Optimal Linear Associative Memory (OLAM)

Prof. Dr. Ajalmar Rocha

Disciplina: Inteligência Computacional Aplicada (ICA)
Programa de Pós-Graduação em Eng. de Telecomunicações (PPGET)
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Setembro/2013

Introdução

- Kohonen e Ruohonen (1973) mostram que há uma solução ótima para a matriz de pesos.
- O método **Optimal Linear Associative Memory** (OLAM) tem como princípio básico o uso de técnicas de inversão de matriz.

Kohonen, T., Ruohonen, K. (1973)

Kohonen, T., Ruohonen, K. Representation of associated data by matrix operations. IEEE Trans. on Computers 22 (1973), 701-702.

Formulação do Problema

- Estas técnicas são utilizadas com o intuíto de solucionar a equação

$$\mathbf{XW} = \mathbf{D} \tag{1}$$

em que $\mathbf{W}$ é a matriz de pesos, bem como $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^1 \ldots \mathbf{x}^N\}$ e $\mathbf{D} = \{\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^1 \ldots \mathbf{d}^N\}$ são matrizes representado, respectivamente, os vetores de entrada e os vetores de saída desejadas. Além disto, N representa a quantidade de padrões de treinamento.

- A resolução da Eq. (1) para uma matriz $\mathbf{X}$ quadrada, situação em que a quantidade de componentes q do vetor de pesos $\mathbf{x}^1$ igual a quantidade de padrões, i.e., $(p = N)$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{XW} &= \mathbf{D} \\ \mathbf{W}^* &= \mathbf{X}^{-1}\mathbf{D} \end{aligned} \tag{2}$$

Resolução passo-a-passo

- A solução da Eq.(1) para uma matriz $\mathbf{X}$ quadrada é dada em detalhes a seguir.

$$\begin{aligned} \mathbf{XW} &= \mathbf{D} \\ \mathbf{X}^{-1}\mathbf{XW} &= \mathbf{X}^{-1}\mathbf{D} \\ (\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X})\mathbf{W} &= \mathbf{X}^{-1}\mathbf{D} \\ \mathbf{IW} &= \mathbf{X}^{-1}\mathbf{D} \\ \mathbf{W}^* &= \mathbf{X}^{-1}\mathbf{D} \end{aligned} \quad (3)$$

em que $\mathbf{W}^*$ é a matriz de pesos ótima, $\mathbf{X}^{-1}$ é a inversa da matriz $\mathbf{X}$ e $\mathbf{I}$ é a matriz identidade.

Essa resolução é geral?

- Uma limitação do processo de resolução anterior é a exigência da matriz de vetores de entrada **W** tendo o mesmo número de linhas e colunas.

Pseudo-Inversa (PI)

Como generalizar essa idéia para resolver a Eq. (1) para uma matriz **W** qualquer?
Resposta: Usar a **Psedo-Inversa**.

- Usando a Pseudo-Inversa (PI) a solução para o problema é dado como segue, a saber:

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{X}^\dagger \mathbf{D} \tag{4}$$

em que $\mathbf{X}^\dagger = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T$ é a pseudo-inversa e W^* é a matriz de pesos ótima.

Resolução passo-a-passo

- A solução da Eq.(1) para uma matriz $\mathbf{X}$ não-quadrada, tal que $N > p$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{XW} &= \mathbf{D} \\
\mathbf{X^T XW} &= \mathbf{X^T D} \\
(\mathbf{X^T X})\mathbf{W} &= \mathbf{X^T D} \\
(\mathbf{X^T X})^{-1}(\mathbf{X^T X})\mathbf{W} &= (\mathbf{X^T X})^{-1}\mathbf{X^T D} \\
\mathbf{IW} &= (\mathbf{XX^T})^{-1}\mathbf{X^T D} \\
\mathbf{W}^* &= (\mathbf{XX^T})^{-1}\mathbf{X^T D}
\end{aligned} \tag{5}
$$

em que $\mathbf{W}^*$ é a matriz de pesos ótima e a $\left(\mathbf{XX^T}\right)^{-1}$ é a inversa da matriz resultante $(\mathbf{XX^T})$.

Exemplo: Base de Dados Irís

- Considere a base de dados da Irís, $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{d}_i\}_{i=1}^{150}$.
- Considere ainda que há 4 componetes para cada um dos 150 vetores de entrada,i.e. $\mathbf{x}_i^T = [x_{i1} \ \ x_{i2} \ \ x_{i3} \ \ x_{i3}]$,
- Leve em conta também a codifição **1-ouf-of-C**, em que $C = 3$ para a Íris, uma vez que temos as classes: Setosa, Versicolor e Virgínica. Portanto, $\mathbf{d}_i^T = [d_{i1} \ \ d_{i2} \ \ d_{i3}]$.
- Assim, os valores possíveis para $\mathbf{d}_i$ nesta codificação são:

$$Setosa = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; Versicolor = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; Virginica = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Use 120 padrões para treinamento e os 30 restantes para teste.

Exemplo: Base de Dados Irís

- Assim, a partir dos vetores a seguir

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \\ x_{i4} \end{bmatrix} \mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} w_{i1} \\ w_{i2} \\ w_{i3} \\ w_{i4} \end{bmatrix} \mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ x_{i3} \end{bmatrix}$$

  podemos considerar as seguintes matrizes

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{120}^T \end{bmatrix} \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \end{bmatrix} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^T \\ \mathbf{d}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{120}^T \end{bmatrix}$$

Exemplo: Treinamento do OLAM para Irís

- Neste cenário, considere o treinamento através da pseudo-inversa levando em consideração as dimensões das matrizes

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}_{120\times 4}\mathbf{W}_{4\times 3} &= \mathbf{D}_{120\times 3} \qquad (6)\\
\mathbf{X}^T_{4\times 120}\mathbf{X}_{120\times 4}\mathbf{W}_{4\times 3} &= \mathbf{X}^T_{4\times 120}\mathbf{D}_{120\times 3}\\
(\mathbf{X}^T\mathbf{X})_{4\times 4}\mathbf{W}_{4\times 3} &= \mathbf{X}^T_{4\times 120}\mathbf{D}_{120\times 3}\\
(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}_{4\times 4}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})_{4\times 4}\mathbf{W}_{4\times 3} &= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}_{4\times 4}\mathbf{X}^T_{4\times 120}\mathbf{D}_{120\times 3}\\
\mathbf{I}_{\mathbf{4}\times\mathbf{4}}\mathbf{W}_{\mathbf{4}\times\mathbf{3}} &= (\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}_{\mathbf{4}\times\mathbf{4}}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}_{\mathbf{4}\times\mathbf{120}}\mathbf{D}_{\mathbf{120}\times\mathbf{3}}\\
\mathbf{W}^* &= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}_{4\times 4}\mathbf{X}^T_{4\times 120}\mathbf{D}_{120\times 3}
\end{aligned}
$$

Exemplo: Avaliação de um padrão não-visto

- Para verificar a saída com base nos pesos ótimos obtidos calcule a saída para o vetor $\mathbf{x}_i^T$ com base na expressão:

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{W}^* = \mathbf{y}_i^T \tag{7}$$

em que $\mathbf{y}_i^T$ é a saída estimada pelo OLAM

- Ressalta-se ainda que as dimensões para os vetores $\mathbf{x}_i^T$, $\mathbf{W}^*$ e $\mathbf{y}_i^T$ são, respectivamente, (1×4), (4×3) e (1×3).

Obrigado