

《微波技术基础》

Fundamentals of Microwave Technology

Yang Jing¹

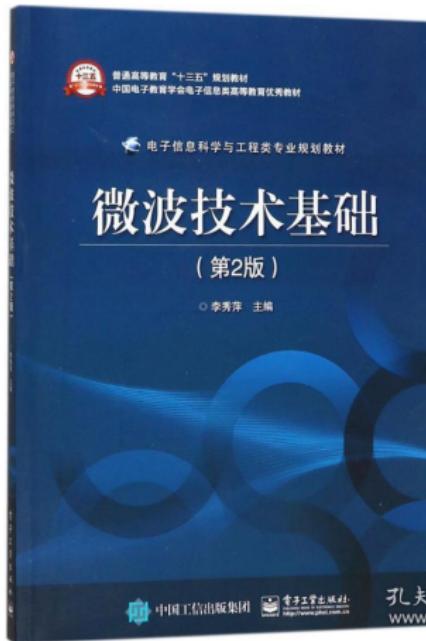
¹School of Electronic Information and Electrical Engineering
Hefei Normal University

2022 年 11 月 2 日



教材

《微波技术基础 (第2版)》，李秀萍编，电子工业出版社，2017.7.



参考书目

-  R.E.Colin 著, 吕继尧译 (1981).
《微波工程基础》 [M].
人民邮电出版社.
-  吴明英, 毛秀华 (1995).
《微波技术》 [M].
西安电子科技大学出版社.
-  廖承恩 (1994).
《微波技术基础》 [M].
西安电子科技大学出版社.
-  梁昌洪.
国家级精品课程-《微波工程基础》网络视频.
西安电子科技大学.
-  赵春晖, 杨莘元 (2003).
《现代微波技术基础》 [M] (第二版).
哈尔滨工程大学出版社.



考核模式

① 平时成绩 100 分，占总成绩 50%

① 学习态度：100 分，占 20%(考勤 100 分，占 100%)

② 课堂参与：100 分，占 30%(课堂表现，课堂回答问题积极性，100 分，占 100%)

③ 平时作业：100 分，占 50%(书面作业 100 分，占 100%)

② 期末考核 100 分，占总成绩 50%(期末笔试 100 分，占 100%)



目录

① 第 6 章 实用微波传输线与波导



第6章 实用微波传输线与波导

- 微波工程分析方法
 - 场论的方法
 - 网络的方法
- 传输线理论 \Rightarrow 波导
 - 当其他人或物靠近双导线时会产生较大影响。这说明，传输线与外界有能量交换，它带来的直接问题是能量损失和工作不稳定。就其原因是**开放 (Open)**造成的特点



第6章 实用微波传输线与波导

- 波导 (Waveguide) 构成

双导线两侧连续加对称 $\lambda/4$ 支节，直到构成封闭 (Closed) 电路为止。如果其导线的宽度是 W ，则波导宽边

$$a = W + 2 \cdot \frac{\lambda}{4} = W + \frac{\lambda}{2}$$
$$a \geq \lambda/2 \text{ 或 } \lambda \leq 2a$$

这构成了波导传输的第一个约束条件

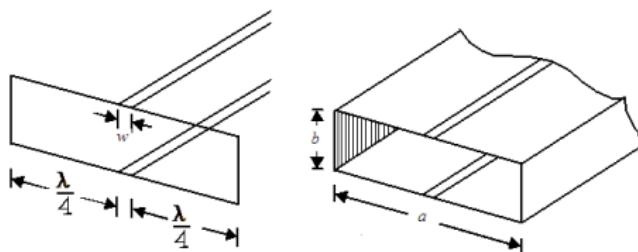


图 1.1: 从双导线到矩形波导

① 第 6 章 实用微波传输线与波导

● 预备知识

- 矩形波导
- 圆波导
- 同轴线
- 平面传输线



预备知识

- 交变电磁场基本关系式

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

无源区，时谐场

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$



预备知识

● 边界条件

两种媒质界面的边界条件

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s \\ \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \end{cases}$$

理想导体表面的边界条件

$$\begin{cases} \hat{n} \times \vec{E}_2 = 0 \\ \hat{n} \times \vec{H}_2 = \vec{J}_s \\ \hat{n} \cdot \vec{D}_2 = \rho_s \\ \hat{n} \cdot \vec{B}_2 = 0 \end{cases}$$



- 交变电磁场的能量关系

对于一封闭曲面 S , 电磁场的能量关系满足复功率定理, 即

$$-\oint_S \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \bullet \hat{n} dS = P_L + j2\omega(W_m - W_e)$$



预备知识

- 导波系统波型

导波系统中的电磁波按纵向场分量的有无，分为以下三种波型（模）

- 横磁波 (TM 波)，又称电波 (E 波): $H_z = 0, E_z \neq 0$
- 横电波 (TE 波)，又称磁波 (H 波): $E_z = 0, H_z \neq 0$
- 横电磁波 (TEM 波): $E_z = 0, H_z = 0$



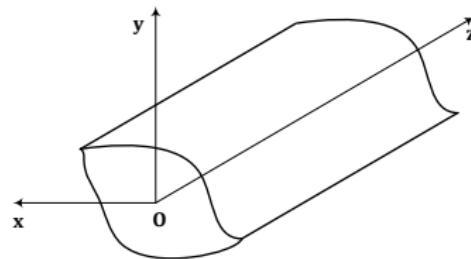
预备知识

- 波导一般解的出发点和假定条件
波导一般解的出发点是频域 Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

波导假定条件

- 波导均匀条件：假定横截面不随 z 而变化
- 媒质均匀条件：波导内部 ϵ, μ 均匀，波导内壁 σ 无限大
- 无源条件：波导内 $\rho, \vec{J} \equiv 0$
- 无限条件：波导在 z 方向无限长



① 第6章 实用微波传输线与波导

- 预备知识
- 矩形波导
- 圆波导
- 同轴线
- 平面传输线



矩形波导——导模

- 矩形波导的一般解

(1.1) 第二式两边取旋度

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -j\omega\mu\nabla \times \vec{H} \\ &= \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = k^2 \vec{E} \\ k &= \omega \sqrt{\mu \epsilon} = 2\pi/\lambda\end{aligned}$$

得到波动方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$



矩形波导——导模

- 纵向场表示横向场

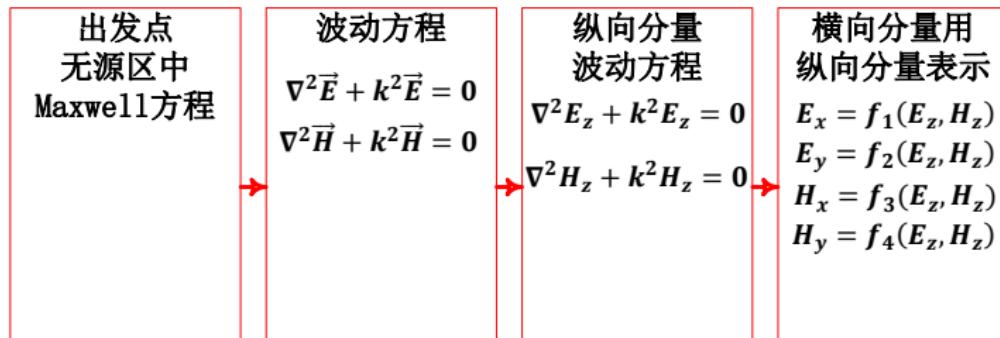


图 1.2: 纵向分量法流程图



矩形波导——导模

纵向分量方程

$$\begin{cases} \nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \\ \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

假定 E_z 或 H_z 可分离变量，即

$$\begin{cases} E_z = E(x, y)Z(z) \\ H_z = H(x, y)W(z) \end{cases} \quad (1.4)$$

且 Laplace 算子 ∇^2 可分解为

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.5)$$

将式 (1.4)、式 (1.5) 代入式 (1.3) 可知



矩形波导——导模

$$\frac{\nabla_t^2 E(x, y)}{E(x, y)} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (1.6)$$

由于其独立性，上式各项均为常数

$$\begin{cases} \frac{1}{Z(z)} \frac{dZ(z)}{dz^2} = \gamma^2 \\ \frac{\nabla_t^2 E(x, y)}{E(x, y)} + k_c^2 = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

其中

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 \quad (1.8)$$

称为截止波数



矩形波导——导模

式 (1.7) 中第一方程的解是

$$Z(z) = C_1 e^{-\gamma z} + C_2 e^{\gamma z} \quad (1.9)$$

有趣的是：波导解的 z 函数与传输线解有惊人的相似，又是入射波和反射波的组合。我们只研究一个波（不论是 TE 或 TM 波），在形式上只写入射波

$$\begin{cases} E_z = E(x, y) e^{-\gamma z} \\ H_z = H(x, y) e^{-\gamma z} \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -\gamma$$



矩形波导——导模

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = j\omega\epsilon(\hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\epsilon E_x \\ -\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \end{cases} \quad (1.11)$$



矩形波导——导模

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j\omega\mu(\hat{x}H_x + \hat{y}H_y + \hat{z}H_z)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega\mu H_x \\ -\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \end{array} \right. \quad (1.12)$$



