1. INTRODUCCIÓ

- **EDO**: Equació que involucra una funció de una variable i les seves derivades.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

- **Ordre**: Una edo té ordre n si $y^{(n)}$ és la màxima derivada que apareix

* Podem expressar les edos d'ordre n com a un sistema d'edos d'ordre 1:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \Longrightarrow \begin{cases} q_i = y^{(i-1)} & i = 1:n \\ q_n = y^{(n-1)} \\ q_n' = y^{(n)} \end{cases} \quad \text{tq } q_i' = q_{i+1}$$

- **Sistema autònom**: Si F no depèn de x, $y' = F(y)$

* Un sistema no autònom és equivalent a l'autònom: $Y = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Solució**: $\phi: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ és sol. de l'edo si ϕ és n-derivable i

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

- **PVI**: El pvi associat a l'edo amb cond. inicials (x_0, y_0) consisteix en trobar $y(x)$ tq $y' = F(x,y)$ i $y(x_0) = y_0$

- **Espai de fases** $:= \mathbb{R}^n$, **Espai de fases ampliat** $:= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

  Si $\phi(t)$, $t \in I$ és sol. de l'edo,

  - $\mathrm{Im}\, \phi \subset \mathbb{R}^n$ (espai de fases)
  - $\mathrm{Graf}\, \phi \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (espai de fases ampliat)

- **Retrat de fases**: "Dibuix" de les imatges de totes les solucions

  * $q'' = F(t; q, q')$, $q \in \mathbb{R}^k$

  - $q \in$ "Espai de configuracions"
  - $(q, q') \in$ "Espai de fases"

2. SISTEMES D'EDOS LINEALS

- Sistema d'edos lineal: Sistema de la forma $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$A: I \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \quad \in \mathcal{C}^r \ (r \geq 0)$

$b: I \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \in \mathcal{C}^r \ (r \geq 0)$

- Sistema de coefs. constants $\Rightarrow$ A és constant
- Sisteme homogeni $\Rightarrow$ $b(t) = 0$

$*$ $L(x) = \dot{x} - A(t)x$ és lineal i volem $L(x) = b$

Sistemes homogenis amb coefs. constants.

$\dot{x} = ax$, $L(x) = \dot{x} - ax = 0 \Longrightarrow \Phi(t) = e^{at}$ és solució

$*$ El conjunt de solucions és Nuc L (e.v.) $\Rightarrow$ $\Phi(t) = ce^{at}$ és solució $\forall c \in \mathbb{R}$

Per a un pvi donat, la sol. és $\phi(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$

Dem:

$x(t) = ce^{at}$. Imposem $x(t_0) = ce^{at_0} = x_0 \Rightarrow c = x_0 e^{-at_0}$

$\Rightarrow x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$. $\square$

- Flux: $\varphi(t; t_0, x_0) = x_0 e^{a(t-t_0)}$, definida unívocament per:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \varphi'(t; t_0, x_0) = a\,\varphi(t; t_0, x_0) \\ \varphi(t_0; t_0, x_0) = x_0 \end{array}\right\}$$

Sistema homogeni unidimensional amb coefs no lineals

$\dot{x} = a(t)x$, $a: I \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^r$

$*$ El conjunt de solucions és $\Phi(t) = c\,e^{\alpha(t)}$, on $\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$

Dem:

$L(x) = \dot{x} - a(t)x$. Observem $x(t) = e^{\alpha(t)}$ és sol:

$\dot{x}(t) = e^{\alpha(t)}\dot{\alpha}(t) = e^{\alpha(t)}a(t) = x(t)a(t) \Longrightarrow \dot{x} = a(t)x \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = ce^{\alpha(t)}$ és sol. de $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$. ✓

$\exists!$ $\tilde{x}(t) = \eta(t)e^{\alpha(t)} \longrightarrow \dot{\tilde{x}} = \dot{\eta}e^{\alpha} + \eta\dot{e}^{\alpha}a = a\eta e^{\alpha} \Rightarrow \dot{\eta} = 0 \Leftrightarrow \eta = ct$

$\Rightarrow \tilde{x}(t) = ce^{\alpha}$ ✓

- Flux: $\varphi(t; t_0, x_0) = x_0 e^{\alpha(t) - \alpha(t_0)}$, amb $\alpha(t) = \int a(t)\,dt$

k tq $x(t_0) = x_0$: $\quad x_0 = x(t_0) = ke^{\alpha(t_0)} \Rightarrow k = x_0 e^{-\alpha(t_0)}$

$\Longrightarrow \varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{\alpha(t) - \alpha(t_0)}$ ✓

Edos lineals unidimensionals no homogènies

$\dot{x} = a(t)x + b(t)$, $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$

* Totes les solucions són de la forma:

- $x(t) = e^{\alpha(t)}\left[k + \int e^{-\alpha(t)} b(t)\, dt\right]$, $\alpha(t) = \int a(t) dt$
- $\varphi(t; t_0, x_0) = e^{\alpha(t) - \alpha(t_0)}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s) + \alpha(t_0)} b(s) ds\right]$

Dem:

$y(t) = e^{-\alpha(t)} x(t)$, $\alpha(t) = \int a(t)\, dt$

- Calculem $y'(t)$: $y'(t) = \dots = e^{-\alpha(t)} b(t)$

$\Rightarrow y(t) = K + \int e^{-\alpha(t)} b(t)\, dt \Rightarrow x(t) = e^{\alpha(t)} y(t)$ ✓

- Escollim $y(t) = k + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)} b(s)\, ds \Rightarrow x(t) = e^{\alpha(t)} y(t)$

k tq $x(t_0) = x_0$: $x(t_0) = e^{\alpha(t_0)} k \Rightarrow k = e^{-\alpha(t_0)} x_0$ ✓

□ Variació de les constants:

$\dot{x} = a(t)x + b(t) \rightarrow$ ① $x_h(t) = e^{\alpha(t)} k$, $\alpha(t) = \int a(t)\, dt$

② $k := k(t) \Rightarrow \dot{x} = e^{\alpha} a k + e^{\alpha} k' = ax + b$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow k' = e^{-\alpha} b \Rightarrow k = c + \int e^{-\alpha} b$

③ $x(t) = e^{\alpha} k = e^{\alpha}\left[c + \int e^{-\alpha} b\, dt\right]$

Sistemes lineals homogenis

$\dot{x} = Ax$, $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ $\mathcal{C}^r$, $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$

□ (Superposició) : x_1, x_2 solucions de $\dot{x} = Ax \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2$ és sol.

* $x = \vec{0}$ és sol. de la edo $\Rightarrow$ El conjunt de sols és un e.v.

- Solució matricial: $X : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ tq totes les seves columnes són sol. de $\dot{x} = Ax$. Es compleix $X' = AX$

- Matriu fonamental: $M : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ tq és sol. matricial i és invertible.

* Una m.f. ens aporta totes les solucions d'una edo.

□ Totes les sol's de $x' = Ax$ són de la forma $x(t) = M(t) \cdot K$ on M és m.f. i $K \in \mathbb{R}^n$ constant.

$t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$: $\exists!$ sol. tq $x(t_0) = x_0$ i és $\varphi(t; t_0, x_0) = M(t)\left[M(t_0)\right]^{-1} x_0$

□ $\dot{x} = A(t)x + b(t)$. Sup. $x' = A(t)x$ té una m.f.

Aleshores, $x(t) = M(t)\left[k + \int M^{-1} b(t)\,dt\right]$ Són totes les sol.

$\varphi(t;t_0,x_0) = M(t)\left[M(t_0)^{-1}x_0 + \int M(s)^{-1} b(s)\,ds\right]$

Dem:

$\left.\begin{array}{l} x(t) = M(t)y(t) \\ x(t) = A(t)x + b(t) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{derivar}} \cdots \Rightarrow b(t) = M(t)y' \Rightarrow y = k + \int M(t)^{-1} b(t)\,dt$ ✓

* La m.f. es comporta com la funció exponencial en les unidimensionals ...

∘ $B \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow e^B = \sum_{k\geq 0} \frac{B^k}{k!}$ $\left(\left\| \frac{B^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|B\|^k}{k!},\ \sum \frac{\|B\|^k}{k!} \text{ abs conv } (= e^{\|B\|}) \right.$

$\left. \Longrightarrow \sum \frac{B^k}{k!} \text{ abs. conv } (M\text{-}W) \right)$

Sistemes lineals homogenis amb coefs. constants

$x' = Ax$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ constant

□ $\phi_A(t) =: e^{tA}$, $\phi_A : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$:

- Ben definida i unif. conv. sobre cpts
- ϕ_A és $\mathcal{C}^\infty$ i $\phi_A'(t) = A\phi_A(t)$
- $AB = BA \Rightarrow e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$
- $\phi_A(0) = Id$
- $\phi_A^{-1}(t) = e^{-tA}$
- $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$

↳ e^{tA} és la única m.f. de $x' = Ax$ tq si $t=0$, és la identitat.

Càlcul de e^{tA}

□ $x(t)$ és sol. de $\dot{x} = Ax \longrightarrow y(t) = P^{-1}x(t)$ és sol. de $y' = P^{-1}APy$

□ $e^{tA} = Pe^{t(P^{-1}AP)}P^{-1}$, P invertible.

$e^{tJ} = \sum \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!}t^k = P^{-1}\left(\sum \frac{A^k}{k!}t^k\right)P = P^{-1}e^{tA}P$

$\hookrightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP$

* És suficient calcular $e^{tA}P = Pe^{t(P^{-1}AP)}\cancel{P^{-1}}\cancel{P} = Pe^{tJ}$

* Si J complexa, $e^{tA}P$ complexa! i e^{tA} real.

Càlcul explícit de e^{tJ}, J Jordan.

CAS I: $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$

Llavors, $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_m} \end{pmatrix}$, ja que $J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_m^k \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow e^{tA}P = \begin{pmatrix} v_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & v_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$

CAS II: $J = \lambda Id$.

Llavors, $e^{tJ} = e^{t\lambda} Id$

$$e^{tJ} = \sum \frac{(t\lambda Id)^k}{k!} = \left(\sum \frac{(t\lambda)^k}{k!} \right) Id = e^{\lambda t} Id$$

CAS III: $J = \lambda Id + N = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $N^m = 0$

$$e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ t & \ddots & & & \\ t^2/2 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} & \cdots & t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$e^{tJ} = e^{\lambda t} e^{tN}$

$e^{tN} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} N^k$

CAS IV: $J = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$, $\lambda = \alpha + \beta i$

- Si A té vap simple complex, $\exists B$: $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Considerem $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha Id + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{tJ} = e^{\alpha t} e^{\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -Id$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-1)^k Id$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

* v vep de vap $\lambda \Leftrightarrow \bar{v}$ vep de vap $\bar{\lambda}$

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow$ $u_1 = Re(v)$ vep vap λ; $u_2 = Im(v)$ vep vap $\bar{\lambda}$

- $M(t)$ matriu fonamental de $\dot{x} = Ax \Rightarrow \det M = \det M(t_0) e^{(t-t_0)\, tr\, A}$
- $x' = Ax$, v vep de A de vap $\lambda \Rightarrow x(t) = e^{\lambda t} v$ és sol

$\hookrightarrow x' = Ax$, A diag. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de veps, $\hat{x}_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$,

Llavors, $M(t) = [\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_n(t)]$ és m.f.

Retrat de fases de SLH plans

$x' = Ax$

- L'òrbita de p és $\Theta(p) = \{e^{tA}p\}_{t\in\mathbb{R}}$
- Retrat de fases: És el cjt de totes les òrbites
- Espai de fases: $\mathbb{R}^n$, on les variables també les anomenem x.

