(Programmazione) Logica

Marco Alberti

marco.alberti@unife.it

Progetto di alta formazione in ambito tecnologico economico e culturale per una regione della conoscenza europea e attrattiva approvato e cofinanziato dalla Regione Emilia-Romagna con deliberazione di Giunta regionale n. 1625/2021

Regione Emilia-Romagna

FERRARIAE UNIVERSITAS · EX LABORE FRUCTUS · 13 91

Università degli Studi di Ferrara

Logica del primo ordine

Marco Alberti

marco.alberti@unife.it

Regione Emilia-Romagna

Progetto di alta formazione in ambito tecnologico economico e culturale per una regione della conoscenza europea e attrattiva approvato e cofinanziato dalla Regione Emilia-Romagna con deliberazione di Giunta regionale n. 1625/2021

FERRARIAE UNIVERSITAS · EX LABORE FRUCTUS · 13 91

Università degli Studi di Ferrara

Logica del primo ordine (o dei predicati)

- Un linguaggio logico si basa su un alfabeto.
- *Alfabeto* composto da:
  - insieme C dei *simboli di costante* . 1, 2, 3 ...
  - insieme V dei *simboli di variabile* . a, b, y
  - insieme F dei *simboli di funzione* . somma +
  - insieme P dei *simboli di predicato* . primo minore <
  - *connettori logici:* **and**, **or**, **not**, **implies**, ≡
  - *parentesi*
  - *quantificatori:* ∀(**forall**, universale),∃(**exists**, esistenziale)

Sintassi

- **Termini elementari**:
  - costanti, 1, 2, 3 ..
  - variabili, n, m, a
  - applicazioni di funzioni (f(...)) a termini elementari

somma(3, 5) somma(3, x)
somma(x, somma(4, y))

- Esempi:
  - costante c_0
  - variabile x
  - se f e g sono simboli di funzione: f(x), g(f(c_0),x)

Sintassi

minore(2, 4)
minore (4, somma (1,2))

- Formule atomiche: applicazione di simboli di predicato (p(...)) a termini elementari
- Esempi: se p è un simbolo di predicato,
  - p(x)
  - $p(x,f(c_0))$

  sono formule atomiche

minore (2, 4)
2 < 4

- Alcuni predicati e funzioni hanno sintassi particolare:
  - es. <, notazione infissa: $x < c_0$ è una formula atomica

Sintassi

$x < 2$ minore$(2, x)$

$\neg(\underbrace{\underbrace{x<2}\wedge\underbrace{a>1}}_{fbf})$

fbf

$\forall x\,(x>0)$

$\forall y\,(x>0)$

Formule ben formate (fbf):

- le formule atomiche sono fbf
- l'applicazione solita dei connettivi logici a fbf è una fbf
- se A è una fbf e X è una variabile:
  - ∀X A
  - ∃X A

  sono fbf

Esempi di formule ben formate:

- p(x) ATOMICA
- ~~p(x) **and** p(f(c_0))~~ ¬ fbf
- ∀x p(x)
- ∀x ∃y (p(x) and p(f(y)))

Variabili

chiusa $2 \geq 1$

non chiusa $n > 3$ n libera

chiusa $\forall n \; n > 3$ n legata

- Una formula senza variabili è detta *ground*.
- In una formula, una variabile è detta
  - *libera* se non è quantificata
  - *legata* altrimenti
- Una formula senza variabili libere è detta *chiusa*.
- La *chiusura* di una formula si ottiene quantificando universalmente tutte le variabili libere

$\forall n \, (n > 3)$ CHIUSURA (UNIVERSALE)

$\exists n \, (n > 3)$ CHIUSURA ESISTENZIALE

$2 > 1$

Semantica

- Una *interpretazione* associa un significato ai simboli di
  D
  - costante: elemento del dominio D
    $23 \to$ ventitre
  - funzione n-aria: funzione da D^n a D
    $+ \to$ $(1,1) \mapsto 2$, $(1,2) \mapsto 3$
  - predicato n-ario: relazione n-aria (sottoinsieme di D^n)
    $< \to \{(1,2), (1,3), \ldots\}$
    $P(\ldots, \ldots)$
- In questo modo ogni formula atomica ground assume un valore di verità, uguale a quello della sua interpretazione nel dominio del discorso
- Il valore di verità di una fbf chiusa si ottiene applicando le tabelle di verità dei connettivi logici usati ai valori di verità delle formule atomiche, e i quantificatori alle variabili legate
- Il valore di verità di una fbf con variabili libere richiede l’assegnamento a ogni variabile di un termine ground.
  $n > 5$
- Assegneremo ai simboli i significati consueti anziché definirli ogni volta

Progetto di alta formazione in ambito tecnologico economico e culturale per una regione della conoscenza europea e attrattiva approvato e cofinanziato dalla Regione Emilia-Romagna con deliberazione di Giunta regionale n. 1625/2021

Tabelle di verità e quantificatori

$\underbrace{\underbrace{2>1}_{V} \wedge \underbrace{3<2}_{F}}_{F}$

A	B	not A	A or B	A and B	A implies B	A ≡ B
V	V	F	V	V	V	V
V	F		V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F		F	F	V	V

