1. INTRODUCCIÓ

- **EDO**: Equació que involucra una funció de una variable i les seves derivades.

  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$

- **Ordre**: Una edo té ordre n si $y^{(n)}$ és la màxima derivada que apareix

* Podem expressar les edos d'ordre n com a un sistema d'edos d'ordre 1:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \Longrightarrow \begin{cases} q_i = y^{(i-1)} & i = 1:n \\ q_n = y^{(n-1)} \\ q_n' = y^{(n)} \end{cases} \quad \text{tq } q_i' = q_{i+1}$$

- **Sistema autònom**: Si F no depèn de x, $y' = F(y)$

* Un sistema no autònom és equivalent a l'autònom: $Y = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Solució**: $\phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ és sol. de l'edo si ϕ és n-derivable i

  $F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$

- **PVI**: El pvi associat a l'edo amb cond. inicials (x_0, y_0) consisteix en trobar $y(x)$ tq $y' = F(x,y)$ i $y(x_0) = y_0$

- **Espai de fases** $:= \mathbb{R}^n$, **Espai de fases ampliat** $:= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

  Si $\phi(t)$, $t \in I$ és sol. de l'edo,
  - $\mathrm{Im}\, \phi \subset \mathbb{R}^n$ (espai de fases)
  - $\mathrm{Graf}\, \phi \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (espai de fases ampliat)

- **Retrat de fases**: "Dibuix" de les imatges de totes les solucions

  * $q'' = F(t; q, q')$, $q \in \mathbb{R}^k$
  - $q \in$ "Espai de configuracions"
  - $(q, q') \in$ "Espai de fases"

2. SISTEMES D'EDOS LINEALS

- Sistema d'edos lineal: Sistema de la forma $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$

  $A: I \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \quad \in \mathcal{C}^r \ (r \geq 0)$

  $b: I \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \in \mathcal{C}^r \ (r \geq 0)$

- Sistema de coefs. constants $\Rightarrow$ A és constant
- Sisteme homogeni $\Rightarrow b(t) = 0$

  * $L(x) = \dot{x} - A(t)x$ és lineal i volem $L(x) = b$

Sistemes homogenis amb coefs. constants.

$\dot{x} = ax$, $L(x) = \dot{x} - ax = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(t) = e^{at}$ és solució

* El conjunt de solucions és Nuc L (e.v.) $\Rightarrow \Phi(t) = ce^{at}$ és solució $\forall c \in \mathbb{R}$

Per a un pvi donat, la sol. és $\phi(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$

Dem:

$x(t) = ce^{at}$. Imposem $x(t_0) = ce^{at_0} = x_0 \Rightarrow c = x_0 e^{-at_0}$

$\Rightarrow x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$. $\square$

- Flux: $\varphi(t; t_0, x_0) = x_0 e^{a(t-t_0)}$, definida unívocament per:

  $$\left.\begin{aligned} &\bullet\ \varphi'(t; t_0, x_0) = a\,\varphi(t; t_0, x_0) \\ &\varphi(t_0; t_0, x_0) = x_0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema homogeni unidimensional amb coefs no lineals

$\dot{x} = a(t)x$, $a: I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{C}^r$

* El conjunt de solucions és $\Phi(t) = ce^{\alpha(t)}$, on $\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$

Dem:

$L(x) = \dot{x} - a(t)x$. Observem $x(t) = e^{\alpha(t)}$ és sol:

$\dot{x}(t) = e^{\alpha(t)}\dot{\alpha}(t) = e^{\alpha(t)}a(t) = x(t)a(t) \Rightarrow \dot{x} = a(t)x \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = ce^{\alpha(t)}$ és sol. de $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$. ✓

!! $\tilde{x}(t) = \eta(t)e^{\alpha(t)} \longrightarrow \dot{\tilde{x}} = \dot{\eta}e^{\alpha} + \eta e^{\alpha}a = a\cancel{\eta e^{\alpha}} \Rightarrow \dot{\eta} = 0 \Leftrightarrow \eta = ct$

