1 Introducció

(PROBLEMES)

(1) Són edos? De quin ordre?

a) $y'(x) = y(x)$ ✓ $F(a,b) = a-b$ (ordre 1)
$F(y,y') = y - y' = 0$

b) $y'(x) = y(x+1)$ ✗ (És una equació amb retard)

c) $y'(x) = a_0(x) + a_1(x)y(x) + a_2(x)y(x)^2$ ✓ (ordre 1)
$F(a,b,c) = a_0(a) + a_1(a)b + a_2(a)b^2 - c$

d) $y'(x) = y(y(x))$ ✗ No està avaluada en x.

e) $y''(x) = 6x + y(x)^2$ ✓ (ordre 2)

f) $y'(x) = \int_0^x (1+y(s)^2)^{1/2}\, ds$ ✗ És una eq. integro-diferencial.

Però, com les possibles solucions hauràn de ser almenys $\mathcal{C}^2$, derivant un altre cop: $y''(x) = (1+y(x)^2)^{1/2}$,
(edo d'ordre 2)

observem que les solucions de f) satisfàn $y'(0) = 0$

g) $y(x) = \int_0^1 (y'(s)^2 + y(s)^2)\, ds$

Suposem $\phi(x)$ és solució. $\phi(x) = \int_0^1 (\phi'(s)^2 + \phi(s)^2)\, ds = a \quad \forall x$

$$\Rightarrow \underset{a}{\underset{\parallel}{\phi(x)}} = \int_0^1 (\phi'(s)^2 + \phi(s)^2)\, ds = \int_0^1 (0^2 + a^2)\, ds = a^2$$

$$\Rightarrow a = a^2 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

(2) Determinar si és solució de la edo:

a) $\phi(x) = \sin x + x^2$ $\qquad y''(x) + y'(x) = x^2 + 2$

Considerem $L(y) = y'' + y \implies \boxed{L(y) = x^2+2}$

Observem que L és lineal:

$$\left(L(\alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha y_1 + \beta y_2)'' + (\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(y_1'' + y) + \beta(y_2'' + y) \right)$$

A més, $L(\sin x) = \sin'' x + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$

$L(x^2) = (x^2)'' + x^2 = 2 + x^2$

$$\implies L(\phi) = L(\sin x + x^2) = L(\sin x) + L(x^2) = 2 + x^2$$

b) $\phi(x) = e^{2x} - 3e^{-x}$ $\qquad y'' - y' - 2y = 0$

Sigui $L(y) = y'' - y' - 2y$, $\boxed{L(y) = 0}$ lineal

Observem que si $\varphi_\alpha(x) = e^{\alpha x}$:

$$L(e^{\alpha x}) = \alpha^2 e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x} - 2e^{\alpha x} = (\alpha^2 - \alpha - 2)e^{\alpha x}$$

$e^{\alpha x}$ n'és solució si $(\alpha^2 - \alpha - 2)e^{\alpha x} = 0 \implies \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ $\to \alpha = 2$, $\to \alpha = -1$

Per tant, $\left.\begin{array}{l} L(e^{2x}) = 0 \\ L(e^{-x}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow L(\phi) = 0$

c) $\varphi(t) = 2e^{3t} - e^{2t}$ $\qquad \ddot{x}(t) - x(t)\dot{x}(t) + 3x(t) = -2e^{2t}$

Observem que la equació no és lineal.

Si $t = 0 \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi(0) = 1 \\ \dot{\varphi}(0) = 4 \\ \ddot{\varphi}(0) = 14 \end{array} \right\} \longrightarrow 14 - 1\cdot 4 + 3 = -2e^{2\cdot 0}$

$13 \neq -2$

d) $\varphi(t) = \cos 2t$ $\qquad \dot{x}(t) + t\,x(t) = \sin 2t$

Avaluem en $t = \frac{\pi}{4}$: $\left.\begin{array}{l} \varphi(\frac{\pi}{4}) = 0 \\ \dot{\varphi}(\pi/4) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 + \frac{\pi}{4}\cdot 0 \neq 1$

✗

e) $x = \cos t - 2\sin t$ $\qquad \ddot{x} + x = 0$

$L(x) = \ddot{x} + x$, lineal.

$\left.\begin{array}{l} L(\cos t) = \cos''(t) + \cos t = -\cos t + \cos t = 0 \\ L(\sin t) = (\sin t)'' + \sin t = -\sin t + \sin t = 0 \end{array}\right\}$ $L(x) = 0 + 2\cdot 0 = 0$ ✓

f) $y = 3\sin 2x + e^{-x}$, $\qquad y'' + 4y = 5e^{-x}$

$L(\sin 2x) = (\sin 2x)'' + 4\sin 2x = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$

$L(e^{-x}) = (e^{-x})'' + 4e^{-x} = e^{-x} + 4e^{-x} = 5e^{-x}$

$L(3\sin 2x + e^{-x}) = 3\cdot 0 + 5e^{-x} = 5e^{-x}$ (Per ser L lineal) ✓

g) $x^2 + y^2 = 4$ (*) $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

↳ La funció està definida implícitament (TFI)

Suposem (*) defineix una funció $y(x)$, que serà C^∞ i, per tant, derivable. Derivant (*) respecte a x:

$$2x + 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

També ho podríem haver fet amb el TFInv:

si a (*) aïllem $x(y)$ i derivem (*) respecte a y:

$$2x(y)\frac{dx}{dy} + 2y = 0 \iff \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

✓

i) $e^{xy} + y = x+1$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}$

↳ Ex: defineix $y(x)$ e...

$\frac{d}{dx}$

$$e^{xy}(y + xy') + y' = 1 \rightarrow (xe^{xy}+1)y' = 1 - e^{xy}y$$

$$\longrightarrow y' = \frac{1-e^{xy}y}{1+xe^{xy}} = \frac{e^{-xy}-y}{e^{-xy}+x}$$

(3) $A(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}}_{B(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}}_{M}$ és sol. de $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A$?

Definim $L(A) = A' - CA$. $\quad L(A) = 0$

Obs. que si D és matriu constant,

$$L(AD) = (AD)' - CAD = A'D - CAD = (A' - CA)D = L(A)\cdot D$$

(En general és fals que $L(DA) = D\,L(A)$)

En el nostre cas, $L(BM) = L(B)M$ i es comprova que $L(A) = 0$.

(4) Determineu si les funcions $\begin{cases} x_1(t) = ce^{2t} - de^{-t} \\ x_2(t) = -ce^{2t} + 2de^{-t} \end{cases}$ $c, d \in \mathbb{R}$

són sol. de $\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 4x_2 \end{cases}$ $\quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = ce^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u} + de^{-t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v}$$

Sigui $L(x) = \dot{x} - Ax$ lineal.

Donats $\lambda \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{R}^2$, $w \neq 0$:

$$L(e^{\lambda t}w) = (e^{\lambda t}w)' - Ae^{\lambda t}w = \lambda e^{\lambda t}w - Ae^{\lambda t}w =$$

$$= -e^{\lambda t}(A - \lambda I)w = 0 \iff w \text{ és vep de vap } \lambda \text{ de } A$$

Es comprova que u és vep de vap 2 de A.

v és vep de vap -1 de A.

(5) Determineu per a quins valors de m la funció $f(x) = x^m$ és solució de:

a) $x^2y'' + xy' - y = 0$

b) $x^2y'' - xy' - 5y = 0$

Sigui $L(y) = x^2y'' + axy' + by$ (lineal)

es compleix:

$$L(x^m) = m(m-1)x^m + amx^m + bx^m = (m^2 + (a-1)m + b)x^m = 0 \ \forall x$$

$$\Longleftrightarrow m^2 + (a-1)m + b = 0$$

a) $m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1 \Longrightarrow x, \frac{1}{x}$ són sol.

b) $m^2 - 2m - 5 = 0 \Longrightarrow m = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{24} \Longrightarrow x^{1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{24}}$ són sol

(8) $\mathring{x} = Ax$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Hem vist a (4) que les funcions

$$x(t) = ce^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + de^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ són solució } \forall c,d \in \mathbb{R}$$

Ho escrivim:

$$x(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} \\ -e^{2t} & 2e^{-t} \end{pmatrix}}_{M(t)}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Imposem que $x(0) = M(0)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = M(0)^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(9) $f : \Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cont.

$\phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (graf $\phi \subset \Omega$) cont.