$\exists n\,(n<5)$ V $1 < 5$

$\forall n\,(n<5)$ F $6 < 5$

Se φ è una formula:

- **forall** x φ è vera se, per ogni termine ground t, è vera la formula che si ottiene sostituendo t a ogni occorrenza di x in φ
- **exists** x φ è vera se, per almeno un termine ground t, è vera la formula che si ottiene sostituendo t a ogni occorrenza di x in φ

Esempi

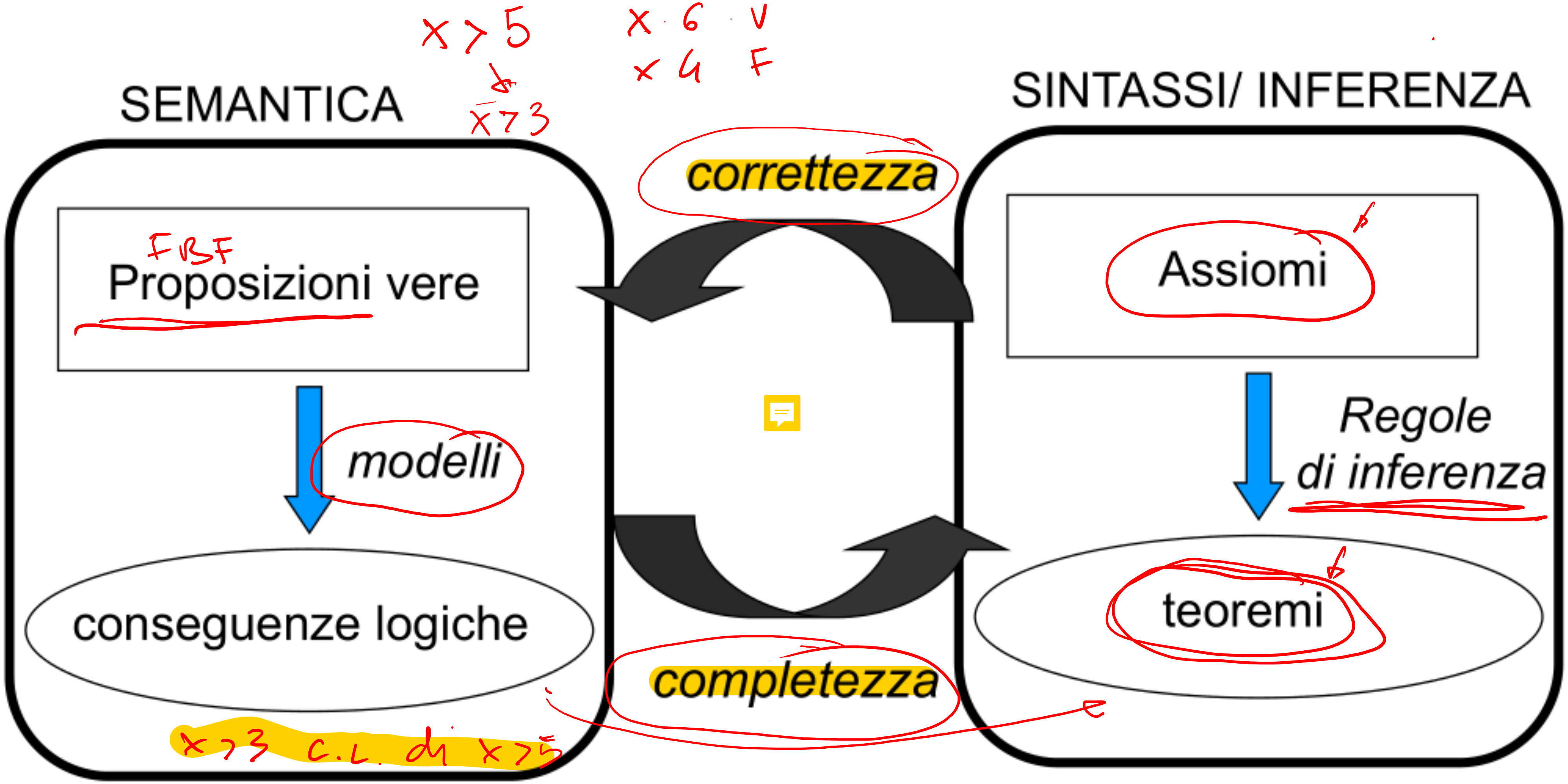
Dominio: $\mathbb{N}$

1. x > y **and** y > z **implies** x > z ? (V)
2. x = y ≡ y = x ? (V)
3. **for all** x, y, z (x > y **and** y > z **implies** x > z) V UNIVERSALE *(chiusura di 1)*
4. x + 1 < x − 1 ? (F)
5. x + 1 > x − 1 ? (V)
6. **for all** x (**exists** y (y = x + z)) V ? LIBERA
7. x > 3 **or** x < -6 ?

5 → V

-10 → V

0 → F



x > 5
x > 3
x 6 V
x 4 F
SEMANTICA
SINTASSI/ INFERENZA
FBF
Proposizioni vere
modelli
conseguenze logiche
x > 3 c.l. di x > 5
correttezza
completezza
Assiomi
Regole
di inferenza
teoremi