

Контрольная работа Вариант 82

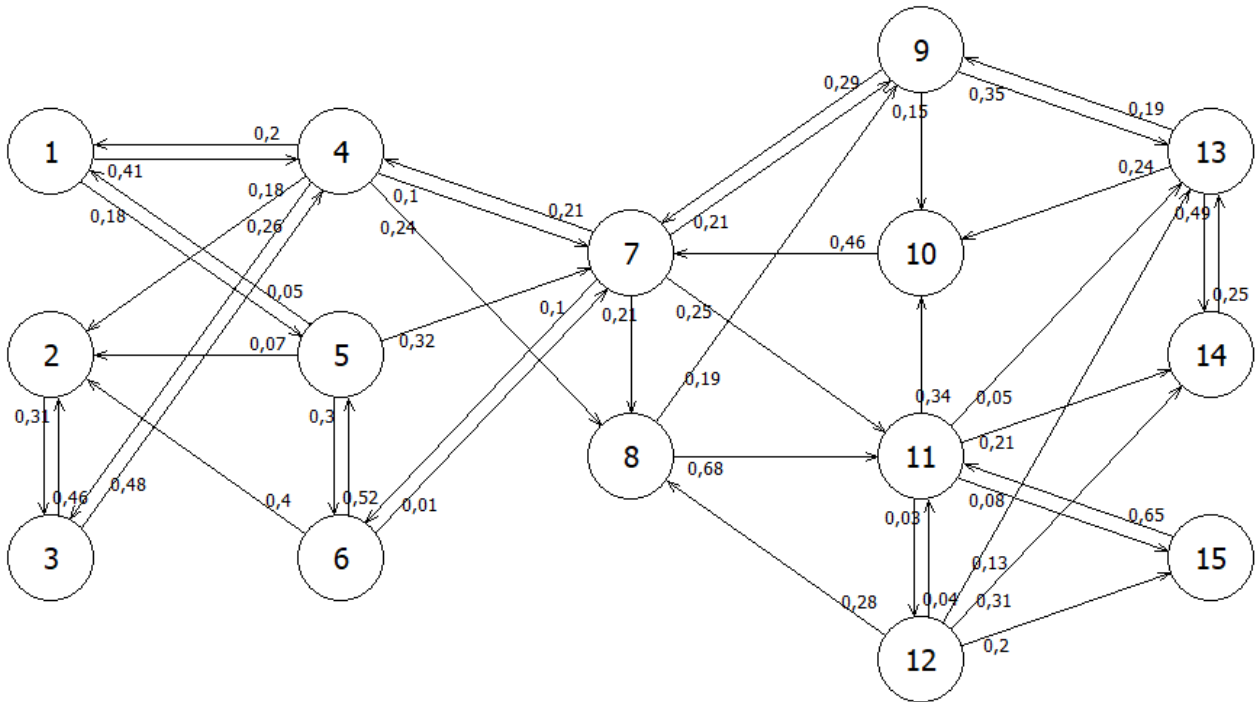
В этом файле содержатся формулировки заданий, формулы и письменные ответы (схемы, системы уравнений). Для расчета используется вызов методов, реализованных в [Task_1](#) и [Task_2](#). Вы так же можете запустить эти файлы для вывода рассчитанных значений с комментариями.

Задание 1

Реализация [Task_1](#)

```
In [15]: from modules.Task_1 import *
```

Система имеет 15 дискретных состояний. Изменение состояний происходит в дискретные моменты времени с заданной вероятностью. Схема марковского процесса изображена на рисунке.



```
In [16]: Task1 = Task_1(np.array([[0, 0, 0, 0.41, 0.18, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                                   [0, 0, 0.31, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                                   [0, 0.46, 0, 0.48, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                                   [0.2, 0.18, 0.26, 0, 0, 0.1, 0.24, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                                   [0.05, 0.07, 0, 0, 0, 0.3, 0.32, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                                   [0, 0.4, 0, 0, 0.52, 0, 0.01, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                                   [0, 0, 0, 0.21, 0, 0.1, 0, 0.21, 0.21, 0, 0.25, 0, 0, 0, 0],
                                   [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.19, 0, 0.68, 0, 0, 0, 0, 0],
                                   [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.29, 0, 0, 0.15, 0, 0, 0.35, 0, 0],
                                   [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.46, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
                                   [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.34, 0, 0.03, 0.05, 0.21, 0.08],
                                   [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.28, 0, 0, 0.04, 0, 0.13, 0.31, 0.2],
                                   [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.19, 0.24, 0, 0, 0, 0.49, 0, 0],
                                   [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.25, 0, 0],
                                   [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.65, 0, 0, 0, 0]]))
```