矩形波导——导模

先整理 E_x, H_y 方程组，得

$$\begin{cases} j\omega\epsilon E_x - \gamma H_y = \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ -\gamma E_x + j\omega\mu H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} j\omega\epsilon & -\gamma \\ -\gamma & j\omega\mu \end{vmatrix} = -k^2 - \gamma^2 = -k_c^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} & -\gamma \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & j\omega\mu \end{vmatrix} = \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} j\omega\epsilon & \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ -\gamma & \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{vmatrix} = j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y}$$



矩形波导——导模

$$\begin{cases} E_x = \frac{D_x}{D} = -\frac{1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\ H_y = \frac{D_y}{D} = -\frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (1.13)$$



矩形波导——导模

再整理 E_y, H_x 方程组，得

$$\begin{cases} j\omega\epsilon E_y + \gamma H_x = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \gamma E_y + j\omega\mu H_x = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} j\omega\epsilon & \gamma \\ \gamma & j\omega\mu \end{vmatrix} = -k^2 - \gamma^2 = -k_c^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -\frac{\partial H_z}{\partial x} & \gamma \\ -\frac{\partial E_z}{\partial y} & j\omega\mu \end{vmatrix} = \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} j\omega\epsilon & -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \gamma & -\frac{\partial E_z}{\partial y} \end{vmatrix} = -j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x}$$



矩形波导——导模

$$\begin{cases} E_y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ H_x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (1.14)$$

把 (1.13) 和 (1.14) 进一步归纳成矩阵形式，得

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\epsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\epsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial E_z} \\ \frac{\partial y}{\partial H_z} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r (1 - j \tan \delta)$$

损耗角正切: $\tan \delta = \sigma / \omega \epsilon_0 \epsilon_r$



矩形波导——TE 模

- 矩形波导的横向解

在矩形波导中存在 TE 和 TM 两类模，这里以 TE 模为例进行讨论，即 $E_z = 0$ ，对于纵向分量只需讨论 H_z

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\nabla_t^2 H_z(x, y)}{H_z(x, y)} + k_c^2 = 0$$

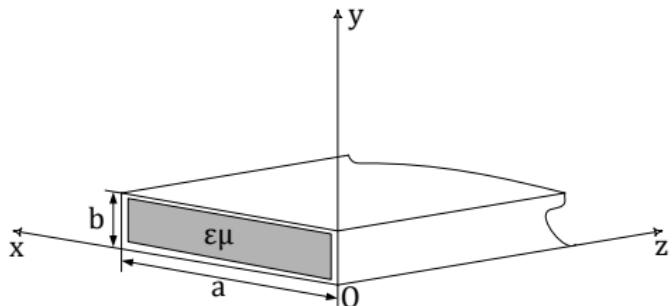


图 1.3: 矩形波导坐标系

矩形波导——TE 模

$$\frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial y^2} = -k_c^2 H_z(x, y) \quad (1.16)$$

$H_z(x, y)$ 可分离变量, 即 $H_z(x, y) = X(x)Y(y)$, (1.16) 可写为

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_c^2 \quad (1.17)$$

式 (1.17) 左边每项都是常数, 可得

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \\ k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \end{cases} \quad (1.18)$$

一般解为

$$X = A \cos(k_x x + \varphi_x); Y = B \cos(k_y y + \varphi_y)$$



矩形波导——TE 模

总的纵向磁场为：

$$H_z = H_0 \cos(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) e^{-\gamma z} \quad (1.19)$$

H_0 在问题中认为是未知数，与具体激励强度有关。

$$\begin{cases} E_x = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c^2} k_y \cos(k_x x + \varphi_x) \sin(k_y y + \varphi_y) e^{-\gamma z} \\ E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -H_0 \frac{j\omega\mu}{k_c^2} k_x \sin(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) e^{-\gamma z} \end{cases}$$

利用边界条件，即波导 4 个边壁上电场切向分量为 0

$$\begin{cases} E_y = 0 & x = 0, x = a \\ E_x = 0 & y = 0, y = b \end{cases}$$



矩形波导——TE 模

$$\begin{cases} x = 0, E_y = 0 \rightarrow \varphi_x = 0 \\ x = a, E_y = 0 \rightarrow k_x a = m\pi \rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}, m = 0, 1, 2, \dots \\ y = 0, E_x = 0 \rightarrow \varphi_y = 0 \\ y = b, E_x = 0 \rightarrow k_y b = n\pi \rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ E_x = j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ E_y = -j \frac{\omega \mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ E_z = 0 \\ H_x = \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ H_y = \frac{\gamma}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \end{cases} \quad (1.20)$$



矩形波导——TE 模

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (1.21)$$

上述 TE 模称为 TE_{mn} 模，其中 m 表示 x 方向变化的半周期数； n 表示 y 方向变化的半周期数。由于 $m = 0$ 及 $n = 0$ 时所有场分量才为 0，因此矩形波导中存在 TE_{m0} 和 TE_{0n} 等波形。若 $a > b$ ，则模 TE_{10} 是最低次波型，其余波型为高次波型。

关于本征模：

以矩形波导为例，尽管在 z 方向它们只可能是入射波加反射波，但是由于横向边界条件的约束，它们由 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模组成，并且只能由 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模组成（后者称为完备性），矩形波导中这些模的完备集合就是本征模。



矩形波导——TM 模

同理，对于 TM 模来说 $H_z = 0$ 总的纵向电场为：

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (1.22)$$

本征值：

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b} \quad m, n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} E_x = -j \frac{\beta}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ E_y = -j \frac{\beta}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ H_x = j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ H_y = -j \frac{\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \\ H_z = 0 \end{cases}$$



矩形波导——TM 模

上述 TM 模称为 TM_{mn} 模，其中 m 表示 x 方向变化的半周期数； n 表示 y 方向变化的半周期数。由于 $m = 0$ 或 $n = 0$ 时所有场分量均为 0，因此矩形波导中不存在 TM_{00} 、 TM_{0n} 及 TM_{m0} 等波形。所以 TM_{11} 是最低次波型，其余波型为高次波型。



矩形波导-场结构

- TE_{10} 模

即 TE_{mn} 模中下标 $m = 1, n = 0$ 的情况，是满足 $a > b$ 条件下的矩形波导中截止频率最低的模式，也叫主模。

$$\begin{cases} H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ E_y = -j \frac{\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ H_x = \frac{j\beta}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \end{cases}$$

只取其实部解，得

$$\begin{cases} H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta z) \\ E_y = \frac{\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta z) \\ H_x = -\frac{\beta}{k_c^2} \left(\frac{\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta z) \end{cases}$$

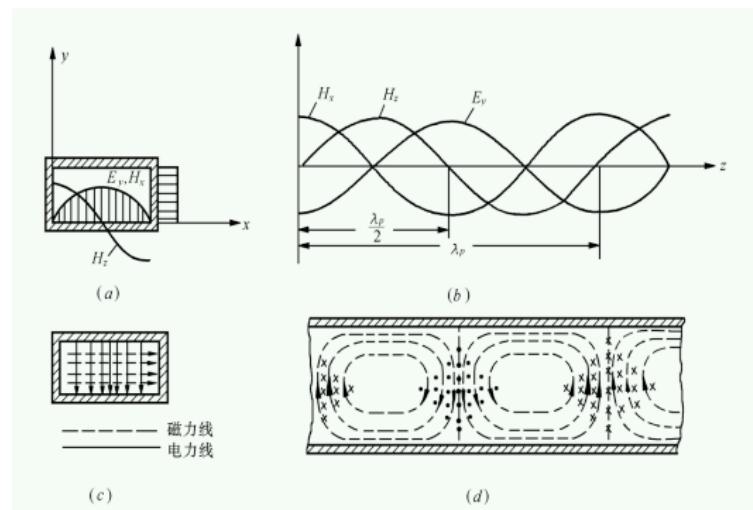


矩形波导——场结构

- TE_{10} 模场结构

TE_{10} 模场强与 y 无关, 场分量沿 y 轴均匀分布。沿 x 轴的变化规律为:

$$E_y \propto \sin(\pi x/a), H_x \propto \sin(\pi x/a), H_z \propto \cos(\pi x/a)$$



- (a) 场分量沿 x 轴变化规律
- (b) 场分量沿 z 轴变化规律
- (c) 矩形波导横截面场分布
- (d) 矩形波导纵剖面场分布

图 1.4: 矩形波导 TE_{10} 模场分量分布规律

矩形波导——场结构

某一时刻 TE_{10} 模完整的场分布，随时间推移，场分布图以相速 v_P 沿传输方向移动

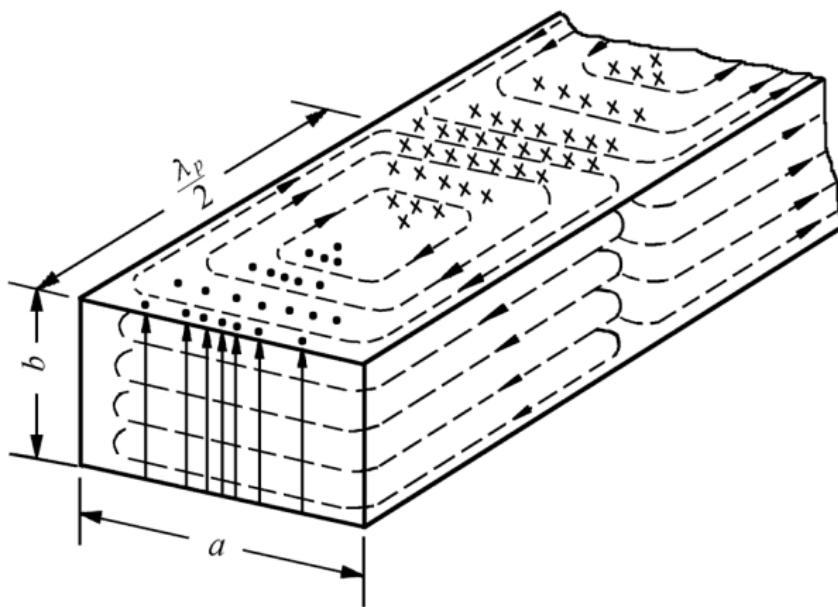
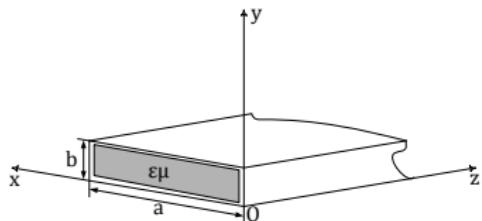


