LMAT1111 – Mathématiques générales (1^{re} partie)
Corrigé de l'examen

Augusto Ponce et Pedro Vaz

11 janvier 2016

1. (3 points) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? *Répondez par vrai ou faux à la fin de la ligne, sans justifier. Chaque mauvaise réponse entraînera l'annulation d'une bonne réponse. Vous pouvez vous abstenir sans être pénalisé.*

   (a) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1, \\ 2 & \text{si } x = 1, \end{cases}$ est continue.

   (b) L'équation $\cos(x) + x^2 - 5 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

   (c) La fonction $u \colon]1, 10[\to \mathbb{R}$ définie pour $t \in]1, 10[$ par $u(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ vérifie l'équation différentielle $tu'(t) = (t-1)u(t)$.

   (d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (\sin x)^6 \,\mathrm{d}x = 0$.

   (e) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = y \ln(1 + xy^2)$, alors $\nabla f(1, 0) = (1, 0)$.

   (f) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \mathrm{e}^y \sin(2x)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Solution:

(a) Vrai

(b) Vrai

(c) Vrai

(d) Faux

(e) Faux

(f) Faux

2. (2,5 points) Calculez la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.
Mentionnez le(s) résultat(s) du cours que vous utilisez. Vous serez évalué sur la qualité de votre rédaction mathématique.

Solution: Puisque la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos x$ est deux fois dérivable, son polynôme de Taylor T^2 d'ordre 2 autour de 0 existe et est donné par

$$T^2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

En écrivant la formule de Taylor $\cos x = T^2(x) + R^2(x)$, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}_*$,

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{R^2(x)}{x^2}$$

et donc par la propriété de la somme de limite et la définition du reste de Taylor, nous avons

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

3. (1 point) Calculez l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi x\,\cos(x)\,\mathrm{d}x$. *Écrivez votre réponse à la fin de cette phrase, sans justifier :*

Solution: Intégration par parties :

$$\int_0^\pi x\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = \big(\pi\sin\pi - 0\sin 0\big) - \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \cos\pi - \cos 0 = -2.$$

4. (1 point) Déterminez la valeur du maximum de la fonction $f\colon [0,6] \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in [0,6]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{4} - \dfrac{\mathrm{e}^{(x/2)}}{3}$. *Écrivez votre réponse à la fin de cette phrase, sans justifier :*

Solution: Comme $f'(x) = -\dfrac{e^{x/2}}{6}$ on voit que f n'a pas de points critiques sur]0,6[. Comme f est continue sur un intervalle fermé on calcule $f(0)$ et $f(6)$ pour conclure que le maximum de f sur]0,6[est $f(0) = \dfrac{e}{4} - \dfrac{1}{3}$.

5. (2,5 points) Soit $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \in]-1,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x).$$

En utilisant un développement de Taylor de la fonction f au point $a = 0$, montrez que $\ln(1{,}5) \approx \frac{3}{8}$; estimez l'erreur de cette approximation.
Mentionnez le(s) résultat(s) du cours que vous utilisez. Vous serez évalué sur la qualité de votre rédaction mathématique.

Solution: Puisque f est deux fois différentiable, on remarque que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$T^2_{f,0}(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$

En particulier,

$$T^2_{f,0}(\tfrac{1}{2}) = \frac{3}{8}.$$

On a donc, par définition du reste,

$$\ln\frac{3}{2} - \frac{3}{8} = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{8} = R^2_{f,0}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Par la formule du reste de Lagrange, il existe c compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ tel que

$$R^2_{f,0}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{(1+c)^3}\frac{1}{24}.$$

On a alors, puisque $0 \le c \le \frac{1}{2}$,

$$0 \le R^2_{f,0}(\tfrac{1}{2}) \le \frac{1}{24}.$$

Ainsi, dans l'approximation $\ln 1{,}5 \approx \dfrac{3}{8}$, on commet une erreur d'au plus $\dfrac{1}{24}$.