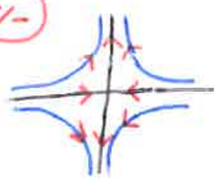
MÈTODE 1

- Tipus 1: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$

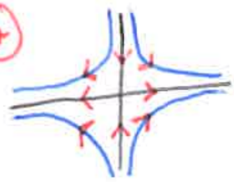
Totes les òrbites són de la forma $x_2 = K|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$, amb $K = ct$ excepte si $P_1 = 0$

* $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0 \longrightarrow \boxed{\text{SELLA}}$

+/-



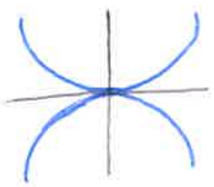
-/+



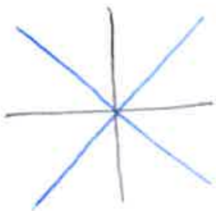
* $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0 \longrightarrow \boxed{\text{NODE}}$

+/+ Repulsor
-/- Atractor

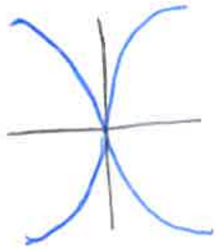
>1



=1



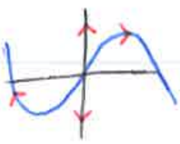
<1



- Tipus 2: $\begin{pmatrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \longrightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

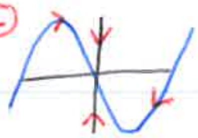
Totes les òrbites són de la forma $x_2 = cx_1 + \frac{1}{\lambda}x_1 \log|x_1|$

+



Repulsor

-



Atractor

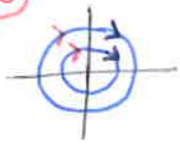
• **Tipus 3:** $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow e^{tA} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\alpha t} r_0 \cos(\theta_0 - \beta t) \\ x_2(t) = e^{\alpha t} r_0 \sin(\theta_0 - \beta t) \end{cases} \Longrightarrow (r(t), \bar{\theta}(t)) = (e^{\alpha t} r_0, \theta_0 - \beta t)$$

$\beta > 0$

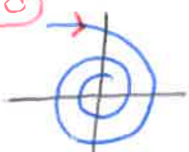
(sentit contrari si $\beta < 0$)

$\alpha = 0$



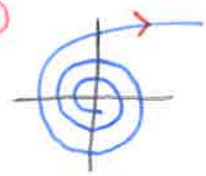
CENTRE

$\alpha < 0$



FOCUS ATRACTOR

$\alpha > 0$



FOCUS REPULSOR

MÈTODE 2

$\dot{x} = Ax$, $A \in M_2(\mathbb{R})$

vaps: $\lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \det A = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\mathrm{tr}A \pm \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\cdot\det A}}{2}$

• **Discriminant**: $D(A) = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A$

- $\det A < 0 \Rightarrow$ Sella
- $\det A > 0$:
  - $D(A) > 0 \Rightarrow$ Node $\begin{cases} \mathrm{tr}A < 0 \Rightarrow \text{Atractor (Estable)} \\ \mathrm{tr}A > 0 \Rightarrow \text{Repulsor (Inestable)} \end{cases}$
  - $D(A) = 0 \Rightarrow$ Node impropi ($A \neq \lambda I$)
  - $D(A) < 0$:
    - $\mathrm{tr}A = 0 \Rightarrow$ Centre
    - $\mathrm{tr}A < 0 \Rightarrow$ Focus atractor
    - $\mathrm{tr}A > 0 \Rightarrow$ Focus repulsor

(Existència i unicitat de solucions):

$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, PVI, té una única solució i, a més $x \in \mathcal{E}^r$

$\hookrightarrow A(t) \in \mathcal{E}^r$ $\quad$ $(x = \varphi(t; t_0, x_0))$

- $x' = A(t)x$, $M(t)$ m.f.: $\det M(t_0) = 0 \iff \det M(t) = 0 \ \forall t$
- (Fórmula de Liouville): $M(t)$ sol. matricial de $x' = A(t)x$,

$$\det M(t) = \det M(t_0)\cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\,A(s)\,ds\right)$$

(Liouville): $\mathrm{Vol}(D_t) = \mathrm{vol}(D_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))\,ds\right)$

$D_t :=$ domini a t

Equacions lineals amb coefs periòdics

$x' = A(t)x + b(t)$, $A(t+T) = A(t)$ i $B(t+T) = b(t)$

□ $x(t)$ és sol. $\Rightarrow$ $x(t+T)$ és sol

$\hookrightarrow$ $M(t)$ m.f. $\Rightarrow \exists\, C_M : M(t+T) = M(t)\cdot C_M$

○ C_M és la <u>matriu de monodromia</u> , $C_M = [M(0)]^{-1} M(T)$

□ $M, \hat{M}$ m.f. $\Longrightarrow C_M = P C_{\hat{M}} P^{-1}$

○ $x' = A(t)x$. Els <u>multiplicadors característics</u> són els vaps de C_M (No dep. de B)

∗ v vep de C_M de vap 1 $\Longrightarrow x(t) := \varphi(t; 0, v)$ és T- periòdica.

□ $C \in M_n(\mathbb{R})$, $\det C \neq 0 \Rightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{C}) : e^B = C$

□ (Floquet): $x' = A(t)x$, $A(t+T) = A(t) \Longrightarrow$ Tota mf és $M(t) = P(t)e^{Bt}$
amb $P(t+T) = P(t)$ i $e^{Bt} = C_M$

$\hookrightarrow$ $x(t)$ sol. de la edo $\Longleftrightarrow x(t) = P(t)\,y(t)$ és sol. de $y' = By$. $e^{Bt} = C_M$

Comportament quan $t \longrightarrow +\infty$

○ $x' = A(t)x$, A ct. o periòdica:

- <u>Estable</u> : Totes les sols. fitades $\forall t$
- <u>Inestable</u> : $\exists$ sol. tq $\|x(t)\| \longrightarrow \infty$, $t \to \infty$.
- <u>Atractor</u> : $\forall$ sol , $x(t) \longrightarrow 0$, $t \to \infty$
- <u>Repulsor</u> $\forall$ sol ($\neq x_0 \equiv 0$) , $x(t) \longrightarrow +\infty$, $t \to \infty$

□ A constant :

$\mathrm{Re}\,\lambda > 0 \Longrightarrow x(t) \longrightarrow 0$
$\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \Longrightarrow x(t) \longrightarrow \infty$
$\mathrm{Re}\,\lambda = 0 \Longrightarrow$ fitada

□ $A(t+T) = A(t)$:
v vep de C_M de vap λ : $x(t) = M(t)v \Rightarrow x(t+T) = \lambda x(t)$

□ A tq $\mathrm{spec}\, A \subseteq \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\} \Longrightarrow \exists k, \mu > 0 : \|e^{tA}\| < k e^{-\mu t}$, $t \geq 0$

□ A constant:

- $\mathrm{spec}\, A \subseteq \{\mathrm{Re}\,\lambda < 0\} \Longrightarrow$ Atractor
- $\mathrm{spec}\, A \subseteq \{\mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \Longrightarrow$ Repulsor
- $\exists$ vap $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ i $\exists$ vap $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ però $\lambda I + N \Longrightarrow$ Inestable
- $\mathrm{Spec}\, A \subseteq \{\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0\}$, i $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ λI $\Longrightarrow$ Estable

□ A periòdic : $\begin{cases} \lambda \text{ vap } C_M \\ \mu \text{ vap } B \end{cases} \Rightarrow e^{T\mu} = \lambda$ i $\begin{cases} \mathrm{Re}\,\mu < 0 \Leftrightarrow |\lambda| < 1 \\ \mathrm{Re}\,\mu > 0 \Leftrightarrow |\lambda| > 1 \\ \mathrm{Re}\,\mu = 0 \Leftrightarrow |\lambda| = 1 \end{cases}$

Teoria de pertorbacions

$x' = A(t,\varepsilon)x + b(t,\varepsilon)$

$$A(t,\varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon A_1(t) + \varepsilon^2 A_2(t) + \cdots + \varepsilon^m A_m(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1}) \qquad \in \mathcal{C}^r$$
$$b(t,\varepsilon) = b_0(t) + \varepsilon b_1(t) + \varepsilon^2 b_2(t) + \cdots + \varepsilon^m b_m(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1})$$

$$x_0' + \cdots + \varepsilon^m x_m'(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1}) = \left(A_0(t) + \cdots + \varepsilon^m A_m(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+1})\right)\left(x(t,\varepsilon)\right) + b(t,\varepsilon)$$

Terme a terme:

- $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$: $x_0' = A_0 x_0 + b_0 \implies x_0(t) = M_0\left[M_0(t_0)^{-1}x^0 + \int_{t_0}^t M_0^{-1}(s)\, b_0(s)\, ds\right]$
- $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$: $x_1' = A_0 x_1 + \underbrace{A_1 x_0 + b_1}_{\tilde{b}_1} \implies x_1(t) = M_0\left[c.i. + \int_{t_0}^t M_0(s)^{-1}\, \tilde{b}_1(s)\, ds\right]$

$\vdots$

- $\mathcal{O}(\varepsilon^i)$: $x_i' = A_0 x_i + \tilde{b}_i \implies x_i(t) = M_0 \int_{t_0}^t M_0(s)^{-1}\, \tilde{b}_i(s)\, ds$

1 Introducció

Def: Una edo és una equació que involucra una funció d'una variable i les seves derivades, de la forma:

$g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^m$ $\qquad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \in \mathbb{R}^n$

Ex:

- $xyy' - 1 = 0 \qquad (F(a,b,c) = abc - 1)$
- NO és una edo: $g'(x) = g(x-1)$
- No és una edo: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad y(t,x) \qquad$ (EDP)

Def: Una edo té ordre n si n és el màxim nombre tal que apareix la seva derivada d'ordre n.

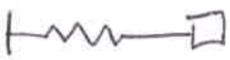
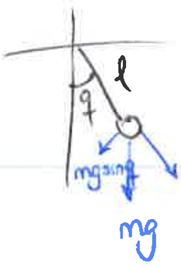
* Forma implícita: $F(x, z_0, \dots, z_n)$ si $\dfrac{\partial F}{\partial z_n} \neq 0 \quad \left(\det \dfrac{\partial F}{\partial z_n} \neq 0\right)$
* Forma explícita: $y^{(n)} = G(x, y, \dots, y^{(n-1)})$

Ex: $xyy' - 1 = 0 \longrightarrow y' = \dfrac{1}{xy}$

Ex:

- $m\ddot{q} = F(q, \dot{q})$

ordre 2

-  $\qquad m\ddot{q} = -a^2 q \qquad$ (oscil·lador harmònic)
- 

$\qquad m\ell\ddot{q} = -mg\sin q \longrightarrow \ddot{q} = -\dfrac{g}{\ell}\sin q$

Obs: Tota edo (o sistema d'edos) d'ordre n és equivalent a un sistema d'ordre 1:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Definim noves incògnites:
$$\begin{cases} y = q_1 \\ y' = q_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = q_n \\ y^{(n)} = q_n' \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1' = \dfrac{dq_1}{dx} = y' = q_2 \\ q_2' = q_3 \\ \vdots \\ q_{n-1}' = q_n \\ q_n' = y^{(n)} = G(x, q_1, \dots, q_n) \end{cases}$$

Llavors, a partir d'ara considerem sistemes d'ordre 1:

$$y' = F(x,y) \qquad F: \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Def: Un sistema es diu autònom si F no depèn de x:

$$y' = F(y)$$

Nota: Un sistema no autònom $y' = F(x,y)$ és equivalent al sistema autònom $Y = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$

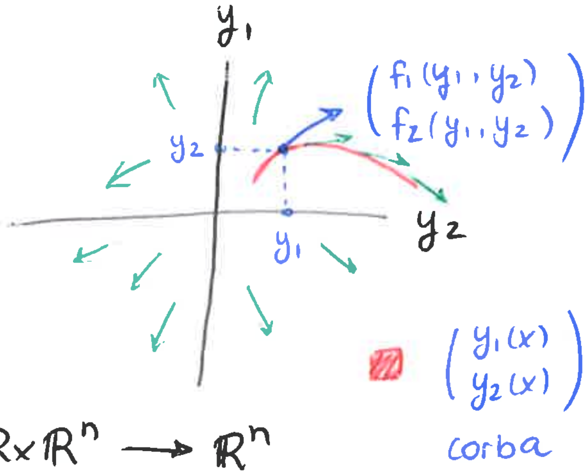
$$Y' = \begin{pmatrix} F(Y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def: Una funció $\phi: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ és solució d'una edo $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ si ϕ és n-derivable i $F(x, \phi(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I$

Interpretació geomètrica:

* sistema autònom d'ordre 1:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{\partial x} &= f_1(y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}\right\}$$



Def: Sigui l'edo $y' = f(x,y)$, $f: U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sigui $(x_0, y_0) \in U$. El problema de valors inicials (PVI) (o problema de Cauchy) associat a la edo amb condicions inicials (x_0, y_0) consisteix en trobar una funció $y(x)$ definida en un entorn de x_0 tq:

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

Nota: $m\ddot{q} = -a^2 q$

$$\left.\begin{aligned} q(t_0) &= q_0 \\ q(t_1) &= q_1 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} u &= q \\ v &= \dot{q} \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{a^2}{m} q \end{aligned}\right\}$$

Donats t_0, u_0, v_0 busquem una solució tq

$$\begin{aligned} u(t_0) &= u_0 \\ v(t_0) &= v_0 \end{aligned}$$

Questions:

i) Té (una) solució?
ii) És única?
iii) Podem trobar solució?

Donada la edo $\dot{x} = X(t,x)$ (*):

Def: i) $\mathbb{R}^n :=$ espai de fases

ii) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n :=$ espai de fases ampliat

Justificació: si $\phi(t)$, $t \in I$, és solució de (*) :

$$\Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im} \phi \subset \mathbb{R}^n \text{, espai de fases} \\ \operatorname{graf} \phi \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{, espai de fases ampliat} \end{cases}$$

Def: Retrat de fases: "dibuix" de ~~totes~~ les imatges de totes les solucions

Comentari: $\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t)$, $q \in \mathbb{R}^k$.

- q viu en l'espai de configuracions
- Escrivim el sistema d'ordre 1 equivalent: $v = \dot{q}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= F(q, v, t) \end{aligned}\right\}$$

Espai de fases
(q, v)

Sistemes d'edos lineals

Def: Anomenem sistema d'edos lineal a un sistema d'edos de la forma:

$$(*) \quad \dot{x} = A(t)x + b(t) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

on:

$$A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \text{ de classe } \mathcal{C}^r \quad (r \geq 0)$$
$$b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ de classe } \mathcal{C}^r$$

Def: Direm que:

i) (*) és de coeficients constants si A és constant.

ii) (*) és homogeni si $b(t) = 0$

Nota: Definint: $L(x) = \dot{x} - A(t)x$ $\left(L : \mathcal{C}^{r+1} \longrightarrow \mathcal{C}^r \atop \quad x \longmapsto \dot{x} - A(t)x \right)$

és un operador lineal.