图 1.5: 矩形波导 TE_{10} 模场分布图

矩形波导——管壁电流

- 根据导体中电磁波传播，在微波波段，趋肤效应使感应电流在很薄的波导内壁表面流动——称为**壁电流**

$$\vec{J}_S = \hat{n} \times \vec{H}_{\tan}$$



以 TE_{10} 模为例

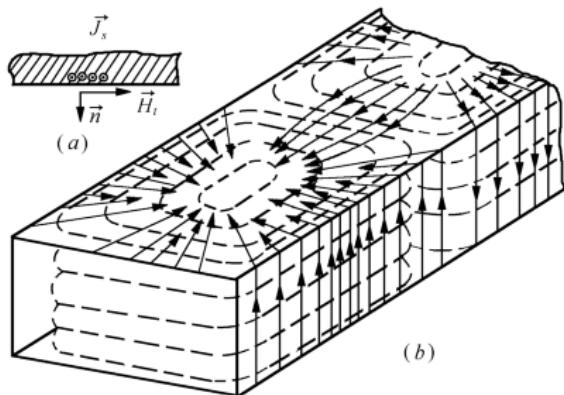
$$\begin{cases} \vec{J}_S|_{y=0} = \hat{y} \times [\hat{x}H_x + \hat{z}H_z]|_{y=0} = [\hat{x}H_z - \hat{z}H_x]|_{y=0} \\ \vec{J}_S|_{y=b} = -\hat{y} \times [\hat{x}H_x + \hat{z}H_z]|_{y=b} = [-\hat{x}H_z + \hat{z}H_x]|_{y=b} \\ \vec{J}_S|_{x=0} = \hat{x} \times \hat{z}H_z|_{x=0} = -\hat{y}H_z|_{x=0} \\ \vec{J}_S|_{x=a} = -\hat{x} \times \hat{z}H_z|_{x=a} = \hat{y}H_z|_{x=a} \end{cases}$$



矩形波导——管壁电流

$$\vec{J}_S(y=0) = [\hat{x}H_{10}\cos(\pi x/a) - j\hat{z}\frac{\beta a}{\pi}H_{10}\sin(\pi x/a)]$$

$$\vec{J}_S(y=b) = [-\hat{x}H_{10}\cos(\pi x/a) + j\hat{z}\frac{\beta a}{\pi}H_{10}\sin(\pi x/a)]$$



面电流与磁力线、表面法向正交

$$\vec{J}_S(x=0) = -\hat{y}H_{10}$$

$$\vec{J}_S(x=a) = -\hat{y}H_{10}$$

图 1.6: 矩形波导 TE_{10} 模管壁电流分布



矩形波导——管壁电流

中间的源由场的变化——也即位移电流 $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 形成的。

在波导中凡是**切割电流**都要引起辐射和损耗，如图 1.7 所示，所以波导与波导连接时一定要处理好。

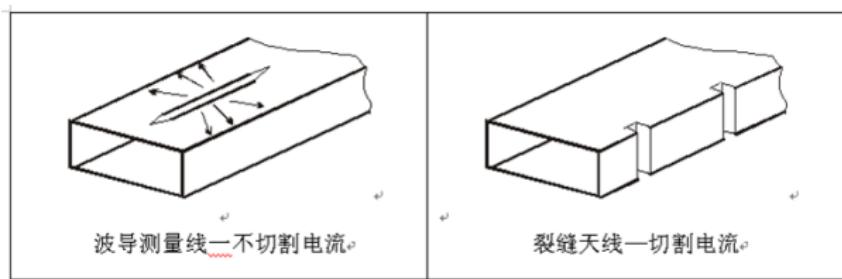


图 1.7: 不切割电流和切割电流的波导



矩形波导——传输特性

- 截止特性

由于 $k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = k^2 - \beta^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, 而传播相位因子 $e^{-j\beta z}$ 中, 如 β 需要是实数, 必须满足

$$\beta^2 = k^2 - k_c^2 > 0 \text{ 或 } k > k_c$$

对于 TE_{10} 模来说, 必须要满足

$$\frac{2\pi}{\lambda} > \frac{\pi}{a} \quad \lambda < 2a \quad (1.23)$$

为此, 定义

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad (1.24)$$

其中, $\lambda_c = 2a$ 称为截止波长; k_c 是对应的截止波数。



矩形波导——传输特性

TE 波和 TM 波的截止频率为

$$f_c = \frac{\nu}{\lambda_c} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

截止波长：

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$$

截止条件可记为：

$$f < f_c \text{ 或 } \lambda > \lambda_c$$

截止波长不仅与波导尺寸 a 和 b 有关，而且与决定波型的 m 和 n 有关，
截止频率还与介质特性有关。在这种意义上，波导是一个高通滤波器，
“低频”信号无法通过。



矩形波导——传输特性

当波导尺寸 a 和 b 给定时，将不同 m 和 n 值代入，即可得到不同波型的截止波长。其分布如图

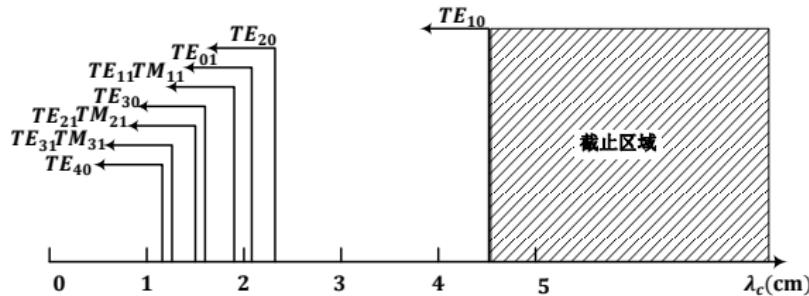


图 1.8: BJ-100 型波导不同波型截止波长分布图

从图中可以看到， TE_{10} 模的截止波长最长，右边的阴影区为截止区。



矩形波导——传输特性

- 模式简并

不同导模的截止波长 λ_c 相同现象

相同的波型指数 m 和 n 的 TE_{mn} 和 TM_{mn} 的截止波长相同，矩形波导的导模具有双重简并。

- 主模 TE_{10} 模——主模

- ① 通常矩形波导工作在 TE_{10} 单模传输情况，因为 TE_{10} 模容易实现单模传输。
- ② 当工作频率一定时传输 TE_{10} 模的波导尺寸最小
- ③ 若波导尺寸一定，则实现单模传输的频带最宽。

为了实现 TE_{10} 单模传输，则要求电磁波的工作波长必须满足下列条件

$$\begin{cases} \lambda_c(TE_{20}) < \lambda < \lambda_c(TE_{10}) \\ \lambda > \lambda_c(TE_{01}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < \lambda < 2a \\ \lambda > 2b \end{cases}$$

当工作波长给定时，若要实现 TE_{10} 单模传输，则波导尺寸必须满足

$$\lambda/2 < a < \lambda \quad b < \lambda/2$$



矩形波导——传输特性

- 波导波长 λ_g

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (1.25)$$

很明显，波导波长 λ_g 大于自由空间波长 λ 。设传播常数 $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ ，则有

$$\beta^2 = k^2 - k_c^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2$$

即可推导得

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$



矩形波导——传输特性

- 相速 v_p

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} > c \quad (1.26)$$

已知相位因子构成的等相位面

$$\omega t - \beta z = const$$

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi c/\lambda}{2\pi/\lambda_g} = c \frac{\lambda_g}{\lambda} \\ &= \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \end{aligned}$$

显然相速 v_p 大于自由空间光速，但相速并不是能量传播速度。



矩形波导——传输特性

- 群速 v_g

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - k_c^2}$$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{2} \frac{2\omega \epsilon \mu}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{k^2/\omega}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{v_p}{c^2}$$

$$v_g = \frac{c^2}{v_p} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} < c \quad (1.27)$$

$$v_p v_g = c^2$$



矩形波导——传输特性

- 色散

TE 波和 TM 波的相速和群速都随波长而变化，即是频率的函数，这种现象称为 “**色散**”。因此，TE 波和 TM 波统称为 “色散波”；而 TEM 波的相速和群速相同，且与频率无关，没有色散现象，故称为 “非色散波”。

波导色散现象与基于媒质特性产生的色散现象不同。由于我们已假定波导中媒质是线性的，即不随频率变化，所以波导中电磁波产生色散的原因是由**波导系统本身的特性（边界条件）**所引起的。



