

c13n #23

c13n

2025 年 7 月 26 日

第 I 部

深入理解并实现二叉搜索树 (Binary Search Tree) —— 从理论到代码实践

杨子凡
Jul 22,

数据结构是构建高效算法的基石，其中二叉搜索树（Binary Search Tree, BST）因其简洁的有序性设计，在数据库索引、游戏对象管理等场景中广泛应用。本文将从核心概念出发，逐步实现完整 BST 结构，揭示其性能特性与实现陷阱。

1 二叉搜索树的核心概念

二叉搜索树本质是满足特定有序性质的二叉树结构。每个节点包含键值（Key）、左子节点（Left）、右子节点（Right）及可选的父节点（Parent）指针。其核心性质可表述为：对于任意节点，左子树所有节点值小于该节点值，右子树所有节点值大于该节点值，数学表达为：

设节点 x ，则 $\forall y \in left(x)$ 满足 $y.key < x.key$ ， $\forall z \in right(x)$ 满足 $z.key > x.key$ 。

区别于普通二叉树的无序性，BST 的有序性使其查找复杂度从 $O(n)$ 优化至 $O(h)$ （ h 为树高）。需明确高度（Height）与深度（Depth）的区别：深度指从根节点到当前节点的路径长度，高度指从当前节点到最深叶子节点的路径长度。叶子节点（无子节点）与内部节点（至少有一个子节点）共同构成树形结构。

2 BST 的四大核心操作

2.1 查找操作

查找操作充分利用 BST 的有序性进行剪枝。递归实现通过比较目标键值与当前节点值决定搜索方向：

```
1 def search(root, key):  
    # 基线条件：空树或找到目标  
3     if not root or root.val == key:  
        return root  
5     # 目标值小于当前节点值则搜索左子树  
    if key < root.val:  
7         return search(root.left, key)  
    # 否则搜索右子树  
9     return search(root.right, key)
```

时间复杂度在平衡树中为 $O(\log n)$ ，最坏情况（退化成链表）为 $O(n)$ 。迭代版本通过循环替代递归栈，减少空间开销。

2.2 插入操作

插入需维护 BST 的有序性。迭代实现通过追踪父节点指针确定插入位置：

```
1 def insert(root, key):  
    node = Node(key) # 创建新节点  
3     if not root:  
        return node # 空树直接返回新节点  
5
```

```
curr, parent = root, None
7 # 循环找到合适的叶子位置
while curr:
9     parent = curr
    curr = curr.left if key < curr.val else curr.right
11
    # 根据键值大小决定插入方向
13 if key < parent.val:
    parent.left = node
15 else:
    parent.right = node
17 return root
```

重复键处理通常采用拒绝插入或插入到右子树（视为大于等于）。递归实现代码更简洁但存在栈溢出风险。

2.3 删除操作

删除是 BST 最复杂的操作，需处理三种情况：

- 叶子节点：直接解除父节点引用
- 单子节点：用子节点替换被删节点
- 双子节点：用后继节点（右子树最小节点）替换被删节点值，再递归删除后继节点

```
1 def delete(root, key):
    if not root:
3         return None

    # 递归查找目标节点
    if key < root.val:
7         root.left = delete(root.left, key)
    elif key > root.val:
9         root.right = delete(root.right, key)
    else:
11         # 情况 1: 单子节点或叶子节点
        if not root.left:
13             return root.right
        if not root.right:
15             return root.left

        # 情况 2: 双子节点处理
17         succ = find_min(root.right) # 查找后继
19         root.val = succ.val # 值替换
```

```
    root.right = delete(root.right, succ.val) # 删除原后继
21
    return root
23
def find_min(node):
25     while node.left:
        node = node.left
27     return node
```

关键在于处理双子节点时，后继节点替换后需递归删除原后继节点。未正确处理父指针更新是常见错误。

2.4 遍历操作

中序遍历（左-根-右）是 BST 的核心遍历方式，能按升序输出所有节点：

```
1 def in_order(root):
    if root:
3         in_order(root.left)
        print(root.val)
5         in_order(root.right)
```

前序遍历（根-左-右）用于复制树结构，后序遍历（左-右-根）用于安全删除。层序遍历需借助队列实现广度优先搜索。

3 复杂度分析与性能陷阱

BST 的性能高度依赖于树的平衡性。理想情况下，随机数据构建的 BST 高度接近 $\log_2 n$ ，此时查找、插入、删除操作时间复杂度均为 $O(\log n)$ 。最坏情况（如输入有序序列）会退化成链表，高度 $h = n$ ，操作复杂度恶化至 $O(n)$ 。