6. (1 point) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} + xy^2 - x^2$. Déterminez l'équation du plan tangent à cette fonction au point $(1, 0)$. *Écrivez votre réponse à la fin de cette phrase, sans justifier :*

Solution: $-2(x-1) + y$

7. (1 point) Calculez l'intégrale $\displaystyle\iint_A y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ où $A \subset \mathbb{R}^2$ est le triangle de sommets (0,0), (4,0) et (2,2). *Écrivez votre réponse à la fin de cette phrase, sans justifier :*

Solution: Nous avons

$$\int_A y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_y^{4-y} y^2 \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^2 y^2(4-2y) \, \mathrm{d}y = 4\frac{2^3}{3} - 2\frac{2^4}{4} = \frac{8}{3}$$

8. (2,5 points) Montrez que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{\sqrt{x^2+y^8}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

est continue en $(0, 0)$.
Mentionnez le(s) résultat(s) du cours que vous utilisez. Vous serez évalué sur la qualité de votre rédaction mathématique.

Solution: Nous avons que $|x| \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^8}$. Alors pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\left| \frac{xy^4}{\sqrt{x^2+y^8}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^8}} \, y^4 \leq y^4,$$

et alors,

$$-y^4 \leq \frac{xy^4}{\sqrt{x^2+y^8}} \leq y^4.$$

Nous avons ainsi que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$-y^4 \leq f(x,y) \leq y^4.$$

Puisque les fonctions $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto -y^4$ et $h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^4$ sont continues et valent 0 en $(0, 0)$, par la propriété de l'étau nous avons que f est continue en (0,0).

9. (1 point) Déterminez, si possible, $b \in \mathbb{R}$ tel que pour $x > 0$, $\dfrac{x^3 - 15x^2 + \sqrt{7}}{x - 11} = x^2 - 4x + b + R(x)$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} R(x) = 0$. *Écrivez votre réponse à la fin de cette phrase, sans justifier :*

Solution: $\boxed{b = 44}$

10. (2,5 points) L'indice de refroidissement dû au vent I est une température subjective qui dépend de la température réelle T et de la vitesse du vent v de sorte que $I = f(T, v)$. La table que voici donne quelques valeurs de cet indice :

		v (km/h)					
		20	30	40	50	60	70
T (°C)	-10	-18	-20	-21	-22	-23	-23
	-15	-24	-26	-27	-29	-30	-30
	-20	-30	-33	-34	-35	-36	-37
	-25	-37	-39	-41	-42	-43	-44

Servez-vous de cette table pour estimer la valeur de cet indice quand la température est de $-12\,°\mathrm{C}$ et la vitesse du vent est de 33 km/h **en utilisant des notions abordées au cours**.
Vous serez évalué sur la qualité de votre rédaction mathématique. N'oubliez pas d'indiquer les unités.

Solution: On approxime $f(T,v)$ par son plan tangent autour de $(T^*,v^*) = (-10\,°\mathrm{C}, 30\mathrm{km/h})$:

$$f(T,v) \approx f(T^*,v^*) + \frac{\partial f}{\partial T}(T^*,v^*)(T - T^*) + \frac{\partial f}{\partial v}(T^*,v^*)(v - v^*).$$

En utilisant les valeurs du tableau, on voit que :

$$\begin{aligned}
f(T^*,v^*) &= -20\,°\mathrm{C} \\
\frac{\partial f}{\partial T}(T^*,v^*) &\approx \frac{f(-15,30) - f(-10,30)}{-15-(-10)} = \frac{-26-(-20)}{-5} = \frac{6}{5} \\
\frac{\partial f}{\partial v}(T^*,v^*) &\approx \frac{f(-10,40) - f(-10,30)}{40-30} = \frac{-21-(-20)}{40-30} = -\frac{1}{10}\,°\mathrm{C/(km/h)}
\end{aligned}$$

et donc

$$f(T,v) \approx -20 + \frac{6}{5}(T+10) - \frac{1}{10}(v-30)\,°\mathrm{C}$$

quand T est proche de $-10\,°\mathrm{C}$ et v est proche de 30km/h.
On peut se servir de cette approximation pour estimer la valeur de f quand la température est de $-12\,°\mathrm{C}$ et la vitesse du vent est de 33km/h :

$$\begin{aligned}
f(-12,33) &\approx -20 + \frac{6}{5}(-12+15) - \frac{1}{10}(33-30)\,°\mathrm{C} \\
&= -20 - \frac{12}{5} - \frac{3}{10}\,°\mathrm{C} \\
&= -22.7\,°\mathrm{C}.
\end{aligned}$$