灰色—马尔可夫链模型在股市预测中的应用

王礼霞
河海大学理学院，江苏南京（210098）
E-mail: wlx1217_2006@163.com

摘　要：根据灰色预测模型和马尔可夫预测思想，将灰色 GM（1，1）预测模型结合马尔可夫链状态转移，阐述灰色—马尔可夫链模型原理并将此模型应用到股市预测上。用 GM（1，1）预测具有良好的精确性和规律性，但对于随机波动性较大的股市行业，它的预测精度比较低，而马尔可夫模型可以克服波动性较大的局限性，弥补灰色模型的不足，因此将两者结合起来对股市进行预测将能提高预测的精度。并依据深交所 20 个月末收盘指数预测后四个月的月末收盘指数范围，实证分析表明灰色马尔可夫链模型在股市预测中应用的可行性。

关键词： 灰色系统；马尔可夫链；状态转移；月末收盘指数；预测
中图分类号:0211.62；O211.63

1. 引 言

在股票市场中，股票价格是一个基本特征量，但是它总受政治、经济等各方面的影响，具体的影响因素的程度和信息是不完全的，所以我们可以把股市当成一个灰色系统来处理。所谓灰色系统[1]是指既含有已知信息又含有未知或未确知信息的系统.灰色理论在处理信息不完全系统时，其要点在于不把系统中的随机性作为一个随机信号而是看做一个灰数，从而将灰色过程当作在一定区间、一定时区上变化的随机过程，主要使用于时间短、数据资料少、波动性不大的预测问题，而且灰色预测不是采用原始的数据序列而是采用生成的数据序列，对于序列较短且有规律性的数据来说，这种预测精度较高。但由于灰色 GM（1，1）预测模型的预测曲线是一条较平滑的单调曲线，对波动性较大的股票市场中的数据列拟合较差，预测度较低。

马尔可夫链[2]理论预测的对象是一个随机变化的动态系统，其预测是根据状态之间的转移概率来推测系统未来的发展，转移概率反映了各种随机因素的影响程度，因而马尔可夫链比较适合随机波动性较大的预测问题，但是马尔可夫链要求状态无后效性，且要具有平稳过程等特点。如果灰色 GM（1，1）模型对数据进行拟合，找出其变化趋势，则可以弥补马尔可夫预测的局限性，而在灰色预测基础上进行马尔可夫预测，又可弥补灰色预测对随机波动性较大的数据序列准确度低的不足，因此将二者结合起来将大大提高预测精度[3−4]。

2. 灰色—马尔可夫链预测模型

2.1 灰色模型 GM（1，1）

（1）给定原始数据列，记作 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\ldots x^{(0)}(n))$；

（2）对原始数据进行一次累加，生成新的数据序列：$x^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(2)}(2)\cdots,x^{(1)}(n))$，

其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$， $k=1,2\cdots,n$；

（3）构造矩阵 B 和常数矩阵 Y，令

$Y=\begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$，其中 $z^{(1)}(k)=\dfrac{x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1)}{2}$， $k=2,3,\cdots n$，

并建立相应的模型 $\dfrac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b$；

（4）用最小二乘法求解 a,b 得 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY$；

（5）该模型的时间响应方程为：$x^{(1)}\hat{(t+1)}=(x^0(1)-\dfrac{b}{a})e^{-at}+\dfrac{b}{a},t=1,2,\cdots n$，再经累减还原 $x^{(0)}\hat{(t+1)}=x^{(1)}\hat{(t+1)}-x^{(1)}\hat{(t)}$，得到 $x^{(0)}\hat{(t+1)}=(1-e^a)(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a})e^{-at}$。

2.2 马尔可夫链预测模型

2.2.1 状态划分

（1）根据 GM（1，1）模型求出原始数据序列的拟合值 $x^{(0)}\hat{(t)}$；

（2）求出残差 $\Delta k=x^{(0)}\hat{(t)}-x^{(0)}(t)$；

（3）残差的相对值为 $\varepsilon(k)=\dfrac{x^{(0)}(t)-x^{(0)}\hat{(t)}}{x^{(0)}(t)}\times 100\%$；

（4）为了使每一状态的数据相差不多，将 $\varepsilon(k)$ 的值从小到大排列，根据用户的需要和数据的多少，将状态分为自己想要的数。

2.2.2 马尔可夫链

（1）马尔可夫链的概念

定义 1　若随机过程 $\{x(t),t\in T\}$，满足条件：a 时间集合取非负整数集 $T=\{0,1,2,\cdots\}$，对应于每个时刻，状态空间是离散集，记作 $E=\{0,1,2,\cdots\}$，亦即 $x(t)$ 是时间离散状态离散的；b 对任意正整数 l,m,k 及任意非负整数 $j_l\succ\cdots\succ j_2\succ j_1,(m\succ j_l)$ 与相应的状态 $i_{m+k},i_m,i_{j_l},\cdots i_{j_2},i_{j_1}$，下式成立，$P\{x(m+k)=i_{m+k}\mid x(m)=i_m,x(j_l)=i_{j_j},\cdots,x(j_1)=i_{j_1}\}=P\{x(m+k)=i_{m+k}\mid x(m)=i_m\}$，则称 $\{x(t),t\in T\}$ 为马尔可夫链，简称马氏链。