$\Rightarrow \tilde{x}(t) = ce^{\alpha}$ ✓

- Flux: $\varphi(t; t_0, x_0) = x_0 e^{\alpha(t) - \alpha(t_0)}$, amb $\alpha(t) = \int a(t)\,dt$

  k tq $x(t_0) = x_0$: $\quad x_0 = x(t_0) = ke^{\alpha(t_0)} \Rightarrow k = x_0 e^{-\alpha(t_0)}$

  $\Longrightarrow \varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{\alpha(t) - \alpha(t_0)}$ ✓

Edos lineals unidimensionals no homogènies

$\dot{x} = a(t)x + b(t)$, $a, b: I \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$

* Totes les solucions són de la forma:
  - $x(t) = e^{\alpha(t)}\left[k + \int e^{-\alpha(t)} b(t)\, dt\right]$, $\alpha(t) = \int a(t) dt$
  - $\varphi(t; t_0, x_0) = e^{\alpha(t) - \alpha(t_0)}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)+\alpha(t_0)} b(s) ds\right]$

Dem:

$y(t) = e^{-\alpha(t)} x(t)$, $\alpha(t) = \int a(t)\, dt$

- Calculem $y'(t)$: $y'(t) = \dots = e^{-\alpha(t)} b(t)$

$\Rightarrow y(t) = K + \int e^{-\alpha(t)} b(t)\, dt \Rightarrow x(t) = e^{\alpha(t)} y(t)$ ✓

- Escollim $y(t) = k + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)} b(s)\, ds \Rightarrow x(t) = e^{\alpha(t)} y(t)$

k tq $x(t_0) = x_0$: $x(t_0) = e^{\alpha(t_0)} k \Rightarrow k = e^{-\alpha(t_0)} x_0$ ✓

□ Variació de les constants:

$\dot{x} = a(t)x + b(t) \rightarrow$

1. $x_h(t) = e^{\alpha(t)} k$, $\alpha(t) = \int a(t) dt$
2. $k := k(t) \Rightarrow \dot{x} = e^{\alpha} a k + e^{\alpha} k' = ax + b$
   $\Rightarrow \dots \Rightarrow k' = e^{-\alpha} b \Rightarrow k = c + \int e^{-\alpha} b$
3. $x(t) = e^{\alpha} k = e^{\alpha}\left[c + \int e^{-\alpha} b\, dt\right]$

Sistemes lineals homogenis

$\dot{x} = Ax$, $A: I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})\ \mathcal{C}^r$, $x: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$

□ (Superposició): x_1, x_2 solucions de $\dot{x} = Ax \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2$ és sol.

* $x = \vec{0}$ és sol. de la edo $\Rightarrow$ El conjunt de sols és un e.v.

- Solució matricial: $X: I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ tq totes les seves columnes són sol. de $\dot{x} = Ax$. Es compleix $X' = AX$

- Matriu fonamental: $M: I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ tq és sol. matricial i és invertible.

* Una m.f. ens aporta totes les solucions d'una edo.

□ Totes les sol's de $x' = Ax$ són de la forma $x(t) = M(t) \cdot K$ on M és m.f. ; $k \in \mathbb{R}^n$ constant.

$t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$: $\exists!$ sol. tq $x(t_0) = x_0$ i és $\varphi(t; t_0, x_0) = M(t)[M(t_0)]^{-1} x_0$

□ $\dot{x} = A(t)x + b(t)$. Sup. $x' = A(t)x$ té una m.f.

Aleshores, $x(t) = M(t)\left[k + \int M^{-1} b(t)\,dt\right]$ — Són totes les sol.

$$\varphi(t; t_0, x_0) = M(t)\left[M(t_0)^{-1}x_0 + \int M(s)^{-1} b(s)\,ds\right]$$

Dem:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = M(t)\,y(t) \\ x(t) = A(t)\,x + b(t) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{derivar}} \cdots \Rightarrow b(t) = M(t)\,y' \Rightarrow y = k + \int M(t)^{-1} b(t)\,dt \checkmark$$

* La m.f. es comporta com la funció exponencial en les unidimensionals ...