1) вероятность того, что за 7 шагов система перейдет из состояния 2 в состояние 7

$$\|p_{ij}^{(k)}\| = \|p_{ij}^{(k-1)}\| \times P = P \times P \times \dots \times P = P^k$$

```
In [20]: Task1.Par_1(7, 2, 7)
```

```
Out [20]: 0.0302709586656
```

2) вероятности состояний системы спустя 6 шагов, если в начальный момент вероятность состояний были следующими

A=(0,06; 0,01; 0,14; 0,1; 0,14; 0,06; 0,06; 0,1; 0,05; 0,05; 0,08; 0,05; 0,01; 0,01; 0,08)

$$A(k) = A(k-1) \times P = A(0) \times P \times \dots \times P = A(0) \times P^k$$

```
In [21]: Task1.Par_2(6, (0.06, 0.01, 0.14, 0.1, 0.14, 0.06, 0.06, 0.1, 0.05, 0.05, 0.08, 0.05, 0.01, 0.01, 0.08))
```

```
Out [21]: array([0.02582531, 0.17556265, 0.07571832, 0.06631878, 0.02200177,
0.01793998, 0.08540404, 0.04092715, 0.04728388, 0.11669832,
0.08637117, 0.00286466, 0.06320472, 0.16071088, 0.01316836])
```

3) вероятность первого перехода за 6 шагов из состояния 13 в состояние 1

$$\hat{p}_{ij}^{(k)} = \sum_{m \neq j} p_{im} \hat{p}_{mj}^{(k-1)}$$

```
In [22]: Task1.Par_3(6, 13, 1)
```

```
Out [22]: 0.005528702680000001
```

4) вероятность перехода из состояния 1 в состояние 6 не позднее чем за 6 шагов

• $p_{ij}^{(t \leq k)} = \sum_{t=1}^k \hat{p}_{ij}^{(t)}$ - вероятность перехода из состояния i в состояние j не позднее чем за k шагов.

```
In [23]: Task1.Par_4(1, 6, 6)
```

```
Out [23]: 0.16343834334000001
```

5) среднее количество шагов для перехода из состояния 2 в состояние 1

• $\bar{t}_{i,j} = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot \hat{p}_{ij}^{(t)}$ - среднее количество шагов, необходимых для первого перехода из состояния i в состояние j

Это задание долго считает 10тыс

```
In [24]: Task1.Par_5(2, 1)
```

```
Out [24]: 83.89198679121328
```

6) вероятность первого возвращения в состояние 4 за 7 шагов

$$f_{jj}^{(k)} = p_{jj}^{(k)} - \sum_{m=1}^{k-1} f_{jj}^{(m)} p_{jj}^{(k-m)}$$

```
In [25]: Task1.Par_6(4, 7)
```

```
Out [25]: 0.03754738490698
```

7) вероятность возвращения в состояние 5 не позднее чем за 7 шагов

- вероятность возвращения не позднее чем за k шагов.

$$f_{jj}^{(t \leq k)} = \sum_{t=1}^k f_{jj}^{(t)}$$

```
In [26]: Task1.Par_7(5, 7)
```

```
Out [26]: 0.5070938663389799
```

8) среднее время возвращения в состояние 7

среднее время возвращения

$$\bar{\mu}_{j,j} = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot f_{jj}^{(t)}$$

Тоже долго считает 10тыс, поэтому поставлен параметр 20

```
In [27]: Task1.Par_8(7, 20)
```

```
Out [27]: 1.6468696138239678
```

9) установившиеся вероятности

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} - 1 & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} - 1 & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} - 1 \end{bmatrix} = P^T - E, \quad X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$MX = B$$

$$M_- = \begin{bmatrix} p_{11} - 1 & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} - 1 & p_{32} \\ \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P^T - E] \\ \text{с зам.} \\ \text{на стр. из 1} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \color{red}{1} \end{bmatrix}$$
$$M_- X = B$$

Откуда, умножая обе части слева на обратную матрицу к M_- , получаем

$$X = M_-^{-1} B$$

```
In [36]: Task1.Par_9()
```

```
Out [36]: array([0.02085891, 0.15181978, 0.0661027 , 0.05797079, 0.01425198,
                0.01306128, 0.07871392, 0.03570203, 0.05013697, 0.11328607,
                0.07061182, 0.00220662, 0.08576262, 0.23014487, 0.00936965])
```