Dem: ϕ sol. de $\begin{cases}\dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0\end{cases} \iff \phi$ sol. de $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds$

$\Leftarrow$ | f i ϕ contínues,

$\int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds \in \mathcal{C}^1$. Per tant, derivant a la igualtat:

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds \implies \phi'(t) = f(t,\phi(t))$$

A més,

$$\phi(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s,\phi(s))\,ds = x_0$$

$\Rightarrow$ | ϕ satisfà $\phi'(t) = f(t,\phi(t))$ $\forall t$

Integrant entre t_0 i t als dos costats:

$$\int_{t_0}^{t} \phi'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds = \phi(t) - \underbrace{\phi(t_0)}_{x_0} \implies$$

$$\implies \phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))\,ds$$

Aplicació: Resoleu: $\begin{cases}\dot{x} = (1-t^2)^{-1/2} \\ x(0) = 0\end{cases}$ $f(t,x) = (1-t^2)^{-1/2}$

$$\boxed{\phi(t) = \int_0^t f(s,\phi(s))\,ds = \int_0^t (1-s^2)^{-1/2}\,ds = \arcsin(t)}$$

10 Trobeu la solució de $y(t) = \int_0^t y(s)\,ds + t + a$

$$y(t) = a + \int_0^t (\underbrace{1+y(s)}_{f(t,y) = 1+y})\,ds$$

La solució és la del pvi : $\begin{cases} y' = 1+y \\ y(0) = a \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} y' = y \Rightarrow y_h(t) = ce^t \\ y_p(t) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y(t) = -1 + ce^t}$$

(totes les sol de $y' = 1+y$)

Imposem $a = y(0) = -1 + c \Rightarrow c = a+1$

$$\longrightarrow \boxed{y(t) = -1 + (a+1)e^t}$$

Equació diferencial d'un feix de corbes

Ex: Considerem la família uniparamètrica: $y = ax^2$

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 \\ y' = 2ax \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \frac{y}{x^2} \\ \parallel \\ a = \frac{y'}{2x} \end{array} \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{y'}{2x} \Rightarrow \boxed{y' = 2\frac{y}{x}}$$

11

- família biparamètrica:

$$\left.\begin{array}{l} y = a(x-b)^2 \\ y' = 2a(x-b) \\ y'' = 2a \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}y''(x-b)^2 \\ y' = y''(x-b) \end{array} \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}y''\left(x - \frac{1}{y''}(xy''-y')\right)^2}$$

$$\downarrow$$

$$b = \frac{1}{y''}(xy'' - y')$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{2}y''\left(\frac{y'}{y''}\right)^2 = \frac{y'^2}{2y''}$$

(16) $Ae^{2x+B} = \underbrace{Ae^{B}}_{\alpha} e^{2x}$

$y' = 2\alpha e^{2x}$

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = ye^{-2x} \\ \alpha = \frac{y'}{2} e^{-2x} \end{array} \right\} \boxed{y' = 2y}$

(17) Trobeu l'edo de la família $y = \frac{x^2}{2} + ax + a^2$

Hi ha més corbes que satisfan l'edo?

$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2} + ax + a^2 \\ y' = x + a \end{array} \right\} a = y' - x \to y = \frac{x^2}{2} + x(y'-x) + (y'-x)^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y = \frac{x^2}{4} + \left(\frac{x}{2} + (y'-x) \right)^2 = \frac{x^2}{4} + \left(y' - \frac{x}{2} \right)^2$

$\Rightarrow \boxed{\left(y' - \frac{x}{2} \right)^2 = y - \frac{x^2}{4}}$

Considerem la nova incògnita de:

$\left. \begin{array}{l} u(x) = y(x) - \frac{x^2}{4} \\ u'(x) = y'(x) - \frac{x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow (u')^2 = u$

una sol. és $u(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow$ $y(x) = u(x) + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$

És sol. de la edo

(Ex) Donada la família uniparamètrica

$y = ax^2$. Donat c, volem els punts (x, y) on la corba té pendent c a (x,y). (Isoclines)

$\left. \begin{array}{l} y = ax^2 \\ y' = 2ax = c \end{array} \right\} \to a = \frac{c}{2x} \to \boxed{y = \frac{c}{2x} x^2 = \frac{c}{2} x}$

L'edo és:

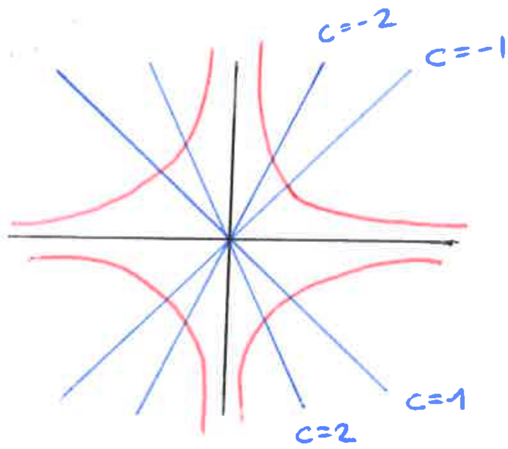
$\left. \begin{array}{l} y = ax^2 \\ y' = 2ax \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a = \frac{y}{x^2} \\ a = \frac{y'}{2x} \end{array} \right\} \Rightarrow y' = 2\frac{y}{x}$

Isoclines:

$2\frac{y}{x} = c \Rightarrow \boxed{y = \frac{c}{2} x}$

(20) $y' = -\frac{y}{x}$

$c = y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow y = -cx$



Equacions lineals unidimensionals

(1) Donada l'edo: $y' = a(x)\,y + b(x)$

sabem la sol. que val y_0 en $x = x_0$:

$$y(x) = e^{A(x)}\left(e^{-A(x)}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)}b(s)\,ds\right), \quad A' = a.$$

La solució general:

$$y(x) = e^{A(x)}\left(K + \int_{x_0}^{x} e^{-A(s)}b(s)\,ds\right)$$

$e^{A(x)}k$ és sol general de $y' = a(x)\,y$

Aplicació: resoleu $x^2y' + 2xy = 1$

$y' = -\frac{2}{x}y + \frac{1}{x^2}$, $a(x) = \frac{-2}{x}$ $\rightarrow$ $A(x) = \int a(x)dx = -2\ln|x|$

Les solucions de l'edo homogènia:

$y' = -\frac{2}{x}y$ són: $y_c(x) = c\,e^{-2\ln|x|} = c\,e^{\ln\frac{1}{x^2}} = \frac{c}{x^2}$

Troben totes les solucions de l'edo completa amb variació de les constants:

$y_p(x) = u(x)\frac{1}{x^2} \Rightarrow u'(x)\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow u'(x) = 1$

$\Rightarrow u(x) = x + k$

$\Rightarrow y_g(x) = (x+k)\frac{1}{x^2} = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{x}$, $k \in \mathbb{R}$

② a) Dem. que la família $y = cf + g$ és sol general de $y' = F(x,y)$ $\Longleftrightarrow$ l'edo és lineal unidimensional

$\Longleftarrow$ ✓

$\Longrightarrow$ Busquem l'edo de la família:

$$\left.\begin{array}{l} y = cf + g \longrightarrow c = \dfrac{y-g}{f} \\ y' = cf' + g' \longrightarrow c = \dfrac{y'-g'}{f'} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f'}{f} y - \frac{f'}{f} g + g' = y' = F(x,y)$$

$$\Longrightarrow F(x)y) = \frac{f'}{f} y - \frac{f'}{f} g + g' \quad \Longrightarrow \text{l'edo és lineal.}$$

b) Dem. que la raó simple de tres solucions d'una edo lineal és constant

c_1, c_2, c_3

$c_i - c_j \neq 0, \; i \neq j$

$y_1 = c_1 f + g$

$y_2 = c_2 f + g$

$y_3 = c_3 f + g$

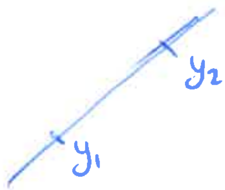
$y_1 - y_2 = (c_1 - c_2) f + g$

$y_2 - y_3 = (c_2 - c_3) f + g$

$$\frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_3} = \frac{c_1 - c_2}{c_2 - c_3} = ct. \quad ✓$$

c) Deduïu com obtenir l'eq. general d'una edo lineal sense fer cap quadràtica, si coneixem dues solucions diferents.

$$\Rightarrow y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



En efecte: $y' = a(x) y + b(x)$

y_1, y_2 sols. diferents. $\Rightarrow y_h = y_2 - y_1$ és sol. de $y' = a(x) y$

En efecte: $y_h' = y_2' - y_1' = a(x) y_2 + b(x) - [a(x) y_1 + b(x)] =$

$= a(x)(y_2 - y_1)$

Com y_1 és sol. de l'edo general: $y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$ és sol. general

③ Provar que tota sol. de $x' = a(t)x + b(t)$ (*) on

$a, b : (\alpha, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$, $a(t) \leq -c < 0$, $t > \alpha$

i $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$, tendeix a zero quan $t \to \infty$

Sigui $t_0 > \alpha$. La solució de (*) que en $t = t_0$ val x_0 és:

$$x(t) = e^{A(t)}\left(e^{-A(t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds\right), \quad \text{on } A' = a.$$

Com $a(t) \leq -c < 0$, $t > \alpha$ es té que, $\forall t$:

$$A(t) = A(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds \leq A(t_0) - \int_{t_0}^{t} c\, ds = A(t_0) - c(t - t_0) \xrightarrow{t\to\infty} -\infty$$

$$\Rightarrow e^{A(t)} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Llavors, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \dfrac{e^{-A(t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)ds}{e^{-A(t)} \to \infty} \overset{\text{L'hôpital}}{=}$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-A(t)} b(t)}{-e^{-A(t)} a(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{-b(t) \to 0}{a(t)} = 0$$

$|a(t)| > c > 0$

④ $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$ i T-periòdica, $b \in \mathbb{R}$

Dem que tota sol. de $x' = a(t)x + b$ és T-periòdica

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\int_0^T a(s)\, ds}_{\bar{a}} = 0 \quad \text{i} \quad b = 0$$

Les solucions són:

$$x(t) = e^{A(t)}\left(k + \int_0^t e^{-A(s)} b\, ds\right), \quad k \in \mathbb{R}, \quad \dot{A} = a$$

$$A(t) = A_0 + \int_0^t a(s)ds$$

Obs. que $A(t+T) = A_0 + \int_0^{t+T} a(s)ds = A_0 + \int_0^t a(s)ds + \underbrace{\int_t^{t+T} a(s)ds}_{\int_0^T a(s)ds} = A(t) + \bar{a}$

$\Leftarrow$ Si $\bar{a} = b = 0$: $\quad x(t) = e^{A(t)}k$, i satisfan $x(t+T) = e^{A(t+T)}k$

$= e^{A(t) + \bar{a}=0} k = e^{A(t)} k = x(t) \implies x(t+T) = x(t)$

$\Rightarrow$ $\forall$ solució és T-periòdica $\implies x(t) = e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(s)} b\, ds$

és T-periòdica

Vegem-ho per contrarecíproc: $\boxed{\text{si } b \neq 0}$ $\longrightarrow$ No T-periòdica.