∘ $B \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow e^B = \sum_{k \geq 0} \frac{B^k}{k!}$ $\left(\left\| \frac{B^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|B\|^k}{k!}, \ \sum \frac{\|B\|^k}{k!} \text{ abs conv } (= e^{\|B\|}) \Longrightarrow \sum \frac{B^k}{k!} \text{ abs. conv } (M\text{-}W) \right)$

Sistemes lineals homogenis amb coefs. constants

$x' = Ax$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ constant

□ $\phi_A(t) = e^{tA}$, $\phi_A : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$:

- Ben definida i unif. conv. sobre cpts
- ϕ_A és $\mathcal{C}^\infty$ i $\phi_A'(t) = A\,\phi_A(t)$
- $AB = BA \Rightarrow e^{tA} e^{tB} = e^{t(A+B)}$
- $\phi_A(0) = Id$
- $\phi_A^{-1}(t) = e^{-tA}$
- $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$

↳ e^{tA} és la única m.f. de $x' = Ax$ tq si $t = 0$, és la identitat.

Càlcul de e^{tA}

□ $x(t)$ és sol. de $\dot{x} = Ax$ ⟶ $y(t) = P^{-1}x(t)$ és sol. de $y' = P^{-1}APy$

□ $e^{tA} = P e^{t(P^{-1}AP)} P^{-1}$, P invertible.

$$e^{tJ} = \sum \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} t^k = P^{-1}\left(\sum \frac{A^k}{k!} t^k\right) P = P^{-1} e^{tA} P$$

$$\hookrightarrow (P^{-1}A\cancel{P})(\cancel{P^{-1}}AP) \cdots (\cancel{P^{-1}}AP) = P^{-1}A^k P$$

* És suficient calcular $e^{tA}P = P e^{t(P^{-1}AP)} \cancel{P^{-1}} \cancel{P} = P e^{tJ}$

* Si J complexa, $e^{tA}P$ complexa! i e^{tA} real.

Càlcul explícit de e^{tJ}, J Jordan.

CAS I: $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$

Llavors, $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_m} \end{pmatrix}$, ja que $J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_m^k \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow e^{tA}P = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & v_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$

CAS II: $J = \lambda \mathrm{Id}$.

Llavors, $e^{tJ} = e^{t\lambda}\mathrm{Id}$

$$e^{tJ} = \sum \frac{(t\lambda \mathrm{Id})^k}{k!} = \left(\sum \frac{(t\lambda)^k}{k!}\right)\mathrm{Id} = e^{\lambda t}\mathrm{Id}$$

CAS III: $J = \lambda \mathrm{Id} + N = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $N^m = 0$

$$e^{tJ} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ t & \ddots & & & \\ t^2/2 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} & \cdots & t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} e^{tN}$$
$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} N^k$$

CAS IV: $J = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$, $\lambda = \alpha + \beta i$

- Si A té vap simple complex, $\exists B$: $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Considerem $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \mathrm{Id} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{tJ} = e^{\alpha t} e^{\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -\mathrm{Id}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-1)^k \mathrm{Id}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$*$ v vep de vap $\lambda \Leftrightarrow \bar{v}$ vep de vap $\bar{\lambda}$

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow$ $u_1 = \mathrm{Re}(v)$ vep vap λ
$u_2 = \mathrm{Im}(v)$ vep vap $\bar{\lambda}$

- $M(t)$ matriu fonamental de $\dot{x} = Ax$ $\Rightarrow$ $\det M = \det M(t_0)\, e^{(t-t_0)\operatorname{tr} A}$
- $x' = Ax$, v vep de A de vap λ $\Rightarrow$ $x(t) = e^{\lambda t}v$ és sol

$\hookrightarrow$ $x' = Ax$, A diag. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de veps, $\hat{x}_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$,

Llavors, $M(t) = [\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_n(t)]$ és m.f.