矩形波导——传输特性

- 波型阻抗

$$Z = \frac{E_{u1}}{H_{u2}} = -\frac{E_{u2}}{H_{u1}}$$

$$Z_{TEM} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (1.29)$$

$$Z_{TE} = \left| \frac{E_t}{H_t} \right| = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{k}{\beta}} = \eta \frac{\lambda_g}{\lambda} = \eta \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}} \quad (1.30)$$

$$Z_{TE_{10}} = \left| \frac{E_y}{H_x} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \bullet \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}} \quad (1.31)$$

$$Z_{TM} = \left| \frac{E_t}{H_t} \right| = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{\beta}{k}} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2} \quad (1.32)$$



矩形波导——传输特性

- TE_{10} 模的功率和容量

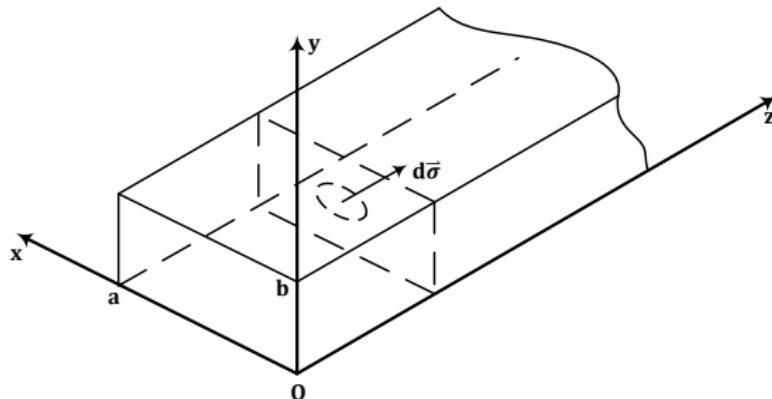


图 1.9: 计算功率时的面积元

$$P = \iint_S \vec{S} \bullet d\vec{\sigma} = \iint_S \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) \bullet \hat{z} dx dy$$

$\vec{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*)$ 是 Poynting 矢量, $d\vec{\sigma}$ 是 面积元

矩形波导——传输特性

$$\begin{aligned}\vec{s} \bullet d\vec{\sigma} &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \sin^2 \left(\frac{\pi}{a} x \right) dx dy \\ P &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} \int_0^a \int_0^b \sin^2 \left(\frac{\pi}{a} x \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta} b \int_0^a \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi}{a} x \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{4} \frac{E_0^2}{\eta} ab\end{aligned}$$

空气波导 $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi$, 因此 $P = \frac{E_0^2 ab}{480\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$

非磁介质波导 $\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, 因此 $P = \frac{E_0^2 ab \sqrt{\epsilon_r}}{480\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$

在实际工程中存在功率容量问题, E_0 不能超过击穿场强 E_{max}

$$\text{功率容量 } P_{max} = \frac{E_{max}^2 ab \sqrt{\epsilon_r}}{480\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$



矩形波导——传输特性

- TE_{10} 模衰减

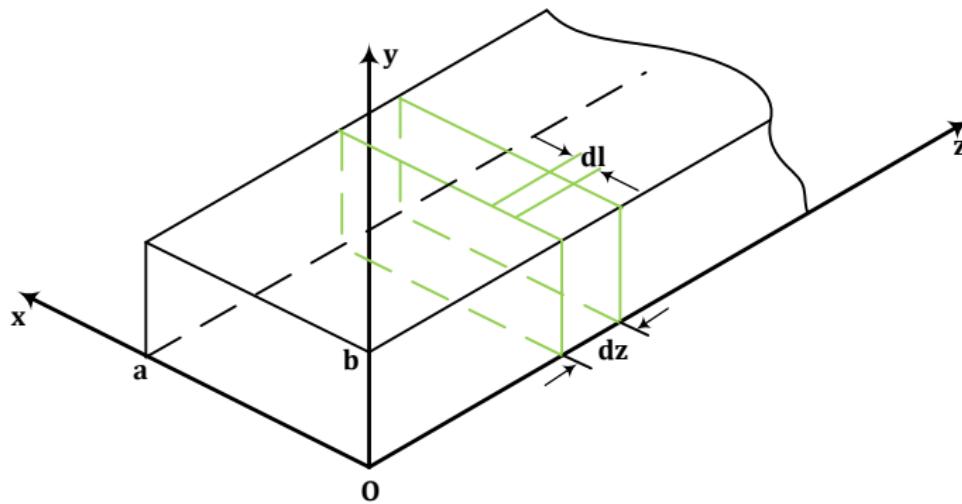


图 1.10: 衰减计算用图

矩形波导——传输特性

一般认为波导内媒质是无耗的，所谓衰减是指电流的壁损耗。如图 1.10 所示，假定 P_0 是理想导体波导的传输功率，则

$$P = P_0 e^{-2\alpha z}$$

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha P_0 e^{-2\alpha z}$$

$$\alpha = \frac{dP/dz}{-2P} = \frac{P_L}{2P}$$

$P_L = -\frac{dP}{dz}$ 表示单位长度的功率损耗，负号代表功率减少。在小衰减的条件下， $P \approx P_0$ 于是

$$\alpha \approx \frac{P_L}{2P_0}$$

在波导内壁 $d\sigma = d/dz$ 上衰减功率

$$\delta P_L = \frac{1}{2} J_{sm}^2 R_s d/dz$$

式中， J_{sm} 为表面电流密度； R_s 为表面电阻



矩形波导——传输特性

$$\oint_C \delta P_L = \frac{1}{2} \oint_C J_{sm}^2 R_s dz dl = \frac{1}{2} R_s dz \oint_C J_{sm}^2 dl = \frac{1}{2} R_s dz \oint_C H_{sm}^2 dl$$
$$P_L = -\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2} R_s \oint_C H_{sm}^2 dl$$

$$P_0 = \frac{1}{2} \iint_S E_{tm} H_{tm} dS = \frac{1}{2} \eta \iint_S H_{tm}^2 dS$$

$$\alpha = \frac{P_L}{2P_0} = \frac{R_s}{2\eta} \frac{\oint_C H_{sm}^2 dl}{\iint_S H_{tm}^2 dS} \text{ NP/m}$$
$$\eta = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{2a})^2}}, R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$$



矩形波导——传输特性

矩形波导 TE_{10} 模的衰减

$$\begin{aligned}\oint_C H_{sm}^2 dI &= 2 \int_0^a (H_x^2 + H_z^2)|_{y=0} dx + 2 \int_0^b (H_x^2 + H_z^2)|_{x=0} dy \\ &= aH_0^2 \left[\left(\frac{\beta a}{\pi} \right)^2 + 1 \right] + 2bH_0^2\end{aligned}$$

$$\iint_S H_{tm}^2 dS = \int_0^a \int_0^b H_x^2 dx dy = \frac{ab}{2} \left(\frac{\beta a}{\pi} \right)^2 H_0^2$$

$$\alpha = \frac{P_L}{2P_0} = \frac{R_s}{2\eta} \frac{\oint_C H_{sm}^2 dI}{\iint_S H_{tm}^2 dS} = \frac{R_s}{b\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]$$



矩形波导——本征模

以矩形波导为例，尽管在 z 方向它们只可能是入射波加反射波，但是由于横向边界条件，它们由 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模组成并且它们只能由组成（后者称为完备性），矩形波导中这些模的全部波的完备集合——即本征模。

任何情况的可能解，只能在本征模里找，具体场合所不同的仅仅是比例和组合系数，事实上，这样就把求复杂场函数的问题变换成了求各个模式的系数。



矩形波导——本征模

- 完备性

矩形波导中不论放置什么障碍物和边界条件，它们里边存在的是 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模式，而且，它们也只能存在 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模式，具体情况所不同的仅仅是各种模式的比例和组合。

- 正交性

本征模中各个模式是相互正交的，也就是说，它们之间没有功率和能量的交换，即各模式相互独立，在 Fourier 分析中表明

$$\begin{cases} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \\ \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right) \end{Bmatrix} dx = 0 & m \neq l \\ \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{p\pi}{b}y\right) \\ \sin\left(\frac{p\pi}{b}y\right) \end{Bmatrix} dy = 0 & n \neq p \end{cases}$$

上式保证了每一种模式的独立性



矩形波导——本征模

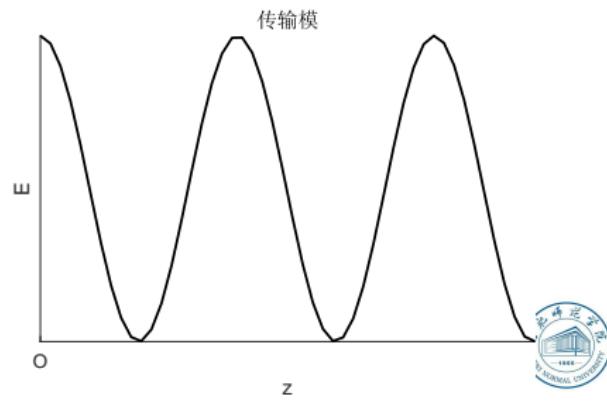
- 传输模和消失模 (evanescent mode)

由于频率的选择，每一种模都有可能成为传输模或消失模
截止波数：

$$k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda_{cmn}}$$

- ① 传输模 $\lambda < \lambda_{cmn}$

$$\begin{aligned} e^{-j\beta z} \\ \beta = (2\pi/\lambda)\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2} \end{aligned}$$



