MINIPROJET I DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE 2016-2017

1. Instructions générales

Ce projet se fait par groupe de deux.

Envoyer un mail dès que possible à frederic.meunier@enpc.fr pour inscrire le groupe et recevoir en retour les données numériques pour les expérimentations du problème de production.

Ce projet est à rendre pour le 4 janvier 2017 au plus tard, par mail.

2. Un problème de production

2.1. **Description du problème.** Une ligne de montage produit un ensemble de références, noté $\mathscr{R}$. on veut planifier la production sur T semaines. Pour chaque semaine i, on connaît la demande $d_{i,r} \in \mathbb{R}_+$ pour la référence r. Sur une semaine, on peut produire au plus une quantité totale Q et au plus N références distinctes. On dispose pour chaque référence d'un stock initial $s_{0,r} \in \mathbb{R}_+$, et on peut satisfaire une demande pour une référence sur une semaine donnée en produisant cette référence cette semaine-là et en utilisant le stock de cette référence s'il y en a. Le coût unitaire de stockage de la référence r sur une semaine est noté c_r. On veut concevoir un outil qui permet de dire s'il existe un plan de production qui satisfait la demande, et si oui, qui minimise le coût du stock.

2.2. **Exemple.** On considère le cas où $T = 3$ (on planifie sur 3 semaines), $\mathscr{R} = \{A, B, C\}$ (il y a trois références), $Q = 6$ et $N = 2$. Les autres données sont

Référence A : $s_{0,A} = 3$ et $c_A = 1$

$d_{1,A}$	$d_{2,A}$	$d_{3,A}$
4	6	2

Référence B : $s_{0,B} = 3$ et $c_B = 2$

$d_{1,B}$	$d_{2,B}$	$d_{3,B}$
3	1	3

Référence C : $s_{0,C} = 4$ et $c_C = 2$

$d_{1,C}$	$d_{2,C}$	$d_{3,C}$
4	2	2

En réalisant les productions suivantes pour chacune des références, on parvient à satisfaire la demande :

	semaine		
	1	2	3
A	4	5	0
B	0	1	3
C	2	0	2

Le niveau de stock pour chaque référence et pour chaque fin de semaine est alors (le stock en fin de “semaine” 0 correspond au stock initial)

	semaine			
	0	1	2	3
A	3	3	2	0
B	3	0	0	0
C	4	2	0	0

Le coût total de cette solution est alors $1 \times (3+2+0) + 2 \times (0+0+0) + 2 \times (2+0+0) = 9$. (On ne compte pas le coût du stock pour la “semaine” 0).

Noter que si $Q = 5$ ou si $N = 1$, il n'y a pas de solution réalisable.

En effet, si $Q = 5$, on peut produire au maximum 15 unités sur les trois semaines. Or la demande totale est de 27, le stock initial total est de 10 et $15 + 10 < 27$.

Et si $N = 1$, en semaine 1, on doit produire du A pour satisfaire la demande en A, et donc ni B, ni C ne sont produits, et en semaine 2, il faudrait produire du B et du C.

2.3. **Ce qui est demandé.**

(1) Ecrire un programme linéaire en variables mixtes qui modélise le problème.
(2) A l'aide d'un solver comme GLPK ou GUSEK,
- proposer un plan optimal de production (i.e. la production par référence et par semaine) et son coût pour les trois instances dont vous recevrez par mail les données lors de votre inscription. L'une de ces instances n'est pas réalisable.
- proposer pour l'instance non réalisable des nouvelles valeurs $Q' \geq Q$ et $N' \geq N$ qui rendent le problème réalisable, tout en ayant la quantité $Q' + N'$ la plus petite possible.
- résoudre, toujours pour cette instance, le problème avec ces nouveaux Q' et N'.

3. UN PROBLÈME D'ORDONNANCEMENT DE TRAINS ET DE NAVETTES

3.1. **Description du problème.** On souhaite concevoir une grille horaire cyclique pour les mobiles circulant dans le tunnel sous la Manche. Cette grille est la même pour les deux sens de circulation. Cette grille horaire doit décrire les horaires d'entrée dans le tunnel de chaque mobile sur une heure, étant entendu que cette grille se répète ensuite à l'infini.

Trois types de mobiles circulent[1] : les Eurostars, les navettes transportant des camions de marchandise (dites HGV) et les navettes transportant des passagers en voiture (dites PAX). On veut faire passer toutes les heures (dans chaque sens) un nombre e d'Eurostars, un nombre h d'HGV et un nombre p de PAX.

On indique dans le tableau suivant l'écart minimal en minutes entre toute paire de mobiles. On appelle cet écart le *tampon*. Le tableau se lit de la manière suivante : le nombre à l'intersection de la ligne T_1 et de la colonne T_2 indique le nombre minimal de minutes qui séparent l'entrée d'un mobile de type T_1 dans le tunnel de celle d'un mobile de type T_2, lorsque

[1]En réalité, quatre, mais on fait des hypothèses simplificatrices pour permettre la résolution du problème dans un cadre scolaire.

le mobile de type T_1 précède celui de type T_2.

	E	H	P
E	3	3	2
H	8	3	3
P	8	3	2

E indique le type “Eurostar”, H le type “HGV” et P le type “PAX”.

En plus de ces contraintes d'écart entre les mobiles, on a aussi une contrainte qui impose que si un Eurostar entre dans le tunnel à un horaire donné, un autre Eurostar doit faire de même exactement 30 minutes plus tard.

Pour une grille horaire cyclique donnée, on calcule pour chaque paire de mobiles consécutifs l'écart en minutes séparant leurs départs, diminué du tampon correspondant. On appelle *flexibilité* le minimum de ces quantités.

3.2. **Exemple.** Pour le cas $e = 2$, $h = 2$ et $p = 1$, on considère la grille horaire cyclique suivante, où $E1$ et $E2$ sont les deux Eurostars, $H1$ et $H2$ les deux navettes HGV et P l'unique navette PAX :

mobiles	$E1$	$H1$	P	$E2$	$H2$
horaires (minutes)	0	10	16	30	50

La flexibilité pour cette grille est

$$\min(10-3, 16-10-3, 30-16-8, 50-30-3, 60-50-8) = \min(7, 3, 6, 17, 2) = 2 \text{ minutes.}$$

3.3. **Ce qui est demandé.**

(1) Proposer une grille horaire cyclique (arrondie à la seconde) satisfaisant les contraintes précédentes pour $e = 4$, $h = 8$ et $p = 2$, avec la meilleure flexibilité possible. Contrairement au problème de production précédent, il n'est pas expressément demandé d'utiliser un solver pour répondre aux questions, mais cela est bien entendu autorisé.

(2) Tout en gardant $e = 4$ et $p = 2$, proposer une grille horaire cyclique avec $h > 8$ le plus grand possible, ou montrer que $h = 8$ est le nombre maximal de navettes HGV que l'on faire passer sous ces conditions.

Pour chacune de ces questions, si vous pensez avoir trouvé la solution optimale, justifiez-le.