Retrat de fases de SLH plans

$$x' = Ax$$

- L'<u>òrbita</u> de p és $\Theta(p) = \{e^{tA}p\}_{t\in\mathbb{R}}$
- <u>Retrat de fases</u>: És el cjt de totes les òrbites
- <u>Espai de fases</u>: $\mathbb{R}^n$, on les variables també les anomenem x.

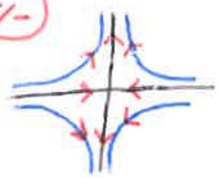
MÈTODE 1

- <u>Tipus 1</u>: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$

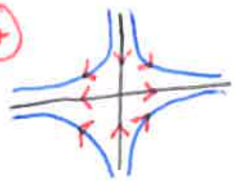
  Totes les òrbites són de la forma $x_2 = K|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$, amb $K = ct$ excepte si $p_1 = 0$

  * $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0 \longrightarrow \boxed{\text{SELLA}}$

+/-



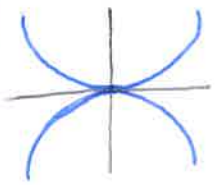
-/+



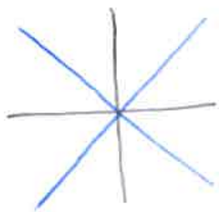
  * $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0 \longrightarrow \boxed{\text{NODE}}$

+/+ Repulsor
-/- Atractor

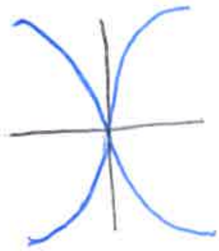
>1



=1



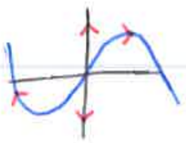
<1



- <u>Tipus 2</u>: $\begin{pmatrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \longrightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

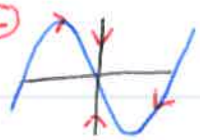
  Totes les òrbites són de la forma $x_2 = cx_1 + \frac{1}{\lambda} x_1 \log|x_1|$

+



Repulsor

-



Atractor

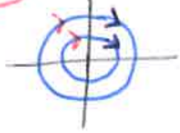
• **Tipus 3:** $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow e^{tA} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\alpha t} r_0 \cos(\theta_0 - \beta t) \\ x_2(t) = e^{\alpha t} r_0 \sin(\theta_0 - \beta t) \end{cases} \Longrightarrow (r(t), \bar{\theta}(t)) = (e^{\alpha t} r_0, \theta_0 - \beta t)$$

$\beta > 0$

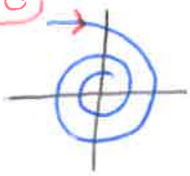
(sentit contrari si $\beta < 0$)

$\alpha = 0$



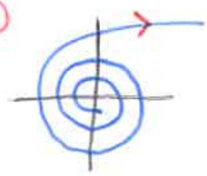
CENTRE

$\alpha < 0$



FOCUS ATRACTOR

$\alpha > 0$



FOCUS REPULSOR

MÈTODE 2

$\dot{x} = Ax$, $A \in M_2(\mathbb{R})$

vaps: $\lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \det A = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\mathrm{tr}A \pm \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\cdot\det A}}{2}$

- **Discriminant**: $D(A) = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A$

□ • $\det A < 0 \Rightarrow$ Sella
 • $\det A > 0$:
  • $D(A) > 0 \Rightarrow$ Node $\begin{cases} \mathrm{tr}A < 0 \Rightarrow \text{Atractor (Estable)} \\ \mathrm{tr}A > 0 \Rightarrow \text{Repulsor (Inestable)} \end{cases}$
  • $D(A) = 0 \Rightarrow$ Node impropi $(A \neq \lambda I)$
  • $D(A) < 0$:
   • $\mathrm{tr}A = 0 \Rightarrow$ Centre
   • $\mathrm{tr}A < 0 \Rightarrow$ Focus atractor
   • $\mathrm{tr}A > 0 \Rightarrow$ Focus repulsor

