1 Integrales Racionales

Si $P(x), Q(x)$ son dos polinomios, llamaremos a $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ una funcion racional.

Buscamos

$$\int f(x)dx$$

2 Integrales Utiles

Raiz Simple:

$$\int \frac{A}{ax-b}dx = \frac{A}{a} \cdot ln(|ax-b|) + C$$

Raiz Multiple

$$\int \frac{A}{(ax-b)^n}dx = A \cdot \frac{-1}{a(n-1)(ax-b)^{n-1}} + C$$

Raiz Imaginaria (Termino con X)

$$\int \frac{Ax}{a^2x^2+b^2}dx = \frac{A}{2a^2} \cdot ln(|a^2x^2+b^2|) + C$$

Raiz Imaginaria (Termino sin x)

$$\int \frac{A}{a^2x^2+b^2}dx = \frac{A}{ab} \cdot arctan(\frac{ax}{b}) + C$$

3 Resolucion

1. Primero nos aseguramos que gr(Q(x)) $>$ gr(P(x)), si no es asi podemos expresar $f(x)$ como $S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ donde $S(x)$ es el resultado de la division $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y R(x) el resto de la misma division. Como S(x) es un polinomio la integral es inmediata y $\frac{R(x)}{Q(x)}$ pasa a ser nuestra integral racional.

2. Para facilitar el calculo de la integral, dividiremos a f(x) en suma de fracciones. Sea

$$Q = (x-1)(x-2)^2(x^2+1)$$

   Q es un polinomio de quinto grado con una raiz simple, una raiz multiple (doble) y una raiz imaginaria. Entonces

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

   Esta igualdad se cumple para TODO valor de x, por lo tanto podemos sustituir tantos valores como incognitas y obtener las ecuaciones suficientes para resolver el problema. Para falicitar este calculo multiplicamos $Q(x)$ a ambos lados y obtenemos:

$$P(x) = \frac{A * Q(x)}{x-1} + \frac{B * Q(x)}{x-2} + \frac{C * Q(x)}{(x-2)^2} + \frac{(Dx+E) * Q(x)}{x^2+1}$$

   Como Q(x) es el minimo comun divisor, se nos cancelaran todos los denominadores. Como estamos trabajando con polinomios, si sustituimos x por raices de $Q(x)$ muchos terminos valdran 0. (en este caso probamos con 1 y 2. Necesitaremos 3 valores más ya que tenemos 5 incognitas)
   Es importante ver que no estamos resolviendo por x, sino por ABCDE. Si tenemos estas 5 incognitas, independientemente del valor de x la igualdad se cumple.

3. Una vez encontrado las incognitas nuestro problema pasa a ser:

$$\int f(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}dx =$$

$$= \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{B}{x-2}dx + \int \frac{C}{(x-2)^2}dx + \int \frac{Dx+E}{x^2+1}dx =$$

$$= \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{B}{x-2}dx + \int \frac{C}{(x-2)^2}dx + \int \frac{Dx}{x^2+1}dx + \int \frac{E}{x^2+1}dx =$$

$$= Aln(|x-1|) + Bln(|x-2|) + C \cdot \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + \frac{D}{2} * ln(|x^2+1|) + E \cdot arctan(x) + Constante$$

4 Anexo

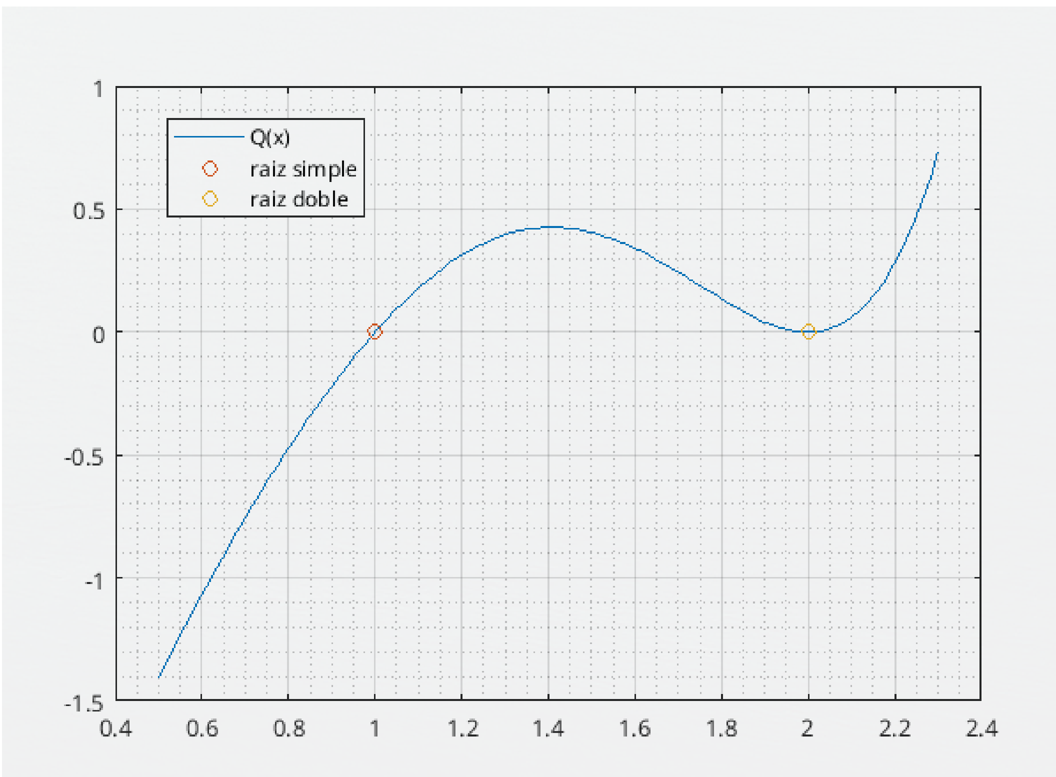

Figure 1: Grafica