Équations différentielles ordinaires

Ahmed Ammar (`ahmed.ammar@fst.utm.tn`)

Institut Préparatoire aux Études Scientifiques et Techniques, Université de Carthage.

Jan 13, 2021

Contents

1 Introduction

Dans les domaines scientifiques et industriels, il est courant aujourd'hui d'étudier la nature ou les dispositifs technologiques au moyen de modèles sur ordinateur. Avec de tels modèles, l'ordinateur agit comme un laboratoire virtuel où les expériences peuvent être effectuées de manière rapide, fiable, sûre et économique.

Les équations différentielles constituent l'un des outils mathématiques les plus puissants pour comprendre et prédire le comportement des systèmes dynamiques de la nature, de l'ingénierie et de la société. Un système dynamique est un système avec un état, généralement exprimé par un ensemble de variables, évoluant dans le temps. Par exemple, un pendule oscillant, la propagation d'une maladie et les conditions météorologiques sont des exemples de systèmes dynamiques. Nous pouvons utiliser les lois fondamentales de la physique, ou l'intuition simple, pour exprimer des règles mathématiques qui régissent l'évolution du système dans le temps. Ces règles prennent la forme d'équations différentielles.

2 Loi de désintégration radioactive

La radioactivité a été découverte en France, de 1896 à 1898, par Henri Becquerel, qui a mis en évidence l'existence d'un rayonnement invisible provenant de l'uranium (voir Figure 1), et par Pierre et Marie Curie qui ont montré la généralité de ce phénomène, lui ont donné son nom, et découvert deux éléments chimiques particulièrement radioactifs, le polonium et le radium. Dans l'histoire de cette découverte, et du développement de toutes ses conséquences, on retrouve toutes les grandes questions liées à la recherche, aux mécanismes de la découverte, aux remises en cause des acquis de la science et à l'exploitation scientifique, technologique et industrielle des connaissances nouvelles.

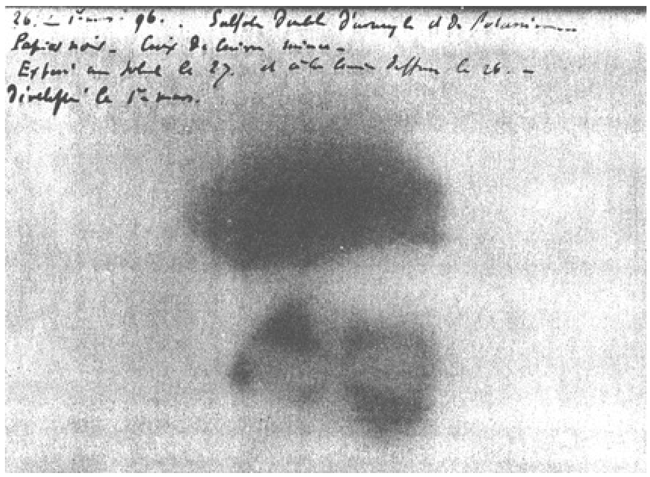


Figure 1: Cliché développé par Becquerel le 1^{er} mars 1896 après être resté dans un tiroir. On distingue dans la tache inférieure, une croix de Malte à laquelle Becquerel fait allusion (« Si, entre la lamelle du sel d'uranium et la lame d'aluminium ou le papier noir, on interpose un écran formé d'une lame de cuivre ... par exemple en forme de croix, on observe dans l'image la silhouette de cette croix, en plus clair... »). Les annotations sont de la main de Becquerel.[s:OpenEdition Journals, Henri Becquerel : découverte de la radioactivité]

On veut modéliser numériquement l'évolution d'un échantillon radioactif. On prendra les valeurs numériques du plutonium 238 , un isotope radioactif du plutonium ayant une constante radioactive $\lambda = 0{,}79$ siècle^{-1} qui se désintègre en émettant des particules α. On veut modéliser l'évolution temporelle d'un échantillon de plutonium 238 contenant initialement $N_0 = 10^{23}$ atomes.

Par définition, la constante radioactive λ est la probabilité qu'un atome se désintègre par unité de temps.

Si à l'instant t, l'échantillon contient $N(t)$ atomes, le nombre dN d'atomes se désintégrant entre les instants t et $t + dt$ est donc :

$$dN(t) = -\lambda N(t)\ dt \tag{1}$$

Cette équation peut être intégrée directement, avec la solution:

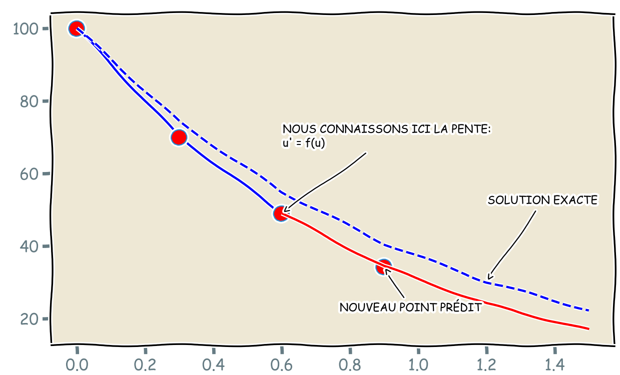
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{2}$$

mais nous voulons essayer de résoudre l'équation numériquement.

L'approche la plus simple consiste à exprimer le nombre de noyaux à l'instant $t + \Delta t$ en termes de nombre à l'instant t:

$$N(t + \Delta t) = N(t) - \lambda N(t)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \tag{3}$$

Si nous commençons par N_0 noyaux à l'instant $t = 0$, alors à $t = \Delta t$ nous aurons $N(\Delta t) \approx N_0 - (\lambda N_0)\Delta t$; at $t = 2\Delta t$ nous aurons $N(2\Delta t) \approx N(\Delta t) - [\lambda N(\Delta t)]\Delta t$ etc. L'erreur de troncature est $\mathcal{O}(\Delta t^2)$. Par conséquent, si la taille du pas Δt est petite, nous nous attendons à ce que notre solution numérique soit proche de la solution exacte. Cette méthode d'intégration d'une équation différentielle ordinaire est connue sous le nom de **méthode d'Euler**.



Pour limiter les erreurs dues à l'implémentation de certains algorithmes ou à la précision limitée de la machine sur laquelle on travaille, on choisit souvent en physique numérique de travailler dans des systèmes d'unités adaptés, qui donnent des valeurs numériques raisonnables. On pourra ici exprimer les temps en siècles et les quantités de matières en moles (1 mol = 6,02 $\times 10^{23}$ entités élémentaires).

- **Q1.** Écrire une fonction `radioactivite` en Python prenant comme arguments un nombre initial d'atomes N_0 , une valeur maximale t_max de t, un pas Δt et une probabilité de désintégration λ et qui retourne deux listes contenant les valeurs de t_n et les valeurs de $N(t_n)$ correspondantes. La syntaxe pour retourner deux listes et les utiliser est la suivante :

```python
def radioactvite (N0 , tmax , delta_t , Lambda ) :
    #Le code de la fonction qui crée deux listes liste_t et liste_N
    #...
    return liste_t, liste_N

l_t , l_N = radioactivite(N0 , tmax , delta_t , Lambda)
```

- **Q2.** En utilisant matplotlib, tracer l'allure de $N(t)$ obtenue pour quelques valeurs de Δt (0,01 siècle, 0,1 siècle et 1 siècle, par exemple), on pourra prendre $t_max = 5$ siècles.

- **Q3.** Tracer sur le même graphe que précédemment la solution exacte du problème Eq.(2). Quelle est l'influence de la valeur de Δ_t sur la qualité du résultat ?