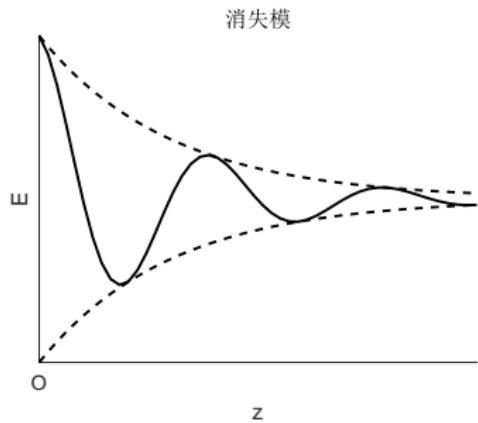
矩形波导——本征模

- 传输模和消失模 (evanescent mode)

② 消失模 $\lambda > \lambda_{cmn}$

$$e^{-\gamma z}$$

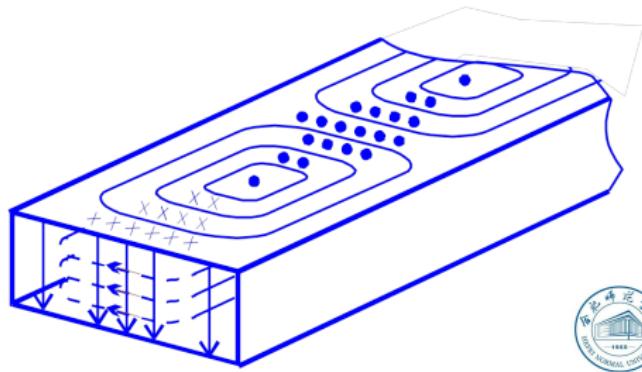
$$\gamma = (2\pi/\lambda_c) \sqrt{1 - (\lambda_c/\lambda)^2}$$



矩形波导

主模 TE_{10} 模小结

$$\begin{cases} E_y = \frac{-j\omega\mu a}{\pi} H_{10} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \\ H_x = \frac{j\beta a}{\pi} H_{10} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \\ H_z = H_{10} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \\ E_x = E_z = H_y = 0 \end{cases}$$



矩形波导

- 传播条件:

$$\lambda < \lambda_c = 2a$$

- 波导波长:

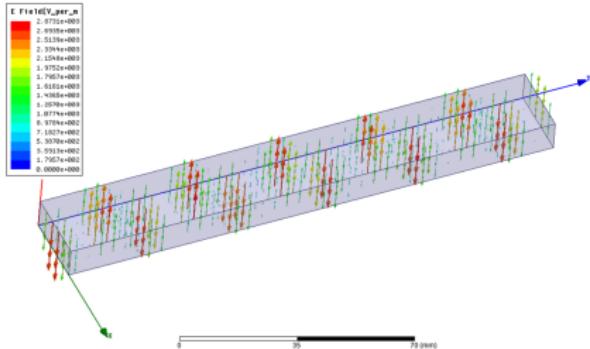
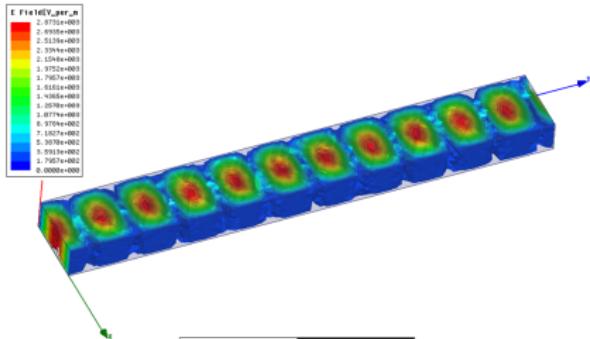
$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$$

- 相速:

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$$

- 波阻抗:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$$



矩形波导

TE_{10} 波表达式，是以 H_z 为领矢矢量，然而在实用上，也可以用 E_y 作为领矢矢量

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -j\beta \\ 0 & E_y & 0 \end{bmatrix} = j\beta E_y \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{k} = -j\omega\mu(H_x \hat{i} + H_y \hat{j} + H_z \hat{k})$$

$$E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu} E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_z = j \frac{1}{\omega\mu} \left(\frac{\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$$



矩形波导

[例 1] BJ-100 波导, $a \times b = 22.86 \times 10.16 mm^2$, 求单模传输的波长范围和频率范围。

[解] 已经知道单模传输条件是 $\lambda_{cmn} < \lambda < 2a$

$$\lambda_{c10} = 2a = 45.72 mm \quad \lambda_{c11} = \frac{2}{\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2}} = 18 mm$$

$$\lambda_{c20} = a = 22.86 mm \quad \lambda_{c21} = \frac{2}{\sqrt{(2/a)^2 + (1/b)^2}} = 15.10 mm$$

$$\lambda_{c01} = 2b = 20.32 mm \quad \lambda_{c30} = \frac{2}{3}a = 15.25 mm$$



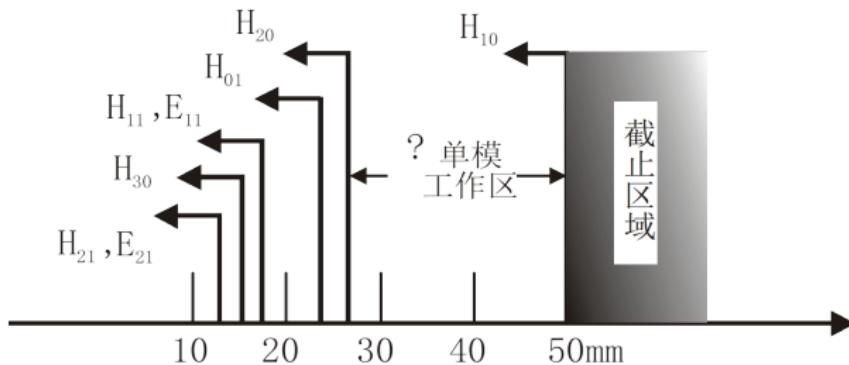
矩形波导

十分明显，第二模式是 $\lambda_{c20} = 22.86mm$ 。因此，单模传输

$$22.86mm < \lambda < 45.72mm$$



$$6.55GHz < f < 13.10GHz$$



① 第 6 章 实用微波传输线与波导

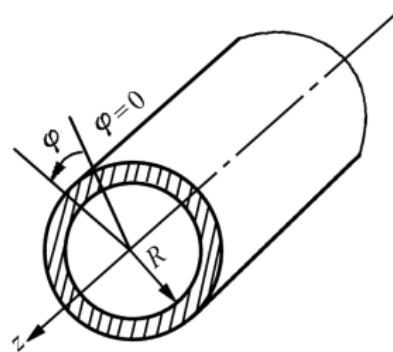
- 预备知识
- 矩形波导
- 圆波导
- 同轴线
- 平面传输线



圆波导

圆波导是横截面为圆形的空心金属管，如图所示，其尺寸半径为 R 。

- ① 圆波导的提出来自实践的需要。例如，雷达的旋转搜索，如果没有旋转关节，那只好发射机跟着转。像这类应用中，圆波导成为必须器件。



以后要用到的极化衰减器，多模或波纹喇叭，都会应用到圆波导。可以说，几何对称性给圆波导带来广泛的用途和价值。



圆波导

- ② 从力学和应力平衡角度，机加工圆波导更为有利，对于误差和方便性等方面均略胜矩形波导一筹
- ③ 根据微波传输线的研究发现：功率容量和衰减是十分重要的两个指标。这个问题从广义上看

$$\begin{cases} \text{功率容量} & P_{max} \propto S (S \text{是截面}) \\ \text{衰减} & \alpha \propto L (L \text{是周长}) \end{cases}$$

引出一个品质因数 F

$$F = \frac{P_{max}}{\alpha} = \frac{S}{L}$$

很明显，在相同周长条件下，圆面积最大



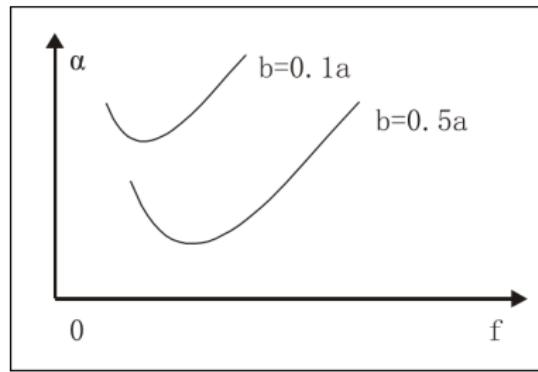
圆波导

④ 矩形波导中存在的一一个矛盾

当我们深入研究波导衰减，发现频率升高时，衰减在矩形波导中上升很快。仔细分析表明，衰减由两部分组成：一部分成为纵向电流衰减，另一部分是横向电流衰减。

当频率升高时，横向电尺寸加大，使横向电流衰减反而减少。这样所构成的矛盾因素使衰减有了极值。

而以后在圆波导中将会发现，有的波型无纵向电流，因此，若采用这种波形会使高频时衰减减小。



圆波导

由于圆波导具有损耗较小和双极化特性，所以常用作天线馈线和微波谐振腔，也可用作较远距离的传输线。

根据圆波导具有的轴对称性，宜采用圆柱坐标系来分析。



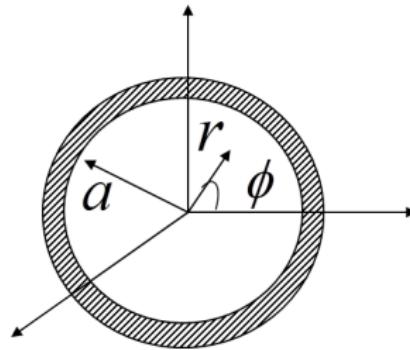
圆波导——导模

- 圆形波导一般解
在圆柱坐标下

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

纵向场分量满足 Helmholtz 方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_c^2 \right) \begin{Bmatrix} E_z(r, \varphi) \\ H_z(r, \varphi) \end{Bmatrix} = 0$$



