

for (i = 1 ; i < n ; i++)

for (j = 2i ; j < n ; j += i)

سوال ۳ : الف)

Line 3 → Do something

می‌خواهم تعداد تکرارهای خط 3 را بیابم. اگر $i = p$ باشد $(i < p < n)$:

$$j = 2p \rightarrow j = 3p \rightarrow j = 4p \rightarrow \dots \rightarrow n$$

$$\sum_{p=1}^n \sum_{t=2}^k tp$$

پس لی تکرارهای خط 3 :

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^n \frac{n-2p}{p} = n-2 + \frac{n}{2} - 2 + \dots$$

جمع جلات دنباله حسابی
با قدر نسبت p

$$= n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots + \frac{n}{n} - 2n$$

$$\Rightarrow T(n) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \dots \in O(n \log n)$$

$$\Rightarrow n \log n - 2n \in O(n \log n)$$

پس خط سوم از مرتبه $O(n \log n)$ بار اجرا می‌شود.

ب، برای محاسبه حالت میانگین از احتمال میانگین وزنی استفاده می‌کنیم. در هر مرحله

احتمال وقوع خط 4، $\frac{1}{i}$ است؛ پس :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = p = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \Rightarrow np = n + \frac{n}{2} + \dots + \frac{n}{n}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \in O(n \log n) \Rightarrow np \in O(n \log n) \rightarrow p \in O(\log n)$$

for ($i = 2$; $i \leq n$; $i++$)

$j = i$

while ($j \leq n$)

Line 4 $\rightarrow j = j * j$

1.1 هر بار ادبی ضد 4 در $i = p$ برابر $\lfloor \log_p n \rfloor$ است؟ پس :

$$\sum_{i=2}^n \log_i n = \log_2 n + \dots + \log_n n$$

می‌دانیم که هر $\log_a n$ ($a > 2$) از $\log_2 n$ کمتر هستند پس دنباله‌ی

$n \log_2 n$ از دنباله‌ی فوق بزرگتر است پس :

$$\sum_{i=2}^n \log_i n \in O(n \log n)$$

$$\sum_{i=2}^n \log_i n = p \quad (2.1) \text{ طبق قسمت قبل داریم :}$$

$$= \log_2 n + \dots + \log_n n$$

$$\Rightarrow \log_2 2^{\log_2 n} + \log_2 2^{\log_3 n} + \dots$$

$$\Rightarrow \log_2 2^{\sum \log_i n}$$

$$\Rightarrow \log_2 \left(2^{\sum \frac{\log_i n}{n}} \right)^n = n \log_2 2^{\sum \frac{\log_i n}{n}}$$

$$\sum_{i=2}^{(\log_2 n)} \log_i (1 + \dots + \frac{1}{n}) \Rightarrow n \log_2 2^{\log_2 (\log n)} = n \log_2 (\log n)$$

$$= \log_2 (\log n)$$

(اثبات قسمت ب همین سوال)