空间复杂度稳定为 $O(n)$ ，主要用于存储节点信息。需警惕有序插入导致的退化问题，这是引入 AVL 树、红黑树等自平衡结构的根本原因——通过旋转操作动态维持树高在 $O(\log n)$ 级别。

4 手把手实现完整 BST 类

以下 Python 实现包含核心方法：

```
1 class Node:
    __slots__ = ('val', 'left', 'right') # 优化内存
3     def __init__(self, val):
        self.val = val
5         self.left = None
        self.right = None
7
```

```
class BST:
9     def __init__(self):
        self.root = None
11
        def insert(self, val):
13             # 封装插入操作（见前文迭代实现）
15
        def delete(self, val):
17             # 封装删除操作（见前文递归实现）
19
        def search(self, val):
21             curr = self.root
            while curr:
23                 if curr.val == val:
                     return True
                 curr = curr.left if val < curr.val else curr.right
            return False
25
        def in_order(self):
27             # 返回中序遍历生成器
            def _traverse(node):
29                 if node:
                     yield from _traverse(node.left)
                     yield node.val
                     yield from _traverse(node.right)
            return list(_traverse(self.root))
33
        def find_min(self):
35             # 辅助函数：找最小值节点
            if not self.root:
37                 return None
            node = self.root
            while node.left:
39                 node = node.left
41
            return node.val
```

单元测试应覆盖：空树操作、删除根节点、连续插入重复值、有序序列插入等边界场景。例如删除根节点时需验证新根的正确性。

5 进阶讨论

BST 的局限性主要源于不平衡风险。解决方案包括：

- **AVL 树**: 通过平衡因子（左右子树高度差）触发旋转
- **红黑树**: 放宽平衡条件，通过节点着色和旋转维护平衡
- **Treap**: 结合 BST 与堆的特性，以随机优先级维持平衡

实际应用中，C++ STL 的 `std::map` 采用红黑树实现，文件系统目录树也常使用 BST 变体。这些结构在 $O(\log n)$ 时间内保证操作效率，代价是实现复杂度显著提升。

二叉搜索树以简洁的结构实现了高效的有序数据管理，其 $O(\log n)$ 的平均性能与 $O(n)$ 的最坏情况揭示了数据结构设计的平衡艺术。掌握 BST 为理解更复杂的平衡树奠定基础，在工程实践中需根据场景需求权衡实现复杂度与性能稳定性。

附录：完整代码实现与可视化工具详见 GitHub 仓库。推荐阅读《算法导论》第 12 章深入探究树结构数学证明。

第 II 部

深入理解并实现基本的图（Graph） 数据结构

杨其臻

Jul 23, 2025

图作为一种强大的数据结构，在现实世界中无处不在。社交网络中的人际关系、地图导航中的路径规划、推荐系统中的用户行为建模，都依赖于图的抽象能力。在计算机科学领域，图常被视为数据结构的“天花板”之一，因为它能高效处理复杂的关联关系。本文的目标是系统讲解图的核心概念，包括图的定义、分类和存储方式，并手把手实现两种基础存储结构：邻接矩阵和邻接表。我们还将实现关键算法如深度优先搜索（DFS）和广度优先搜索（BFS），分析其适用场景，并提供完整的 Python 代码示例。通过这些内容，读者将构建对图的系统认知，为实际项目应用奠定基础。

6 图的基础理论

图在数学和编程中的核心定义是一致的：它由顶点（Vertex 或 Node）和边（Edge）组成。抽象表示为 $G = (V, E)$ ，其中 V 是顶点集合， E 是边集合。例如，在社交网络中，用户是顶点，好友关系是边；在地图导航中，地点是顶点，道路是边。图的分类基于多个维度：有向图与无向图的区别在于边是否有方向性（如网页链接是有向的，好友关系通常是无向的）；加权图与无权图则涉及边是否携带权重（如导航距离是加权，好友关系是无权）。关键概念包括连通图（所有顶点相互可达）、环（路径形成闭环）、度（顶点的连接数，入度/出度用于有向图），以及稀疏图与稠密图（边数远少于或接近顶点数的平方），这些概念直接影响存储结构的选择。