圆波导——导模

以 TE 波为例, 即 $E_z = 0$

$$H_z = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$$

$$Z(z) = ce^{-j\beta z} \rightarrow H_z = R(r)\Phi(\varphi)e^{-j\beta z}$$

代入到 Helmholtz 方程有:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} = -k_c^2 H_z \quad k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \\ r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k_c^2 r^2 - m^2) R = 0 \end{cases}$$



圆波导——导模

其解分别是

$$\begin{cases} \Phi(\varphi) = c_1 \cos m\varphi + c_2 \sin m\varphi = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \\ R(r) = c_3 J_m(k_c r) + c_4 Y_m(k_c r) = \begin{cases} J_m(k_c r) \\ Y_m(k_c r) \end{cases} \end{cases}$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为常数。 $m = 0, 1, 2, \dots$ 为整数。

边界条件：

- ① 有限条件： $R(r = 0)$ 有限性
- ② 周期性： $\Phi(\varphi = 0) = \Phi(\varphi = 2\pi)$
- ③ 理想导体条件： 切向分量为零

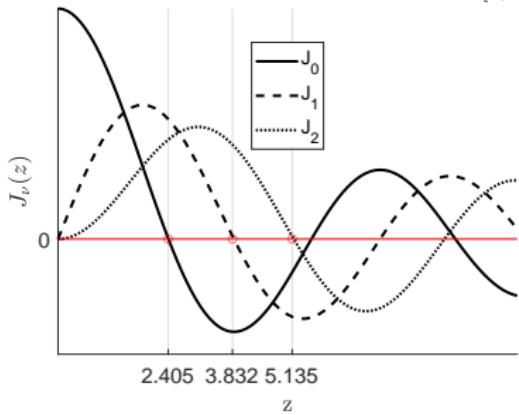
本征解

$$H_z = H_0 J_m(k_c r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-j\beta z}$$

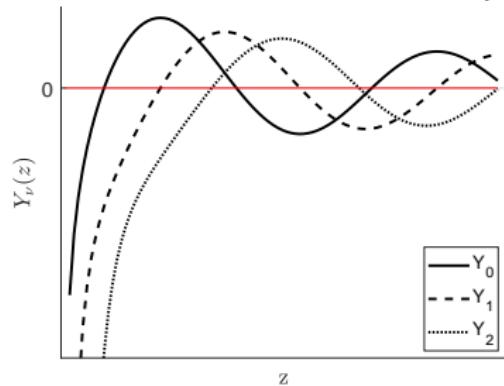


圆波导——导模

Bessel Functions of the First Kind for $\nu \in [0, 2]$



Bessel Functions of the Second Kind for $\nu \in [0, 2]$



圆波导——导模

- 纵向分量法

利用纵向分量法表示横向分量

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = j\omega\epsilon E_r \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = j\omega\epsilon E_\varphi \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right] = j\omega\epsilon E_z \end{cases}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -j\omega\mu H_r \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega\mu H_\varphi \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right] = -j\omega\mu H_z \end{cases}$$



圆波导——导模

$$\begin{bmatrix} E_r \\ H_\varphi \\ H_r \\ E_\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{k_c^2} \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 0 & -j\omega\mu \\ 0 & -\gamma & j\omega\mu & 0 \\ 0 & j\omega\epsilon & -\gamma & 0 \\ -j\omega\epsilon & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

边界条件

$$E_{0\varphi}(r, \varphi)|_{r=a} = 0 \quad TE \text{ 导波}$$
$$E_{0z}(r, \varphi)|_{r=a} = 0 \quad TM \text{ 导波}$$



圆波导——TE 模

$$H_z(r, \varphi, z) = H_0 J_m(k_c r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-j\beta z}$$

$$E_\varphi(r, \varphi, z) = \frac{j\omega\mu}{k_c} H_0 J'_m(k_c r) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{-j\beta z}$$

$$E_{0\varphi}(r, \varphi)|_{r=a} = 0 \quad J'_m(k_c a) = 0$$

令 u'_{mn} 为 Bessel 函数导数的根，本征值

$$k_{cmn} = u'_{mn}/a \quad n = 1, 2, \dots$$



圆波导——TE 模

表 1.1: 圆波导中 TE 模截止波长值

波型	u'_{mn}	λ_c^1
H_{11}	1.841	$3.41a$
H_{21}	3.054	$2.06a$
H_{01}	3.832	$1.64a$

$^1 \lambda_{cmn} = \frac{2\pi a}{u'_{mn}}$



圆波导——TE 模

TE 基本解为

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = 0 \\ H_z(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} J_m \left(\frac{u'_{mn}}{a} r \right) \cos m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ \sin m\varphi \\ E_r = \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega \mu m a^2}{(u'_{mn})^2 r} H_{mn} J_m \left(\frac{u'_{mn}}{a} r \right) \sin m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ \cos m\varphi \\ E_{\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega \mu a}{u'_{mn}} H_{mn} J'_m \left(\frac{u'_{mn}}{a} r \right) \cos m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ \sin m\varphi \\ H_r = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{j\beta a}{u'_{mn}} H_{mn} J'_m \left(\frac{u'_{mn}}{a} r \right) \cos m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ \sin m\varphi \\ H_{\varphi} = \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\beta m a^2}{(u'_{mn})^2 r} H_{mn} J_m \left(\frac{u'_{mn}}{a} r \right) \sin m\varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ \cos m\varphi \end{array} \right.$$



圆波导——TE 模

波型指数 n 表示场沿半径分布的最大值个数

圆波导 TE 模的波阻抗为

$$Z_{TE} = \frac{E_r}{H_\varphi} = -\frac{E_\varphi}{H_r} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{k\eta}{\beta}$$

传播常数

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - k_{cmn}^2} = \sqrt{k^2 - (u'_{mn}/a)^2}$$

截止波长

$$\lambda_{cmn} = 2\pi a / u'_{mn}$$

截止频率

$$f_{cmn} = \frac{k_{cmn}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{u'_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}}$$



圆波导——TM 模

完全类似，用边界条件确定 k_c

在 $r = a$ 处， $E_\varphi = 0, E_z = 0$ ，即

$$J_m(k_c a) = 0$$

设第一类 Bessel 函数 m 阶第 n 个根为 u_{mn} ，则

$$k_c a = u_{mn} \quad n = 1, 2, \dots$$

可得

$$k_c = \frac{u_{mn}}{a} \quad \lambda_c = \frac{2\pi a}{u_{mn}}$$



圆波导——TM 模

TM 基本解为

$$\left\{ \begin{array}{l} H_z = 0 \\ E_z(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} J_m \left(\frac{u_{mn}}{a} r \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_r = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{j\beta a}{u_{mn}} E_{mn} J'_m \left(\frac{u_{mn}}{a} r \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_{\varphi} = \pm \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\beta m a^2}{u_{mn}^2 r} E_{mn} J_m \left(\frac{u_{mn}}{a} r \right) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_r = \mp \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j\omega \epsilon m a^2}{u_{mn}^2 r} E_{mn} J_m \left(\frac{u_{mn}}{a} r \right) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_{\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-j\omega \epsilon a}{u_{mn}} E_{mn} J'_m \left(\frac{u_{mn}}{a} r \right) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} e^{j(\omega t - \beta z)} \end{array} \right.$$



圆波导——TM 模

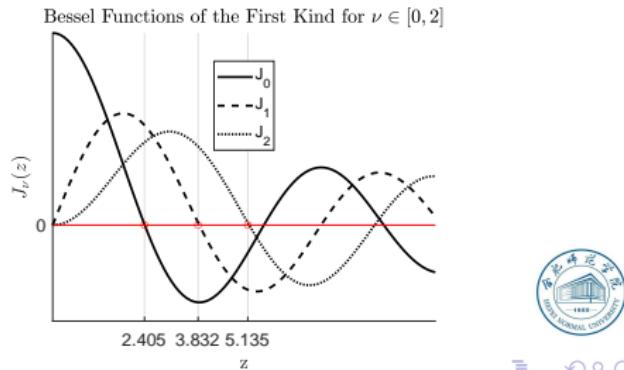
表 1.2: 圆波导中 TM 模截止波长值

波型	u_{mn}	λ_c^1
E_{01}	2.405	$2.62a$
E_{11}	3.832	$1.64a$
E_{21}	5.135	$1.22a$

$$^1 \lambda_{cmn} = \frac{2\pi a}{u_{mn}}$$

圆波导 TM 模的波阻抗为

$$Z_{TM} = \frac{E_r}{H_\varphi} = -\frac{E_\varphi}{H_r} = \frac{\beta}{\omega\epsilon}$$