Sigui $y(t) = x(t+T)$ solució de la edo:

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t+T) = a(t+T)x(t+T) + b = a(t)x(t+T) + b =$$
$$= a(t)y(t) + b$$

Per tant; $x(t+T) - x(t)$ és sol. de $\dot{z} = a(t)z$., $z(t) = e^{A(t)}k$ $\begin{cases} 0 & \text{si } k=0 \\ \neq 0 & \text{si } k\neq 0 \ \forall t \end{cases}$

$$x(T) - x(0) = \underset{\vee 0}{e^{A(t)}} \int_0^T \underset{\vee 0}{e^{-A(s)}} b\, ds \neq 0 \longrightarrow x(t+T) \neq x(t) \ \forall t$$

- $\boxed{b=0, \bar{a} \neq 0}$ Considerem $x(t) = e^{A(t)}$, que és sol. de $(*)$

Tenim que $x(t+T) = e^{A(t+T)} = e^{A(t)} e^{\bar{a}} = x(t) e^{\bar{a}} \Rightarrow$

$$x(t-T) - x(t) = \underset{\neq 0}{x(t)} \underset{\neq 0}{\left(1 - e^{\bar{a}}\right)} \neq 0 \ \forall t$$

(5) Considerem $\dot{x} = ax + b(t)$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$ i T-p.

Llavors, la edo té una única solució T-periòdica.

Què passa si $a = 0$?

Les solucions són de la forma $x(t) = e^{at}\left(k + \int_0^t e^{-as} b(s)\, ds\right)$, $k \in \mathbb{R}$

Busquem k tq $\forall t$: $\quad 0 = x(t+T) - x(t) =$

$$= e^{a(t+T)}\left(k + \int_0^{t+T} e^{-as} b(s)\, ds\right) - e^{at}\left(k + \int_0^t e^{-as} b(s)\, ds\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{at} k \left(1-e^{aT}\right) = e^{at} e^{aT} \int_0^{t+T} e^{-as} b(s)\,ds - e^{at} \int_0^t e^{-as} b(s)\,ds$$

$$\Leftrightarrow \left(1-e^{aT}\right) k = \underbrace{e^{aT} \int_0^{t+T} e^{-as} b(s)\,ds - \int_0^t e^{-as} b(s)\,ds}_{\psi(t)}$$

b T-periòdica

Vegem que $\psi(t)$ és constant:

$$\psi'(t) = e^{aT} \cdot e^{-a(t+T)} b(t+T) - e^{-at} b(t) = e^{-at}\left(b(t+T) - b(T)\right) = 0 \quad \forall t$$

$$\Longrightarrow k = \frac{e^{aT}}{1-e^{aT}} \int_0^T e^{-as} b(s)\,ds$$

Si $a=0$, les solucions són $x(t) = k + \int_0^t b(s)\,ds$

és T-periòdic $\Leftrightarrow \int_0^T b(s)\,ds = 0$

* Si $\bar{b} = \int_0^T b(s)\,ds = 0 \Longrightarrow$ tota solució és periòdica.
* Si $\bar{b} \neq 0 \Longrightarrow$ cap solució ho és. □

ALTERNATIVA: Utilitzant sèries de Fourier:

Escrivim les incògnites com $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{\frac{2\pi i k}{T} t}$

$b(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k e^{\frac{2\pi i k}{T} t}$

Substituint a $\dot{x} = ax + b(t)$:

$$\dot{x}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi i k}{T} x_k e^{\frac{2\pi i k}{T} t} = \sum a x_k e^{\frac{2\pi i k}{T} t} + \sum b_k e^{\frac{2\pi i k}{T} t}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\Big(\underset{\neq 0}{\frac{2\pi i k}{T}} - \underset{\neq 0}{a}\Big)}_{\neq 0\ \forall k} x_k = b_k \Longrightarrow \boxed{x_k = \frac{1}{\frac{2\pi i k}{T} - a} b_k}$$

Coefs. de la sol. única T-periòdica

⑥ Llei de Newton del refredament.

Si $T(t)$ és la temperatura en l'instant t d'un cos.

La seva taxa de canvi:

temp. del medi

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (M(t) - T(t)) \quad , \quad k = ct$$

a) Resoleu l'edo si M és constant

b) Un termòmetre marca 100°C i es posa en un medi a 70°C i 6 minuts després marca 80°C. Quina temperatura marca després de 20 minuts?

a) Si M és constant:

$\dot{T} = k(M-T)$. Una solució particular és $T_p = M$

Les solucions de la homogènia $\dot{T} = -kT$ és

$$T_h = c e^{-kt}$$

Aleshores, $\boxed{T(t) = M + c e^{-kt}}$, $c \in \mathbb{R}$

b) $M = 70°C$

$T(0) = 100°C = 70 + c e^{-k \cdot 0} = 70 + c \Rightarrow c = 30$

$T(6) = 80°C = 70 + 30 e^{-k6} \Rightarrow \frac{1}{3} = e^{-k6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6k = \ln 3 \Rightarrow k = \frac{\ln 3}{6}$

$$\Rightarrow T(t) = 70 + 30 e^{-\frac{\ln 3}{6} t}$$

$$\Rightarrow T(20) = 70 + 30 e^{-\frac{\ln 3}{3} \cdot 10} \approx 70,77°$$

(8) Un tanc de 40 l és ple d'aigua-sal, amb 2.5 kg de sal. S'introdueix aigua-sal al tanc amb una concentració de 0,4 kg/l amb una taxa d'entrada d'aigua de 8 l/min.

Si la barreja es manté ben remenada i surt del tanc a la mateixa velocitat, calculeu la quantitat de sal al tanc després de 10 mins.

A què tendirà si $t \to \infty$?

Sigui $S(t)$ la quantitat de sal en el tanc (kg) en l'instant t (minuts):

$$\text{kg/min} \quad \frac{dS}{dt} = T_e - T_s$$

$T_e \to$ Taxa de sal que entra

$T_s \to$ " que surt

$$T_e = \begin{pmatrix}\text{concentració}\\ \text{inicial}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Taxa}\\ \text{entrada}\end{pmatrix} = 0,4\ \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 8\ \frac{\text{l}}{\text{min}} = 3,2\ \text{kg/min}$$

$$T_s = \begin{pmatrix}\text{concentració}\\ \text{sortida}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{taxa}\\ \text{sortida}\end{pmatrix} = \frac{S(t)}{40}\ \frac{\text{kg}}{\text{l}} \cdot 8\ \text{l/min} = \frac{S(t)}{5}\ \text{kg/min}$$

Per tant, l'edo és:

$$\dot{S} = 3,2 - \frac{1}{5} S$$

En general: $S(t) = \underbrace{16}_{\text{particular}} + \underbrace{c\, e^{-1/5 t}}_{\text{homogènia}}$.

En $t=0$: $2.5 = S(0) = 16 + C \Rightarrow C = -13,5$

$$\Rightarrow \boxed{S(t) = 16 - 13,5\, e^{-1/5 t}}$$

$S(10) = 16 - 13,5\, e^{-2} \approx \underline{14,17\ \text{kg}}$

$\underline{S(t \to \infty) = 16\ \text{kg}}$

(9) Està nevant amb regularitat. A les 12h surt una màquina llevaneus que en una hora recorre 2 km i, en la segona hora, només 1 km.

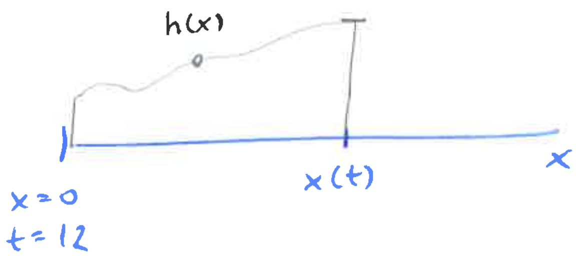
A quina hora comença a nevar?

La quantitat de neu treta per la màquina per unitat de temps és constant.

Sigui $x(t)$ la posició de la llevaneus (km) en l'instant t (h)

Podem suposar que x és derivable i que $x'(t) > 0$.

Com que la funció és contínua i creixent, és invertible.



