TP1 : Algorithmes numériques
Résolution de systèmes linéaires : Méthodes directes

15 septembre 2021

1 Sujet

Implémentez les méthodes de Gauss et Cholesky pour la résolution de systèmes linéaires dans le cas :

— Des matrices tests proposées.
— Des matrices creuses générées aléatoirement avec plus de 70% de valeurs nulles.

Une attention particulière est à porter aux structures de données et à l'optimisation des programmes.
De nombreux jeux de données de grandes taille doivent être testés.

L'objectif de cette implementation est de pouvoir valider l'algorithme selon les questions suivantes :

— Peut-on retrouver une solution connue à priori ?
— Stabilité : Le résultat est-il modifié par des calculs dégradés (erreurs accumulées...)
— Conditionnement : quel est l'effet de perturbations des données ?
— Evaluation des coûts en place et en temps .

2 Dossier à constituer

Chaque binôme devra rédiger un petit dossier comportant :

1. Rappel rapide des méthodes.
2. Présentation des programmes commentés
3. Présentation de jeux d'essais pertinents et justifiés.
4. Commentaires des jeux d'essais à partir de données relatives (Pourcentage d'écart, calcul de fonction d'erreurs, vitesse de convergence, complexité pratique, ...)
5. Conclusion générale sur les méthodes (Comparaison, cadre d'utilisation, stabilité,...)

3 Matrices test

— Matrices A avec Bord carrée de dimension n

$$\begin{cases} a_{ii} = 1 \\ a_{1j} = a_{j1} = 2^{1-j} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_{ii} = 1 \\ a_{nj} = a_{jn} = 2^{n-j} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

— Matrices A Ding Dong carrée de dimension n dont l'élément ij est

$$a_{ij} = \frac{1}{2(n-i-j+1.5)}$$

— Matrice A de Franc carrée de dimension n

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j+2 \\ a_{ij} = min\{i,j\} \text{ sinon} \end{cases}$$

— Matrices A de Hilbert carrée de dimension n dont l'élément ij est

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

— Matrices A de Hilbert carrée de dimension n dont l'élément ij est

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j+1}$$

— Matrices A kms carrée de dimension n dépendent d'un paramètre $p \in]0,1[$ dont l'élément ij est

$$a_{ij} = p^{|i-j|}$$

— Matrice A de Lehmer carrée de dimension n

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{i}{j} \text{ si } i \leq j \\ a_{ij} = \frac{j}{i} \text{ sinon} \end{cases}$$

— Matrice A de Lotkin carrée de dimension n

$$\begin{cases} a_{1j} = 1 \text{ si } i = 1 \\ a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \text{ sinon} \end{cases}$$

— Matrice A de Moler carrée de dimension n

$$\begin{cases} a_{ij} = i \text{ si } i = j \\ a_{ij} = min\{i,j\} - 2 \text{ sinon} \end{cases}$$