圆波导——简并

- ① 圆波导中 TE 模和 TM 模有无限多个

$n = 0$ 表示第 0 个根，也即， $u'_{mn} = u_{mn} \equiv 0$ ，也即 TE_{m0} , TM_{m0} 模不存在。

但是它却可以存在 TE_{0n} , TE_{mn} , TM_{0n} 和 TM_{mn} 模，其中 $m = 0$ 表示在圆周方向上不变化

- ② TE 模截止波长取决于 m 阶 Bessel 函数导数第 n 个根

$$\lambda_{cTE} = \frac{2\pi a}{u'_{mn}}$$

TM 模截止波长取决于 m 阶 Bessel 函数第 n 个根

$$\lambda_{cTM} = \frac{2\pi a}{u_{mn}}$$



圆波导——简并

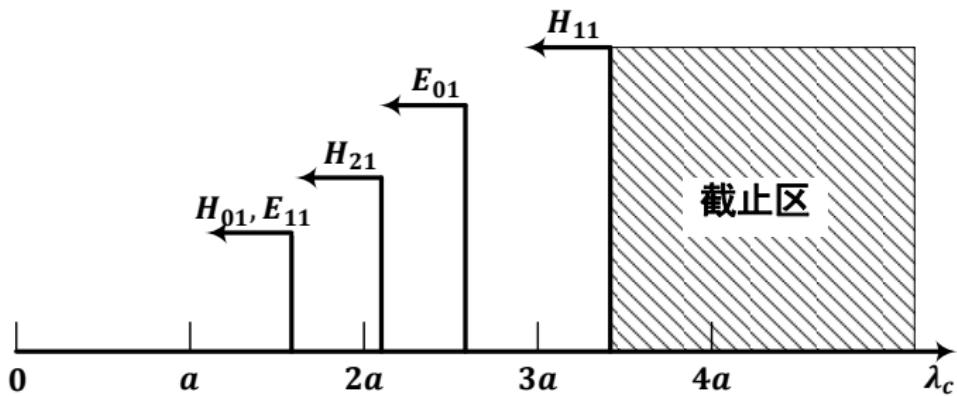


图 1.11: 圆波导的截止与传播区域

圆波导——简并

③ 圆波导的两种简并

- 极化简并——即 $\sin m\varphi$ 和 $\cos m\varphi$ 两种，相互旋转 90°
圆波导波型的极化简并，使得传输不稳定，这是圆波导应用受到限制的主要原因。

- 另一种简并

E_{1n} 和 H_{0n} 截止波长 λ_c 相同

Bessel 函数有递推公式：

$$xJ_n' + nJ_n = xJ_{n+1}, \text{ 取 } n = 0, \text{ 有 } J_0'(x) = -J_1(x)$$

因为 H_{0n} 是 J_0' 的第 n 个根， E_{1n} 是 J_1 的第 n 个根，很显然，这两类波型将发生简并。

和矩形波导不同，由于 TE , TM 截止波长的不同物理意义， TE_{mn} 和 TM_{mn} 不发生简并

④ 波型指数 m, n 的含义

m 代表沿圆周 φ 分布的整驻波数

n 代表沿半径 r 分布场的最大值个数



圆波导——三种主要波型

圆波导中三种主要波型，即 H_{11} 模， H_{01} 模， E_{01} 模。

① 传输主模—— H_{11} 模

在圆波导中， H_{11} 模截止波长最长， $\lambda_c = 3.412a$ ，是最低型模式也即传输主模。

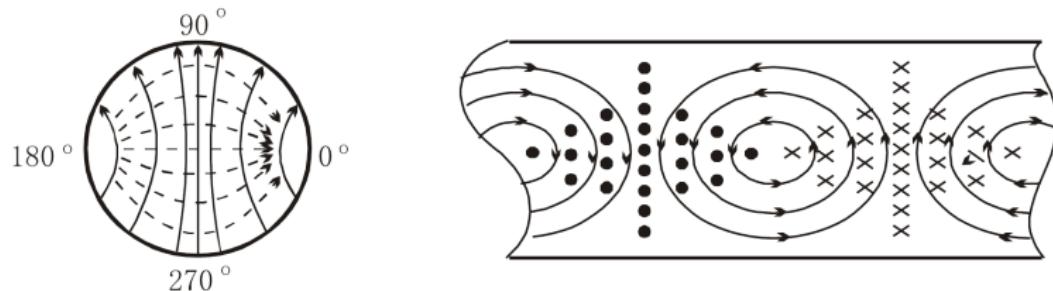


图 1.12: 圆波导 H_{11} 模

圆波导——三种主要波型

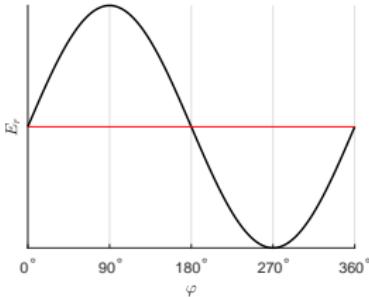
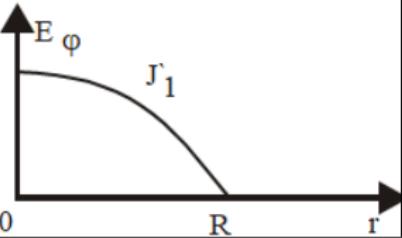
H_{11} 模中的 $m = 1, n = 1, u'_{11} = 1.841$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = 0 \\ H_z(r, \varphi, z) = H_0 J_1 \left(\frac{u'_{11}}{a} r \right) \cos \varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_r = \pm \frac{j\omega \mu a^2}{(u'_{11})^2 r} H_0 J_1 \left(\frac{u'_{11}}{a} r \right) \sin \varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ E_\varphi = \frac{j\omega \mu a}{u'_{11}} H_0 J'_1 \left(\frac{u'_{11}}{a} r \right) \cos \varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_r = -\frac{j\beta a}{u'_{11}} H_0 J'_1 \left(\frac{u'_{11}}{a} r \right) \sin \varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \\ H_\varphi = \pm \frac{j\beta a^2}{(u'_{11})^2 r} H_0 J_1 \left(\frac{u'_{11}}{a} r \right) \sin \varphi e^{j(\omega t - \beta z)} \end{array} \right.$$



圆波导——三种主要波型

表 1.3: H_{11} 模的电场分布

$m=1$	$\varphi = 0^\circ \quad E_r = 0$ $\varphi = 90^\circ \quad E_r \rightarrow max$ $\varphi = 180^\circ \quad E_r = 0$ $\varphi = 270^\circ \quad E_r \rightarrow -max$	
$n=1$	$r = 0 \quad E_\varphi \rightarrow max$ ↓ $r = a \quad E_\varphi = 0$	

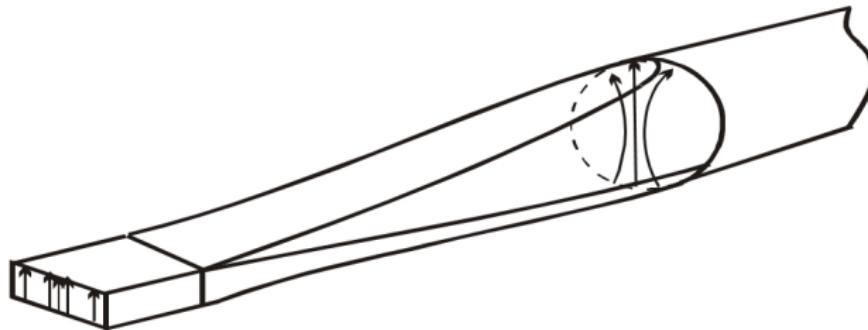


圆波导——三种主要波型

$$\lambda_g = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda/3.412a)^2}$$

可以注意到圆波导中 H_{11} 模与矩形波导中 TE_{10} 模极相似，因此微波工程中方圆过渡均采用 H_{11} 模。

但是， H_{11} 模有两种极化方向。因此一般很少用于微波传输线，而只用于微波元件。



圆波导——三种主要波型

② 损耗最小模—— H_{01} 模

H_{01} 模常作为高 Q 谐振腔和远距离的毫米波传输线的工作模式。由于它是圆电模，也可作为连接元件和天线馈线系统的工作模式。由于它不是主模，用该模式作为工作模式时，必须设法抑制其他模式。

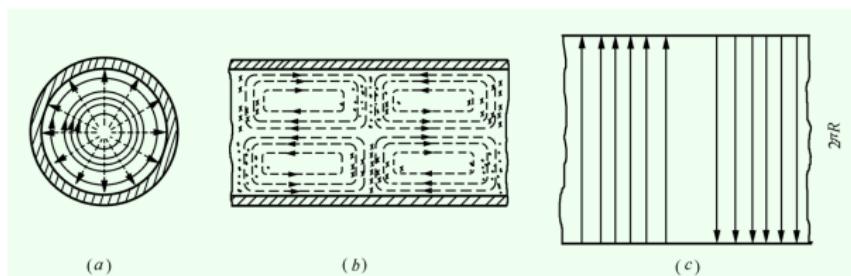


图 1.13: 圆波导 H_{01} 模

圆波导——三种主要波型

场分量

$$\begin{cases} E_\varphi = -j \frac{\omega \mu a}{3.832} H_0 J_1(3.832r/a) e^{-j\beta z} \\ H_r = j \frac{\beta a}{3.832} H_0 J_1(3.832r/a) e^{-j\beta z} \\ H_z = H_0 J_0(3.832r/a) e^{-j\beta z} \end{cases}$$