Com neva amb regularitat:

$h(x(t)) = n(t - t_0)$

La quantitat de neu treta per la llevaneus quan hagi arribat a $x(t)$:

$$\int_0^{x(t)} h(u)\,du = \left\{\begin{array}{l} u = x(s) \\ du = x'(s)\,ds \\ u = 0 \to s = 12 \\ u = x(t) \to s = t \end{array}\right\} = \int_{12}^{t} h(x(s))\,x'(s)\,ds = \int_{12}^{t} n(s - t_0)\,x'(s)\,ds$$

neva amb regularitat

$$\Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{c}{n}\,\frac{1}{t - t_0}\,,\quad \text{que no és lineal!}$$

$$c = \frac{d}{dt}\int_0^{x(t)} h(u)\,du = n(t - t_0)\frac{dx}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{n}{c}(t - t_0) = \alpha(t - t_0)$$

$\hookrightarrow$

Resolem l'edo:

$$\left.\begin{array}{l} t(x) = t_0 \text{ és sol.} \\ t_h(x) = ce^{\alpha x}, \quad c \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{t(x) = t_0 + ce^{\alpha x}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Imposem: $\left\{\begin{array}{l} t(0) = 12 \\ t(2) = 13 \\ t(3) = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t(0) = 12 = t_0 + C \Rightarrow C = 12 - t_0 \\ 13 = t_0 + (12-t_0)(e^{\alpha})^2 \\ 14 = t_0 + (12-t_0)(e^{\alpha})^3 \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} (e^{\alpha})^2 = \dfrac{13-t_0}{12-t_0} \\ (e^{\alpha})^3 = \dfrac{14-t_0}{12-t_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(13-t_0)^3}{(12-t_0)^{\cancel{3}}} = \frac{(14-t_0)^2}{\cancel{(12-t_0)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (13-t_0)^3 = (12-t_0)(14-t_0)^2$$

$$13 - t_0 = s \Rightarrow s^3 = (s-1)(s+1)^2 \Leftrightarrow s^2 - s - 1 = 0$$

$$\Rightarrow s = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (s>0)$$

$$\Rightarrow \boxed{t_0 = 13 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 11\text{h}, 22 \text{ min i } 55\text{ s}.}$$

(10) $\dot{p} = \lambda p, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$P(1961) = 3{,}06 \cdot 10^9$

$P(1962) = 1{,}02\ p(1961)$

$P(1700)$? $P(1900)$?

$P(2510)$? $P(2670)$?

La solució que en t_0 val p_0 és:

$P(t) = P_0\, e^{\lambda(t-t_0)}$, t: anys

Imposant les dades, $t_0 = 1961$:

$3{,}06 \cdot 10^9 = P(1961) = P_0$

$$\Rightarrow P(1962) = 1{,}02 P_0 = P_0 e^{\lambda(1962-1961)} = P_0 e^{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda} = 1{,}02 \Leftrightarrow \lambda = \log(1{,}02) = 0{,}0198\ldots$$

$$\boxed{p(t) = 3{,}06 \cdot 10^9\, e^{0{,}0198(t-1961)}}$$

Sistemes lineals homogenis

(12) $x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} t e^t$

x_1, x_2 sols de $\dot{x} = Ax$, $A \in M_2(\mathbb{R})$

Determineu el conjunt fonamental de solucions.

El conjunt de solucions de l'edo és un e.v. de dim. 2

un conjunt fonamental de solucions n'és una base

Sabem que totes les solucions de l'edo venen donades pel pvi:

$$(**) \begin{cases} \dot{x} = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad t_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}^2$$

El que volem saber és que si $x(t)$ és sol. de $(**)$ llavors $\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tq:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad \forall t \quad = \begin{pmatrix} | & | \\ x_1(t) & x_2(t) \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Suposem que determinem c_1, c_2 per a $t = t_0$

$\Rightarrow x(t_0) = c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0)$

$\Rightarrow x(t)$ i $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ són sol. de $(**)$

$\Rightarrow x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad \forall t$

Per a determinar c_1 i c_2 per a $t = t_0$:

$$\begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = x_0 \iff \det \begin{pmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t_0$$

opcions:

1. Es pot calcular det i veure $\neq 0 \quad \forall t$
2. Siguin $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ solucions qualsevol de la edo, i $w(t) = \det(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)(t)$, es compleix $\dot{w} = \operatorname{tr} A\, w$

$\hookrightarrow$

$\Rightarrow$ o bé $w(t)=0 \ \forall t$ o bé $w(t)\neq 0 \ \forall t$

Per tant, podem calcular el determinant en un punt qualsevol:

$$\boxed{\det(x_1,x_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 8 \neq 0} \Rightarrow w(t)\neq 0 \ \forall t$$

(13) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x$, $\quad x_1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$, $\quad x_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$

Formen un sistema fonamental de solucions a $t\in(-\infty,\infty)$

Construiu una matriu fonamental; $\phi(t)$ i calculeu $\phi^{-1}(t)$

Trobeu la matriu fonamental $\psi(t)$ tq $\psi(0)=Id$

Una matriu fonamental és $\phi(t)$ tq

(1) $\dot{\phi}(t) = A\phi(t)$

(2) $\det \phi(t) \neq 0 \ \forall t$ (suficient en veure-ho en un punt)

Llavors,

$\phi(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{5t} \end{pmatrix}$ n'és una i $\det \phi(t)\neq 0 \ \forall t$

((x_1, x_2) són veps de vaps diferents)

Totes les solucions són de la forma

$\phi(t)\, v, \quad \forall v\in\mathbb{R}^2$

Si $\phi(t)$ és m.f. del sistema, $\underline{\phi(t)\, C \text{ és m.f.}}$

$C\in M_2(\mathbb{R})$ i $\det C\neq 0$

Trobem $\psi(t)$ tq $\psi(0)=Id$:

$Id = \psi(0) = \phi(0)\,C \Rightarrow C = \phi(0)^{-1} \Rightarrow \underline{\psi(t)} = \phi(t)\,\phi(0)^{-1}$

$\shortparallel$

$\underline{e^{tA}}$

$\hookrightarrow$

$\psi(t)$ satisfà $\psi(t)^{-1} = \psi(-t)$

En efecte: $s \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} N(t) = \psi(t)\,\psi(s) \\ \tilde{N}(t) = \psi(t+s) \end{array}\right\} \text{ Ambdues satisfan } \dot{M} = AM$$

$$\begin{array}{l} N(0) = \psi(0)\,\psi(s) = \psi(s) \\ \tilde{N}(0) = \psi(0+s) = \psi(s) \end{array} \Longrightarrow N(t) = \tilde{N}(t)$$

$$\Longrightarrow \psi(t+s) = \psi(t)\,\psi(s) \Longrightarrow \boxed{\psi(-t) = \psi(t)^{-1}}$$

Finalment:

$$\psi(t) = \phi(t)\,\phi(0)^{-1} \Longrightarrow \psi(t)^{-1} = \psi(-t) = \phi(-t)\,\phi(0)^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\psi(t)^{-1} = \phi(0)\,\phi(t)^{-1}$$

$$\boxed{\phi(t)^{-1} = \phi(0)^{-1}\,\phi(-t)\,\phi(0)^{-1}}$$

En el nostre cas:

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{t} & e^{-5t} \\ e^{t} & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

14 15 16

(14) $x = Ax$

$e^{tA} v \xrightarrow{t=t_0} x_0$

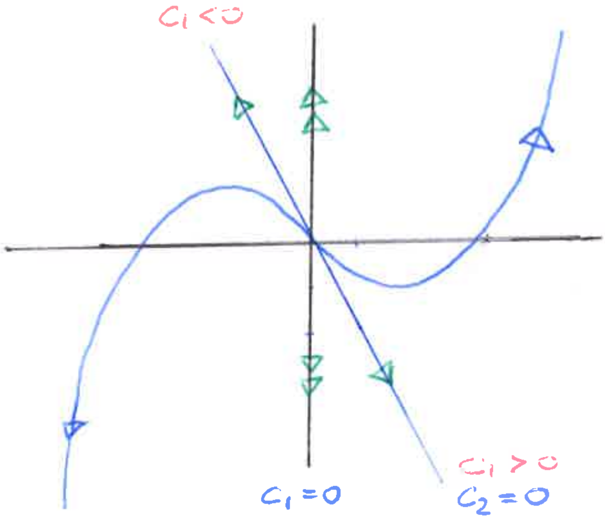
a) $\left.\begin{array}{l} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

si $v \in \text{Nuc}(A - \lambda I)$, $e^{tA} v = e^{\lambda t} v$

vaps de A: $1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les solucions són: $x(t) = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



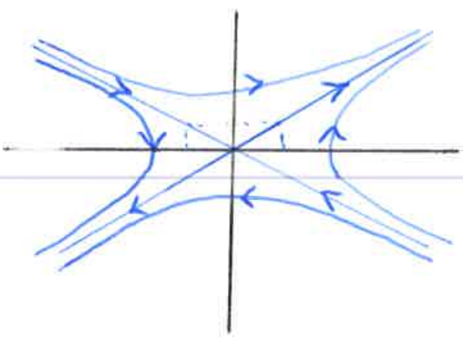
Node inestable (repulsiu)

$\frac{e^{2t}}{e^{t}} = e^{t} \longrightarrow \infty$

b) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

vaps de A: $\lambda_{\pm} = 1 \pm \sqrt{2} \longrightarrow v_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$e^{tA} v_{\pm} = e^{\lambda_{\pm} t} v_{\pm} \Longrightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_+ t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_- t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$



Punt de sella

c) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

vap $\lambda_1 = 2i$, $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1+i \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -2i$, $v_2 = \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1-i \end{pmatrix}$

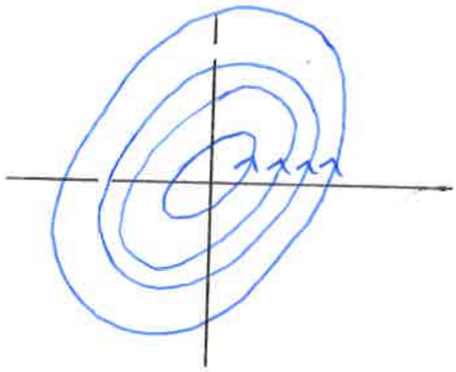
$$\left(\begin{array}{l} (A-\lambda I)v = 0 \Longrightarrow \\ \Rightarrow \overline{(A-\lambda I)v} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (A-\bar{\lambda} I)\bar{v} = 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} e^{tA} v = e^{\lambda t} v \\ \overline{e^{tA} v} = e^{\bar{\lambda} t} \bar{v} \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$e^{\lambda t} v = \begin{pmatrix} 4e^{2it} \\ (1+i)e^{2it} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4\cos 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \sin 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}}$$

Solucions del sistema:

$$c \begin{pmatrix} 4 \cos 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}$$



centre

d) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

vap -1 (dim Nuc $(A+I) = 1$) $\longrightarrow u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una sol. és $e^{tA} u = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

Sigui v l.i. amb u. Una altra solució és $e^{tA} v$.