Задание 2

Реализация [Task_2](#)

```
In [1]: from modules.Task_2 import *
```

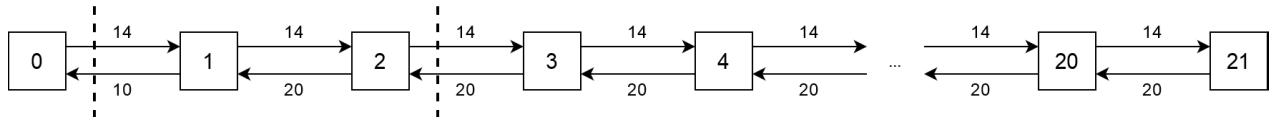
Задана система массового обслуживания со следующими характеристиками:

Параметр	Значение
интенсивность поступления	$\lambda=14$
каналов обслуживания	$m=2$
интенсивность обслуживания	$\mu=10$
максимальный размер очереди	$n=19$

Изначально требований в системе нет.

а) Составьте граф марковского процесса, запишите систему уравнений Колмогорова и найдите установившиеся вероятности состояний.

Граф марковского процесса:



Система уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases}
 P_0 = 10P_1 - 14P_0 \\
 P_1 = 14P_0 + 20P_2 - P_1(10 + 14) \\
 P_2 = 14P_1 + 20P_3 - P_2(20 + 14) \\
 P_3 = 14P_2 + 20P_4 - P_3(20 + 14) \\
 P_4 = 14P_3 + 20P_5 - P_4(20 + 14) \\
 \dots \\
 P_{20} = 14P_{19} + 20P_{21} - P_{20}(20 + 14) \\
 P_{21} = 14P_{20} - 20P_{21}
 \end{cases}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_{20} + P_{21} = 1$$

Установившиеся вероятности:

$$M = \begin{bmatrix} -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & -(\lambda_{31} + \lambda_{32}) \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$M = \Lambda^T - D$, где $D = \text{diag}(\sum_j \lambda_{1j}, \sum_j \lambda_{2j}, \sum_j \lambda_{3j})$ – диагональная матрица из сумм строк матрицы интенсивностей переходов Λ

$$M_- = \begin{bmatrix} -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) & \lambda_{32} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$M_- X = B$$

$$X = M_-^{-1} B$$

```
In [3]: Task2 = Task_2(14, 10, 2, 19)
Task2.Par_A()
```

```
Out[3]: array([1.76551798e-01, 2.47172518e-01, 1.73020762e-01, 1.21114534e-01,
8.47801736e-02, 5.93461215e-02, 4.15422850e-02, 2.90795995e-02,
2.03557197e-02, 1.42490038e-02, 9.97430264e-03, 6.98201185e-03,
4.88740829e-03, 3.42118581e-03, 2.39483006e-03, 1.67638104e-03,
1.17346673e-03, 8.21426712e-04, 5.74998698e-04, 4.02499089e-04,
2.81749362e-04, 1.97224554e-04])
```

b) Найдите вероятность отказа в обслуживании.

$P_{отказа} = p_{n+m}$ - вероятность отказа в обслуживании (новая заявка вынуждена будет покинуть систему необслуженной)

```
In [4]: Task2.Par_B()
```

```
Out[4]: 0.00019722455352475275
```

c) Найдите относительную и абсолютную интенсивность обслуживания.

$q = 1 - p_{n+m}$ - относительная пропускная способность (доля от всех поступающих заявок)
 $A = (1 - p_{n+m}) * \lambda$ - абсолютная пропускная способность

```
In [7]: a, b = Task2.Par_C()
print('Относительная:', a)
print('Абсолютная:', b)
```

```
Относительная: 0.9998027754464752
Абсолютная: 13.997238856250654
```

d) Найдите среднюю длину в очереди.

$L_{оч} = \sum_{i=1}^n i p_{m+i}$ - средняя длина очереди

```
In [8]: Task2.Par_D()
```

```
Out[8]: 1.3354394501003224
```

e) Найдите среднее время в очереди.

e)
$$\Gamma_{\text{оч}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{m\mu} p_{m+i}$$
 - среднее время в очереди

In [9]: Task2.Par_E()

Out[9]: 0.09538853215002309

f) Найдите среднее число занятых каналов.

ф)
$$N_{\text{каналов}} = \sum_{i=1}^m i p_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} m p_i$$
 - среднее количество занятых каналов.

In [10]: Task2.Par_F()

Out[10]: 1.3997238856250656

g) Найдите вероятность того, что поступающая заявка не будет ждать в очереди.

г) Сумма установившихся вероятностей от 0 до m-1

In [11]: Task2.Par_G()

Out[11]: 0.17655179834556908

h) Найти среднее время простоя системы массового обслуживания.

h)
$$\bar{t}_i = \frac{1}{\sum_j \lambda_{ij}}$$

In [12]: Task2.Par_H()

Out[12]: 0.07142857142857142