定义 2　当 $k=1$ 时，称为在时刻 m 的一步转移概率 $P\{x_{m+1}=j\mid x_m=i\}=p_{ij}(m,1)$，$(i,j\in E)$，简称为转移概率[5].若对任意的 $i,j\in E$，马尔可夫链 $\{x(t),t\in T\}$ 的转移概率 $p_{ij}(m,1)$ 与 m 无关，则称马氏链是齐次的，记 $p_{ij}(m,1)=p_{ij}$。

同时定义：系统在时刻 m 从状态 i 出发，经过 n 步后处于状态 j 的概率

$$p_{ij}(n,m)=P\{x_{m+n}=j\mid x_m=i\}\quad（i,j\in E,m\geq 0,n\geq 1）$$

为齐次马尔可夫链$\{x(t),t\in T\}$的n步转移概率。由齐次性知其与m无关，故简记为$p_{ij}(n)$。

定义 3　设$\{x(t),t\in T\}$为齐次马尔可夫链，则$P_n=P_1P_1^{(n-1)}=P_1^n(n\geq 1)$。

定义 4　以$p_n(j)=P\{x_n=j\}$为元素的行矩阵记为：$P(n)=(p_n(1),p_n(2),\cdots,p_n(N))$，$E=\{1,2,\cdots,N\}$，由矩阵的乘法规则，可得如下的矩阵形式：$P(n)=P(0)P_n$。

（2）转移概率的计算

a. 根据前面的状态划分，将残差的相对值分为若干状态，记为$E_1,E_2,\cdots,E_n$，残差相对值序列由状态E_i经k步转移到状态E_j的概率成为n步转移概率，记为$p_{ij}(k)=\dfrac{m_{ij}(k)}{M_i}$，式中$m_{ij}(k)$为状态$E_i$经$k$步转移到状态$E_j$的次数，$M_i$为状态$E_i$出现的次数，由于数据序列的最后状态的转向不明确，故计算M_i时要去掉数据序列中最末的k个数据；

b. 当$k=1$时，即为一步转移概率p_{ij}，其矩阵形式可记为

$$P_1=\begin{pmatrix} p_{11}\cdots p_{1n} \\ p_{21}\cdots p_{2n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ p_{n1}\cdots p_{nn} \end{pmatrix}，其中\sum_{j=1}^{n}p_{ij}=1；$$

c. 由定义 4 可知$P(1)=P(0)P_1$，考察 P(1)中的n个值，若$\max\limits_j p_{kj}=p_{kl}$，则可以认为下一时刻系统最有可能由状态$E_k$转向状态$E_l$，即下一时刻最有可能处于状态$E_l$；

d. 由定义 3 可知$P(2)=P(1)P_1,\cdots,P(n)=P(n-1)P_1$，同理上一步可知$n$时刻后系统最有可能所处状态。

3. 应用实例分析

由于收盘价是影响股票价格的最主要的因素，本文在深交所交易指数数据中选取从 2005 年 1 月到 2006 年 8 月 20 个月末收盘指数，其中时间序列的单位以月计。

步骤一：根据表 1 中的$x^{(0)}(t)$，用 Matlab 求出模型 GM（1，1）中的a,b，即$a=-0.02783$，$b=232.1352$，则$\hat{x}^{(0)}(t+1)=237.085e^{0.02783t}$；

步骤二：由残差相对值公式$\varepsilon(t)=\dfrac{x^{(0)}(t)-\hat{x}^{(0)}(t)}{x^{(0)}(t)}\times 100\%$，求得残差相对值序列$\varepsilon(t)$的范围为$(-18\%,26\%)$；

步骤三：根据实际情况将残差相对值$\varepsilon(t)$平均分为三个状态E_1,E_2,E_3，其中$E_1=(-18\%,-6\%]$，$E_2=(-6\%,0]$，$E_3=(0,26\%]$，划分的状态如表 1 所示；

步骤四：计算 1 步转移概率 P_1， $P_1=\begin{pmatrix}\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$，预测对象 2006 年 8 月处于状态 3，那么下个月的绝对分布为 $P(1)=P(0)P_1=(0,0,1)\begin{pmatrix}\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}=(0,\frac{1}{5},\frac{4}{5})$，所以下个月预测对象最有可能处于状态 3，即 $\varepsilon(t)\in E_3=(0,26\%]$，又由 $\varepsilon(k)=\dfrac{x^{(0)}(t)-\hat{x}^{(0)}(t)}{x^{(0)}(t)}\times 100\%$ 得 $x^{(0)}(t)=\dfrac{\hat{x}^{(0)}(t)}{1-\varepsilon(t)}$，所以 $x^{(0)}(21)\in(413.649,558.985)$，由于要预测的 2006 年 9 月的月末收盘指数为 438.9，在此预测区间内；