L'escollim de la manera següent:

$(A+I)^2 v = 0$, $(A+I)v \neq 0$

Si $v \in \mathrm{Nuc}(A+I)^2 \setminus \mathrm{Nuc}(A+I)$:

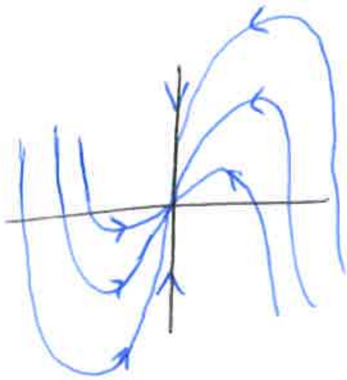
$(A+I) \underbrace{(A+I)v}_{\text{vep}} = 0$

$e^{tA} v = e^{-t} v + t e^{-t} \underbrace{(A+I)v}_{c \cdot u} =$

$= e^{-t} v + t e^{-t} u$ prenent $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (A+I)v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c = 1$

La sol. general: $x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left[e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$



Node atractor

(16) Sigui $A \in M_n$, $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_k)^{m_k}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $i \neq j$

Considereu el polinomi de grau $n-1$ $Q(\lambda)$ tq:

$$Q^{(j)}(\lambda_i) = e^{\lambda_i}, \quad j = 0, \dots, m_j - 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

Proveu $e^A = Q(A)$

Indicació: $e^{tA} = Q_{tA}(tA) \Longrightarrow Q_{tA}^{(j)}(t\lambda_i) = e^{t\lambda_i}$

$$e^{tA} = e^{tC^{-1}JC} = C^{-1}e^{tJ}C$$

$$Q(tA) = Q(tC^{-1}JC) = C^{-1}Q(tJ)C$$

Provarem que $e^{tA}v = Q(tA)v \quad \forall v \in \mathbb{C}^n$.

Com $\mathbb{C}^n = \ker(A-\lambda_1 I)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \ker(A-\lambda_k I)^{m_k}$,

n'hi ha prou en provar $e^{tA}v = Q(tA)v \quad \forall v \in \ker(A-\lambda_i I)^{m_i}$ $\forall i$

Tenim que si $v \in \operatorname{Nuc}(A-\lambda_i I)^{m_i} \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \quad e^{tA}v = e^{t\lambda_i} \sum \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_i I)^k v$$

En efecte, com $\lambda_i I$ i $(A-\lambda_i I)$ commuten,

$$e^{tA}v = e^{t\lambda_i I + t(A-\lambda_i I)}v = e^{t\lambda_i I}e^{t(A-\lambda_i I)}v =$$

$$= e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_i I)^k v = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda_i I)^k v$$

$v \in \ker(A-\lambda_i I)^{m_i} \Longrightarrow (A-\lambda_i I)^k v = 0$

$k \geq m_i$

Tenim que, expandint al voltant de $tz = t\lambda_i$:

$$Q(tz) = Q(t\lambda_i) + \frac{Q'(t\lambda_i)}{1!}(tz - t\lambda_i) + \cdots + \cdots =$$

$$= \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{Q^{(k)}(t\lambda_i)}{k!}(tz - t\lambda_i)^k + O(|tz - t\lambda_i|^{m_i})$$

Per tant,

$$Q(tA)v = \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{e^{t\lambda_i}}{k!} t^k (A - \lambda_i I)^k v}_{e^{tA}v} + O(t^{m_i}(A - \lambda_i I)^{m_i})$$

$\square$

APLICACIÓ: Resoleu $\dot{x} = Ax$, on $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En aquest cas, $p(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^3$

$\lambda_i = 1$ $\quad Q(tz) = \underbrace{Q(t)}_{e^t} + \underbrace{Q'(t)}_{e^t}(tz - t) + \frac{\overbrace{Q''(t)}^{e^t}}{2}(tz-t)^2 + c_3(t)(tz-t)^3$

Determinem c_3: imposem $Q(0) = e^0 = 1$

és a dir:

$$1 = e^t - te^t + \frac{t^2}{2}e^t - c_3(t)\, t^3 \implies$$

$$\implies c_3(t) = -\frac{1 - e^t + te^t - \frac{t^2}{2}e^t}{t^3}$$

Aleshores, $Q(tA) = e^t I + te^t(A - I) + \frac{t^2}{2}e^t(A-I)^2 + c_3 t^3 (A-I)^3$

$$\begin{matrix} \| \\ e^{tA} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 1-e^t & -1+e^t \\ 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & -1+e^t & 1 \end{pmatrix}$$

$e^{\operatorname{tr} A} = \det Q(tA)$ ✓

$e^{0A} = Id$ ✓

(17) Resoleu

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x \quad , \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

i) si calculéssim e^{tA}, la sol. és $x(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) si Φ és m.f, la sol. és $\Phi(t)\, v$, on v és t.q

$\Phi(0)\, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

iii) vaps i veps: $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 3 \longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 = 2 \longrightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} & 2e^{3t} & 5e^{2t} \\ 0 & 0 & -3e^{2t} \\ e^{-t} & e^{3t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{és m.f.}$$

$\Rightarrow e^{tA} = \Phi(t)\, \Phi(0)^{-1}$ (o més fàcil, ii))

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} x \quad , \quad x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\lambda = 5 + 2i \longrightarrow w = u + iv = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$

(com A és real, l'altre vap / vep és el conjugat)

Una sol. és $e^{\lambda t} w = e^{(5+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} = e^{5t}(\cos 2t + i \sin 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$

Llavors, una m.f. és:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{(5+2i)t} & e^{(5-2i)t} \\ (1-2i)\, e^{(5+2i)t} & (1+2i)\, e^{(5-2i)t} \end{pmatrix}$$

si volem la solució tq $x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\Phi(0)\, v = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi(t)\, v$

Alternativament:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t}\cos 2t & e^{5t}\sin 2t \\ e^{5t}\cos 2t + 2e^{5t}\sin 2t & -2e^{5t}\cos 2t + e^{5t}\sin 2t \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \varphi(t)\,\varphi(0)^{-1}$$

18

a) $\begin{cases} \dot{x} = -x-y+z \\ \dot{y} = -y-z \\ \dot{z} = y-3z \end{cases}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

vaps: $\lambda_1 = -1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$

$\lambda_2 = -2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2$

Volem $v_3 \in \ker(A+2I)^2 \setminus \ker(A+2I)$ tq

$(A+2I)v_3 = v_2 \implies v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$e^{tA}v_3 = e^{-2t}v_3 + te^{-2t}\underbrace{(A+2I)v_3}_{v_2}$$

$$\underset{\text{m.f.}}{\Phi(t)} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & e^{-2t}+te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \end{pmatrix}$$

Tenim que si $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1}AC = J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = e^{tCJC^{-1}} = Ce^{tJ}C^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

(19) Resoleu el sistema

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= \sin t \; x_1 - x_2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow x_1 = c_1 e^{-t}, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\hookrightarrow \dot{x}_2 = -x_2 + c_1 e^{-t} \sin t \qquad \circledast$$

Busquem una sol. particular de $\circledast$:

i) $\xi(t) = e^{-t} c(t) \longrightarrow e^{-t} \dot{c}(t) = c_1 e^{-t} \sin t$

ii) La busquem de la forma:

$$\xi(t) = Ae^{-t} \sin t + Be^{-t} \cos t$$

Trobem A i B substituint a $\circledast$:

$$\underbrace{\cancel{-Ae^{-t}\sin t} + Ae^{-t}\cos t \cancel{- Be^{-t}\cos t} - Be^{-t}\sin t}_{\xi'(t)} = \cancel{-Ae^{-t}\sin t} \cancel{-Be^{-t}\cos t} + c_1 e^{-t}\sin t$$

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} A &= 0 \\ -B &= c_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi(t) = -c_1 e^{-t} \cos t \text{ és sol de } \circledast$$

$\Rightarrow$ La sol. general de $\circledast$ és:

$$x_2(t) = -c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Llavors, la sol. general del sistema:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ -c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow \Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t}\cos t & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(t)} = \Psi(t)\Psi(0)^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t}\cos t - e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}}$$

(21) $A(t) = \begin{pmatrix} d-abt & -b^2t \\ a^2t & d+abt \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$

a) $B(t) = e^{\int_0^t A(s)\,ds}$?

Obs. que $A(t) = Id + t\tilde{A}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{ab}{d} & -\frac{b^2}{d} \\ \frac{a^2}{d} & \frac{ab}{d} \end{pmatrix}$

Per tant, $\int_0^t A(s)\,ds = t\,Id + \frac{t^2}{2}\tilde{A}$.