■ (Existència i unicitat de solucions):

$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, PVI, té una única solució i, a més $x \in \mathcal{E}^r$

$(x = \varphi(t; t_0, x_0))$

$\hookrightarrow A(t) \in \mathcal{E}^r$

□ $x' = A(t)x$, $M(t)$ m.f.: $\det M(t_0) = 0 \iff \det M(t) = 0 \ \forall t$

□ (Fórmula de Liouville): $M(t)$ sol. matricial de $x' = A(t)x$,

$$\det M(t) = \det M(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\,A(s)\,ds\right)$$

■ (Liouville): $\mathrm{Vol}(D_t) = \mathrm{vol}(D_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))\,ds\right)$

$D_t :=$ domini a t

Equacions lineals amb coefs periòdics

$x' = A(t)x + b(t)$, $A(t+T) = A(t)$ i $B(t+T) = b(t)$

□ $x(t)$ és sol. $\Rightarrow$ $x(t+T)$ és sol

↳ $M(t)$ m.f. $\Rightarrow \exists C_M : M(t+T) = M(t)\cdot C_M$

○ C_M és la matriu de monodromia , $C_M = [M(0)]^{-1} M(T)$

□ $M, \hat{M}$ m.f. $\Longrightarrow C_M = P C_{\hat{M}} P^{-1}$

○ $x' = A(t)x$. Els multiplicadors característics són els vaps de C_M (No dep. de B)

* v vep de C_M de vap 1 $\Longrightarrow x(t) := \varphi(t; 0, v)$ és T-periòdica.

□ $C \in M_n(\mathbb{R})$, $\det C \neq 0$ $\Rightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{C}) : e^{B} = C$

□ (Floquet): $x' = A(t)x$, $A(t+T) = A(t)$ $\Longrightarrow$ Tota mf és $M(t) = p(t)e^{Bt}$ amb $P(t+T) = P(t)$ i $e^{Bt} = C_M$

↳ $x(t)$ sol. de la edo $\Longleftrightarrow x(t) = P(t)\,y(t)$ és sol. de $y' = By$. $e^{Bt} = C_M$

Comportament quan $t \to +\infty$

○ $x' = A(t)x$, A ct. o periòdica:

- Estable : Totes les sols. fitades $\forall t$
- Inestable : $\exists$ sol. tq $\|x(t)\| \longrightarrow \infty$, $t \to \infty$.
- Atractor : $\forall$ sol , $x(t) \longrightarrow 0$, $t \to \infty$
- Repulsor $\forall$ sol ($\neq x_0 = 0$) , $x(t) \longrightarrow +\infty$, $t \to \infty$

□ A constant :

$\mathrm{Re}\,\lambda > 0 \Rightarrow x(t) \to 0$

$\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \Rightarrow x(t) \to \infty$

$\mathrm{Re}\,\lambda = 0 \Rightarrow$ fitada

□ $A(t+T) = A(t)$:

v vep de C_M de vap λ : $x(t) = M(t)v \Rightarrow x(t+T) = \lambda x(t)$

□ A tq $\mathrm{spec}\,A \subseteq \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\} \Longrightarrow \exists k, \mu > 0 : \|e^{tA}\| < k e^{-\mu t}$, $t \geq 0$

□ A constant :

- $\mathrm{spec}\,A \subseteq \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\} \Longrightarrow$ Atractor
- $\mathrm{spec}\,A \subseteq \{\mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \Longrightarrow$ Repulsor
- $\exists$ vap $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ i $\exists$ vap $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ però $\lambda I + N$ $\Longrightarrow$ Inestable
- $\mathrm{Spec}\,A \subseteq \{\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0\}$, i $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ λI $\Longrightarrow$ Estable

□ A periòdic : $\begin{cases} \lambda \text{ vap } C_M \\ \mu \text{ vap } B \end{cases} \Rightarrow e^{T\mu} = \lambda$ i $\begin{cases} \mathrm{Re}\,\mu < 0 \Leftrightarrow |\lambda| < 1 \\ \mathrm{Re}\,\mu > 0 \Leftrightarrow |\lambda| > 1 \\ \mathrm{Re}\,\mu = 0 \Leftrightarrow |\lambda| = 1 \end{cases}$

