Informe de la pràctica 3 - Àlgebra Lineal Numèrica

Tomàs Ortega

29 de maig de 2017

Índex

1 Introducció 1
1.1 Normes matricials 1
1.2 Nombre de condició 2

2 Sistemes Lineals 2
2.1 Mètodes directes 2
2.1.1 Factorització LU 2
2.1.2 Factorització Cholesky 2
2.1.3 Factorització QR 2
2.1.4 Factorització SVD 2
2.2 Mètodes iteratius 3
2.2.1 Mètode de Jacobi 3
2.2.2 Mètode de Gauss-Seidel 3
2.2.3 Mètode de Sobrerelaxació 3

3 Càlcul de valors i vectors propis 3
3.1 Teorema de Gerschgorin 3
3.2 Mètode de la Potència 4
3.2.1 Potència estàndard 4
3.2.2 Potència inversa 4
3.2.3 Potència desplaçada 4
3.2.4 Potència inversa desplaçada 4
3.3 Mètodes de Reducció 4
3.3.1 Mètode de Jacobi 4
3.3.2 Mètode de Hyman 4
3.3.3 Mètode QR 4

1 Introducció

1.1 Normes matricials

Una norma matricial és una aplicació que compleix, per a matrius quadrades

1. $||A|| \geq 0$, i $||A|| = 0 \iff A = 0$
2. $||\alpha A|| = |\alpha| \cdot ||A||$
3. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
4. $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

Una norma matricial és consistent amb una vectorial si compleix

$$\frac{||Ax||}{||x||} = \left|\left|A\frac{x}{||x||}\right|\right| \leq ||A|| \implies ||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax||$$

Tenim que $||A||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

1.2 Nombre de condició

$$\mu(A) = ||A||||A^-1||$$

2 Sistemes Lineals

2.1 Mètodes directes

Si tenim un sistema amb errors,

$$\left|\left|\frac{\delta x}{||x||}\right|\right| \leq \mu(A)\left[\frac{||\delta b||}{b} + \frac{||\delta A||}{||A||} \cdot \frac{||x+\delta x||}{||x||}\right]$$

Si suposem que $||x|| = ||x + \delta x||$ veiem que $\mu(A)$ condiciona l'error en la solució.

2.1.1 Factorització LU

$\exists \iff$ tots els menors principals són diferents a 0.

Triga aproximadament $2n^3/3$ per triangular, n^2 per resoldre.

Mètode de Crout obté U amb elements a la diagonal que són 1.

2.1.2 Factorització Cholesky

Obté una factorització $A = L \cdot L^T$ en aproximadament $n^3/3$ operacions, (aproximadament la meitat que LU).

2.1.3 Factorització QR

$\exists \iff A$ és de rang màxim. Cost: $2mn^2 + 2n^3/3$

Gram-Schmidt:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1, \qquad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \tag{1}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}\,\mathbf{a}_2, \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} \tag{2}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}\,\mathbf{a}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_2}\,\mathbf{a}_3, \qquad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \tag{3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \tag{4}$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_j}\,\mathbf{a}_k, \qquad \mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|} \tag{5}$$

$R = Q^T A = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & ... & e_k \end{pmatrix}^T A$

2.1.4 Factorització SVD

Costa més que QR, és més estable. Cost: $2mn^2 + 11n^3$

$$A = U\Sigma V^T$$

On U és $m \times n$, σ és $n \times n$ i V^T és $n \times n$

On U i V són ortogonals i σ és diagonal i té la diagonal de valors singulars.

2.2 Mètodes iteratius

Volem trobar B i c tal que $Ax = b$ sigui $x = Bx + c$ i el límit de les x vagi a la solució.

Ho fem amb $A = P - (P - A)$, aleshores $x = P^{-1}(P - A)x + P^{-1}b$ i fem l'esquema iteratiu.

Convergeix $\iff \rho(B) < 1$, amb velocitat $-\ln(\rho(B))$

Tenim una fita de l'error

$$||x - x^k|| \leq \frac{||B||}{1 - ||B||}||x^k - x^{k-1}||$$

2.2.1 Mètode de Jacobi

Si A és estrictament diagonalment dominant perfiles aleshores convergeix, ja que la $||B||_\infty < 1$

$P = D$ i apliquem esquema.

2.2.2 Mètode de Gauss-Seidel

Si A és estrictament diagonalment dominant per files, aleshores convergeix.

Si A és simètrica i definida positiva convergeix.

$P = L$ i apliquem esquema.

2.2.3 Mètode de Sobrerelaxació

És una millora de Gauss-Seidel que s'aplica en alguns casos per a convergència més ràpida.

$\rho(B_\omega) \geq |\omega - 1| \implies 0 \leq \omega \leq 2$ si volem que convergeixi.

$B = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$

$c = \omega(D - \omega L)^{-1}b$

3 Càlcul de valors i vectors propis

Si tenim v VEP trobem el seu VAP λ amb

$$\lambda = \frac{v^T Av}{v^T v}$$

3.1 Teorema de Gerschgorin

Proposició: Siguin $\lambda_1, ..., \lambda_n$ els VAPs d'una matriu A diagonalitzable, aleshores

$$\lambda_k \in \bigcup_{i=1}^{n} C_i; \quad C_i = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - a_{ii}| \leq r_i, \quad r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\}$$

Demostració: λ VAP de VEP $x \neq 0 \implies$

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j$$

Triem k tal que $||x||_\infty = |x_k| \implies$

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} \frac{|a_{kj}||x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| = r_k \implies \lambda \in \{|z - a_{kk}| \leq r_k\}$$

3.2 Mètode de la Potència

3.2.1 Potència estàndard

A amb VAPs reals $|\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_n|$, $x_{k+1} = Ax_k = A^k x_0$. Perquè convergeixi sense disparar-se es normalitza x_k i es converteix en y_k, i queda

$$z_{k+1} = Ay_k, \quad y_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{||z_{k+1}||}, \quad \left(\frac{z_k}{y_k}\right)_i \to \lambda_1$$

Això convergirà més ràpid com més petit sigui $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|$

3.2.2 Potència inversa

λ VAP de VEP v de $A \iff \lambda^{-1}$ és VAP de VEP v de A^{-1}

3.2.3 Potència desplaçada

λ VAP de VEP v de $A \iff \lambda - q$ és VAP de VEP v de $A - qI$

Ho usem per intentar millorar la velocitat de convergència.

3.2.4 Potència inversa desplaçada

λ VAP de VEP v de $A \iff (\lambda - q)^{-1}$ és VAP de VEP v de $(A - qI)^{-1}$

S'usa per refinar aproximacions de VAPs.

3.3 Mètodes de Reducció

3.3.1 Mètode de Jacobi

Suposem A simètrica (en veritat volem VAPs reals) s'usen canvis de base ortogonals. Aleshores fem $A_0 = A$, $A_k = Q_k^T A_{k-1} Q_k$. A_k manté simetria i VAPs.

3.3.2 Mètode de Hyman

Mitjançant $(n-2)(n-1)/2$ rotacions, s'obté una matriu Hessenberg superior, i es calcula el polinomi característic. Amb un mètode numèric es troben les arrels d'aquest polinomi, és a dir, els VAPs.

3.3.3 Mètode QR

Idea: Construir $A = A_0, A_1, ...$ tals que $A_s = Q_s R_s$, i $A_{s+1} = R_s Q_s$, i d'aquesta manera A_s tendeix cap a triangular superior, i fem servir el mateix que abans.