$e^C = I + C + C^2/2 + \cdots$

Com Id i $\tilde{A}$ commuten i $\tilde{A}^2 = 0$:

$$e^{\int_0^t A(s)ds} = e^{t Id + t^2/2\,\tilde{A}} = e^{t Id}\, e^{t^2/2\,\tilde{A}} = e^t e^{t^2/2\,\tilde{A}} =$$

$$= e^t\left(Id + \tfrac{t^2}{2}\tilde{A}\right) =: B(t)$$

b) Proveu $A(t)B(t) = B(t)A(t)$

Com Id i $\tilde{A}$ commuten:

$$A(t)B(t) = (Id + t\tilde{A})\, e^t\left(Id + \tfrac{t^2}{2}\tilde{A}\right) = B(t)A(t)$$

c) Resoldre $\dot{x} = A(t)x$, $x(0) = x_0$

Comprovem que $B(t)$ és la m.f. del sistema tq $B(0) = Id$.

En efecte:

$$\dot{B}(t) = \left(e^{\int_0^t A(s)ds}\right)^{\circ} = e^{\int_0^t A(s)ds} \cdot A(t) = B(t)A(t) =$$
$$= A(t)B(t)$$

$\Rightarrow$ Les columnes de B són sol.

Com $B(0) = Id$ $\Rightarrow$ $B(0)$ és m.f.

$\Rightarrow$ $x(t) = B(t)x_0$ és <u>la</u> solució de $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Sistemes lineals no homogenis

(23) Trobeu la sol. general de:

$$\mathring{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V}$$

$$\mathring{c}(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix} + \vec{k}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3e^{-t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$e^{tA}\mathring{c}(t) + A\underbrace{e^{tA}c}_{x} = Ax+b$$

Hem de trobar una sol. particular, $\xi(t)$:

Opció ① $\xi(t) = e^{tA}c(t)$ és sol. $\iff e^{tA}\mathring{c}(t) = V$

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -3e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix} + \vec{k}\right) \iff \mathring{c}(t) = e^{-tA}V$$

Opció ② Busquem una que sigui comb. lineal de funcions concretes:

<u>Mètodes</u>: $\mathring{x} = Ax + f(t)$, on $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$f(t) = e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{k} t^j v_j \quad \text{i} \quad \lambda \notin \operatorname{spec} A$$

Llavors el sistema té una sol. de la forma:

$$\xi(t) = e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{k} t^j u_j, \text{ per a certs } u_j \in \mathbb{R}^n$$

En efecte, derivant i substituint a la edo:

$$\overbrace{e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{k} t^j \lambda u_j + e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)t^j u_{j+1}}^{\mathring{\xi}(t)} =$$

$$= \underbrace{e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{k} t^j A u_j}_{A\xi(t)} + e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{k} t^j v_j$$

t^k: $\lambda u_k = Au_k + v_k \Rightarrow (A-\lambda I)u_k = -v_k$

t^{k-1}: $\lambda u_{k-1} + k u_k = Au_{k-1} + v_{k-1} \Rightarrow (A-\lambda I)u_{k-1} = -v_{k+1} + k u_k$

$\hookrightarrow$

En el nostre cas:

$k=0$, $\lambda=0 \notin \operatorname{spec} A \implies \exists$ sol. de la forma $\xi(t)=u$

$0 = Au+v$, $\quad Au=-v \Rightarrow u = A^{-1}v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

(24)

a) $\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} x + t \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1} + e^{6t} \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$

vaps $1 \pm 2i$, veps $\implies e^{tA}$.

volem trobar sol. del sistema complet

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + f(t) \\ f(t) = e^{\alpha t}(v_1 + tv_2 + \cdots + t^m v_m) \\ \text{i } \alpha \text{ no és vap de } A \\ \Rightarrow \exists \text{ sol. de la forma:} \\ \varphi(t) = e^{\alpha t}(u_1 + \cdots + t^m u_m) \end{array}}$$

$\varphi(t) = u_1 + tu_2 + e^{6t}u_3$

Substituïnt a l'edo:

$u_2 + 6e^{6t}u_3 = \underbrace{Au_1 + tAu_2 + e^{6t}Au_3}_{A\varphi} + tv_1 + e^{6t}v_2$

$(A-6I)u_3 = -v_2 \longrightarrow$ obtenim u_3

$Au_2 = -v_1 \longrightarrow$ obtenim u_2

$Au_1 = u_2 \longrightarrow$ obtenim u_1

b) $\mathring{x} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix}$

vaps $\pm 2i$

$$e^{it}\tilde{u} + e^{-it}\tilde{v} = e^{it}\begin{pmatrix} -i/2 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-it}\begin{pmatrix} i/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Com $\pm i$ no són vaps de A: $\exists$ sol. $\varphi(t) = e^{it}\hat{u} + e^{-it}\hat{v}$

$\Longrightarrow$ cal que $A\hat{u} = \begin{pmatrix} -i/2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A\hat{v} = \begin{pmatrix} i/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

De la mateixa manera, podem fer-ho de la forma:

$$\varphi(t) = \cos t\, c + \sin t\, d$$

$$-\sin t\, c + \cos t\, d = \cos t\, Ac + \sin t\, Ad + \cos t\, u + \sin t\, v$$

$$\left.\begin{aligned} Ac &= d - u \\ Ad &= -c - v \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} &A^2c = Ad - Au = -c - v - Au \\ &(A^2 + I)c = -v - Au \quad \text{es resol.} \end{aligned}$$

(26) Resoleu $\mathring{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}$, $x(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Tenim 0 és vap d'A, dim ker $A = 1$, un vep $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sigui $v \in \ker A^2 \setminus \ker A$ tq $Av = u$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{si } \omega \in \ker(A - \lambda I)^k: \\ &e^{tA}\omega = e^{\lambda t}\left(\omega + t(A - \lambda I)\omega + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(A - \lambda I)^{k-1}\omega\right) \end{aligned}}$$

Per tant, una m.f. és:

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{tA} = \phi(t)\phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}$$

Ara busquem solucions del sistema complet, de la forma:

$\varphi(t) = e^{tA}c(t)$ (variació de les constants:)

φ és sol. si $e^{tA}\mathring{c}(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix} \Rightarrow \mathring{c}(t) = e^{-tA}\begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow c(t) = \begin{pmatrix} \ln t + \alpha \\ \ln t + \beta \end{pmatrix}$$

La solució general és

$$\varphi(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} \ln t + \alpha \\ \ln t + \beta \end{pmatrix}$$

Busquem la sol. tq $x(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \varphi(1) = e^{A}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = e^{-A}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

27 $\dot{x} = Ax + b(t)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ct}$, $c \neq 1$

vaps 1, $1 \pm 2i$

$\exists$ sol. de la forma $e^{ct}v$. (Ex: trobar-la)

si $c = 1$, vegem que hi ha sol. de la forma:

$$\varphi(t) = e^{t}v_1 + te^{t}v_2 \qquad \text{EX}$$

(28) Resoleu $\dot{x} = Ax + b$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$, $\quad b = \begin{pmatrix} te^t \\ (1-t)e^t \end{pmatrix}$

Busquem una sol. del sistema homogeni de la forma

$\phi_1(t) = e^t v$. Considerem $M(t) = (\phi_1(t) \quad \phi_2(t))$ tq $\det M \neq 0$ $\hookrightarrow$ Matriu qualsevol

fem el canvi $x = Hu$:

1) Hem de trobar una m.f. del sistema homogeni

Suposem ϕ_1 trobada i $H = (\phi_1, \phi_2)$

$$x = Hu \implies \left.\begin{array}{l} \dot{x} = \dot{H}u + H\dot{u} \\ \quad \| \\ Ax = AHu \end{array}\right\} \iff H\dot{u} = \underset{\begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}}{\underset{\|}{(AH - \dot{H})u}}$$

$\hookrightarrow \dot{H}u = AHu$

$$\implies \dot{u} = \underbrace{H^{-1}(AH - \dot{H})}_{\begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}} u \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{u}_1 = g_1 u_2 \\ \dot{u}_2 = g_2 u_2 \end{array}\right\}$$

En el nostre cas, $\phi_1(t) = e^t v$ és sol. del sistema sii

$$t\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ -e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \implies \dot{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2te^{-t} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{H^{-1}(AH - \dot{H})} u$$

$$\implies \left.\begin{array}{l} \dot{u}_1 = -2te^{-t} u_2 \\ \dot{u}_2 = 2u_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \longrightarrow u_1(t) = -2c_2(t-1)e^t + c_1 \\ \longrightarrow u_2(t) = c_2 e^{2t} \end{array}$$

Llavors, la sol. general del sist. homogeni és:

$$x(t) = H(t)u(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^t - 2(t-1)e^{2t} \\ -e^t & e^t + 2(t-1)e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

variació de les constants.

$$\implies M(t)c(t) \rightarrow M(t)\dot{c}(t) = b(t) \implies \dot{c}(t) = M(t)^{-1} b(t)$$

Equacions lineals d'ordre n homogènies

30

a) Dem. $f_1(x) = x^2$ i $f_2(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$, són l.i.

b) Proveu $W(f_1(x), f_2(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) Dem. $y_1 = 1$, $y_2 = \ln x$ són sol. de $y'' + (y')^2 = 0$

d) $c_1 y_1 + c_2 y_2$ una sol. de la edo $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$?

a) f_1, f_2 l.i. $\iff c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

En efecte: si $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \quad \forall x$:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 f_1(1) + c_2 f_2(1) = 0 \\ c_1 f_1(-1) + c_2 f_2(-1) = 0 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{array} \iff c_1 = c_2 = 0.$$

b) $W(f_1, f_2)(x) = \left.\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}\right|_x = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix} = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

↓
wronskià

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0, \quad a_i : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ cont.}$$

↪ i'espai de solucions té dim 2 $\{f_1, f_2\}$

si $c_1 f_1 + c_2 f_2$ són funcions, l'edo que generen és:

$$0 = \begin{vmatrix} y & f_1 & f_2 \\ y' & f_1' & f_2' \\ y'' & f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} = y'' \, W(f_1, f_2) - y' \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} f_1' & f_2' \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix}$$

c) Es comprova:

$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & \ln x \\ 0 & 1/x \end{vmatrix} \neq 0$

$y_1' = 0$, $y_1'' = 0$ és sol.