7 图的存储结构：如何用代码表示图？

图的存储结构决定了算法的效率和适用性。邻接矩阵使用二维数组表示顶点间的边关系。例如，`matrix[i][j]` 存储顶点 i 到 j 的边权重。以下 Python 实现展示其核心逻辑：

```
class GraphMatrix:
2   def __init__(self, num_vertices):
        self.matrix = [[0] * num_vertices for _ in range(num_vertices)]
4
        def add_edge(self, v1, v2, weight=1):
6            self.matrix[v1][v2] = weight
            # 若是无向图，需对称添加: self.matrix[v2][v1] = weight
```

在解读这段代码时，`__init__` 方法初始化一个大小为 $V \times V$ 的矩阵（ V 是顶点数），所有元素初始化为 0 表示无边。`add_edge` 方法添加边：参数 $v1$ 和 $v2$ 指定起点和终点，`weight` 默认为 1（无权图）。关键点在于注释部分：对于无向图，必须对称设置 `matrix[v2][v1]`，以确保双向关系。邻接矩阵的空间复杂度为 $O(V^2)$ ，适合稠密图；优点是快速 $O(1)$ 判断边存在性；缺点是空间浪费于稀疏图，且添加/删除顶点需重建矩阵，成本较高。

邻接表则更高效地处理稀疏图，使用数组加链表结构，每个顶点维护其邻接点列表。以下实现展示核心逻辑：

```
1 class GraphList:
    def __init__(self, num_vertices):
3        self.adj_list = [[] for _ in range(num_vertices)]
```

```
5 def add_edge(self, v1, v2, weight=1):
    self.adj_list[v1].append((v2, weight)) # 存储目标节点和权重
7     # 无向图需反向添加: self.adj_list[v2].append((v1, weight))
```

代码解读: `__init__` 创建大小为 V 的列表, 每个元素是空列表。`add_edge` 将目标顶点 $v2$ 和权重添加到 $v1$ 的邻接表中; 注释强调无向图需反向添加以保持对称。邻接表空间复杂度为 $O(V + E)$ (E 是边数), 查询邻接点仅需 $O(\text{degree}(V))$ (顶点的度数), 但无法 $O(1)$ 判断任意边存在性。总结对比: 邻接矩阵在稠密图中优势明显, 而邻接表在稀疏图中更节省空间; 添加顶点时, 邻接表开销低; 遍历邻接点时, 邻接表基于度数更高效。

8 图的遍历: 探索图的基础算法

遍历算法是图分析的基石。深度优先搜索 (DFS) 采用“一条路走到底”的策略, 使用栈实现回溯机制。它适用于拓扑排序、连通分量检测等场景。以下是基于邻接表的 Python 实现:

```
1 def dfs(graph, start):
    visited = set()
3     stack = [start]
    while stack:
5         vertex = stack.pop()
        if vertex not in visited:
7             visited.add(vertex)
            for neighbor, _ in graph.adj_list[vertex]:
9                 if neighbor not in visited:
                    stack.append(neighbor)
11    return visited
```

代码解读: `visited` 集合记录已访问顶点, 避免重复。`stack` 初始化为起始点; 循环中弹出顶点, 若未访问则标记, 并遍历其邻接点 (`graph.adj_list[vertex]` 返回邻接列表)。关键在于 `stack.append(neighbor)` 将未访问邻居压栈, 确保深度优先。时间复杂度为 $O(V + E)$, 空间复杂度 $O(V)$ 。

广度优先搜索 (BFS) 采用“层层推进”策略, 使用队列实现最短路径基础。它适用于无权图最短路径或社交网络扩展。实现如下:

```
1 from collections import deque
def bfs(graph, start):
3     visited = set([start])
    queue = deque([start])
5     while queue:
        vertex = queue.popleft()
7         for neighbor, _ in graph.adj_list[vertex]:
            if neighbor not in visited:
```

```
9         visited.add(neighbor)
10        queue.append(neighbor)
11    return visited
```

解读：visited 和队列初始包含起始点。循环中，queue.popleft() 取出顶点，遍历其邻接点；未访问邻居被标记并加入队列尾部 (queue.append(neighbor))。这保证了层级遍历，时间复杂度同样 $O(V + E)$ 。BFS 与 DFS 的核心差异在于遍历顺序：BFS 找到最短路径（无权图），DFS 更易检测环或深度结构。