Teoria de pertorbacions

$$x' = A(t,\varepsilon)x + b(t,\varepsilon)$$

$$A(t,\varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon A_1(t) + \varepsilon^2 A_2(t) + \cdots + \varepsilon^m A_m(t) + \Theta(\varepsilon^{m+1}) \qquad \in \mathcal{C}^r$$

$$b(t,\varepsilon) = b_0(t) + \varepsilon b_1(t) + \varepsilon^2 b_2(t) + \cdots + \varepsilon^m b_m(t) + \Theta(\varepsilon^{m+1})$$

$$x_0' + \cdots + \varepsilon^m x_m'(t) + \Theta(\varepsilon^{m+1}) = \left(A_0(t) + \cdots + \varepsilon^m A_m(t) + \Theta(\varepsilon^{m+1})\right)\left(x(t,\varepsilon)\right) + b(t,\varepsilon)$$

Terme a terme:

- $\Theta(\varepsilon^0)$: $x_0' = A_0 x_0 + b_0 \implies x_0(t) = M_0\left[M_0(t_0)^{-1}x^0 + \int_{t_0}^{t} M_0^{-1}(s)\, b_0(s)\, ds\right]$
- $\Theta(\varepsilon^1)$: $x_1' = A_0 x_1 + \underbrace{A_1 x_0 + b_1}_{\widetilde{b}_1} \implies x_1(t) = M_0\left[c.i. + \int_{t_0}^{t} M_0(s)^{-1}\, \widetilde{b}_1(s)\, ds\right]$

$\vdots$

- $\Theta(\varepsilon^i)$: $x_i' = A_0 x_i + \widetilde{b}_i \implies x_i(t) = M_0 \int_{t_0}^{t} M_0(s)^{-1}\, \widetilde{b}_i(s)\, ds$

3. CASUÍSTICA D'EDOS

Són edos de la forma $x' = f(t,x)$, $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua (a trossos).

- $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ és sol. si $x'(t) = f(t, x(t))$ i $(t, x(t)) \in \mathcal{U}$
- Edo separable: $x' = f(t,x)$ es pot escriure com a $h(x)x' = g(t)$.

  Ex: $t^2 + 2xx' = 0 \to 2xx' = -t^2 \to \int 2x\,dx = \int -t^2\,dt \Rightarrow \boxed{x^2 = -\frac{t^3}{3} + C}$

■ (Picard): $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cont., $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$.

$a, b > 0$: $\Omega = [-a+t_0, a+t_0] \times \{\|x - x_0\| < b\} \subset \mathcal{U}$, $\|\cdot\|$ qualsevol

$M = \max_{(t,x)\in\Omega} \|f(t,x)\|$, $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

f Lipschitz respecte x de Ω, $L > 0$ independent de t.

Aleshores,

i) $\exists!$ sol. del PVI

ii) $x(t)$ està definida a I_α

iii) $\forall t \in I_\alpha$, $x(t) \in \{\|x - x_0\| \le b\} =: B_b$

$\Big\}$ $\exists!\ x: I_\alpha \longrightarrow B_b$

□ f cont ; $D_x f$ cont $\Rightarrow$ f loc. Lipschitz al voltant de (t_0, x_0)

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \underset{\text{TVM}}{\le} \sup_{z\in\overline{x_1x_2}} \underbrace{\|D_x f(t,z)\|}_{\le L \text{ si } (t,z)\in K \text{ cpt}} \|x_1 - x_2\|$$

■ (Peano): $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$

fixada $\|\cdot\|$: escollim $a, b > 0$: $\Omega \subset \mathcal{U}$ (Ω de Picard)

M, α de Picard.

Aleshores $\exists$ sol. $x: I_\alpha \longrightarrow B_b$, $x(t_0) = x_0$ (No unicitat!)

