امیرحسین نجفی زاده

۹۸۳۱۰۴۵

سوال ۲ : الف)

$$T(n) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \cdots + \frac{n}{2^{\lceil \log n \rceil}}$$

$$= n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{\lceil \log n \rceil}}\right)$$

$$= n\left(1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) + \cdots\right)$$

تعداد این‌ها برابر $\Rightarrow$ $1, 2, 4, \ldots, 2^{\lceil \log n \rceil}$ $\Leftarrow$ دنباله هندسی

جمع داخل پرانتز می شود

(چون داخل فقط یک داریم) ؛ تعداد عبارات درون پرانتز = $\lceil \log_2 n \rceil$

چون توان‌ها از ۰ تا $\lceil \log 2 \rceil$ هستند پس تعداد $\lceil \log_2 n \rceil$ است .

$$\Rightarrow n \lceil \log_2 n \rceil = n(\log_2 n) + C \in O(n \log n)$$

ب)

$$T(n) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \cdots$$

یک دنباله‌ی بزرگتر از $T(n)$ پیدا می کنیم . داریم :

$$\frac{n}{2} < n < \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$$

$$\frac{n}{3} < n < \frac{n}{4} + \frac{n}{4} + \frac{n}{4} + \frac{n}{4} \quad , \ldots , \quad \frac{n}{n} < n < \sum \frac{n}{2^{\lceil \log n \rceil}}$$

$$\rightarrow T(n) \leqslant n + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \cdots + \frac{n}{2^{\lceil \log n \rceil}} \in O(n \log n)$$

$$\Rightarrow T(n) \in O(n \log n)$$

ج)

$$T(n) = 1 + 2 + \dots + n$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

جمله‌ی بزرگتر $\Rightarrow \frac{n^2}{2} \xRightarrow{\text{حذف ضریب}} n^2 \in O(n^2)$

$$\Rightarrow T(n) \in O(n^2)$$

د)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$$

$$1 \leq a_1 < a_2 \dots < a_m$$

m تعداد جملات a_i است. فرض کنید n مقداری است که با یک تقریب خوب بتوان آن را به صورت جمع ۱ تا p نوشت. قبول دارید که بیشترین تعداد جملات که m است وقتی رخ می‌دهد که به ازای هر i، $a_i + 1 = a_{i+1}$. پس $m \leq p$ است. حال داریم: $\sum_{i=1}^{p} i = n$

$$\Rightarrow 1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2} = n$$

$$\rightarrow p^2 \in O(n) \rightarrow p \in O(\sqrt{n})$$

رابطه‌ی بالا طبق قسمت الف درست است. حال که می‌دانیم $m \leq p$ پس:

$$m \leq p \rightarrow p \in O(\sqrt{n}) \rightarrow m \in O(\sqrt{n})$$