$y_2' = \frac{1}{x}$, $y_2'' = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow \frac{-1}{x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$ ✓

d) No pot ser perquè $W(y_1, y_2) \neq 0 \Rightarrow$ l'edo que genera $c_1 y_1 + c_2 y_2$ és lineal i homogènia.

$c_1 = 0$, $c_2 = \pi \Rightarrow \begin{array}{l} y_2' = \frac{\pi}{x} \\ y_2'' = -\frac{\pi}{x^2} \end{array} \Rightarrow \frac{-\pi}{x^2} + \left(\frac{\pi}{x}\right)^2 \neq 0$

31) Considerem $a_0(t)x^{(n)} + \dots + a_n(t)x = 0$ $\quad a: I \to \mathbb{R}$ contínues, $\neq 0$

Si x_1 és sol., fent $x = x_1 w$ i passem a l'edo d'ordre $n-1$:

En efecte: $x^{(j)} = x_1^{(j)} w + \sum_{i=1}^{j} \beta_{ij} x^{(j-i)} w^{(i)}$

$$\underbrace{(a_0 x_1^{(n)} + \dots + a_n x_1)}_{=0} W + b_n(t) w^{(n)} + \dots + b_1(t) W' = 0$$

$u = w'$

$$\Rightarrow \underbrace{b_n(t) w^{(n)}}_{= a_n x_1} + \dots + b_1(t) w' = b_n(t) u^{(n-1)} + \dots + b_1(t) u = 0$$

Cas $n=2$: $\quad a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$ (*) $,\quad a_i = a_i(t)$

$$x_1 \text{ sol.} \Rightarrow x_2 = x_1(t) \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dt}}{x_1^2} dt$$

En efecte, $x = x_1 w$, $\quad x' = x_1' w + x_1 w'$

$$x'' = x_1'' w + x_1' w' + x_1' w' + x_1 w''$$
$$= x_1'' w + 2x_1' w' + x_1 w''$$

Si substituim:

(*) $$\underbrace{(a_0 x_1'' + a_1 x_1' + a_0 x_1)}_{=0} W + a_0 x_1 w'' + (2a_0 x_1' + a_1 x_1) w' = 0$$

És a dir: $$u' = \underbrace{-\left(\frac{2x_1'}{x_1} + \frac{a_1}{a_0}\right)}_{A(t)} u \quad , \text{ on } u = w'$$

$$\Rightarrow u(t) = c\, e^{\int A(t)dt}, \quad \text{on } \int A(t)dt = -\int\left(2\frac{x_1'}{x_1} + \frac{a_1}{a_0}\right)dt$$

$$= -2\int \frac{x_1'}{x_1} dt - \int \frac{a_1}{a_0} dt = -2\ln(x_1) - \int \frac{a_1}{a_0} dt$$

$$\Rightarrow u(t) = c \cdot e^{\ln(x_1^{-2}) - \int \frac{a_1}{a_0} dt} = c \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{w(t) = c \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dt} dt}$$

a) $4t^2x'' + x = 0$

$a_0 = 4t^2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ $\Longrightarrow$ $\frac{a_1}{a_0} = 0$

$x_1 = t^{1/2} \ln t$

$u = \frac{1}{x_1^2} = \frac{1}{t \ln^2 t} \Longrightarrow w = \int u(t)\, dt = \frac{-1}{\ln t}$

$\Longrightarrow x_2 = x_1 w = t^{1/2} \ln t \cdot \frac{-1}{\ln t} = -t^{1/2}$

Llavors, la sol. general. és:

$c_1 t^{1/2} \ln t + c_2 t^{1/2}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

32

a) $2y'' - 3y' + 4y = 0$

- Opció ① escrivim: $y'' = \frac{3}{2} y' - 2y$

$y_1 = y$
$y_2 = y'$ $\Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ 3/2\, y_2 - 2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Def: $a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

El seu polinomi característic: és

$p(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_0$ (el de la matriu)

Prop: Donada l'edo d'ordre n, amb pol. característic p, suposem α és arrel de multiplicitat almenys k de p.

Llavors:

$\xi_k(t) = e^{\alpha t}\left(1 + t + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)$, $\xi_0(t) = 0$

és solució:

Dem: L'edo s'escriu $p(\frac{d}{dt})y=0$

$\frac{d^i}{dt^i}\cdot\frac{d^j}{dt^j} = \frac{d^{i+j}}{dt^{i+j}}$ A més, $p(\lambda) = (\lambda-\alpha)^k q(\lambda)$
$= q(\lambda)(\lambda-\alpha)^k$

$\Longrightarrow p(\frac{d}{dt})y = q(\frac{d}{dt})(\frac{d}{dt}-\alpha)^k y = 0$

Observem: $\left(\frac{d}{dt}-\alpha\right)\xi_k = \xi_{k-1}$

i tenim que:

$p(\frac{d}{dt})\xi_k = q(\frac{d}{dt})(\frac{d}{dt}-\alpha)^k\xi_k = q(\frac{d}{dt})\xi_0 = 0$

Obs. que les arrels són $\frac{3}{4} \pm \frac{i\sqrt{23}}{4}$

b) $y''' - y'' - 4y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4 = 0 \longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i$
$\lambda = 2$

Sol. general $\Rightarrow$ $\boxed{y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + c_3 e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)}$

e) $x^{(10)} - 2x^{(9)} + 2x^{(8)} - 2x^{(7)} + 2x^{(5)} - 2x^{(4)} + 2x''' - x'' = 0$

Les arrels de $p(\lambda)$ són: $0, 0, 1, 1, 1, i, i, -i, -i, -1$

$\Rightarrow$ La sol. és:

$$y(t) = \underbrace{c_1 + c_2 t}_{0} + \underbrace{e^t(c_3 + c_4 t + c_5 t^2)}_{1} + \underbrace{\cos t\,(c_6 + c_7 t) + \sin t\,(c_8 + c_9 t)}_{\pm i} + \underbrace{c_{10} e^{-t}}_{-1}$$

(35) y_1, y_2 són sol. l.i. de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$p, q : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ cont

p i q no poden tenir un extrem al mateix punt

Suposem que tenen extrem a $x_0 \in (a,b) \Rightarrow y_1'(x_0) = y_2'(x_0) = 0$

Sabem que un p.v.i. associat i té sol <u>única</u>

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

- Si $y_1(x_0) = 0 \Longrightarrow y_1(x) = 0 \quad \forall x$

  En efecte, llavors y seria sol. de la edo satisfent

  $y_1(x_0) = 0$
  $y_1'(x_0) = 0$

  La funció $y(x) = 0 \ \forall x$ també és sol. del pvi $\Rightarrow y_1(x) = 0 \ \forall x$

  $\Longrightarrow y_1, y_2$ l.d.

- Suposem $y_1(x_0) \neq 0$ i $y_2(x_0) \neq 0$.
  Provem que $y_1(x) = \underbrace{\frac{y_1(x)}{y_2(x)} y_2(x)}_{\bar{y}(x)} \quad \forall x$

  Només cal veure que són sol. del mateix pvi.

  · y_1 satisfà $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_1(x_0) \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$

  · $\bar{y}$, com l'edo és lineal i homogènia i y_2 és sol també és sol. de l'edo

  $$\begin{cases} \bar{y}(x_0) = \frac{y_1(x_0)}{y_2(x_0)} y_2(x_0) = y_1(x_0) \\ \bar{y}'(x_0) = \frac{y_1(x_0)}{y_2(x_0)} y_2'(x_0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow y_1(x) = \bar{y}(x) \ \forall x.$$

Lineals no homogènies

36) $a_0(t)x^{(n)} + \dots + a_n(t)x = f(t)$, $a_i(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ cont.

$a_0(t) \neq 0 \quad \forall t$

- Escriviu en forma de sistema

$$X' = A(t)X + b(t)$$

- Donades $\phi_1, \dots, \phi_n$ sol. de l'homogènia, dem. que:

$$W(\phi_1 \dots \phi_n)(t) = W(\phi_1 \dots \phi_n)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds}$$

$$W(\phi_1 \dots \phi_n) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \dots & \phi_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Definim:

$x_1 = x$
$x_2 = x'$
$\vdots$
$x_n = x^{(n-1)}$

hem de satisfer:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -\frac{a_n}{a_0}x_1 - \dots - \frac{a_1}{a_0}x_n + \frac{f}{a_0} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & \dots & & -\frac{a_2}{a_0} & \frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}}_{A(t)} X + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f/a_0 \end{pmatrix}}_{b(t)}$$

$\Longrightarrow \phi_1, \dots, \phi_n$ solucions de l'edo homogènia $\Rightarrow$ $M(t) = \begin{pmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_n \\ \phi_1^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$

és sol. de $X' - A(t)X$

Llavors, $W(\phi_1, \dots, \phi_n) = \det M$. Tenim:

$$\frac{d}{dt}W(\phi_1 \dots \phi_n)(t) = \frac{d}{dt}\det M(t) = \operatorname{tr} A(t) \cdot \det M(t) = \frac{-a_1}{a_0} W(\phi_1 \dots \phi_n)(t)$$

$$\Longrightarrow W(\phi_1 \dots \phi_n)(t) = W(\phi_1 \dots \phi_n)(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds}$$

$\hookrightarrow$

Variació de les constants: $\phi_1 \cdots \phi_n$ sol. l.i. de l'edo homogènia.