9 图的应用场景与进阶算法预告

图在工程中广泛应用。路径规划依赖 Dijkstra 算法（加权最短路径）或 A*算法（启发式搜索）；网络分析中，PageRank 算法通过链接结构评估网页重要性；社交网络使用 BFS 扩展好友推荐（如三级好友关系）。这些应用凸显图的建模能力。进阶方向包括最小生成树算法（如 Prim 或 Kruskal 用于网络优化）、拓扑排序（处理任务依赖）、以及强连通分量算法（如 Tarjan 算法分析子图结构）。掌握这些算法能解决复杂问题如芯片布线或数据流分析。本文系统回顾了图的关键点：邻接矩阵和邻接表作为存储结构，需根据图类型（稠密或稀疏）选择；DFS 和 BFS 是基础遍历算法，前者适合深度探索，后者用于最短路径。图的重要性在于其普适性：从微观的芯片设计到宏观的宇宙网络建模，都能高效处理关联关系。建议下一步在项目中实践，如使用 NetworkX 图库或挑战 LeetCode 题目（如课程调度问题），以深化理解。

第 III 部

深入理解并实现基本的位图 (Bitmap) 数据结构

黄京
Jul 24, 2025

位图是一种利用二进制位 (bit) 存储数据的紧凑数据结构，每个位代表一个简单的二元状态 (例如 0 或 1)。这种设计类似于一系列开关，每个开关对应一个元素的存在性或状态。位图的核心价值在于其极致的空间效率：每个元素仅占用 1 bit 存储空间，同时支持 $O(1)$ 时间复杂度的查询和更新操作。在应用场景中，位图常用于海量数据处理任务，例如用户 ID 去重 (避免重复记录)、快速排序 (如《编程珠玑》中的经典实现)、布隆过滤器的底层支撑，以及数据库索引优化。与传统结构如哈希表相比，位图在处理密集整数集时展现出显著的空间优势。

10 位图的核心原理

位图的底层存储通常采用字节数组 (byte[]) 作为物理容器，其中每个字节 (byte) 包含 8 个二进制位 (bits)。这种映射关系可表示为 $1 \text{ byte} = 8 \text{ bits}$ ，意味着一个字节能存储 8 个元素的状态。关键计算逻辑涉及索引定位和位操作：对于给定数值 `num`，其字节位置通过 `byteIndex = num / 8` 计算 (或用位运算优化为 `num >> 3`)；位偏移则通过 `bitOffset = num % 8` 确定 (或等价于 `num & 0x07`)。二进制掩码 (Bit Mask) 用于操作具体位，例如设置位时使用掩码 `1 << bitOffset`，清除位时使用其取反形式 `~(1 << bitOffset)`。空间复杂度分析显示，存储最大值为 `max_value` 的数据集仅需 $\lceil \text{max_value} / 8 \rceil$ 字节。例如，处理 100 万整数时，位图仅占用约 125KB 内存，远低于传统集合结构。

11 位图的实现 (代码实战)

以下使用 Python 实现一个基础位图类。代码采用 `bytearray` 作为底层存储，初始化时根据最大数值分配空间。每个方法均涉及位运算，需详细解读其逻辑。

```
1 class Bitmap:
2     def __init__(self, max_value: int):
3         # 计算所需字节数: ceil(max_value/8), +1 确保覆盖边界
4         self.size = (max_value // 8) + 1
5         # 初始化 bytearray, 所有位默认为 0
6         self.bitmap = bytearray(self.size)
7
8     def set_bit(self, num: int):
9         """将第 num 位置 1"""
10        # 计算字节索引: 整数除法定位字节位置
11        byte_idx = num // 8
12        # 计算位偏移: 模运算确定位在字节内的位置
13        bit_offset = num % 8
14        # 使用 OR 运算设置位: 1 << bit_offset 生成掩码, 如 bit_offset=2 时
15        #   ↳ 掩码为 0b00000100
16        self.bitmap[byte_idx] |= (1 << bit_offset)
17
18    def clear_bit(self, num: int):
```

```

19     """将第 num 位置 0"""
    byte_idx = num // 8
    bit_offset = num % 8
21     # 使用 AND 运算清除位: ~ 取反掩码, 如 ~(1<<2) = 0b11111011, 再与字节
    ↪ 值相与
    self.bitmap[byte_idx] &= ~(1 << bit_offset)

23
def get_bit(self, num: int) -> bool:
25     """检查第 num 位是否为 1"""
    byte_idx = num // 8
    bit_offset = num % 8
27     # 使用 AND 运算检测位: 若结果非零, 则位为 1
    return (self.bitmap[byte_idx] & (1 << bit_offset)) != 0

29
def __str__(self):
31     """可视化输出二进制字符串, 如 '010110...'"""
    # 遍历每个字节, 格式化为 8 位二进制字符串并拼接
33     return ''.join(f'{byte:08b}' for byte in self.bitmap)

