امیرحسین نجفی زاده

۹۸۳۱۰۴۵

سوال ۴ : الف) اثبات درستی :

loop invariant : در هر مرحله ، عناصر زیر آرایه [$A[start, ..., (i \bmod n)]$ مرتب شده هستند .

base case : در حالت اولیه $i = start+1$ و ~~j ≤ (n + start-1)~~ $j = (start+n) \% n$ داریم $j = start$ و عضوهای $A[start]$ و $A[start+1]$ مقایسه شده و مرتب می‌شوند پس زیر آرایه $A[start, start+1]$ مرتب شده است و حالت پایه برقرار است .

maintenance : فرض کنید به $j = p$ رسیده باشیم . می‌دانیم زیر آرایه‌ی $A[start, ..., (p \bmod n)]$ به صورت مرتب شده است و حال عنصر $A[(p+1)\%n]$ هم اضافه می‌شود . این عضو تا زمانی که به یک عضو کوچک‌تر از خودش برسد در زیر آرایه‌ی $A[start, ..., (p+1 \bmod n)]$ به عقب رفته (از $A[p]$) و سر آخر در جای خو قرار می‌گیرد . حلقه‌ی درونی این جابه جایی را انجام می‌دهد و روال کار آن بدیهی است پس از اثبات آن گذر می‌کنیم . حال که عنصر جدید سر جای خود قرار گرفت زیر آرایه‌ی $A[start, ..., (p+1) \% n]$ مرتب شده است و loop invariant مجدد برقرار می‌باشد .

termination : زمانی که i از start تا n رفته و از 0 تا $start - 1$ بیاید ، حلقه شکسته شده و الگوریتم تمام می‌شود و طبق شرط حلقه ؛ زیر آرایه‌ی $A[start, ..., start-1]$ مرتب شده است . پس الگوریتم ما درست کار می‌کند .

پیچیدگی زمانی :
الف -

خط اول $= C_0$

خط دوم $= (n+1)C_1$

خط سوم $= nC_2$

خط چهارم $= nC_3$

خط پنجم $= \sum t_i \quad (i = \text{Start}+1, \dots, i = \text{Start})$

خط ششم $= \sum (t_i - 1)$ 〃 〃

خط هفتم $= \sum (t_i - 1)$ 〃 〃

خط هشتم $= nC_4$

$$T(n) = C_0 + nC_1 + C_1 + n(C_2 + C_3) + nC_4 + 3\sum t_i - 2(n-1)$$

$$\Rightarrow T(n) = An + B + C\sum t_i$$

در حالت خوب $\longrightarrow \quad \sum t_i = 0 \longrightarrow T(n) \in O(n)$

در حالت بد $\longrightarrow \quad \sum t_i = \frac{n(n+1)}{2} \longrightarrow T(n) \in O(n^2)$

ب)

$$\rightarrow a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \leq \dots \leq a_n \leq a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$$

$i=0$	$i=1$		$i=\text{Start}$		$i=n-1$	$i=n$
a_0	a_1	$\dots$	$a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$	$\dots$	a_{n-1}	a_n