Llavors, (*) s'escriu $L(x) = b$

Cas simple: Edos lineals unidimensionals d'ordre 1.

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \qquad a,b : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}^r$$

I) cas homogeni, de coefs. constants:

$\dot{x} = ax \qquad L(x) = \dot{x} - ax = 0$

i) $\phi_\alpha(t) = e^{\alpha t}$ n'és solució si $\alpha e^{\alpha t} - a e^{\alpha t} = 0$

$\iff (\alpha - a) e^{\alpha t} = 0 \quad \forall t \iff \alpha = a$

El conjunt de solucions és $\text{Nuc } L$ i és, per tant, un e.v.

$\iff$ Si x_1, x_2 són solució, llavors $\alpha x_1 + \beta x_2$ també

$\Longrightarrow x(t) = c e^{at}$ són solució $(\dim \text{Nuc } L \geq 1)$

Vegem que $\dim(\text{Nuc}(L)) = 1$:

suposem $\tilde{x}(t)$ és sol. de $\dot{x} = ax$.
com $e^{at} \neq 0 \quad \forall t \Longrightarrow \tilde{x}(t) = \eta(t) e^{at} \quad (\eta(t) = e^{-at}\tilde{x}(t))$

$\Longrightarrow \dot{\tilde{x}} = a\tilde{x} \iff \dot{\eta}(t) e^{at} + \cancel{a\eta(t) e^{at}} = \cancel{a\eta(t) e^{at}}$

$\iff \dot{\eta}(t) e^{at} = 0 \iff \dot{\eta}(t) = 0 \iff \eta(t) = ct.$

$\Longrightarrow \boxed{\tilde{x} = c e^{at}}$

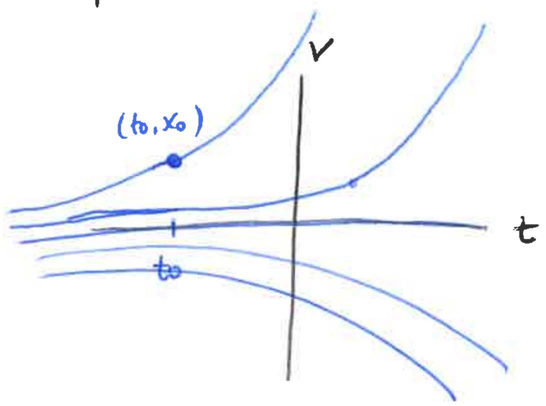
Si considerem el pvi:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right\} \quad (**)$$

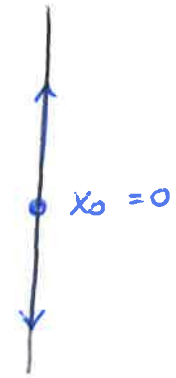
$x(t) = c e^{at}$. Imposem: $x(t_0) = c e^{at_0} = x_0 \iff c = x_0 e^{-at_0}$

$\Longrightarrow$ la sol. és: $x_0 e^{-at_0} e^{at} = \boxed{x_0 e^{a(t-t_0)}} \quad (*)$

Gràficament:



ESPAI DE FASES AMPLIAT



ESPAI DE FASES

Def: A partir de (*) podem definir:

$$\varphi(t; t_0, x_0) = x_0 e^{a(t-t_0)} \quad \text{(flux generat per l'edo)}$$

Ve definida unívocament per les condicions següents:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt}(t; t_0, x_0) &= a\,\varphi(t; t_0, x_0) \\ \varphi(t_0; t_0, x_0) &= x_0 \end{aligned}\right\}$$

II) sistema homogeni unidimensional amb coefs. no lineals:

$$\dot{x} = a(t)x \qquad a: I \longrightarrow \mathbb{R}, \; e^r$$

Suposem $\alpha(t)$ una primitiva de $a(t)$ $\quad (\dot{\alpha}(t) = a(t) \; \forall t)$

en t_0: $\alpha(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$ és la primitiva de a que val 0 en $t = t_0$.

Com abans, $L(x) = \dot{x} - a(t)x$. Observem que:

$x(t) = e^{\alpha(t)}$ n'és solució. En efecte:

$$\dot{x}(t) = e^{\alpha(t)}\dot{\alpha}(t) = e^{\alpha(t)} a(t) = a(t)x(t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{x(t) = c\,e^{\alpha(t)}} \text{ són sol. } \forall c \in \mathbb{R}$$

vegem que ho són totes: si $\tilde{x}(t)$ n'és solució, es pot escriure: $\tilde{x}(t) = \eta(t)\,e^{\alpha(t)}$. Substituïnt:

$$\dot{\eta}e^{\alpha} + \cancel{\eta e^{\alpha} a} = \cancel{a\eta e^{\alpha}} \iff \dot{\eta}e^{\alpha} = 0 \iff \dot{\eta} = 0 \iff \eta = ct$$

Busquem el flux:

$\varphi(t;t_0,x_0)$ tq $\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi(t;t_0,x_0) = a(t)\cdot\varphi(t;t_0,x_0) \\ \varphi(t_0;t_0,x_0) = x_0 \end{cases}$

Cal trobar k tq $x(t_0) = x_0$.

$x_0 = x(t_0) = k e^{\alpha(t_0)} \Longrightarrow k = e^{-\alpha(t_0)}\cdot x_0$.

Fixats t_0 i x_0:

$$\boxed{\varphi(t;t_0,x_0) = x_0\, e^{\alpha(t)-\alpha(t_0)}, \quad \text{amb } \alpha(t) = \int a(t)\,dt}$$

Ex: $x' = 2tx$

$\alpha(t) = \int 2t\,dt = t^2 + C$

1) $\varphi(t;t_0,x_0) = e^{t^2-t_0^2}\, x_0$

2) $x(t) = k e^{t^2}$, $k \in \mathbb{R}$

Obs: En edos autònomes, ens interessa $t-t_0$.
En edos NO autònomes, ens interessen t i t_0.

Obs: $\cdot\ \varphi(t;t_0,x_0) = \varphi(t-t_0, 0, x_0)$ edos autònomes

$\cdot\ \varphi(t;t_1,\varphi(t_1;t_0,x_0)) = \varphi(t;t_0,x_0)$ edos NO autònomes

$\hookrightarrow$ $\qquad\qquad \hookrightarrow$ EX

Considerem edos lineals unidimensionals no homogènies:

$$x' = a(t)\,x + b(t) \qquad (*)$$

$$a,b : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad a,b \in C^0$$

Prop: Totes les solucions de $(*)$ són de la forma:

$$x(t) = e^{\alpha(t)}\left[k + \int e^{-\alpha(t)} b(t)\,dt\right], \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{\alpha(t)-\alpha(t_0)}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)+\alpha(t_0)} b(s)\,ds\right]$$

Dem:

Considerem $y(t) = e^{-\alpha(t)} \cdot x(t)$, amb $\alpha(t) = \int a(t)\,dt$

Calculem $y'(t)$:

$$y'(t) = -e^{-\alpha(t)} \cdot a(t) \cdot x(t) + e^{-\alpha(t)} \cdot x'(t) =$$

$$= \cancel{-a(t) \cdot e^{-\alpha(t)} \cdot x(t)} + e^{-\alpha(t)} \cdot (\cancel{a(t)x(t)} + b(t)) =$$

$$= e^{-\alpha(t)} b(t) = y'(t)$$

Per tant, $y(t) = C + \int e^{-\alpha(t)} \cdot b(t)\,dt$

Com $x(t) = e^{\alpha(t)} y(t)$, ja ho tenim ✓

Mirem ara la expressió del flux:

Escollim $y(t) = k + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)} b(s)\,ds$

Aleshores, $x(t) = e^{\alpha(t)}\left[k + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)} b(s)\,ds\right]$

Busquem k tq $x(t_0) = x_0$:

$$x_0 = x(t_0) = e^{\alpha(t_0)} k \Longrightarrow k = e^{-\alpha(t_0)} x_0$$

(Amb aquesta k s'obté l'expressió de φ.

Mètode de variació de les constants.

Per no haver d'aprendre'ns la fórmula:

$$x' = a(t)x + b(t)$$

1) Solucionem l'eq. homogènia $x' = a(t)x$:

$$x_h(t) = e^{\alpha(t)} k \,, \qquad \alpha(t) = \int a(t)\,dt$$

2) Considerem que la constant no és constant:

$$x(t) = e^{\alpha(t)} k$$

$$x'(t) = e^{\alpha(t)} a(t)\, k + e^{\alpha(t)} \cdot k'$$

Imposem $x(t)$ solució de la edo:

$$x' = a(t)x + b(t)$$

$$\Longrightarrow \cancel{e^{\alpha(t)} a(t)\, k} + e^{\alpha(t)} k' = \cancel{a(t)x} + b(t) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow e^{\alpha(t)} k' = b(t) \Longrightarrow k' = e^{-\alpha(t)} b(t) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow k(t) = C + \int e^{-\alpha(t)} b(t) \,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

3) $$x(t) = e^{\alpha(t)} \left[C + \int e^{-\alpha(t)} b(t)\, dt \right]$$

Ex: $x' = 2tx + t^3$

Resolem l'eq. homogènia: $x' = 2tx$

Les solucions són: $x_h(t) = e^{t^2}k$

Apliquem variació de les constants:

Considerem $k = k(t)$ i imposem que sigui solució:

$$\begin{cases} x' = 2tx + t^3 \\ (e^{t^2}k(t))' = 2tke^{t^2} + k'e^{t^2} = 2t\,x(t) + e^{t^2}k' \end{cases}$$

$$e^{t^2}k'(t) = t^3 \iff k'(t) = e^{-t^2}t^3$$

Així: $k(t) = c + \int e^{-t^2}t^3\,dt$. Resolem per parts:

La solució és de la forma $x(t) = e^{t^2}\left(c + \int e^{-t^2}t^3\,dt\right)$, $c \in \mathbb{R}$

Obs: $b(t) = t^2$. $\int e^{-t^2}t^2\,dt$?? No ho sabem calcular explícitament.

Sistemes lineals homogenis

Sigui $A: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, $t \longmapsto A(t)$ i considerem l'edo $x' = Ax$

on $x: I \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$

Suposarem que A és $\mathcal{C}^r$:

Volem estudiar-ne les solucions, PVI i la regularitat de les x.

Prop: (Principi de superposició):

Siguin x^1, x^2 dues solucions d' $x' = Ax$. Llavors, $\alpha x^1 + \beta x^2$ també és solució

Obs: $x = \vec{0}$ també és solució, pel que les solucions formen un e.v.

Matriu fonamental

Def: Diem que $X : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, $t \longmapsto X(t)$ és una <u>solució matricial</u> de $x' = A(t)x$ si totes les columnes de X són sol. de la edo.

Llavors, $\boxed{X' = A(t)X}$

Def: Diem que $M : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ és una <u>matriu fonamental</u> si és solució matricial i és invertible $\forall t$.

En el cas de tenir <u>una</u> matriu fonamental, podrem descriure totes les solucions.

Prop: Suposem que el sist. $x' = A(t)x$ té una matriu fonamental. Aleshores, totes les solucions són $x(t) = M(t) \cdot K$, amb $K \in \mathbb{R}^n$ constant.

A més, per $t_0 \in I$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la <u>única solució</u> tq $x(t_0) = x_0$ és:

$$\boxed{\varphi(t; t_0, x_0) := M(t)\left[M(t_0)\right]^{-1} \cdot x_0}$$

Dem: Observem que si $K \in \mathbb{R}^n$, $M(t)K$ és solució.

Sigui $x(t)$ una sol de l'edo. Considerem:

$$y(t) = [M(t)]^{-1} \cdot x(t) \iff x(t) = M(t)\, y(t)$$

Com $x(t)$ és solució: $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$

A més, com $x(t) = M(t)y(t)$:

sist. matricial

$$x'(t) = M'(t)\,y(t) + M(t)\,y'(t) = A(t)M(t)\,y(t) + M(t)\,y'(t) =$$

$$= A(t)\,x(t) + M(t)\,y'(t)$$

Comparant les expressions: $\begin{cases} x' = A(t)x \\ x' = A(t)x + M(t)y' \end{cases} \iff M(t)y' = 0 \iff y' = 0$ $\square$

M invertible

Fixem $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x(t_0) = x_0$

$x_0 = x(t_0) = M(t_0)K \iff K = [M(t_0)]^{-1} x_0$

Per tant, $x(t) = M(t)[M(t_0)]^{-1} x_0$ □

<u>Obs:</u> En principi no es poden trobar explícitament les matrius fonamentals

<u>Corol·lari:</u> Sup. que $x' = A(t)x$ té una matriu fonamental $M(t)$.