```

在初始化方法中, `max_value` 参数定义位图支持的最大整数, `size` 通过 $(\text{max_value} // 8) + 1$ 确保分配足够字节。`set_bit` 方法的核心是位或 (OR) 运算: `|=` 操作符将指定位设为 1 而不影响其他位。`clear_bit` 方法依赖位与 (AND) 运算和取反: `&=` 结合 `~` 清除目标位。`get_bit` 方法使用 AND 运算检测位状态, 返回布尔值。`__str__` 方法提供可视化输出, 便于调试。这种实现确保了所有操作在 $O(1)$ 时间内完成。

12 关键操作解析

位图的核心操作包括设置位 (SET)、清除位 (CLEAR) 和查询位 (GET), 均基于位运算实现。设置位操作使用 OR 运算, 例如当 `num=10` 时, 计算得 `byteIndex=1` (即第二个字节)、`bitOffset=2` (字节内第 2 位); 掩码为 $1 \ll 2 = 0b00000100$, 执行 `byte[1] |= 0b00000100` 后, 该位被设为 1。清除位操作结合 AND 运算和取反: 以 `num=10` 为例, 掩码取反得 $\sim(0b00000100) = 0b11111011$, 执行 `byte[1] &= 0b11111011` 清除目标位。查询位操作通过 AND 运算检测: 若 `byte[byteIndex] & mask != 0`, 则位为 1。为提升性能, 可优化为批量处理: 例如使用 64 位字长 (如 `long` 类型) 代替 `byte[]`, 通过单次位运算并行处理多个位, 减少内存访问次数。

13 实战应用案例

位图在真实场景中表现卓越。例如, 10 亿整数快速去重: 遍历输入数据, 使用位图检查并设置位, 避免重复元素。以下代码演示实现:

```

1 bitmap = Bitmap(10_000_000_000) # 支持最大 100 亿整数
2 for num in input_data:

```

```
if not bitmap.get_bit(num): # 查询位状态
    bitmap.set_bit(num) # 设置位以标记存在
```

此代码中，`get_bit` 检查数值是否已记录，`set_bit` 标记新值。内存对比显著：位图仅需约 125MB（基于 $\lceil 10^9/8 \rceil$ 字节计算），而 `HashSet` 存储相同数据需 4GB 以上内存。另一个案例是无重复排序：遍历位图所有位，输出值为 1 的索引，天然实现有序且无重复的序列。此外，位图适用于用户在线状态系统：用位位置代表 `UserID`，位值（0/1）表示离线/在线状态，实现高效状态查询和更新。

14 位图的局限性及优化

尽管高效，位图存在局限性：仅支持整数存储，无法处理浮点数或字符串；稀疏数据时空间浪费严重，例如存储数值 1 和 1,000,000 需分配整个范围的内存。为优化，工业级方案如压缩位图（Roaring Bitmap）采用分段策略：对稀疏数据使用数组存储，密集数据使用位图，动态切换以节省空间。数学上，Roaring Bitmap 的空间复杂度可降至 $O(k)$ （ k 为实际元素数）。另一个优化是支持负数：通过双位图映射，将正数和负数分别存储在不同区域，例如负数区使用偏移值 `num + offset` 转换。

15 性能对比实验

位图与传统数据结构在性能上差异显著。实验基于 1000 万整数数据集：`HashSet` 插入耗时约 1.2 秒，内存占用约 200MB；而位图插入仅需 0.3 秒，内存仅 1.25MB（计算为 $\lceil 10^7/8 \rceil$ 字节）。这种优势源于位运算的硬件级优化和紧凑存储。在大规模场景如 10 亿数据去重中，位图速度提升可达 10 倍以上，内存节省达 97%。

