out[22]: 0.005528702680000001

4) вероятность перехода из состояния 1 в состояние 6 не позднее чем за 6 шагов

- $p_{ij}^{(t \leq k)} = \sum_{t=1}^{k} \hat{p}_{ij}^{(t)}$ - вероятность перехода из состояния i в состояние j не позднее чем за k шагов.

In [23]:
```
Task1.Par_4(1, 6, 6)
```

Out[23]: 0.16343834334000001

5) среднее количество шагов для перехода из состояния 2 в состояние 1

- $\bar{t}_{i,j} = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot \hat{p}_{ij}^{(t)}$ - среднее количество шагов, необходимых для первого перехода из состояния i в состояние j

Это задание долго считает 10тыс

In [24]:
```
Task1.Par_5(2, 1)
```

Out[24]: 83.89198679121328

6) вероятность первого возвращения в состояние 4 за 7 шагов

$$f_{jj}^{(k)} = p_{jj}^{(k)} - \sum_{m=1}^{k-1} f_{jj}^{(m)} p_{jj}^{(k-m)}$$

In [25]:
```
Task1.Par_6(4, 7)
```
Out[25]:
```
0.03754738490698
```

7) вероятность возвращения в состояние 5 не позднее чем за 7 шагов

- вероятность возвращения не позднее чем за k шагов.

$$f_{jj}^{(t\le k)} = \sum_{t=1}^{k} f_{jj}^{(t)}$$

In [26]:
```
Task1.Par_7(5, 7)
```
Out[26]:
```
0.5070938663389799
```

8) среднее время возвращения в состояние 7

среднее время возвращения

$$\bar{\mu}_{j,j} = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot f_{jj}^{(t)}$$

Тоже долго считает 10тыс

In [27]:
```
Task1.Par_8(7, 10000)
```
Out[27]:
```
1.6468696138239678
```

9) установившиеся вероятности

$$M = \begin{bmatrix} p_{11}-1 & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22}-1 & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33}-1 \end{bmatrix} = P^T - E, \qquad X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$MX = B$$

$$M_{-} = \begin{bmatrix} p_{11}-1 & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22}-1 & p_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P^T - E] \\ \text{с зам.} \\ \text{на стр. из } 1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{-}\,X = B$$

)ткуда, умножая обе части слева на обратную матрицу к M_{-}, получаем

$$X = M_{-}^{-1}B$$

In [28]:
```
Task1.Par_9()
```
Out[28]:
```
array([0.02085891, 0.15181978, 0.0661027 , 0.05797079, 0.01425198,
       0.01306128, 0.07871392, 0.03570203, 0.05013697, 0.11328607,
       0.07061182, 0.00220662, 0.08576262, 0.23014487, 0.00936965])
```

Задание 2

Реализация [Task_2]

In [2]:
```
from modules.Task_2 import *
```

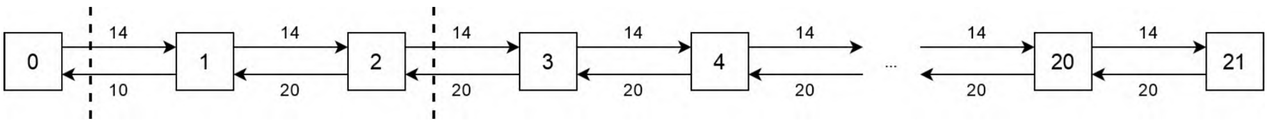
Задана система массового обслуживания со следующими характеристиками:

Параметр	Значение
интенсивность поступления	$\lambda=14$
каналов обслуживания	m=2
интенсивность обслуживания	$\mu=10$
максимальный размер очереди	n=19

Изначально требований в системе нет.

а) Составьте граф марковского процесса, запишите систему уравнений Колмогорова и найдите установившиеся вероятности состояний.