截止波长

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{3.832} = 1.641a$$

波导波长

$$\lambda_g = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda / 1.641a)^2}$$



圆波导——三种主要波型

为了揭示 H_{01} 模的小衰减特点，让我们考察其壁电流

$$\vec{J}_S = \hat{n} \times \vec{H}_z = -\hat{r}_0 \times \vec{H}_z = |\vec{H}_z| \hat{\varphi}$$

可见电流只有一个方向分量，衰减 α 随 f 上升而下降

$$\alpha_{H_{01}} = \frac{8.686 R_s}{a \sqrt{\mu/\epsilon}} \frac{(\lambda/\lambda_c)^2}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad dB/m$$

作为比较

$$\alpha_{H_{11}} = \frac{8.686 R_s}{a \sqrt{\mu/\epsilon}} \frac{(\lambda/\lambda_c)^2 + 0.42}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad dB/m$$

所以， H_{01} 模可以做高 Q 谐振腔和毫米波远距离传输。



圆波导——三种主要波型

③ 轴对称模—— E_{01} 模

虽然 H_{01} 模和 E_{01} 模都是轴对称模，但 E_{01} 模是截止波长最长的模式。

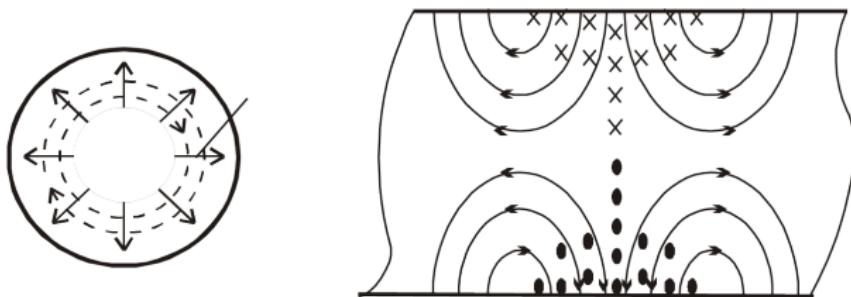
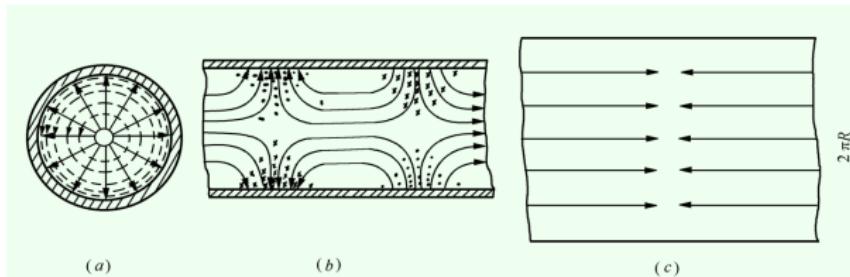


图 1.14: 圆波导中 E_{01} 模



圆波导——三种主要波型

E_{01} 模的场分布如下图所示。图 (a) 表示横截面上的电磁场分布；图 (b) 表示纵剖面上的电磁场分布；图 (c) 为壁电流分布。



E_{01} 模适用于微波天线馈线旋转铰链的工作模式。由于它具有 E_z 分量，便于和电子交换能量，可作电子直线加速器的工作模式。但由于它的管壁电流具有纵向电流，故必须采用抗流结构的连接方式。



圆波导——三种主要波型

场分量

$$\begin{cases} E_z(r, \varphi, z) = E_0 J_0\left(\frac{u_{01}}{a}r\right) e^{-j\beta z} \\ E_r = -\frac{j\beta a}{u_{01}} E_0 J'_0\left(\frac{u_{01}}{a}r\right) e^{-j\beta z} \\ H_\varphi = -\frac{j\omega\epsilon a}{u_{01}} E_0 J'_0\left(\frac{u_{01}}{a}r\right) e^{-j\beta z} \end{cases}$$

$$u_{01} = 2.405, \lambda_c = 2.62a$$

$$\lambda_g = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda / 2.62a)^2}$$



圆波导——三种主要波型

由于 E_{01} 模的特点，常做雷达的旋转关节，如下图

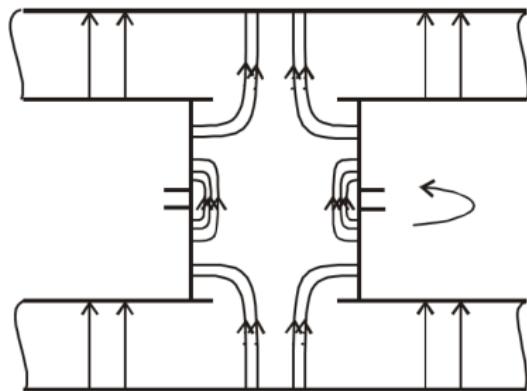


图 1.15: 旋转关节 (Ratation Junction)

圆波导——波型设计

表 1.4: 圆波导波型设计

H_{11} 模	$\lambda_{cE_{01}} < \lambda < \lambda_{cH_{11}}$ $2.62a < \lambda < 3.41a$	$\frac{\lambda}{3.41} < a < \frac{\lambda}{2.62}$ 一般选 $a \approx \frac{1}{3}\lambda$
E_{01} 模	$\lambda_{cH_{21}} < \lambda < \lambda_{cE_{01}}$ $2.06a < \lambda < 2.62a$	$\frac{\lambda}{2.62} < a < \frac{\lambda}{2.06}$
H_{01} 模	$\lambda_{cE_{21}} < \lambda < \lambda_{cH_{01}}$ $1.22a < \lambda < 1.64a$	$\frac{\lambda}{1.64} < a < \frac{\lambda}{1.22}$



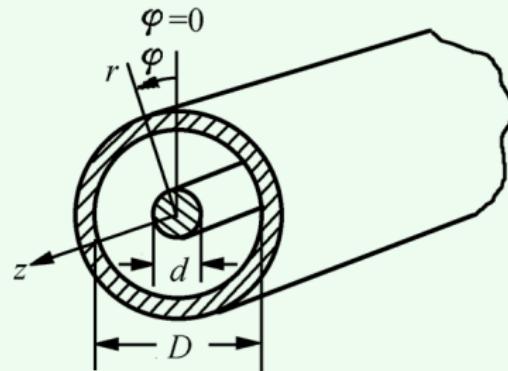
① 第 6 章 实用微波传输线与波导

- 预备知识
- 矩形波导
- 圆波导
- 同轴线
- 平面传输线



同轴线

同轴线是一种双导体传输线。内外导体之间填充高频介质。



在同轴线中既可传输无色散的 TEM 波，也可能存在有色散的 TE 和 TM 波。



同轴线——传输主模 TEM

① TEM 模的场分量和场结构

$$E_z = H_z = 0$$

$$\vec{E}(r, \varphi, z) = \vec{E}_t(r, \varphi, z) = \vec{E}_{0t}(r, \varphi) e^{-j\beta z}$$

由

$$\nabla_t \times \vec{E}_t = -j\omega\mu\hat{z}H_z = 0$$

引入势函数 $\Phi(r, \varphi)$ $\vec{E}_{0t}(r, \varphi) = -\nabla_t \Phi(r, \varphi)$

$$\vec{E}(r, \varphi, z) = \vec{E}_{0t}(r, \varphi) e^{-j\beta z} = -\nabla_t \Phi(r, \varphi) e^{-j\beta z}$$

又 $\nabla \cdot \vec{E}_t = 0$

$$\nabla_t^2 \Phi(r, \varphi) = 0$$



同轴线——传输主模 TEM

势满足拉普拉斯方程

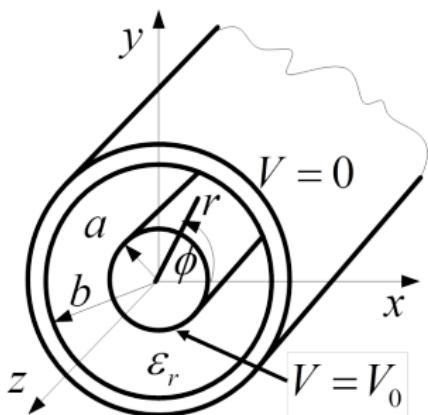
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

边界条件：

$$\Phi(a, \varphi) = V_0$$

$$\Phi(b, \varphi) = 0$$

令 $\Phi(r, \varphi) = R(r)F(\varphi)$



同轴线——传输主模 TEM



同轴线——传输主模 TEM



同轴线——传输主模 TEM



同轴线——传输主模 TEM



同轴线——传输主模 TEM



同轴线



同轴线



同轴线



同轴线



同轴线



① 第6章 实用微波传输线与波导

- 预备知识
- 矩形波导
- 圆波导
- 同轴线
- 平面传输线



平面传输线

上世纪六十年代以来，在微波工程和微波技术上，出现了一次不小的革命，即所谓 MIC(Microwave Integrated Circuit) 微波集成电路——HMIC、MMIC。其特色是体积小、功能多、频带宽，但承受功率小。因此被广泛应用于接收机和小功率元件中，并都传输 TEM 波。

作为这一革命的“过渡人物”是带状线 (Stripline)。它可以看作是同轴线的变形。

