امیرحسین نجفی زاده

۹۸۳۱۰۴۵

سوال ۱ : الف) رشد توابع را مقایسه کنید .

a) $n^{\log n}$, $(\log n)^n$ $\quad \sqrt[n]{\ } \rightarrow \quad n^{\frac{\log n}{n}} \quad \square \quad \log n$

$$n \to \infty \; ; \; \frac{\log n}{n} \to 0$$

$$n \to \infty \Rightarrow n^0 < \underset{\sim\sim}{\log n}$$

پس رشد $(\log n)^n$ بیشتر است .

b) $\dfrac{n^2}{\log n}$, $n(\log n)^2$

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} \Rightarrow \frac{\ln 2 \times n^2}{\ln n} \quad , \quad \frac{n}{(\ln 2)^2}(\ln n)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\ln 2 \times n^2}{\ln n}}{\dfrac{n(\ln n)^2}{(\ln 2)^2}} = (\ln 2)^3 \times \frac{n}{(\ln n)^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{HOP} \Rightarrow (\ln 2)^3 \times \frac{1}{\frac{3}{n} \times (\ln n)^2} = \frac{(\ln 2)^3}{3} \times \frac{n}{(\ln n)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{HOP} \Rightarrow \frac{(\ln 2)^3}{3} \times \frac{1}{\frac{2}{n} \ln n} = \frac{(\ln 2)^3}{6} \times \frac{n}{\ln n} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{HOP} \Rightarrow \frac{(\ln 2)^3}{6} \times \frac{1}{\frac{1}{n}} = \frac{(\ln 2)^3}{6} \times n = \infty$$

پس رشد $\dfrac{n^2}{\log n}$ بیشتر است .

ب)

1. $f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

Order

چون در عملیات های جمع و تفریق ، مرتبه ها تغییر نمی کنند (توجه کنید که توابع همگی مثبت هستند پس مرتبه موجود در max این ~~...~~ عملیات ها همواره ثابت است)

پس مرتبه ی n در سمت چپ و راست تساوی یکسان است پس داریم :

$$\begin{cases} f(n) + g(n) = O(f(n) + g(n)) = O(\max(f, g)) \\ f(n) + g(n) = \Omega(f(n) + g(n)) = \Omega(\max(f, g)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(n) + g(n) = \Theta(\max(f, g))$$

2. $f(n) = n^2 \,,\; g(n) = n^3 \,,\; h(n) = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow f(n) = O(g(n)) \,,\quad h(f(n)) \neq O(h(g(n)))$$

3. $f(n) = O(f(n))$

$\Theta(f(n)) = \cancel{1}\, f(n) = 2f(n) \rightarrow$ چون ضریب Order را تغییر نمی دهد

$$\rightarrow f(n) + O(f(n)) = 2f(n) = \Theta(f(n))$$

4. $f(n) = n^n \rightarrow f(\frac{n}{2}) = \frac{n^{n/2}}{2^{n-1}} \,,\; f(n) > 0 \; (n_0 > 0)$

$$\rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{f(\frac{n}{2})} = 2^{n-1} n^{n/2} = \infty$$

$$\longrightarrow f(n) = \omega(f(\tfrac{n}{2}))$$