Llavors:

a) Tota solució matricial s'escriu com a:

$$X(t) = M(t)[M(t_0)]^{-1} X(t_0) \qquad \forall t, t_0 \in I$$

b) $\tilde{M}(t)$ és matriu fonamental si $\exists C \in M_n(\mathbb{R})$ constant invertible tq $\tilde{M}(t) = M(t) \cdot C$

<u>Prop:</u> Suposem que tenim un sistema lineal no homogeni,

$$x' = A(t)x + b(t), \qquad A : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad b : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad C^r, \; r \geq 0$$

i suposem que $x' = A(t)x$ té una matriu fonamental.

Llavors, totes les solucions són

$$x(t) = M(t)\left[K + \int M^{-1}(t)\, b(t)\, dt\right]$$

També, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi(t; t_0, x_0) = M(t)\left[[M(t_0)]^{-1} x_0 + \int_{t_0}^{t} [M(s)]^{-1} b(s)\, ds\right]$$

<u>Dem:</u> sigui $x(t)$ solució. Considerem $y(t) = [M(t)]^{-1} x(t)$

$(x(t) = M(t)\, y(t))$

derivem

$$\longrightarrow x'(t) = M'(t)y(t) + M(t)y'(t) \overset{M \text{ fonamental}}{=} A(t)M(t)y(t) + M(t)y'(t) =$$

$$= A(t)x + M(t)y'$$

$x(t)$ sol. $\Rightarrow x' = A(t)x + b(t)$

Igualant: $A(t)x + b(t) = A(t)x + M(t)y' \Longrightarrow b(t) = M(t)y'$

$$\longrightarrow y' = M^{-1}(t)\, b(t) \Rightarrow y = k + \int [M(t)]^{-1} b(t)\, dt$$

Aleshores, $x = M(t)\,y(t) = M(t)\left[k + \int M^{-1}(t)\,b(t)\,dt\right]$ $\square$

Obs:

- 1-dimensional: $x' = a(t)x + b(t)$. $\quad M = e^{\int a(t)dt}$
- n-dimensional: $x' = A(t)x + b(t)$. $\quad M(t) = \exp\left(\int A(t)dt\right)$

$$M'(t) = \exp\left(\int A(t)dt\right)\cdot A(t) \text{ “}=\text{” } M(t)A(t)$$

$$\neq$$

$$A(t)M(t)$$

Exponencial d'una matriu.

Def: $B \in M_n(\mathbb{R})$. Definim la matriu $\boxed{e^B = \sum_{k\geq 0} \frac{B^k}{k!}}$

Està ben definit perquè $\left\|\frac{B^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|B\|^k}{k!}$ i,

com que $\sum \frac{\|B\|^k}{k!} = e^{\|B\|}$ (convergent)

Llavors, per M-Weierstrass, $\sum \frac{B^k}{k!}$ és abs. conv.

Obs: Si f és entera podem definir igualment $f(A)$

Sistemes lineals a coefs. constants homogenis

$x' = Ax$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ constant

Prop: Sigui $\phi_A(t) = e^{tA}$, $\phi_A : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$:

1) Està ben definida i és unif. conv. sobre cpts (de t)
2) ϕ_A és $\mathcal{C}^\infty$ i $\phi_A'(t) = A\,\phi_A(t)$
3) $AB = BA \Rightarrow e^{tA}\cdot e^{tB} = e^{t(A+B)}$
4) $\phi_A(0) = I$
5) $\phi_A^{-1}(t) = e^{-tA}$
6) $e^{(t+s)A} = e^{tA}\cdot e^{sA}$

Dem:

1) $\phi_A(t)$ és unif. conv. sobre cpts de $\mathbb{R}$ ($\ni t$) i abs conv ✓ ?

Fixem un cpt $K \subset \mathbb{R}$: $\exists R > 0$ tq $\forall t \in K$: $|t| \leq R$:

Llavors, $\forall t \in K$:

$$\left\| \frac{(tA)^m}{m!} \right\| \leq \frac{1}{m!} |t|^m \|A\|^m \leq \frac{1}{m!} |R|^m \|A\|^m.$$

Com la sèrie $\sum \frac{1}{m!} R^m \|A\|^m$ és convergent,

M-Weierstrass $\Rightarrow e^{tA}$ és unif conv. $\square$

2) $\phi_A(t)$ és $\mathcal{C}^\infty$ i $\phi_A'(t) = A\phi_A(t)$?

· ϕ_A és $\mathcal{C}^\infty$ perquè es pot derivar terme a terme. Així:

$$\phi_A'(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{k t^{k-1} A^k}{k!} = \sum_{k \geq 1} \frac{t^{k-1} A^{k-1}}{(k-1)!} A = A \sum_{k \geq 0} \frac{(tA)^k}{k!} = A e^{tA}$$

$\Rightarrow \phi_A$ és sol. matricial.

3) $AB = BA \Rightarrow e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$??

$$*(A+B)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} A^\ell B^{k-\ell}$$

$$\circ \; e^{t(A+B)} = \sum_{k \geq 0} \frac{[t(A+B)]^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} t^k \left[\sum_{\ell=0}^{k} \frac{A^\ell B^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} \right]$$

$$\circ \; e^{tA} e^{tB} = \left(\sum_{m \geq 0} \frac{(tA)^m}{m!} \right) \left(\sum_{\ell \geq 0} \frac{(tB)^\ell}{\ell!} \right) = \sum_{\ell, m \geq 0} \frac{(tA)^m}{m!} \frac{(tB)^\ell}{\ell!} =$$

$$= \sum_{k \geq 0} t^k \left(\sum_{\ell=0}^{k} \frac{A^{k-\ell} B^\ell}{(k-\ell)!\ell!} \right) \quad \square$$

4) $\phi_A(0) = Id$?

$$\phi_A(t) = Id + \sum_{k\geq 1} \frac{(tA)^k}{k!} \quad \square$$

5) $[\phi_A(t)]^{-1} = e^{-tA}$??

A, A commuten

$$Id = e^{0\cdot A} = e^{(t-t)A} = e^{t(A-A)} = e^{tA}e^{-tA} \quad \checkmark$$

6) $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$? $\quad \checkmark$ (per 3))

Corol·lari: e^{tA} és la única matriu fonamental de $x' = Ax$ tq quan $t=0$, és la Id.

Càlcul de e^{tA}

Prop: $x(t)$ és sol. de $x' = Ax$ $\longrightarrow$ $y(t) = P^{-1}x(t)$ és sol. de $y' = P^{-1}APy$

Ex: $x' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{A} x$

Diagonalitzem: $Q_A(t) = \lambda^2 - 3\lambda - 13 = 0 \implies \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+52}}{2}$

$$\implies A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Fem un canvi de "variable": $y = P^{-1}x$

$$\implies y' = P^{-1}x' = P^{-1}Ax = P^{-1}APy = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} y.$$

Prop: $e^{tA} = P e^{t(P^{-1}AP)} P^{-1}$, amb P matriu invertible

Dem:

$$e^{tJ} = \sum_{k\geq 0} \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} t^k = P^{-1}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!} t^k\right) P = P^{-1} e^{tA} P$$

$$\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{k)} = P^{-1}A^kP$$

Obs: Només cal saber calcular e^{tJ} amb J en forma de Jordan

Obs: Si volem calcular una matriu fonamental de $x' = Ax$, és suficient:

$$\boxed{e^{tA} P = P e^{t(P^{-1}AP)} = P e^{tJ}}$$

Normalment serà de Jordan

Càlcul explícit de e^{tJ}, J jordan.

Obs: Si J és complexa,

* $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$ és real
* $e^{tA}P$ és complexa

* **CAS I:** $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$, J_i blocs de Jordan

Llavors, $\boxed{e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_m} \end{pmatrix}}$, ja que $J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_m^k \end{pmatrix}$

* **CAS II:** $J = \lambda Id$

$$\boxed{e^{tJ}} = e^{t\lambda Id} = \sum \frac{(t\lambda Id)^k}{k!} = \left(\sum \frac{(t\lambda)^k}{k!}\right) I = \boxed{e^{\lambda t} I}$$

* **CAS III:** $J = \lambda I + N = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $N^m = 0$

$$\boxed{e^{tJ}} = e^{t(\lambda I + N)} = e^{t\lambda I} e^{tN} = e^{t\lambda} I e^{tN} = \boxed{e^{t\lambda} e^{tN}}$$

$$\boxed{e^{tN}} = \sum_{k\geq 0} \frac{(tN)^k}{k!} = \boxed{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k N^k}{k!}}$$

$N = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & \ddots & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aleshores,

$$e^{t(\lambda I+N)} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ t & \ddots & & 0 & \\ t^2/2! & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} & \cdots & t^2/2! & t & 1 \end{pmatrix}$$

* CAS IV: A té un vap complex $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\lambda = \alpha + i\beta$

Així: $J = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$

Intentem fer una forma reduïda real:

Lema: Si A té vap simple complex no real, $\lambda = \alpha + i\beta$

$\exists$ canvi de variable real que transforma A en: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Anem a veure com és e^{tJ}, amb $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$:

Escrivim $J = \alpha I + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{tJ} = e^{t(\alpha I + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})} \overset{\checkmark}{=} e^{t\alpha I}\, e^{\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t} \, ?$$

Observem que

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -Id$. Llavors, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-1)^k I$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^{t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\beta} = \sum_{k\geq 0} \frac{(\beta t)^{2k}(-1)^k}{(2k)!} I + \sum_{k\geq 0} \frac{(t\beta)^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\cos \beta t)\, I + (\sin \beta t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

Per tant, $\boxed{e^{tJ} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}}$

Ex: 15

a) Calcular e^{tA}, $x' = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} x$

Vaps: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -5$

Veps: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} P, \quad \text{on } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{tA} P}_{\text{matriu fonamental}} = P e^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 & 2e^{-5t} \\ 3 & e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Totes les solucions són de la forma:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2e^{-5t} \\ 3 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

c) $x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} x$

Vaps: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1+2i$, $\lambda_3 = 1-2i$

Veps: $v_1 = (0, -2, 1)$

$v_2 = (-(2+i), -3i, 2)$

$v_3 = \overline{v_2}$

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i \end{pmatrix} = P^{-1} e^{tA} P, \quad \text{on} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -2-i & -2+i \\ -2 & -3i & 3i \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Alternativa Real:

$\hookrightarrow$

Prenem la base

$u_1 = (0,-2,1)$

$u_2 = Re(v_2) = (-2,0,2)$

$u_3 = Im(v_2) = (-1,-3,0)$

La matriu A s' escriu:

$$J = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 1 & 2 \\ & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$M(t) = e^{tA} Q = Q e^{tJ}$, matriu fonamental

$$\boxed{M(t) = Q \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t}\cos 2t & e^{t}\sin 2t \\ 0 & -e^{t}\sin 2t & e^{t}\cos 2t \end{pmatrix}}$$

Prop: si $M(t)$ és matriu fonamental de $x' = Ax$, llavors,

$$\det M(t) = \det M(t_0)\, e^{(t-t_0)\operatorname{tr} A} \qquad \forall t, t_0$$

Dem:

$$M(t) = e^{(t-t_0)A} M(t_0) \implies \det(M(t)) = \det(M(t_0)) \det\left(e^{(t-t_0)A}\right)$$

$$e^{(t-t_0)A} = P e^{(t-t_0)J} P^{-1} \implies \det\left(e^{(t-t_0)A}\right) = \cancel{\det P} \cdot \cancel{\det P^{-1}} \cdot \det\left(e^{(t-t_0)J}\right)$$

$$= \det\left(e^{(t-t_0)J}\right) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ \Delta & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(t-t_0)} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(t-t_0)} = e^{(t-t_0)\operatorname{tr} A}$$

Prop: Considerem $x' = Ax$, v vep de A de vap λ

Llavors, $x(t) = e^{\lambda t} v$ és sol. de $x' = Ax$

Dem: $x(t) = e^{\lambda t} v \longrightarrow x' = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t}(\lambda v) =$

$= e^{\lambda t}(Av) = A(e^{\lambda t} v) = Ax$ $\square$

Corol·lari: $x' = Ax$ i A diagonalitza:

sigui $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de veps. Anomenem $\hat{x}_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$

Llavors:
$$M(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \hat{x}_1(t) & \cdots & \hat{x}_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ és m. fonamental}$$

Retrat de fase de SLH plans

$x' = Ax$

Def: L'<u>òrbita</u> d'un punt p és $\Theta(p) = \{e^{tA} p\}_{t \in \mathbb{R}}$

Def: El <u>retrat de fases</u> és el conjunt de totes les òrbites

Def: L'<u>espai de fases</u> és $\mathbb{R}^n$, on les variables també les anomenem x

Sigui $A \in M_2(\mathbb{R})$ tq $x' = Ax$.