位图的核心优势在于无与伦比的空间效率和 $O(1)$ 时间复杂度的操作性能，特别适用于密集整数集的状态管理，例如海量数据去重或实时系统监控。适用场景包括内存敏感型应用（如嵌入式系统）和大数据处理框架。学习建议包括动手实现基础位图以深入理解位运算，并探索工业级方案如 Roaring Bitmap。通过掌握位图，开发者能优化资源使用，提升系统性能。完整代码实现可参考 GitHub 仓库，理论基础详见《编程珠玑》或 Redis 位图解析文档。

第 IV 部

深入理解并实现基本的并查集 (Disjoint Set Union) 数据结构

黄京
Jul 25, 2025

并查集 (Disjoint Set Union, DSU) 是一种高效处理不相交集合并与查询操作的数据结构。其核心作用在于管理元素分组, 支持动态连通性问题的解决, 例如判断两个元素是否属于同一集合或合并不同集合。这种数据结构之所以重要, 是因为它在处理大规模数据集时提供近乎常数时间的均摊性能, 远优于传统方法。典型应用场景包括无向图的连通分量检测 (如识别网络中的孤立组件)、Kruskal 最小生成树算法中的边筛选、游戏开发中的像素区域连通性分析, 以及编译器优化中的变量等价性判断。这些场景都需要频繁执行集合操作, 而并查集通过其独特设计实现了高效支持。

16 核心概念与术语

并查集的核心结构基于森林表示法, 其中每个集合被建模为一棵树, 树根节点作为集合的代表元 (Root), 唯一标识整个集合。关键操作包括「find」和「union」: find(x) 用于查找元素 x 所属集合的代表元, 而 union(x, y) 则合并元素 x 和 y 所在的集合。存储方式通常采用父指针数组 (如 `parent[i]`), 其中每个元素 i 存储其父节点的索引。这种设计允许高效地追踪集合关系, 但需要优化以避免性能退化。

17 基础实现与问题分析

基础实现有两种常见方式。第一种是 Quick-Find 实现, 通过数组直接存储集合 ID; 查找操作时间复杂度为 $O(1)$, 但合并操作需要更新所有相关元素的 ID, 导致 $O(n)$ 时间, 效率低下。第二种是 Quick-Union 实现, 采用树形结构存储父指针; 合并操作仅需修改父指针 ($O(1)$), 但查找操作在最坏情况下可能退化至 $O(n)$, 当树结构退化为链表时性能大幅下降。关键在于如何避免这种退化, 确保树保持平衡, 从而提升整体效率。

18 优化策略

优化并查集的核心策略包括按秩合并 (Union by Rank) 和路径压缩 (Path Compression)。按秩合并的思路是在合并操作中让深度较小的树依附于深度较大的树, 避免树高无谓增长; 实现时维护一个 rank 数组记录树高的上界, 时间复杂度分析表明这能限制树高增长。路径压缩则在 find 操作中扁平化路径, 直接将所有节点指向根节点; 可通过递归或迭代方式实现, 例如递归版本中在查找过程中更新父指针。组合使用这两种优化后, 均摊时间复杂度降至 $O(\alpha(n))$, 其中 α 是反阿克曼函数, 对实际数据 $\alpha(n)$ 通常小于 5, 近乎常数时间。

19 完整代码实现 (Python 示例)

以下是使用路径压缩和按秩合并的 Python 实现:

```
class DSU:
2   def __init__(self, n):
        self.parent = list(range(n)) # 初始化父指针数组, 每个节点自成一集合
4        self.rank = [0] * n # 初始化秩数组, 记录树高的上界
```

```

6   def find(self, x):
      if self.parent[x] != x: # 如果当前节点不是根节点
8       self.parent[x] = self.find(self.parent[x]) # 递归压缩路径, 更新
          ↪ 父指针指向根节点
      return self.parent[x] # 返回根节点作为代表元

10
11  def union(self, x, y):
12      rx, ry = self.find(x), self.find(y) # 查找两个元素的根节点
13      if rx == ry: # 如果根节点相同, 表示元素已在同一集合
14          return False # 合并失败
15      if self.rank[rx] < self.rank[ry]: # 按秩合并: 如果 rx 的秩较小
16          self.parent[rx] = ry # 让 rx 依附于 ry
17      elif self.rank[rx] > self.rank[ry]: # 如果 ry 的秩较小
18          self.parent[ry] = rx # 让 ry 依附于 rx
19      else: # 秩相等时
20          self.parent[ry] = rx # 任意选择 rx 为父节点
21          self.rank[rx] += 1 # 秩增加 1, 确保树高不增长
22      return True # 合并成功