Граф марковского процесса:



Система уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} P_0 = 10P_1 - 14P_0 \\ P_1 = 14P_0 + 20P_2 - P_1(10+14) \\ P_2 = 14P_1 + 20P_3 - P_2(20+14) \\ P_3 = 14P_2 + 20P_4 - P_3(20+14) \\ P_4 = 14P_3 + 20P_5 - P_4(20+14) \\ \dots \\ P_{20} = 14P_{19} + 20P_{21} - P_{20}(20+14) \\ P_{21} = 14P_{20} - 20P_{21} \end{cases}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_{20} + P_{21} = 1$$

Установившиеся вероятности:

$$M = \begin{bmatrix} -(\lambda_{12}+\lambda_{13}) & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & -(\lambda_{21}+\lambda_{23}) & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & -(\lambda_{31}+\lambda_{32}) \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$M = \Lambda^T - D$, где $D = diag(\sum_j \lambda_{1j}, \sum_j \lambda_{2j}, \sum_j \lambda_{3j})$ – диагональная матрица из сумм строк матрицы интенсивностей переходов Λ

$$M\_ = \begin{bmatrix} -(\lambda_{12}+\lambda_{13}) & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & -(\lambda_{21}+\lambda_{23}) & \lambda_{32} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M\_ X = B$$

$$X = M\_^{-1} B$$

In [3]:
```python
Task2 = Task_2(14, 10, 2, 19)

Task2.Par_A()
```

Out[3]:
```
array([1.76551798e-01, 2.47172518e-01, 1.73020762e-01, 1.21114534e-01,
       8.47801736e-02, 5.93461215e-02, 4.15422850e-02, 2.90795995e-02,
       2.03557197e-02, 1.42490038e-02, 9.97430264e-03, 6.98201185e-03,
       4.88740829e-03, 3.42118581e-03, 2.39483006e-03, 1.67638104e-03,
       1.17346673e-03, 8.21426712e-04, 5.74998698e-04, 4.02499089e-04,
       2.81749362e-04, 1.97224554e-04])
```

b) Найдите вероятность отказа в обслуживании.

в)
- $p_{отказа} = p_{n+m}$ - вероятность отказа в обслуживании (новая заявка вынуждена будет покинуть систему необслуженной)

In [4]:
```python
Task2.Par_B()
```

Out[4]: 0.00019722455352475275

c) Найдите относительную и абсолютную интенсивность обслуживания.

с)
- $q = 1 - p_{n+m}$ - относительная пропускная способность (доля от всех поступающих заявок)
- $A = (1 - p_{n+m}) * \lambda$ – абсолютная пропускная способность

In [7]:
```python
a, b = Task2.Par_C()

print('Относительная:', a)
print('Абсолютная:', b)
```

```
Относительная: 0.9998027754464752
Абсолютная: 13.997238856250654
```

d) Найдите среднюю длину в очереди.

d) $L_{оч} = \sum_{i=1}^{n} i p_{m+i}$ - средняя длина очереди

In [8]:
```python
Task2.Par_D()
```

Out[8]: 1.3354394501003224

e) Найдите среднее время в очереди.

e) $T_{оч} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{m\mu} p_{m+i}$ - среднее время в очереди

In [9]:
```
Task2.Par_E()
```

Out[9]: 0.09538853215002309

f) Найдите среднее число занятых каналов.

f) $N_{каналов} = \sum_{i=1}^{m} i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} m p_i$ - среднее количество занятых каналов.

In [10]:
```
Task2.Par_F()
```

Out[10]: 1.3997238856250656

g) Найдите вероятность того, что поступающая заявка не будет ждать в очереди.

g) Сумма установившихся вероятностей от 0 до m-1

In [11]:
```
Task2.Par_G()
```

Out[11]: 0.17655179834556908

h) Найти среднее время простоя системы массового обслуживания.

h) $\bar{t}_i = \frac{1}{\sum_j \lambda_{ij}}$

In [12]:
```
Task2.Par_H()
```

Out[12]: 0.07142857142857142