* <u>Reducció 1</u>: Podem pensar que la matriu està en forma de Jordan real:

i) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

• Tipus i)

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1 \\ x_2' &= \lambda_2 x_2 \end{aligned}\right\}$$

Fixem un punt $p = (p_1, p_2)$

$$\varphi(t; 0, p) = (e^{\lambda_1 t} p_1, e^{\lambda_2 t} p_2)$$

$$\Theta(p) = \{(e^{t\lambda_1} p_1, e^{t\lambda_2} p_2)\}_{t \in \mathbb{R}}$$

Objectiu: volem posar la corba $\Theta(p)$ com la gràfica d'una funció, si podem.

casos de punts p inicials "fàcils".

i) $\Theta(0,0) = \{(0,0)\}$

ii) $\Theta(0, p_2) = \{(0, e^{\lambda_2 t} p_2)\} = \begin{cases} \{x_1 = 0, x_2 > 0\} & \text{si } p_2 > 0 \\ \{x_1 = 0, x_2 < 0\} & \text{si } p_2 < 0 \end{cases}$

iii) $\Theta(p_1, 0) = \begin{cases} \{x_2 = 0, x_1 > 0\} & p_1 > 0 \\ \{x_2 = 0, x_1 < 0\} & p_1 < 0 \end{cases}$

iv) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ (Ex)

Intentem dibuixar la gràfica:

$$x_1 = x_1(t) = e^{\lambda_1 t} p_1 \Longrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1} \log\left(\frac{x_1}{p_1}\right)$$

$$x_2 = x_2(t) = e^{\lambda_2 t} p_2 = e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \log\left(\frac{x_1}{p_1}\right)} p_2 = \left(\frac{x_1}{p_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1} p_2 =$$

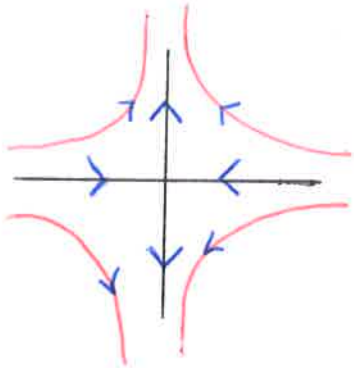
$$= |x_1|^{\lambda_2/\lambda_1} \cdot \frac{p_2}{|p_1|^{\lambda_2/\lambda_1}}$$

Aleshores, totes les òrbites (excepte $p_1 = 0$) són de la forma $x_2 = k\,|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}$, amb k constant.

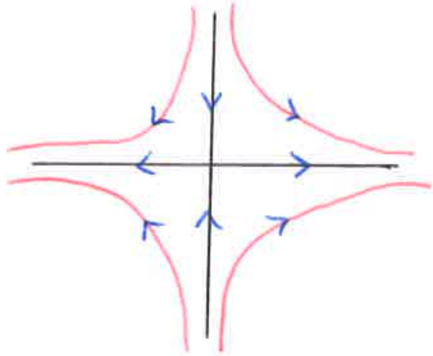
Separarem en diferents casos segons el signe de $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$:

* **NEGATIU** : (SELLA)

$\circ$ $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 < 0$



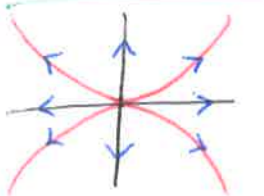
$\circ$ $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$



* **POSITIU** : (NODES)

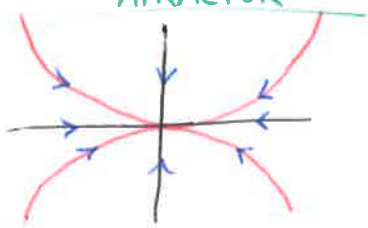
$\circ$ $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$

REPULSOR



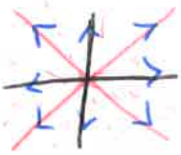
$\lambda_2 > 0$

ATRACTOR

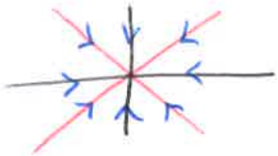


$\lambda_2 < 0$

$\circ$ $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$

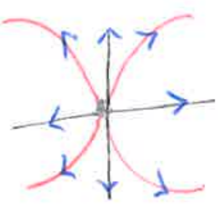


$\lambda_2 > 0$

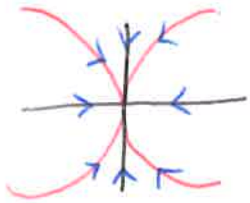


$\lambda_2 < 0$

$\circ$ $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in (0,1)$



$\lambda_2 > 0$



$\lambda_2 < 0$

Així doncs, es té:

* $\lambda_2/\lambda_1 > 0 \longrightarrow$ NODES $\begin{cases} \circ\ \lambda_2 > 0 \longrightarrow \text{REPULSOR} \\ \circ\ \lambda_2 < 0 \longrightarrow \text{ATRACTOR} \end{cases}$

* $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0 \longrightarrow$ SELLA

- TIPUS $ii)$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} x_1' = \lambda x_1 \\ x_2' = x_1 + \lambda x_2 \end{array}\right\} \longrightarrow x_2'(t) = e^{\lambda t} p_1 + \lambda x_2$$

$$x_1(t) = e^{\lambda t} p_1 =$$

$$\hookrightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

$$\theta(p) = \theta(p_1, p_2) = \{(e^{\lambda t} p_1 , te^{\lambda t} p_1 + e^{\lambda t} p_2)\}_{t \in \mathbb{R}}$$

Suposem $\lambda \neq 0$:

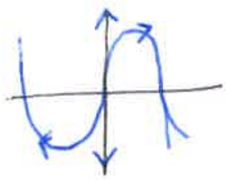
- $p_1 = 0$, $\theta(p_1, p_2) = \{(0, e^{\lambda t} p_2)\}_{t \in \mathbb{R}} = \begin{cases} \{x_1 = 0, x_2 > 0\} & \text{si } p_2 > 0 \\ \{x_1 = 0, x_2 < 0\} & \text{si } p_2 < 0 \end{cases}$

- $p_1 \neq 0$, $x_1(t) = e^{\lambda t} p_1 \Rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{x_1}{p_1}\right)$

Llavors:

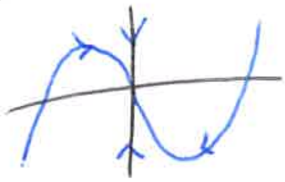
$$x_2 = tx_1 + \frac{p_2}{p_1} x_1 = \frac{x_1}{\lambda} \log\left(\frac{x_1}{p_1}\right) + \frac{p_2}{p_1} x_1 = cx_1 + \frac{1}{\lambda} x_1 \log|x_1|$$

- $\lambda > 0$



NODE IMPROPI REPULSOR

$\lambda < 0$



NODE IMPROPI ATRACTOR

TIPUS iii)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad e^{tA} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

$$\Theta(p_1, p_2) = \{ e^{\alpha t}(p_1 \cos \beta t + p_2 \sin \beta t, -p_1 \sin \beta t + p_2 \cos \beta t)\}_{t \in \mathbb{R}}$$

$$x_1(t) = e^{\alpha t}\left[p_1 \cos \beta t + p_2 \sin \beta t \right]$$

$$x_2(t) = e^{\alpha t}\left[-p_1 \sin \beta t + p_2 \cos \beta t \right]$$

Passem a polars:

$$r^2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t) = (p_1^2 + p_2^2)\, e^{2\alpha t}$$

Per tant,

$$r(t) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}\; e^{\alpha t}$$

$$p = (r_0 \cos \theta_0 , r_0 \sin \theta_0)$$

$$x_1(t) = e^{\alpha t} r_0 \left[\cos \theta_0 \cos \beta t + \sin \beta t \sin \theta_0 \right] = e^{\alpha t} r_0 \cos(\theta_0 - \beta t)$$

$$x_2(t) = e^{\alpha t} r_0 \sin(\theta_0 - \beta t)$$

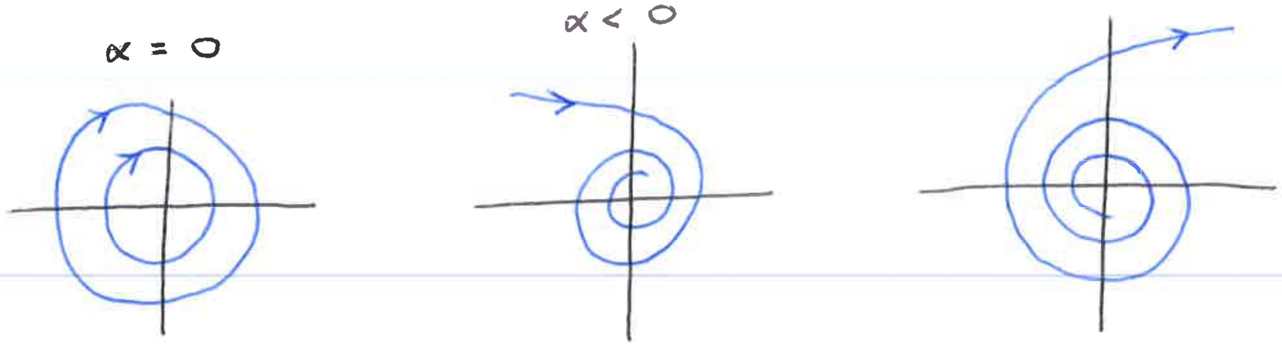
Les coord. polars de $(x_1(t), x_2(t))$ són:

$$(r(t), \bar{\theta}(t)) = (e^{\alpha t} r_0 , \theta_0 - \beta t)$$

Diferents casos: (Amb $\beta < 0$ són iguals però en sentit contrari)

- $\beta > 0$

$\alpha = 0$ $\qquad$ $\alpha < 0$ $\qquad$ $\alpha > 0$



CENTRE $\qquad$ FOCUS ATRACTOR $\qquad$ FOCUS REPULSOR

Classificació de sistemes lineals plans amb $\mathrm{tr}A$, $\det A$, $D(A)$

$x' = Ax \quad , \quad A \in M_2(\mathbb{R})$

Els vaps són: $\lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \det A = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\mathrm{tr}A \pm \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A}}{2}$

Prop: Anomenem discriminant de A a:

$$D(A) = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A$$

i) $\det A < 0 \Rightarrow$ sella

ii) $D(A) > 0$ i $\det A > 0 \Rightarrow$ Node

$\mathrm{tr}A < 0 \Rightarrow$ Atractor

$\mathrm{tr}A > 0 \Rightarrow$ Repulsor

$D(A) = 0 \; , \; A \neq \lambda I \Rightarrow$ Node impropi

iii) $D(A) < 0$, $\mathrm{tr}A = 0 \Rightarrow$ centre

iv) $D(A) < 0$, $\mathrm{tr}A > 0 \Rightarrow$ Focus repulsor

$\mathrm{tr}A < 0 \Rightarrow$ Focus atractor

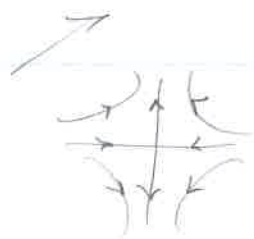
Ex Estudiar segons valor de a:

$$x' = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x$$

$\mathrm{tr}A = a+3$

$\det A = 3a+2$

$D(A) = (a+3)^2 - 4(3a+2)$



Def: Espai de Banach $(E, \|\cdot\|)$ un espai normat complet, i.e. $(x_n)_n \subset E$ de Cauchy, llavors és convergent

Def: $F: X \longrightarrow X$, amb $X \subset E$. x_* és punt fix de F si

$$x_* = F(x_*)$$

Diem que és un atractor global si $\forall x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = x_*$$

Teorema (del punt fix de Banach)

$(E, \|\cdot\|)$ espai de Banach, $X \subset E$ subconjunt tancat sigui $F: X \longrightarrow X$. Suposem F contractiva, i.e. $\exists L \in (0,1)$ tq; $\forall x, y \in X$:

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|$$

A més, $\exists!\ x_*$ tq $x_* = F(x_*)$

A més, $\forall x \in X$:

$$\|F^n(x) - x_*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x - x_*\|$$

Dem:

Unicitat | Suposem x_1, x_2 fixos.

$$\|x_1 - x_2\| = \|F(x_1) - F(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

Per a $L \in (0,1) \Longrightarrow x_1 = x_2$

Existència | $x \in X$. Considerem $x_n = F^n(x) = F(x_{n-1})$

Vegem que $(x_n)_n$ és de Cauchy. $n \geq m$:

$$\|x_n - x_m\| = \|F(x_{n-1}) - F(x_{m-1})\| \leq L\|x_{n-1} - x_{m-1}\|$$

$\hookrightarrow$

Així, $\qquad \|x_n - x_m\| \leq L^m \|x_{n-m} - x_0\|$

- m prou gran ✓ $\quad (L<1)$

Com E és complet, llavors $(x_n)_n$ és convergent i com X és tancat,

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n \in X \qquad \square$$

Vegem que és atractor global:

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \cdots + \|x_{m+1} - x_m\| \leq$$

$$\leq L^{n-1}\|x_1 - x_0\| + L^{n-2}\|x_1 - x_0\| + \cdots + L^m \|x_1 - x_0\| =$$

$$= \|x_1 - x_0\| \, L^m (1 + \cdots + L^{n-1-m}) = \|x_1 - x_0\| \frac{L^m}{1-L} \qquad \square$$

Teorema (Existència i unicitat de solucions)

$A: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \quad \mathcal{C}^r, \; r \geq 0$

Considerem el PVI, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Aquest PVI té una única solució $x: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ i, a més, $x \in \mathcal{C}^r(I)$, $r \geq 0$

Dem:

1. Trobar una equació de punt fix equivalent al nostre problema.

   En el nostre cas, fixat $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, PVI és:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\,x(s)\,ds$$

$\hookrightarrow$

2. Definir espai de Banach (amb la norma!)

Ex: $\mathcal{C}^1([a,b])$ no és de Banach $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} \|f(x)\|$

però sí amb $\|f\|_1 = \sup_{[a,b]} \|f(x)\| + \sup_{[a,b]} \|f'(x)\|$

$\mathcal{C}^0([a,b])$ és de Banach amb

$$\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} \|f(x)\|$$

Utilitzarem una norma de pes:

$$\|f\|_\beta = \sup_{[a,b]} \| f(t)\, e^{\beta|t-t_0|} \|$$

amb $[a,b]$ satisfent:

i) $t_0 \in [a,b]$

ii) $[a,b] \subset I$

veiem que $(\mathcal{C}^0([a,b]), \|.\|_\beta)$ és espai de Banach (EX)

3. Definir el funcional contractiu. Prenem:

$$\mathcal{F}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\, x(s)\, ds$$

Veurem que $\mathcal{F}: \mathcal{C}^0([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}^0([a,b])$ és contractiva amb la norma $\|\cdot\|_\beta$

i) $\mathcal{F}$ està ben definida:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \mathcal{C}^0([a,b]) &\longrightarrow \mathcal{C}^0([a,b]) \\ x &\longmapsto \mathcal{F}(x) =: y \;:\; [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad t \longmapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\, ds \end{aligned}$$

ii) $\mathcal{F}$ és contractiva.