步骤五：再进行预测可以依照上面的步骤可得到下面月份的预测区间。

表 1 深交所交易指数（2005 年 1 月到 2006 年 8 月 20 个月末收盘指数资料）

序号	月份	$x^{(0)}(t)$	$\hat{x}^{(0)}(t)$	$\varepsilon(t)$	状态
1	2005.01	297.05	297.05	0	2
2	2005.02	328.13	243.776	25.71%	3
3	2005.03	296.75	250.655	15.53%	3
4	2005.04	283.57	257.729	9.11%	3
5	2005.05	262.25	265.002	-1.05%	2
6	2005.06	260.73	272.481	-4.51%	2
7	2005.07	254.47	280.171	-10.1%	1
8	2005.08	278.98	288.077	-3.26%	2
9	2005.09	281.72	296.207	-5.14%	2
10	2005.10	265.4	304.566	-14.76%	1
11	2005.11	266.86	313.161	-17.35%	1
12	2005.12	278.75	321.999	-15.52%	1
13	2006.01	307.11	331.086	-7.81%	1
14	2006.02	315.3	340.43	-7.97%	1
15	2006.03	323.45	350.037	-8.22%	1
16	2006.04	353.94	359.915	-1.69%	2
17	2006.05	417.02	370.072	11.26%	3
18	2006.06	433.22	380.516	12.17%	3
19	2006.07	406.09	391.255	3.65%	3
20	2006.08	421.47	402.296	4.55%	3

由上可知，

表 2　2006 年 9 月到 2006 年 12 月的月末收盘指数预测区间

序号	月份	月末收盘指数实际值	灰色马尔可夫链预测模型预测的区间
21	2006.09	438.9	（413.649,558.985）
22	2006.10	446.49	（425.323,574.761）
23	2006.11	495.88	（437.326,590.981）
24	2006.12	550.59	（449.668,607.659）

4. 结 论

灰色马尔可夫链预测模型是根据灰色模型和马尔可夫链模型思想建立的，同时建立在历史数据的统计分析基础上。该模型不仅考虑了数据序列中的演变规律，而且通过状态转移概率矩阵的变换提取数据中的随机响应[6]，因而它将灰色模型和马尔可夫链模型的优点结合起来，克服各自的缺点提高预测精度，另外该模型的原理浅显易懂、计算过程不复杂，适用性比较强。

该模型存在许多值得探讨的问题，它的预测精度与状态的划分有很大的关系，目前状态的划分没有统一的标准，所以还需要进一步的研究，另外该模型对波动性较大且有一定上升趋势的数据来说，可以取得比较好的预测效果[7]，不是对任何数据都能适用。总之，灰色马尔可夫链预测模型有其应用价值，为投资者提供理论方便。

参考文献

[1] 邓聚龙.灰色预测与决策[M].华中理工大学出版社,1986.
[2] 夏乐天,朱永忠.工程随机过程[M].河海大学出版社,2000:59-81.
[3] 薛勋国,刘宝新,李百川.灰色马尔可夫链在道路交通事故预测中的应用[J].人类工效学,2006,12(3):26-28.
[4] 唐娜,桂预风,李宝.灰色马尔可夫模型应用于股指分析[J].第五届中国不确定系统年会论文集.2007,195-198.
[5] 夏乐天.加权马尔可夫链在降水状况预测中的应用[J].水利水电科技进展.2006,26(6):20-23.
[6] 灰色马尔可夫链在高峰负荷预测中的应用[J].电力需求侧管理.2004,6(6):13-15
[7] 赵琳琳,夏乐天.灰色马尔可夫链模型的改进及其应用[J].河海大学学报(自然科学版),2007,35(4):487-490.

The Application in the Prediction of Stock Market based on Gray Markov Chain Model

Wang lixia
College of Sciences, Hohai University, Nanjing (210098)

Abstract
Based on gray prediction model and Markov chain prediction theory, gray prediction model is combined with Markov chain-state transition and the theory of gray-Markov chain prediction model is expounded and applied to the prediction of stock market. Using GM(1,1) model to predict has good accuracy and regularity, but to the stock market with large random fluctuation, its accuracy is lower. Markov model can overcome this defection, so combining GM(1,1) with Markov chain model to predict stock market can improve the precision of prediction. Based on the indexes ended in the twenty months in Shenzhen Stock Exchange , the range of the index in the end of next four months was predicted, and example is given to prove its reliability in the application in the prediction of stock market.
Keywords: Gray system; Markov chain; State transition; The index of market close in the end of month; predict