Rapport du miniprojet 1 de Recherche Opérationnelle

Clément Riu et Anne Spitz

2 janvier 2017

Première partie - Un problème de production

1. Programme linéaire

Pour modéliser le problème nous allons utiliser les notations suivantes :

T est l'ensemble des instant du problèmes (les semaines de production). T^* est T privé de la semaine 0. $\mathcal{R}$ est l'ensemble des références qu'il est possible de produire.

Ensuite, les données du problèmes seront : $\forall i \in T$ et $\forall r \in \mathcal{R}$, $s_{i,r}$ le stock de la référence r en semaine i et $x_{i,r}$ la quantité produite en semaine i de la référence r. Enfin $d_{i,r}$ est la demande en référence r la semaine i et c_r est le coût du stock de la référence r. Q est la quantité maximale produite chaque semaine et N est la quantité maximale de référence produite chaque semaine.

On cherche à minimiser le coût total (production et stockage). On cherche donc à minimiser

$$\sum_{i \ \in T^*} \sum_{r \in \mathcal{R}} c_r \times s_{i,r}$$

Nos contraintes sont les suivantes :

- *Contraintes de positivité* : À chaque semaine et pour chaque référence, le stock doit être positif (ou nul). De même, on s'interdit de détruire du stock : on doit donc avoir une production positive (ou nulle) pour chaque référence. On fixe donc

$$\forall i \in T; \forall r \in \mathcal{R}; s_{i,r} \in \mathbb{R}^+$$

$$\forall i \in T; \forall r \in \mathcal{R}; x_{i,r} \in \mathbb{R}^+$$

- À chaque nouvelle semaine, on actualise le stock de la nouvelle semaine avec le stock de la semaine précédente, la production et les références expédiées. On a donc

$$\forall i \in T; \forall r \in \mathcal{R}; s_{i,r} = x_{i,r} + s_{i-1,r} - d_{i,r}$$

- On souhaite satisfaire la demande chaque semaine. On souhaite donc que $\forall i \in T; \forall r \in \mathcal{R}; x_{i,r} + s_{i-1,r} \geq d_{i,r}$. Or, sachant que les stocks sont toujours positifs, cette contrainte est inclue dans la contrainte précédente : on n'a donc pas besoin de rajouter de contrainte supplémentaire dans le modèle.

- D'autre part, on ne peut pas produire plus de N références par semaine, ce qu'on peut traduire par :

$$\forall i \in T^*; \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbf{1}_{x_{i,r}>0} \leq N$$

.

- Enfin, il faut satisfaire la capacité de production de l'usine : On ajoute donc la relation :

$$\forall i \in T^*; \sum_{r \in \mathcal{R}} x_{i,r} \leq Q$$

Notre problème se modélise donc par programme linéaire suivant :

$$\min \quad \sum_{i\ \in T^*} \sum_{r \in \mathcal{R}} c_r \times s_{i,r}$$

sous contraintes :

$$\forall i \in T; \forall r \in \mathcal{R}; s_{i,r} = x_{i,r} + s_{i-1,r} - d_{i,r}$$
$$\forall i \in T^*; \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbf{1}_{x_{i,r}>0} \leq N$$
$$\forall i \in T^*; \sum_{r \in \mathcal{R}} x_{i,r} \leq Q$$
$$\forall i \in T; \forall r \in \mathcal{R}; s_{i,r} \in \mathbb{R}^+$$
$$\forall i \in T; \forall r \in \mathcal{R}; x_{i,r} \in \mathbb{R}^+$$

Détails d'implémentation :
Pour traduire la condition avec l'indicatrice $\forall i \in T^*; \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathbf{1}_{x_{i,r}>0} \leq N$, on introduit la matrice A, dont l'élément (i,r) vaut 1 si la référence r a été produite pendant la semaine i, et zéro sinon.

On traduit donc la 2e contrainte par :

$$\forall i \in T^*, \sum_{r \in \mathcal{R}} a_{i,r} \leq N$$

2. Résolution avec GLPK

On récupère les trois sets de données envoyés par mails, et on les place dans les fichiers *Q1_ dataset_ 1.dat*, *Q1_ dataset_ 2.dat* et *Q1_ dataset_ 3.dat.*
Le programme linéaire a été traduit dans GLPK dans le fichier *production.mod.*

Première instance

Le programme ne trouve pas de solution réalisable pour la première instance.
En prenant $N' = 3$ (sachant que $N = 2$) et $Q' = Q$, on trouve une solution réalisable, de coût 226. $Q + N$ minore la solution optimale mais n'est pas réalisable, $Q' + N' = Q + N + 1$. Cette instance étant réalisable et s'agissant un problème linéaire en nombres entiers, c'est la solution optimale.

```
test
```