傅立叶变换与小波变换的比较教学*

罗 永 成礼智
(国防科技大学理学院,长沙,410073)

摘 要 本文针对小波变换教学中小流变换概念理解困难的问题,提出了一种比较教学方法,通过分析小波变换与傅立叶变换之间的联系,并从四个方面进行对比,清楚地描述了小波变换的本质,从而对加深对小波变换的理解。

关键词 傅立叶变换 小波变换 比较教学

Comparing Teaching of Fourier Transform and Wavelets Transform

Luo Yong Chen Lizhi
(School of Science, National University of Defence Technology, Changsha, 410073)

Abstract Since the concept of wavelets is difficult to understand. This paper gives a comparing teaching method. Through analyzing the relationship hetween wavelet transform and Fourier transform from four aspects. The essential characters is described. It will enhance to understand the wavelets transform.

Keywords Fourier transform Wavelet transform Comparing teaching

1 课程背景

受到热扩散方程数学模型的启发,著名科学家傅立叶在 1807 年向法国国家科学院提交的一篇报告中指出:任何周期函数都可以用一系列正弦波来表示。通过一个半世纪的不断完善与发展,以傅立叶级数[1]以及傅立叶积分理论作为主要研究内容的调和分析理论已经在数学、物理学以及工程实践中得到广泛应用。小波理论正是在人们充分研究了傅立叶分析方法的特点与局限性后建立起来的。

小波分析(wavelet Analysis)是 20 世纪 80 年代中期发展起来的一门数学理论和方法,由法国科学家 Grossman 和 Morlet 在进行地震信号分析时提出的,随后迅速发展。小波分析理论的重要性及应用的广泛性引起了科技界的高度重视。小波分析的出现被认为是傅立叶分析的突

* 冯良贵 教授推荐
收稿日期:2008 年 9 月 8 日

破性进展。

小波分析的应用是与小波分析[2]的理论研究紧密地结合在一起的。小波分析的许多分析应用中,都可以归结为信号处理问题,特别适用于非稳定信号的处理。事实上小波分析的应用领域十分广泛,它被广泛使用于逼近论、微分方程、模式识别、计算机视觉、图象处理、非线性科学、科技信息产业等领域,并取得了令人瞩目的成绩。例如:数学领域的许多学科;信号分析、图象处理;量子力学、理论物理;军事电子对抗与武器的智能化;计算机分类与识别;音乐与语言的人工合成;医学成像与诊断;地震勘探数据处理;大型机械的故障诊断等方面;在数学方面,它已用于数值分析、构造快速数值方法、曲线曲面构造、微分方程求解、控制论等;在信号分析方面的滤波、去噪声、压缩、传递等;在图象处理方面的图象压缩、分类、识别与诊断、去污等;在医学成象方面,可以减少B超、CT、核磁共振成像的时间,提高分辨率等。

从2002年开始,国防科技大学理学院系统科学与数学系计算数学教研室,在本科大学四年级数学专业学员中开设了《傅立叶分析与小波》课程。为其未来从事小波理论及小波的工程应用提供基础理论支持,同时也为学员创造性思维[3]提供一个强大的理论工具,直接面向未来的科研和岗位。

2 课程教学存在的困难

《傅立叶分析与小波》课程为数学专业本科学员开设,该部分学员在《数学分析》课程对于傅立叶分析的部分理论和相关定理进行了学习,已经建立起一套比较完整的认识体系。《傅立叶分析与小波》课程的傅立叶分析部分对《数学分析》课程的这一部分内容作了进一步的深化,学员对其理解较容易,教学可以较轻松地完成。

按照教材内容安排,从傅立叶分析理论到小波理论的发展还经历了一个中间过程,即窗口傅立叶变换理论,由于这部分内容在实际工程应用中较少使用,理论也不如小波变换先进,因此教员在讲授这一部分内容的时候,多都采用略讲的方式。因此学员在理解傅立叶分析的基础上,跨越到小波分析理论的学习时产生了困难。从这几年的教学效果来看,许多学员对于小波变换的特点和本质的掌握存在一定难度,普遍反映小波分析是一门难学的课程。我们通过与学员交流,并结合对教学内容的分析思考,认为在学员原有的数学基础上,通过对傅立叶分析和小波分析进行深入的类比,可以使学员加深对小波分析的理解。

3 小波变换类比学习

下面我们从傅立叶变换和连续小波变换的比较出发来研究它们二者的联系与区别,希望能给这一部分教学带来一些新的思路和方法。

我们首先比较连续傅立叶变换和连续小波变换的定义。

傅立叶变换定义

设$f(t)$为L^1可积(即$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$)的分段光滑函数,则其傅立叶变换为