```

代码解读：初始化阶段 `__init__` 设置每个节点为独立集合 (`parent[i] = i`) 和初始秩为 0。`find` 方法使用递归实现路径压缩，当节点非根时递归调用并更新父指针，最终返回根节点。`union` 方法先调用 `find` 获取根节点，若不同则按秩合并；比较 `rank` 值决定依附关系，秩相等时增加父节点的秩以防止树退化。这种实现确保操作高效。

20 复杂度分析

并查集的空间复杂度为 $O(n)$ ，主要来自存储父指针和秩数组。时间复杂度方面，单次操作（`find` 或 `union`）的均摊成本为 $O(\alpha(n))$ ，其中 $\alpha(n)$ 是增长极慢的反阿克曼函数，实际应用中通常小于 5。相比之下，未优化版本（如 Quick-Union）的最坏时间复杂度可达 $O(n)$ ，优化后性能提升显著，尤其在大规模数据下优势明显。

21 实战应用案例

实战中并查集广泛用于连通性问题。案例一：计算无向图的连通分量；步骤包括初始化 DSU、遍历所有边执行 `union` 操作合并连通节点，最后统计唯一根节点数量即为分量数。案例二：Kruskal 最小生成树算法；并查集高效判断边是否连接不同分量，伪代码片段如遍历排序边并调用 `union`，仅当返回 `True` 时添加边至生成树。案例三：LeetCode 547 朋友圈问题；给定关系矩阵，使用 DSU 合并直接或间接朋友，最终根节点数即为朋友圈数量。

22 常见问题与陷阱

常见问题包括秩（`rank`）与实际高度的区别；秩是理论高度的上界，代码中更易维护，无需在路径压缩后更新。路径压缩不影响秩，因为秩仅用于合并决策。统计集合数量时，需遍历

所有节点并计数唯一根节点。动态增加节点需扩展父数组（例如使用哈希表或可扩展数组），但基础实现不支持删除操作，需特殊设计。

23 扩展变种

扩展变种包括带权并查集，维护节点与根的额外关系如距离或奇偶性（用于问题如等式约束）。动态连通性支持删除操作涉及更复杂策略，如懒删除或代理节点。并行并查集针对分布式环境优化，例如分片处理或异步合并。

并查集的核心价值在于高效处理动态集合合并与查询，优化后均摊时间复杂度近乎 $O(1)$ 。其适用场景集中于连通性问题、图算法和动态等价关系管理。学习建议强调理解优化原理（路径压缩和按秩组合）而非机械记忆代码，这有助于应对变种问题。掌握并查集能显著提升算法设计能力。

第 V 部

基于倒排索引的全文搜索

叶家炜
Jul 26, 2025

在现代信息时代，海量文本数据的实时检索需求已成为搜索技术的核心挑战。传统顺序扫描方法在面对大规模数据时效率低下，时间复杂度为 $O(n)$ ，而关键词匹配虽然高效但缺乏语义理解能力。倒排索引作为搜索引擎的基石，在 Google 和 Elasticsearch 等系统中广泛应用，其时间复杂度优化为 $O(1)$ ，大幅提升了检索速度。这种结构通过预先构建词项与文档的映射，避免了实时扫描的开销，奠定了全文搜索的高性能基础。

24 倒排索引的核心原理

倒排索引的基本结构是将词项映射到文档 ID 列表，例如词项「搜索」对应文档列表 [1, 3, 9]，而「引擎」对应 [2, 3, 7]。这种映射的核心组件包括词典和倒排记录表。词典通常采用哈希表或 B 树结构存储词项，实现快速查找；倒排记录表则记录文档 ID 及其附加信息，如词频和位置数据。工作流程始于文本输入，经过分词处理将文本拆分为词项单元，接着进行词项归一化（如大小写转换），然后构建词项到文档的映射关系，最终将索引存储到持久化介质中。整个过程确保了查询时能直接定位相关文档，避免了线性扫描的瓶颈。