$x, \bar{x} \in \mathcal{C}^0([a,b])$

$$\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(\bar{x})\|_\beta = \sup_{t\in[a,b]} \| [\mathcal{F}(x)(t) - \mathcal{F}(\bar{x})(t)]\, e^{\beta|t-t_0|} \|$$

Norma vectorial

Veiem $F: X \longrightarrow X$ és contractiva. (i.e. $\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(\bar{x})\|_\beta \leq L\|x-\bar{x}\|_\beta$, $L\in(0,1)$)

$t\in[a,b]$ qualsevol. Calculem $\|(\mathcal{F}(x)(t) - \mathcal{F}(\bar{x})(t))\, e^{\beta|t-t_0|}\| = \circledast$

$$\mathcal{F}(x)(t) - \mathcal{F}(\bar{x})(t) = \cancel{x_0} + \int_{t_0}^t A(s)x(s)\,ds - \left(\cancel{x_0} + \int_{t_0}^t A(s)\bar{x}(s)\,ds\right)$$

Així, $\circledast = \left\| e^{\beta|t-t_0|} \cdot \int_{t_0}^t A(s)\,(x(s)-\bar{x}(s))\,ds \right\| \leq$

$$\leq e^{\beta|t-t_0|} \cdot \left| \int_{t_0}^t \|A(s)(x(s)-\bar{x}(s))\|\,ds \right| \leq e^{\beta|t-t_0|} \int_{t_0}^t \|A(s)\|\,\|x(s)-\bar{x}(s)\|\,ds \leq \text{(**)}$$

$|\cdot|$ per no haver de distingir $t\geq t_0$ o $t\leq t_0$

Definim $\|A\|_\infty = \sup_{s\in[a,b]} \|A(s)\|$

Observem: $\|x-\bar{x}\|_\beta = \max_{s\in[a,b]} \|(x(s)-\bar{x}(s))\,e^{\beta|s-t_0|}\|$

Així: $\forall s\in[a,b]$.

$$\|(x(s)-\bar{x}(s))\,e^{\beta|s-t_0|}\| \leq \|x-\bar{x}\|_\beta \qquad e^{\beta|s-t_0|} \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\|x(s)-\bar{x}(s)\| \leq e^{-\beta|s-t_0|}\,\|x-\bar{x}\|_\beta$$

Fent servir $\|A\|_\infty$ i la fita de $\|x(s)-\bar{x}(s)\|$, tenim:

$$\text{(**)} \leq e^{\beta|t-t_0|}\,\|A\|_\infty\,\|x-\bar{x}\|_\beta \left|\int_{t_0}^t e^{-\beta|s-t_0|}\,ds\right|$$

En resum: $\|(\mathcal{F}(x)(t) - \mathcal{F}(\bar{x})(t))\,e^{\beta|t-t_0|}\| \leq \|A\|_\infty\,\|x-\bar{x}\|_\beta\, \underbrace{e^{\beta|t-t_0|}\left|\int_{t_0}^t e^{-\beta|s-t_0|}\,ds\right|}_{\text{(***)}}$

Cal calcular / fitar el màxim a $[a,b]$ de $h(t)$,

on $h(t) = e^{\beta|t-t_0|}\left|\int_{t_0}^t e^{-\beta|s-t_0|}\,ds\right|$. Estudiem $h(t)$:

$\underline{t\geq t_0}$ $\quad h(t) = e^{\beta|t-t_0|}\left|\int_{t_0}^t e^{-\beta|s-t_0|}\,ds\right| = \dfrac{e^{\beta|t-t_0|}}{-\beta}\left(e^{-\beta|t-t_0|}-1\right) =$

$$= \frac{1}{-\beta}\left(1-e^{\beta|t-t_0|}\right), \text{ amb } \beta<0$$

$$0\leq h(t) \leq \frac{1}{-\beta} = \frac{1}{|\beta|}$$

$\underline{t\leq t_0}$ igual.

Per tant, $h(t)\leq \dfrac{1}{|\beta|}$, $\beta<0$. Fent servir la cota de h:

$\hookrightarrow$

$(***) \leq \frac{\|A\|_\infty}{|\beta|} \|x-\bar{x}\|_\beta$ .. Com la cota no depèn de t:

$$\|F(x)-F(\bar{x})\|_\beta \leq \frac{\|A\|_\infty}{|\beta|} \|x-\bar{x}\|_\beta$$

Com F contractiva, $\frac{\|A\|_\infty}{|\beta|} < 1 \Longrightarrow (-\beta) > \|A\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} \|A(t)\|$

Amb aquestes β's, F és contractiva a $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$

Per tant, $\exists!\ x:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua sol. de $x_k = F(x_k)$

$\Longleftrightarrow \exists!$ sol. del PVI $x' = Ax$, $x(t_0) = x_0$, definida a $[a,b]$

El que volem veure és que $x: I\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ està def. a I, ja que només la tenim definida a $[a,b]\subset I$.

iv) Extendre la solució a tot I (EX)

a) $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$

b) Apliquem resultat a $[a_n, b_n]$

c) Definir: $x: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a trossos

v) Falta veure x és $\mathcal{C}^r$.

<u>Prop</u>: $A: I\subset\mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ contínua

$Y = \{x: I \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \text{ sol. de } x' = Ax\}$

$t_0 \in I$

Aleshores, $\begin{aligned} M_{t_0}: Y &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x(t_0) \end{aligned}$ és isomorfisme (dim $Y = n$)

<u>Dem</u>: i) Y és e.v.; $\bar{x}, \hat{x}$ sols; $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\bar{x} + \mu\hat{x}$ és sol ✓

ii) I_{t_0} és lineal ✓ pel teorema $\exists!$

iii) Injectivitat: $\bar{x}(t_0) = \hat{x}(t_0) \Rightarrow \bar{x}(t) = \hat{x}(t)$ $\exists$

iv) Exhaustivitat: $x_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists x \in Y : x(t_0) = x_0$

Corol·lari: $x' = A(t)x$ té matrius fonamentals.

Ex:

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base de E:

$$M(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \varphi(t;t_0,v_1) & \cdots & \varphi(t;t_0,v_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$I_{t_0}(\varphi(t;t_0,v_i)) = \varphi(t_0;t_0,v_i) = v_i$

És matriu fonamental.

Obs: Recordem que $\begin{cases} x' = Ax+b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ té sol. única $\rightarrow \varphi(t;t_0,x_0)$

Prop: $t, s \in I$:

$$\phi_s^t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad x \longmapsto \varphi(t;s,x)$$ és:

i) ϕ_s^t isomorfisme

ii) $\phi_s^s = Id$

iii) $\phi_s^t \circ \phi_u^s = \phi_u^t \rightarrow \varphi(t;u,x) = \varphi(t;\cancel{s},\varphi(\cancel{s};u,x))$

iv) $\phi_s^t = (\phi_t^s)^{-1}$

Prop: $x' = A(t)x$. Sigui $M(t)$ m. f. Aleshores,

$$\det M(t_0) \neq 0 \iff \det M(t) \neq 0 \quad \forall t$$

Dem:

$\boxed{\Leftarrow}$ ✓

$\boxed{\Rightarrow}$ $\det M(t_0) = 0 \Rightarrow \det M(t) = 0$

$\Rightarrow \exists$ comb. lineal de les columnes $m_1(t_0), \dots, m_n(t_0)$

tq $0 = c_1 m_1(t_0) + \dots + c_2 m_n(t_0)$

Per $\exists!$ sols: $0 = c_1 m_1(t) + \dots + c_n m_n(t)$ és sol

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t_0) = 0 \\ x' = A(t)x \end{cases} \Rightarrow x(t) \equiv 0 .$$

Fórmula de Liouville

Prop (Fórmula de Liouville)

Si $M(t)$ és sol. matricial de $x' = A(t)x$. Llavors:

$$\det M(t) = \det M(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\, ds \right)$$

Dem:

- Si $\det M(t_0) = 0$ ✓
- Si $\det M(t_0) \neq 0$: ($\Rightarrow \det M(t) \neq 0$):

Escrivim $M(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix}$ amb

$$x_i'(t) = A(t)\, x_i(t)$$

Sigui $d(t) = \det M(t)$:

$$d'(t) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} | & & | & & | \\ x_1(t) & \cdots & x_i'(t) & \cdots & x_n(t) \\ | & & | & & | \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} | & & | & & | \\ x_1(t) & \cdots & A(t)x_i(t) & \cdots & x_n(t) \\ | & & | & & | \end{vmatrix}$$

$$A(t)\, x_i(t) = \alpha_{i1}^{(t)} x_1(t) + \cdots + \alpha_{in}^{(t)} x_n(t)$$

$(\forall t, \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ és base de $\mathbb{R}^n)$

només sobreviu $\alpha_{ii}(t)\, x_i(t)$

Considerem doncs:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & Ax_i & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j & \cdots & x_n \end{vmatrix} =$$

$\curvearrowright$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & \alpha_{ii} x_i & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \alpha_{ii}(t) \cdot \det M(t) = \alpha_{ii}(t)\, d(t)$$

Per tant, $\quad d'(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}(t) \right) d(t) = tr(A(t)) \cdot d(t)$

La traça no depèn de la base

En resum:

$$A(t)\, x_i(t) = \alpha_{i1} x_1(t) + \cdots + \alpha_{in}(t)\, x_n(t)$$

$$\Longrightarrow A(t) = \left(\alpha_{ij}(t) \right)^T \text{ en base } \mathcal{B} = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$$

Evolució del volum per un sistema lineal

$x' = A(t)x + b(t)$. $\qquad A: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$

$\qquad\qquad\qquad\qquad b: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$D_0 :=$ domini $\quad D_0 \subset \mathbb{R}^n$

$D_t := \{ \varphi(t; t_0, D_0) \}$ $\quad$ (té sentit perquè $\varphi(t; t_0, \cdot)$ és inj.)

Quant val el volum de D_t?

Teorema: (Liouville)

Amb les condicions anteriors,

$$\mathrm{vol}(D_t) = \mathrm{vol}(D_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr\, A(s)\, ds \right)$$

Dem:

$\mathrm{vol}(D_t) = \int_{D_t} 1 \cdot dy$. $\qquad y \in D_t$, $\exists!\, x \in D_0 : y = \varphi(t; t_0, x)$

Fem un canvi de variable: $y = \varphi(t; t_0, x)$

$\quad \hookrightarrow dy = |\det D_x \varphi(t; t_0, x)|\, dx$

$$\Rightarrow \mathrm{vol}(D_t) = \int_{D_0} |\det D_x \varphi(t; t_0, x_0)|\, dx$$

$\curvearrowright$

Tenim que $\varphi(t;t_0,x) = M(t)\left[M(t_0)^{-1}x + \int_{t_0}^{t} M(s)^{-1} b(s)\,ds\right]$

$\Rightarrow D_x\varphi(t;t_0,x) = M(t)\,M(t_0)^{-1}$

$\Rightarrow \det D_x\varphi(t;t_0,x) = \det M(t)\cdot \det (M(t_0))^{-1} = \dfrac{\det M(t)}{\det M(t_0)} =$

$= \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\,ds\right)$

fórmula Liouville

Aleshores, $\operatorname{vol}(D_t) = \int_{D_0} \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\,ds\right) dx =$

$= \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\,ds\right)\cdot \int_{D_0} 1\cdot dx = \operatorname{vol}(D_0)\cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\,ds\right)$ □

Equacions lineals a coefs. periòdics.

$x' = A(t)x + b(t)$, amb $A(t+T) = A(t)$
$b(t+T) = b(t)$

Prop: Si $x(t)$ és sol $\Rightarrow$ $\hat{x}(t) := x(t+T)$ és sol.