Busquem sol de la forma $y(t) = c_1(t)\phi_1(t) + \cdots + c_n(t)\phi_n(t)$

Construim $M(t)$ i busquem $Y(t) = M(t)C(t)$, sol. del sistema.

Tenim que C ha de satisfer:

$$M(t)C'(t) = b(t) \longrightarrow \underline{C'(t) = M(t)^{-1}b(t)}$$

Aplicació: Resoleu $x'' + x = \tan t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$

Sol. eq. homogènia $x'' + x = 0$; $\phi_1 = \cos t$
$\phi_2 = \sin t$

$$\Longrightarrow M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad M(0) = Id \Rightarrow M(t)^{-1} = M(-t)$$

$x_2 = x_1'$

Variació de les constants: $Y(t) = e^{tA}c(t) \Longleftrightarrow c'(t) = e^{-tA}b(t)$

$$\Longrightarrow c'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \tan t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin^2 t}{\cos t} \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow c(t) = \begin{pmatrix} \sin t - \log\left(\frac{1+\sin t}{\cos t}\right) \\ -\cos t + 1 \end{pmatrix}, \quad c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Llavors, la sol. del pvi és la primera component de

$$e^{tA}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c(t)\right)$$

37 Mètode dels coefs. indeterminats.

Donats p, q polinomis, considerem $p(\frac{d}{dt})y = f$ (*), $f \neq 0$

satisfà $q(\frac{d}{dt})f = 0$

~~Si (*) té una sol. ϕ tq.~~

(*) té una sol. ϕ tq: $\begin{cases} q(\frac{d}{dt})p(\frac{d}{dt})\phi = 0 \\ p(\frac{d}{dt})\phi \neq 0 \end{cases}$

En efecte, si ϕ és sol. de (*):

$$q(\tfrac{d}{dt})p(\tfrac{d}{dt})\phi = q(\tfrac{d}{dt})f = 0$$

Aplicació: b) $\underbrace{y'' + 4y}_{\text{arrels } \pm 2i} = \underbrace{4\cos x + 3\sin x - 8}_{0, \pm i}$

$\exists$ sol. de la forma $\phi(t) = A + B\cos t + C\sin t$

substituïm ϕ a la edo : determinem A, B, C

c) $\underbrace{y'' + 4y}_{\pm 2i} = \cos^2 x = \underbrace{\frac{1}{2}(1 + \cos(2x))}_{0, \pm 2i}$

$\phi(t) = A + Bx\cos 2x + Cx\sin x$

Sistemes lineals periòdics

$x' = A(t)x \quad , \quad A(t+T) = A(t)$

. Matriu de monodromia : $M(t+T) = M(t)\, C_M$

En particular, si $M(0) = Id \implies C_M = M(T)$

- L'estabilitat està codificada als vaps de C_M

(49) $\ddot{x} = -f(t)x \quad , \quad$ on $f(t) = \begin{cases} (\omega+\varepsilon)^2 , & 0 \le t \le \pi \\ (\omega-\varepsilon)^2 , & \pi < t < 2\pi \end{cases}$

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

a) Deduïu la matriu de monodromia del sistema.

$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(t) & 0 \end{pmatrix} x \quad , \quad A_\pm = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega\pm\varepsilon)^2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \dot{x} = A_+ x & \text{si } 0 \le t \le \pi \leftarrow e^{tA_+} \to \text{m.f. t.q. } (t=0) = Id \\ \dot{x} = A_- x & \text{si } \pi < t < 2\pi \leftarrow e^{tA_-} \text{ és m.f.} \to e^{tA_-}C \text{ també } (\det C \neq 0.) \end{cases}$

Volem $\Phi(t) = \begin{cases} e^{tA_+} & 0 \le t \le \pi \\ ?? \end{cases}$

Imposem contínua en π : $e^{\pi A_-} C = e^{\pi A_+} \to C = e^{-\pi A_-} e^{\pi A_+}$

$$\implies \Phi(t) = \begin{cases} e^{tA_+} & 0 \le t \le \pi \\ e^{tA_-} e^{-\pi A_-} e^{\pi A_+} & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

$$\implies C_M = \Phi(2\pi) = e^{\pi A_-} \cdot e^{\pi A_+}$$

si $\omega_\pm = \omega \pm \varepsilon$: $\quad e^{tA_\pm} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_\pm t) & \frac{1}{\omega_\pm} \sin(\omega_\pm t) \\ -\omega_\pm \sin(\omega_\pm t) & \cos(\omega_\pm t) \end{pmatrix}$

$$\implies \boxed{C_M = e^{\pi A_-} \cdot e^{\pi A_+} = \dots}$$

b) $\omega \neq k/2$, $k \in \mathbb{Z}$, i ε prou petit, el sistema és estable

Com $\det C_M = \det\left(e^{\pi A_-} e^{\pi A_+}\right) = \underbrace{\det e^{\pi A_-}}_{1} \cdot \underbrace{\det e^{\pi A_-}}_{1} = 1$

El polinomi característic de C_M és:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{Tr} C_M \lambda + 1 \longrightarrow \lambda_\pm = \frac{\operatorname{Tr} C_M \pm \sqrt{\operatorname{Tr}^2 C_M - 4}}{2}$$

$$\Longrightarrow \lambda_\pm \text{ tenen mòdul } 1 \iff (\operatorname{Tr} C_M)^2 - 4 \leq 0 \iff \underline{\underline{\operatorname{Tr} C_M \leq 2}}$$

Sabem $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_\pm^2 & 0 \end{pmatrix}$. Llavors, de $\circledast$, C_M depèn analíticament de $\varepsilon \rightarrow C_M(\varepsilon)$

$$C_M(\varepsilon) = C_M(0) + O(\varepsilon)$$

Calculem $\operatorname{tr} C_M(0)$ si $\omega \neq k/2$, $k \in \mathbb{Z}$. De fet, com $\omega_+|_{\varepsilon=0} = \omega_-|_{\varepsilon=0} = \omega$

$A_0 = A_\pm|_{\varepsilon=0}$:

$$\operatorname{Tr} C_M(0) = \operatorname{Tr} e^{2\pi A_0} = 2\cos 2\pi\omega.$$

$$\omega \neq k/2 \Longrightarrow |\cos(2\pi\omega)| < 1 \Rightarrow |\operatorname{Tr} C_M(0)| < 2$$

$$\Longrightarrow |\operatorname{Tr} C_M(\varepsilon)| < 2 \quad \text{si } \varepsilon \text{ prou petit.}$$

c) $\omega = k/2$, $k \in \mathbb{Z}$ i ε prou petit, el sistema és inestable.

$$\operatorname{Tr} C_M(\varepsilon) = 2\cos(\pi\omega_-)\cos(\pi\omega_+) - \left(\frac{\omega_+}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_+}\right)\sin(\pi\omega_-)\sin(\pi\omega_+) =$$

$$= 2\cos(2\pi\omega) - 2\,\frac{\sin^2(\pi\omega)}{\omega^2}\varepsilon^2 + \frac{2}{3}\,\frac{\pi^2\omega^2 - \sin^2(\pi\omega)}{\omega^2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^6)$$

si $\omega = k/2$, $k = 2j$, $j \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{Tr} C_M(\varepsilon) = 2 + \frac{2}{3}\pi^2\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6) > 2 \quad \text{si } \varepsilon \neq 0 \text{ i petit.}$$

si $\omega = k/2$, $k = 2j+1$:

$$\operatorname{Tr} C_M(\varepsilon) = -2 - 2\,\frac{1}{(j+1/2)^2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) < -2 \quad \text{si } \varepsilon \neq 0 \text{ i petit}$$

d) Dibuixa les regions d'estabilitat

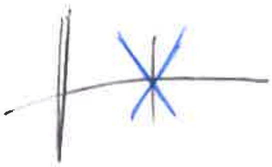
Escrivim: $\omega = k/2 + \tilde{\omega}$

$$2\cos(2\pi\omega) = 2\cos(2\pi + \tilde{\omega}) = 2\cos\left(\frac{2\pi k}{2}\right) - 2\left(\frac{2\pi k}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi k}{2}\tilde{\omega}\right)$$

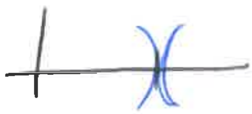
$$= \frac{1}{2}2\left(\frac{2\pi k}{2}\right)^2\cos\left(\frac{2\pi}{2}k\,\tilde{\omega}^2\right) + O(\tilde{\omega}^4)$$

$$\mathrm{Tr}\,C_M(\varepsilon,\tilde{\omega}) = -2 + c^2\omega^2 - d^2\varepsilon^2 + O(\omega^4,\varepsilon^4) < -2$$

$$|\tilde{\omega}| < \left|\frac{d}{c}\right|\varepsilon$$



$k = 2j+1$



$k = 2j$