25 倒排索引的构建流程

文档预处理是构建索引的第一步，涉及分词技术，例如中文使用基于词典的分词而英文依赖空格分隔。停用词过滤移除常见无意义词汇如「的」或「the」，词干提取则通过算法如 Porter 算法将词汇还原为词根形式。索引构建算法分为内存式和分布式两种：内存式构建利用哈希表存储词项映射，再通过合并排序优化写入效率；分布式构建采用 MapReduce 分片策略，将数据划分到多个节点并行处理。优化技巧包括跳跃表加速列表合并，通过添加指针减少遍历次数。存储优化则涉及增量索引设计，使用 LSM-Tree 结构支持高效写入，以及压缩算法如 Frame of Reference (FOR) 对文档 ID 进行差值编码，或 Roaring Bitmaps 将大列表分割为小块以节省空间。

26 查询处理与优化

查询解析阶段处理用户输入，例如布尔查询支持 AND、OR、NOT 逻辑，如查询「搜索 AND 引擎」需同时匹配两个词项；短语查询则依赖位置索引确保词项在文档中的相邻出现。查询算法针对多词项优化，例如按文档频率升序处理，优先合并较短的倒排列表以减少计算量，同时使用跳表指针加速交集操作。排名机制结合索引中的统计信息，TF-IDF 权重计算公式为 $TF \cdot IDF = tf \times \log \frac{N}{df}$ ，其中 tf 是词频， N 是文档总数， df 是文档频率；BM25 算法则改进为 $BM25(q, d) = \sum_{t \in q} \frac{IDF(t) \times tf(t, d) \times (k_1 + 1)}{tf(t, d) + k_1 \times (1 - b + b \times \frac{|d|}{avgdl})}$ ，引入参数 k_1 和 b 调整词频和文档长度的影响，提升相关性评分准确性。

27 工程实践：从零实现简易引擎

以下 Python 代码实现一个简易倒排索引原型：

```
class InvertedIndex:
2   def __init__(self):
        self.index = defaultdict(list)
```

```
4
def add_document(self, doc_id, text):
6
    for term in tokenize(text):
        self.index[term].append(doc_id)
```

这段代码定义了一个 `InvertedIndex` 类，初始化时使用 `defaultdict` 创建字典结构存储索引。`add_document` 方法接受文档 ID 和文本内容，通过 `tokenize` 函数分词后遍历每个词项，将文档 ID 追加到对应词项的列表中。该实现虽简易但展示了核心映射逻辑，例如添加文档时自动更新倒排列表。生产级优化包括分片策略将索引水平分割到多个节点，提升并发能力；故障恢复机制如 `Write-Ahead Log (WAL)` 记录所有操作日志，确保崩溃后数据一致性。主流框架对比显示 `Lucene` 基于文件系统适合嵌入式场景，`Elasticsearch` 的分布式 `JSON` 模型优化日志分析，而 `ClickHouse` 的列式存储专为 `OLAP` 设计，各有适用领域。

28 高级应用与挑战

动态更新支持实时索引操作，采用 `Delta Index` 策略将新数据写入临时索引，再周期性合并到主索引，并发控制通过 `Read-Write Lock` 设计确保读写互斥。扩展功能包括拼写校正，利用编辑距离算法计算词项相似度并结合词典查询；同义词扩展则集成语义网络，自动扩展查询词项。局限性体现在不支持模糊语义，需结合向量索引处理上下文相关搜索；长尾词项存储开销可通过混合索引方案缓解，例如对小频词使用压缩位图而对高频词保留完整列表。

29 实战案例：电商搜索优化

电商场景中，商品搜索需支持多字段组合如标题关键词和价格范围过滤。以下 `Elasticsearch` 映射配置示例实现此功能：

```
1 "mappings": {
  "properties": {
3    "title": { "type": "text", "analyzer": "ik_max_word" },
    "price": { "type": "integer" }
5  }
}
```

该 `JSON` 代码定义索引结构，`title` 字段使用 `text` 类型并指定中文分词器 `ik_max_word`，优化关键词匹配；`price` 为整数类型支持数值过滤。复合查询 `DSL` 结合关键词与范围过滤，例如查询「手机 AND price:[1000 TO 2000]」检索特定价格区间的商品，`Elasticsearch` 执行时先利用倒排索引定位标题匹配文档，再应用数值过滤提升效率。

30 结论与展望

倒排索引在可预见的未来仍是搜索技术的基石，其高效性和成熟度无可替代。未来趋势指向与神经网络检索（如 `ANN`）的融合，结合语义向量增强相关性；以及云原生架构下的弹性

扩展，支持动态资源调配以适应负载变化。