Dem:

$\hat{x}'(t) = x'(t+T) = A(t+T)\,x(t+T) + b(t+T) =$

$= A(t)\cdot\hat{x}(t) + b(t)$

Corol·lari: Si $M(t)$ és m.f. $\Rightarrow$ $\exists$ matriu constant $C_M \in M_n(\mathbb{R})$ tq

$$\boxed{M(t+T) = M(t)\cdot C_M}$$

Dem: Sigui $\hat{M}(t) := M(t+T)$

Per la prop. anterior, les columnes de $\hat{M}$ són sol. i l.i., pq les de M ho són i pq $M(t)$ invertible $\forall t$.

$\Rightarrow$ $\hat{M}(t)$ és m.f. i llavors es té que

$\hat{M}(t) = M(t)\,C$, on C depèn de M i escrivim C_M

Def: C_M s'anomena matriu de monodromia. Observem que:

$$C_M = [M(0)]^{-1} \cdot M(T)$$

Prop: $M, \hat{M}$ dues m.f. $\Longrightarrow$ $C_M = P C_{\hat{M}} P^{-1}$

Dem:

- $\hat{M}(t) = M(t) \cdot Q$, Q matriu constant
- $\hat{M}(t+T) = M(t+T) \cdot Q = M(t) \cdot C_M \cdot Q$

$$\overset{\shortparallel}{\hat{M}(t) \cdot C_{\hat{M}}}$$

$$\Rightarrow \hat{M}(t) \cdot C_{\hat{M}} = M(t) \cdot C_M \cdot Q$$

$$\Rightarrow \cancel{M(t)} \cdot Q \cdot C_{\hat{M}} = \cancel{M(t)} \cdot C_M \cdot Q \Longrightarrow C_M = Q \cdot C_{\hat{M}} \cdot Q^{-1} \quad \square$$

Def: $x' = A(t)x$. Els multiplicadors característics són els vaps de qualsevol matriu de monodromia del sistema. (No depenen de la matriu de monodromia)

Obs: v és vep de vap 1 de C_M. $\Longrightarrow$ $x(t) := \varphi(t; 0, v)$ és T-periòdica.

Lema: $C \in M_n(\mathbb{R})$, $\det C \neq 0$. Llavors $\exists B \in M_n(\mathbb{C})$: $e^B = C$

Dem:

Obs. que només cal pensar C en forma de Jordan

$$PCP^{-1} = Pe^B P^{-1} = e^{PBP^{-1}} , \quad (PBP^{-1})^2 = PB^2P^{-1}$$

Llavors, $J = e^{B'}$, $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$

Com e^B conserva blocs, és suficient $C = \lambda I$ i $C = \lambda I + N$:

* $C = \lambda I$: si $\lambda \neq 0$, $\lambda I = e^B \longrightarrow B = \log(\lambda I)$

* $C = \lambda I + N$: $\lambda I + N = e^B \Rightarrow B = \log(\lambda I + N) = \log\left(\lambda I\left(I + N/\lambda\right)\right) =$

$$= \log(\lambda I) + \log(I + N/\lambda) = (\log \lambda) I + \log(I + N/\lambda) = \log(\lambda) I + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{r}\left(\frac{N}{\lambda}\right)^k (-1)^k$$

$\hookrightarrow$ Cal comprovar que, amb aquesta def: $e^{\log(\lambda I+N)} = \lambda I + N$

Sabem $e^{\log(1+x)} = 1+x$:

$$\sum_{k\geq 1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{l}(-1)^l\right)^k = 1+x \quad \checkmark$$

Prop: (Teoria de Floquet)

$x' = A(t)x$, $A(t+T) = A(t)$

Llavors, tota matriu fonamental $M(t) = P(t)e^{Bt}$ amb

$P(t+T) = P(t)$ i $e^{Bt} = C_M$

Dem:

Donada $M(t)$ tenim ben definida B:

$M(t+T) = M(t)C_M = M(t)e^{Bt}$

Definim $P(t) = M(t)e^{-Bt}$. Cal veure que és T-periòdica:

$$\underline{P(t+T)} = M(t+T)e^{-B(t+T)} = M(t)\underbrace{C_M \cdot e^{-BT}}_{I} \cdot e^{-Bt} =$$

$$= M(t)e^{-Bt} = \underline{P(t)}$$

Corol·lari: $x' = A(t)x$, $A(t+T) = A(t)$

Llavors, $x(t)$ és sol. de la edo $\iff$ $x(t) = P(t)y(t)$ és sol. de $y' = By$

Dem:

$$\left.\begin{array}{l} x' = A(t)x \\ \shortparallel \\ P'(t)y + Py' \end{array}\right\} \Longrightarrow P'(t)y + P(t)y' = A(t)P(t)y(t)$$

$M(t) = P(t)e^{Bt}$ és m.f: $M' = AM$, $M' = P'e^{Bt} + Pe^{Bt}B$

$\Rightarrow P'e^{Bt} + Pe^{Bt}B = A(t)P(t)e^{Bt} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow P' = A(t)P(t) - P(t)B \Rightarrow [A(t)P(t) - P(t)B]y + P(t)y' =$

$= A(t)P(t)y \Longrightarrow P(t)y' = P(t)By \Rightarrow \boxed{y' = By}$

(48) C_M ? $\begin{cases} x' = (-1+\cos t)x \\ y' = x\cos(t) - y \end{cases}$

$\exists$ sol. fitada $\neq (0,0)$? $\exists$ sol. no fitada ?

Es pot resoldre perquè és triangular:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{-t+\sin t} \Big[\underbrace{e^{t_0 - \sin t_0} x_0}_{K} \Big]$$

Llavors: $y' = -y + e^{-t+\sin t} \cos t \cdot K \rightarrow$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-t} \left[e^{t_0} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\cancel{s}} \cdot e^{-\cancel{s}+\sin s} \cos s \, K \, ds \right]$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-t} \left[e^{t_0} y_0 + \left(e^{\sin t} - e^{\sin t_0} \right) e^{t_0 - \sin t_0} x_0 \right]$$

Agafem $t_0 = 0$. Recordem $C_M = (M(t))^{-1} M(t+T) \ \forall t$

$M(t+T) = M(t) C_M$. $t=0 \Rightarrow C_M = (M(0))^{-1} M(T)$

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t+\sin t} x_0 \\ y(t) = e^{-t} \left[y_0 + (e^{\sin t} - 1) x_0 \right] \end{cases}$$

Trobem una matriu fonamental:

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ és solució. Llavors, $M(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{pmatrix}$

Agafem 2 c.i. que formin base a $\mathbb{R}^2$. P.e. $(0,1)$ i $(1,0)$

- $(x_0, y_0) = (1, 0) \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{-t+\sin t} \\ y_1(t) = e^{-t}(e^{\sin t} - 1) \end{cases}$

- $(x_0, y_0) = (0, 1) \Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = 0 \\ y_2(t) = e^{-t} \end{cases}$

$\longrightarrow$

$\hookrightarrow$

Aleshores, $M(t) = \begin{pmatrix} e^{-t+\sin t} & 0 \\ e^{t}(e^{\sin t}-1) & e^{-t} \end{pmatrix}$, $M(0) = Id$

$\left(M(0) = \left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}_2 \right) \right)$

$C_M = M(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{-2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix}$

Floquet: $C_M = e^{BT} = e^{B2\pi}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ El sist. és equivalent a $y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y$

Amb $y(t)$ satisfent $x(t) = P(t)\,y(t)$ ($P(t)$ 2π-periòdica)

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = -y_1 \\ y_2' = -y_2 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1(t) = e^{-t}c_1 \\ y_2(t) = e^{-t}c_2 \end{array}\right.$$

Llavors, $y(t) \xrightarrow{t\to+\infty} 0 \iff x(t) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$

Comportament de les solucions quan $t \to +\infty$

Obs: Si $t \to -\infty$ només cal considerar $y(s) = x(-s)$

(Estabilitat de sistemes lineals)

Només considerarem el cas $x' = Ax$, A constant

$x' = A(t)x$, $A(t+T) = A(t)$

Def: $x' = A(t)x$, A constant o periòdica.

Diem que el sistema és estable, inestable, atractor o repulsor si:

- Estable: Totes les solucions estan fitades $\forall t \geq 0$
- Inestable: Si $\exists$ una sol. $\|x(t)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$
- Atractor: Si totes les sol. $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$
- Repulsor: Totes les solucions (excepte $x \equiv 0$) satisfan

$$\|x(t)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$$

Prop:

i) $x' = Ax$, A constant. (Rec: v vep de vap λ, $x(t) = e^{\lambda t} v$ és sol.)

$\mathrm{Re}\,\lambda > 0 \longrightarrow x(t) \longrightarrow 0$

$\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \longrightarrow x(t) \longrightarrow \infty$

$\mathrm{Re}\,\lambda = 0 \longrightarrow$ fitada

EX Pensar un criteri si A diag.

ii) $x' = A(t)x$, $A(t+T) = A(t)$.

Si v vep de C_M de vap λ, considerem $x(t) = M(t) \cdot v$

Llavors, $\boxed{x(t+T)} = M(t+T) v = M(t) \cdot C_M \cdot v = \lambda . M(t) \cdot v =$

$= \boxed{\lambda x(t)}$

En particular, si $\lambda = 1$, $x(t) = M(t) v$ és òrbita T-periòdica

De fet, $\lambda = 1 \iff x(t) = M(t) v$ és T-periòdica.

Lema: Si A és matriu amb tots els vaps λ tq $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$:

$\mathrm{Spec}\, A \subset \{ \mathrm{Re}\,\lambda < 0 \}$

Llavors, $\exists\, k, \mu > 0$ tq $\| e^{tA} \| \leq k e^{-\mu t}$, $t \geq 0$

Dem: $A = PJP^{-1}$, J Jordan. Llavors:

$\| e^{tA} \| = \| e^{tPJP^{-1}} \| = \| P e^{tJ} P^{-1} \| \leq \|P\| \|P^{-1}\| \| e^{tJ} \|$

Triem una norma per que totes les normes siguin equivalents:

$k_2 \|\cdot\| \leq \|\cdot\|' \leq k_1 \|\cdot\|$

Triem $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Com $e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_k} \end{pmatrix}$, $\| e^{tJ} \|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} \| e^{tJ_i} \|_\infty$

Llavors, només cal demostrar-ho per a capses de Jordan:

$J = \lambda I \; (+N)$

$\hookrightarrow$

i) $\|e^{tA}\|_\infty = \|e^{\lambda t} I\|_\infty \le |e^{\lambda t}| = e^{(\mathrm{Re}\lambda)t}$ $\quad (\mu = -\mathrm{Re}\lambda)$, $k=1$

ii) $\|e^{tA}\|_\infty = \|e^{(\lambda I+N)t}\|_\infty = \left\| e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ t & \ddots & \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & t & 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty = |e^{\lambda t}|\left(1+|t|+\dots+\left|\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right|\right)$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists k>0:$

$$1+|t|+\frac{|t|^2}{2}+\dots+\frac{|t|^{n-1}}{(n-1)!} \le k e^{\varepsilon t}$$

$$\|e^{tA}\| \le k e^{(\mathrm{Re}\lambda)t}\cdot e^{\varepsilon t} = k e^{-(|\mathrm{Re}\lambda|-\varepsilon)t} \quad \checkmark$$

$(\mu = -|\mathrm{Re}\lambda| - \varepsilon)$

$\hookrightarrow \neq 0$

<u>Prop</u>: $x' = Ax$, A constant

i) $\mathrm{Spec}\, A \subset \{\mathrm{Re}\lambda < 0\} \implies$ <u>Atractor</u>

ii) $\mathrm{Spec}\, A \subset \{\mathrm{Re}\lambda > 0\} \implies$ <u>Repulsor</u>

iii) $\exists$ vap amb $\mathrm{Re}\lambda > 0$

$\exists$ vap $\mathrm{Re}\lambda = 0$ i la capsa de Jordan és $\lambda I + N$ (No semisimple) $\Big\} \implies$ <u>Inestable</u>

iv) $\mathrm{Spec}\, A \subset \{\mathrm{Re}\lambda \le 0\}$ i, quan $\mathrm{Re}\lambda = 0$

llavors la capsa de Jordan és $\lambda I \implies$ <u>Estable</u>

<u>Dem</u>:

i) Lema anterior: $\|e^{tA}\| \le k e^{-\mu t}$, $t \ge 0$

Totes les sol. de $x' = Ax$ són $x(t) = e^{tA}\cdot c$, $c \in \mathbb{R}^n$

$\|x(t)\| \le \|e^{tA}\|\|c\| \le e^{-\mu t}\|c\| \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies$ <u>Atractor</u>

$\hookrightarrow$

$\longleftrightarrow$

ii) Totes les sol. són $x(t) = e^{tA}c$

Així: $c = e^{-tA}x(t) \Rightarrow \|c\| \leq \|e^{t(-A)}\| \, \|x(t)\| \leq k e^{-\mu t}\|x(t)\|$

$\Rightarrow \|c\| \leq e^{-\mu t}\|x(t)\| \Longleftrightarrow e^{\mu t}\|c\| \leq \|x(t)\|$

si $c \neq 0$, $\|x(t)\| \xrightarrow{t\to\infty} \infty$

si $c = 0$, $x(t) = 0$

iii) · $\exists$ vap $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, $x(t) = e^{\lambda t}v$, amb v vep de vap λ

$\|x(t)\| = e^{(\mathrm{Re}\,\lambda)t}\|v\| \Rightarrow \|x(t)\| \xrightarrow{t\to\infty} \infty$

$\mathrm{Re}\,\lambda > 0$

· Triem λ amb $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ amb caixa de Jordan $\lambda I + N$:

$\Rightarrow \exists\, v_1, v_2 \neq 0$ tq $e^{tA}v_2 = e^{\lambda t}(tv_1 + v_2)$

$\|e^{tA}v_2\| = \underbrace{|e^{\lambda t}|}_{=1}\|tv_1 + v_2\| \xrightarrow{t\to\infty} \infty \Rightarrow$ Inestable.

iv) Cal veure que tota solució està acotada. Com qualsevol solució $x(t) = e^{tA}c$, cal acotar $\|e^{tA}\|$

Mateixos arguments que en la dem. del lema, Només cal acotar $\|e^{tA}\|$, amb A capsa de Jordan

$A = \lambda I$ / $A = \lambda I + N$

· $A = \lambda I$, $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$: $\|e^{tA}\| = |e^{\lambda t}| \leq 1 \quad \forall t \geq 0$

· $A = \lambda I + N$, $\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \Rightarrow e^{tA} \leq k e^{-\mu t} \leq k$, $t \geq 0$

Cas periòdic: $x' = A(t)x = A(t+T)x$

Recordem que si B: $e^{tB} = C_M$, llavors $x(t) = P(t)y(t)$, amb:

$$\begin{cases} y' = By \\ P(t+T) = P(t) \end{cases}$$

Relació entre vaps de B i C_M

λ vap de C_M, μ vap de B $\Longrightarrow$ $e^{T\mu} = \lambda$

$$\operatorname{Re}\mu < 0 \iff |\lambda| < 1$$
$$\operatorname{Re}\mu > 0 \iff |\lambda| > 1$$
$$\operatorname{Re}\mu = 0 \iff |\lambda| = 1$$

Aplicació

$x'' + a(t)x = 0, \quad a(t+T) = a(t)$

MAI comprovar la estabilitat amb vaps de A!!!