■ (Weierstrass): $K \subset \mathbb{R}^n$ cpt, $f: K \to \mathbb{R}^m$ cont.

$\forall \varepsilon\ \exists p$: $\|f - p\|_\infty = \sup \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$

↳ $\exists P_\ell$: i) $P_\ell \longrightarrow f$ unif

ii) $\|P_\ell\|_\infty = \|f\|_\infty$

■ (Ascoli - Arzelà): $K \subset \mathbb{R}^n$ cpt. Sigui $\Sigma \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^m)$ tq

i) $x \in K \Rightarrow \{h(x) : h \in \Sigma\}$ fitat

ii) Σ equicontinu

Llavors, $\exists \{h_n\} \in \Sigma$ unif. conv.

Solucions maximals

- La solució maximal d'una edo és $\varphi(t; t_0, x_0)$ definida a $I(t_0, x_0) = (\omega_-, \omega_+)$.

□ $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ cont, $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, $\exists!$ sol. $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$.

$\Rightarrow \exists!\ \varphi(\cdot\,; t_0, x_0)$ def. a $I(t_0, x_0)$ tq:

φ $\mathcal{C}^1$, $\varphi(t; t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ i si $x: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sol., $\varphi|_J = x$.

* x sol. a I_x i $\mathcal{C}^1$ $\Rightarrow$ φ $\mathcal{C}^1$ a I_x

■ $x' = f(t,x)$, $f: U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cont. i $\exists!$ sol. del PVI

$(t_0, x_0) \in U$, $I(t_0,x_0)$ interval maximal i $\varphi(t; t_0, x_0)$ sol. maximal

K cpt amb $(t_0, x_0) \in K$

Aleshores, $\exists t \in I(t_0,x_0)$ tq $(t, \varphi(t; t_0, x_0)) \notin K$

∘ Si $I(t_0,x_0) = (\omega_-, \omega_+)$: $\lim\limits_{t \to \omega_\pm} (t; \varphi(t; t_0, x_0)) \in \partial U$ ← Potser $\nexists$ lim

↳ $f: V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ loc. Lipschitz (Picard), $x' = f(t,x)$

Aleshores, si $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}\times V$:

i) Si ω_+ finit $\Rightarrow$ $\forall K \subset V$, $\exists t \in I(t_0,x_0)$ tq $\varphi(t; t_0, x_0) \notin K$

si $V = \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\|\varphi(t; t_0, x_0)\| \xrightarrow[t \to \omega_+]{} \infty$

ii) $\varphi(t; t_0, x_0) \in \tilde{K}$, $\tilde{K}$ cpt i $\forall t \in [t_0, \omega_+)$ $\Rightarrow$ $\omega_+ = +\infty$.

□ $f: U \to \mathbb{R}$ contínua i $\exists$ sol. maximal $\Rightarrow$ $\forall K \subset U$ $\exists t_* \in I(t_0,x_0)$: $(t_*, \varphi(t_*; t_0 x_0)) \notin K$

□ (Gronwall): $u, v: [a,b) \longrightarrow [0,\infty)$ cont, $u(t) \leq c + \int_a^t v(s)u(s)\,ds$, $t \in [a,b)$

Aleshores, $u(t) \leq c\, e^{\int_a^t v(s)ds}$

↳ $w(t) = c + \int_a^t v(s)u(s)ds$ $\Rightarrow$ $w'(t) = v(t)u(t) \leq v(t)\,w(t)$.

∘ $c > 0$ i $w > 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{w'(t)}{w(t)} \leq v(t)$ $\Rightarrow$ $\log\left(\dfrac{|w(t)|}{|w(a)|}\right) \leq \int_a^t v(s)ds$

$\Rightarrow$ $w(t) \leq w(a) \cdot e^{\int_a^t v(s)ds}$, $w(a) := c$

∘ $c = 0$ $\Rightarrow$ $u(t) \leq \int_a^t v(s)u(s)\,ds$ $\Rightarrow$ $u(t) \equiv 0$.