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j t\omega}dt \tag{1}$$

连续小波变换定义

设 $f(t)$ 为 L^2 可积(即 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$), $\psi(t)$ 是基本小波函数,则其小波变换为

$$W_x(a,\tau)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{\Psi(\frac{t-\tau}{a})}dt \tag{2}$$

很明显,这两个变换在形式上截然不同:傅立叶变换后的函数是一个一元函数 $\hat{f}(\omega)$,而小波变换则变成了带有两个自变量的二元函数 $W_x(a,\tau)$。教学过程中我们不能只是简单地把变换小波公式列出来,首先要分析傅立叶变换与连续小波变换之间的联系。

(1)时频变换本质

首先我们要看到小波变换与傅立叶变换的共同本质:时频分析工具。它们都是将函数(信号)从时域变换到频域。傅立叶变换的频率很好理解,就是变量 ω。对于小波变换而言可以刻画信号缩放程度的因子只有 a,那么小波的频率应该就是 a。但是这个结论正确吗? 我们来看看,当 a 值增大的时候,信号随之也拉伸,频率反而降低。因此,我们说变量 a 与信号频率是相关的,它反比于频率。

从而我们就发现了二者之间的第一个联系:它们都是将信号从时间域变换到频率域,对应的频率表征分别为 ω 和 $\frac{1}{a}$。

(2)核函数的理解

小波变换和傅立叶变换都可以视为函数与各自的核函数作内积。其中两个函数 $f(t)$ 与 $g(t)$ 内积的定义为:

$$<f(t),g(t)>=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\overline{g(t)}dt$$

傅立叶变换的核函数为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jt\omega}$,而小波的核函数为 $\frac{1}{\sqrt{a}}\Psi(\frac{t-\tau}{a})$。傅立叶变换和小波变换都可以看成是函数与核函数作内积,即:

$$\hat{f}(\omega)=<f(t),\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{jt\omega}>$$

$$W_x(a,\tau)=<f(t),\frac{1}{\sqrt{a}}\Psi(\frac{t-\tau}{a}>$$

下面分析二者区别:

(1)信号条件

傅立叶变换对信号 $f(t)$ 的要求为 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$,而小波变换要求为 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt<\infty$。

(2)变量含义

傅立叶变换将一个一元函数变换成为一个一元函数,而小波变换将一个一元函数变换成

为一个二元函数。小波变换包括了一个平移因子 τ,傅立叶变换中则不包含该因子。

(3)频率意义

傅立叶变换的变量 ω 为频率,小波变换的变量 a 则反比于频率。这个性质正好可以克服傅立叶变换的时域拉伸与频域拉伸相排斥的缺陷,也是小波被称为“数学显微镜”的重要理论依据。

(4)核函数

傅立叶变换的核函数是一个确定的函数,其具体的函数形式为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{j\tau\omega}$,因此如果给定一个函数只要其傅立叶变换存在,其形式一定唯一的。但是小波变换的核函数为 $\frac{1}{\sqrt{a}}\Psi(\frac{t-\tau}{a})$,其中基本小波函数 $\Psi(t)$ 是一类函数,并没有给出具体的形式,因此函数 $f(t)$ 的小波变换形式是不确定的。

4 教学效果

由于小波理论新,在工程应用中广泛应用,因此有必要将小波变换纳入教学计划。小波分析涉及数学分析、复变函数、泛函分析、信号处理理论等方面,理论体系复杂,对小波理论的学习须建立在掌握傅立叶变换的基础上,由于我们的学员通过《数学分析》课程,已经能够较好地理解傅立叶变换理论,因此从傅立叶变换和小波变换的比较入手,采用类比式教学方法,不仅使学员温故而知新,而且能够使学员对小波变换的本质理解更为深刻,对课程的学习兴趣也得到了提高。这些基础理论的教学可以为将来学员从事小波理论的研究和应用提供理论基础。

从最后的教学实践来看,大部分学员对小波定义的理解较深入。较前几届的学生,感觉小波学习还是轻松的,学习的积极性也较高。最后的考核成绩来看,在考试题目难度近似的前提下,学员考试的成绩得到了提高(平均分提高了 4.7)。

最后我们得出结论,通过比较教学,能加深学生对小波分析的理解,由于可以对照已有的知识,也可以提高他们的学习热情,达到了提高教学效果的目的。

参考文献

[1]成礼智,王红霞,罗永．小波的理论与应用,科学出版社,2004.
[2]杨福生．小波变换的工程分析与应用,科学出版社,1999.
[3]田锋．大学生创造性学习的基础与特征探悉,高等教育研究,2006,29(2),31-34.