Estabilitat d'equacions periòdiques d'ordre 2:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -a(t)x \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$M(t)$ sol. fonamental, $M(0) = Id$. Llavors, $C_M = M(T)$.

Pol. característic de C_M: $\lambda^2 - \operatorname{tr} C_M + \det C_M$

- Liouville $\Rightarrow \det M(t) = \underbrace{\det M(t_0)}_{=1} \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\,ds\right)$ $\overset{\circ}{\to}$

  $\Rightarrow \det M(T) = 1 \Rightarrow \det C_M = 1$

$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1$, amb $\alpha = \frac{\operatorname{tr} C_M}{2}$

vaps: $\boxed{\lambda_\pm = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}}$

a) $|\alpha| < 1$, tenim vaps conjugats: $1 = \lambda_+ \cdot \lambda_- = |\lambda_+|^2 = |\lambda_-|^2$

com $|\lambda_+| = |\lambda_-| = 1$, $\lambda_+ \neq \lambda_-$ $\Longrightarrow$ Estable

b) $|\alpha| > 1$, es tenen vaps reals diferents. $1 = \lambda_+ \cdot \lambda_-$

i, o bé $|\lambda_+| > 1$ o bé $|\lambda_-| > 1$ $\Longrightarrow$ Inestable

c) $|\alpha| = 1 \iff \alpha = \pm 1 \Rightarrow \exists!$ vap $\lambda = \pm 1$. Per tant:

- C_M diag $\Rightarrow$ Estable
- C_M no diag $\Rightarrow$ Inestable

$C_M v = \lambda v$
$M(t) v$ satisfà
$x(t+T) = \lambda x(t)$

1) $\alpha = 1$, $\exists$ òrbita T-periòdica

2) $\alpha = -1$, $x(t+T) = -x(t)$, $x(t) = M(t)v$, $C_M v = -v$

Llavors: $x(t+2T) = -x(t+T) = x(t)$ ($2T$-periòdica)

Teoria de pertorbacions $\longrightarrow$ $\boxed{\text{IMPORTANT}}$

$$x' = A(t,\varepsilon)x + b(t,\varepsilon) \quad , \quad \varepsilon \text{ paràmetre}$$

Com depenen les solucions respecte ε?

Suposem que
$$A(t,\varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon A_1(t) + \dots + \varepsilon^m A_m(t) + A_{m+1}(t,\varepsilon)$$
$$b(t,\varepsilon) = b_0(t) + \varepsilon b_1(t) + \dots + \varepsilon^m b_m(t) + b_{m+1}(t,\varepsilon)$$

$A_0, \dots, A_m, b_0, \dots, b_m \in \mathcal{C}^r$, $r \geq 0$

Llavors, $x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^m x_m(t) + x_{m+1}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^m)$

$x_0, \dots, x_m \in \mathcal{C}^{r+1}$, $r \geq 0$

Objectiu: Trobar les equacions que satisfà $x_0, \dots, x_m$

$$\dot{x}(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) + b(t,\varepsilon)$$

$$x_0' + \dots + \varepsilon^m x_m'(t) + O(\varepsilon^m) = (A_0(t) + \dots + \varepsilon^m A_m(t) + O(\varepsilon^m))(x_0(t) + \dots + \varepsilon^m x_m(t) + O(\varepsilon^m))$$
$$+ b_0(t) + \dots + \varepsilon^m b_m(t) + O(\varepsilon^m)$$

Igualem $O(\varepsilon^0), O(\varepsilon), \dots, O(\varepsilon^m)$:

$O(\varepsilon^0)$ $\quad x_0'(t) = A_0(t)x_0(t) + b_0(t)$. Si $M_0(t)$ és m.f:

$$x_0(t) = M_0(t)\left[M_0(t_0)^{-1}x^0 + \int_{t_0}^t M_0(s)^{-1} b_0(s)\,ds\right],$$

sol. del pvi amb cond. inicial x^0

$O(\varepsilon)$ | $x_1'(t) = A_0(t)x_1(t) + \overbrace{A_1(t)x_0(t) + b_1(t)}^{\tilde{b}_1(t)}$

observem que la m.f. és la mateixa que en $O(\varepsilon^0)$; que serà la mateixa $\forall x_i$

$$x_1(t) = M_0(t)\Big[\underset{\substack{\| \\ 0}}{c.i.} + \int_{t_0}^{t} [M_0(s)]^{-1} \overbrace{[A_1(s)x_0(s)+b_1(s)]}^{\tilde{b}_1(s)}\, ds\Big]$$

$\longrightarrow$ si $x_1(t^0) = x^0$, x^0 cond. ini

$O(\varepsilon^2)$ | $x_2' = A_0(t)x_2 + \tilde{b}_2(t)$, $\tilde{b}_2(t) = A_1(t)x_1 + A_2(t)x_0 + b_2(t)$

$$\Rightarrow x_2' = M_0(t)\int_{t^0}^{t} M_0(s)^{-1} \cdot \tilde{b}_2(s)\,ds$$

En general, $x_i' = A_0(t)x_i + \tilde{b}_i(t)$, on $\tilde{b}_i(t)$ depèn de $x_0, \dots, x_{i-1}$

Llavors,

$$x_i(t) = M_0(t)\int_{t^0}^{t} M_0(s)^{-1}\, \tilde{b}_i(s)\,ds$$

Ex: 50 $x'' + \omega^2(1+\varepsilon\cos t)x = 0$

Estudiar l'estabilitat:

Per estudiar l'estabilitat cal mirar $\alpha = \dfrac{tr\, C_M}{2}$

Per teoria, $M(t,\varepsilon) = M_0(t) + \varepsilon M_1(t) + \varepsilon^2 M_2(t) + \dots$

on $M_0(t)$ és m.f. per a $\varepsilon = 0$ i, a més, si $M(0,\varepsilon) = Id$

$\Longrightarrow M_0(0) = Id$

$$C_M(\varepsilon) = M(2\pi,\varepsilon) = M_0(2\pi) + \varepsilon M_1(2\pi) + O(\varepsilon^2)$$

$$tr(C_M(\varepsilon)) = tr(M_0(2\pi)) + \varepsilon\, tr(M_1(2\pi)) + O(\varepsilon^2)$$

$$= tr(M_0(2\pi)) + O(\varepsilon)$$

ε prou petit

Per tant, si $|\alpha_0| = \left|\dfrac{tr(M_0(2\pi))}{2}\right| \begin{cases} < 1 \longrightarrow \text{Estable} \\ > 1 \longrightarrow \text{Inestable} \\ = 1 \longrightarrow \text{?? (Mirem un ordre d'}\varepsilon\text{ més)} \end{cases}$

$\hookrightarrow$ La matriu del sistema és:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(1+\varepsilon\cos t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Per $\varepsilon = 0$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to x'' - \omega^2 x = 0$$

Les sol. sabem que són:

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ y(t) = x'(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \end{cases}$$

Busquem $M(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ tq $i)(x_1, y_1) = (1,0)$
$ii)(x_2, y_2) = (0,1)$:

obs. que $x(0) = A$, $y(0) = B\omega$

$i)$ $A = 1$, $B = 0$ $\Rightarrow (x_1(0), y_1(0)) = (1,0)$

$ii)$ $A = 0$, $B = \frac{1}{\omega}$ $\Rightarrow (x_2(0), y_2(0)) = (0,1)$

$$\Longrightarrow M_0(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

- $C_H = M_0(2\pi)$, $\alpha_0 := \cos\omega 2\pi$

  - Quan $\omega \neq k/2$, $k \in \mathbb{Z}$, $\exists\ |\varepsilon| \ll 1$ tq estable
  - Quan $\omega = k/2$? veure Arnold Tongues (Atenea)

- Estable cal que $|\text{tr}\, C_{H_0}| < 2$

  $M(t,\varepsilon) = M_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \Longrightarrow C_H = M(2\pi, \varepsilon)$,

  $\text{tr}(C_H) = \text{tr}(C_{H_0}) + \mathcal{O}(\varepsilon)$

  $\text{tr}\,|C_{H_0}| < 2 \Rightarrow \exists\, \varepsilon_0$ tq $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $|\text{tr}\, C_H| < 2$

  $|\text{tr}\, C_{H_0}| = |2\cos\omega 2\pi| < 2 \iff |\cos\omega 2\pi| < 1 \iff \omega \neq k/2$

$\hookrightarrow$

$$\omega = \frac{k}{2}, \quad k \text{ parell} \iff \omega \in \mathbb{Z}, \quad \omega =: n$$

$$C_{M_0} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi n & 0 \\ 0 & \cos 2\pi n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ amb } \varepsilon = 0 \Rightarrow \text{estable} \checkmark$$

$$\omega = k/2 = \frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2}. \qquad \cos(2\pi(n+1/2))$$

$$C_{M_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 0 \Longrightarrow \text{Estable}$$

Per veure què passa per valors $\omega = k/2$, $\varepsilon \ll 1$:

$$M(t,\varepsilon) = M_0(t) + \varepsilon M_1(t) + \Theta(\varepsilon^2)$$

$$\dot{M}_0 + \varepsilon \dot{M}_1 + \Theta(\varepsilon^2) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega^2\cos t & 0 \end{pmatrix}\right](M_0 + \varepsilon M_1 + \Theta(\varepsilon^2))$$

$$A(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(1-\varepsilon\cos t) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega^2\cos t & 0 \end{pmatrix}$$

- $\dot{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} M_0, \quad M_0(0) = Id$

- $\dot{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} M_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega^2\cos t & 0 \end{pmatrix} M_0(t) \qquad M_1(0) = 0$

- $M_0(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \Longrightarrow M_0(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ \omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$

- $M_1(t) = M_0(t)\displaystyle\int_0^t M_0(s)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega^2\cos s & 0 \end{pmatrix} M_0(s)\,ds$:

$$= M_0(s)^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega^2\cos t & 0 \end{pmatrix} M_0(s) = \begin{pmatrix} \omega\sin\omega s\cdot\cos\omega s\,\cos s & \sin\omega^2 s\cdot\cos s \\ -\omega^2\cos^2\omega s\cdot\cos s & -\omega\cos s\cdot\sin\omega s\cdot\cos\omega s \end{pmatrix}$$

Observem que només cal calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi}$

$$\omega = k/2, \quad M_0(2\pi) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{tr}(\quad) \equiv 0 \Rightarrow \text{cal } \Theta(\varepsilon^2)!$$

Ex

$x' = f(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x) = \begin{cases} A_1, & 0 \le t < \pi \\ A_2, & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$

Calculem la m.f. $M(0) = I \implies C_M = M(2\pi)$

- $M_1(t) = e^{tA_1} \qquad 0 \le t < \pi$
- $M_2(t) = e^{tA_2} P \qquad \pi \le t < 2\pi$

Triem P tq $M(t) = \begin{cases} M_1(t) & 0 \le t < \pi \\ M_2(t) & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$ contínua a $t = \pi$

$\implies M_1(\pi) = M_2(\pi) \longrightarrow e^{\pi A_1} = e^{\pi A_2} P$

$P = e^{\pi A_1} e^{-\pi A_2}$

Llavors, $\lim_{t \to 2\pi^-} M(t) = \underline{e^{2\pi A_2} \cdot e^{\pi A_1} \cdot e^{-\pi A_2}}$

$\begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$