Funcions de variable complexa FME
Curs 2016/17

Jordi Quer

15 de maig de 2017

Índex

1 Els nombres complexos

Els nombres reals es poden introduir axiomàticament ($\mathbb{R}$ és l'únic cos ordenat Arquimedià i complet, llevat d'un únic isomorfisme) o es poden construir a partir dels nombres racionals, bé per *talladures de Dedekind*, bé per compleció mètrica com les classes de successions de Cauchy per la relació d'equivalència que identifica dues successions si la seva diferència tendeix a zero.

El cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos també es podria introduir axiomàticament (per exemple, com un cos localment compacte Arquimedià i algebraicament tancat) però la manera més senzilla i pràctica és construir-los a partir dels nombres reals:

Construcció a partir de $\mathbb{R}$. Els *nombres complexos* es defineixen com el conjunt dels parells ordenats $z = (x, y)$ de nombres reals:

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

amb dues operacions, *suma* i *producte*, definides de la manera següent: donats $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$, es defineixen

- $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
- $z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Amb aquestes operacions $\mathbb{C}$ té estructura de cos: se satisfan les propietats següents:

- la suma és associativa, commutativa, té element neutre, que és el nombre complex $(0, 0)$ i cada $z = (x, y)$ té invers $-z = (-x, -y)$;
- el producte és associatiu, commutatiu, té element neutre, que és el nombre complex $(1, 0)$ i cada $z = (x, y) \neq (0, 0)$ té invers $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$;
- la suma és distributiva respecte del producte: $z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$.

La notació habitual per als nombres complexos, més còmoda i pràctica que la de parells ordenats, és la següent: es pensen els nombres reals $\mathbb{R}$ a dins dels nombres complexos $\mathbb{C}$ identificant cada nombre real x amb el complex $(x, 0)$; aquesta identificació respecta les operacions entre nombres reals i permet veure $\mathbb{R}$ com a subcos de $\mathbb{C}$; es denota amb la lletra i el complex $(0, 1)$; llavors els nombres complexos s'escriuen de la forma:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi.$$

El complex $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ es coneix com a *unitat imaginària* i té quadrat $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

És a dir, la unitat imaginària és *una arrel quadrada de* -1 a $\mathbb{C}$.

Sempre que es té una inclusió de cossos $K \subseteq L$ el cos gran L té una estructura natural d'espai vectorial sobre el cos petit K. En el cas $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ el cos $\mathbb{C}$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 2 i admet com a base els dos elements 1 i i.

Les components x i y de $z = (x, y) = x + iy$ s'anomenen *part real* i *part imaginària*, respectivament, del nombre complex z, i es denoten $x = \mathrm{Re}(z)$ i $y = \mathrm{Im}(z)$. Són les coordenades de z en la base $1, i$ de $\mathbb{C}$ com a $\mathbb{R}$-espai vectorial.

Amb aquesta notació les operacions amb nombres complexos es fan seguint les regles habituals de sumar i multiplicar, i tota l'estona s'opera només amb nombres reals i amb la unitat imaginària i, de la qual només cal saber que té quadrat -1: donats dos nombres complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$,

- la seva suma i resta són:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i,$$

- el seu producte és:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i, \end{aligned}$$

- i, si $z_2 \neq 0$, el seu quocient és:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (y_1 x_2 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + \left(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) i. \end{aligned}$$

Grup multiplicatiu. En àlgebra s'anomena *grup multiplicatiu* d'un anell A al conjunt dels elements que tenen invers pel producte, i es denota A^*; amb l'operació producte aquest conjunt és un grup, i d'això li ve el nom. En el cas d'un cos K el grup multiplicatiu K^* està format per tots els elements diferents de zero.

Es denotarà $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ el grup multiplicatiu del cos dels nombres complexos.

Notació per a la unitat imaginària. En algunes branques de les ciències aplicades o l'enginyeria, com per exemple l'electromagnetisme o l'enginyeria elèctrica, s'acostuma a fer servir la lletra j per denotar la unitat imaginària en comptes de la i, ja que aquest símbol es reserva per a la intensitat del corrent elèctric.

El pla complex. Tal com s'han definit, els nombres complexos s'identifiquen amb els punts del pla $\mathbb{R}^2$. Els nombres reals $x = x + 0i$ queden identificats amb l'eix d'abscises i els complexos $0 + yi$ amb part real zero, que es coneixen com a *imaginaris purs*, queden identificats amb l'eix d'ordenades.

Conjugació. El nombre complex $x - yi$ s'anomena *conjugat* del complex $z = x + yi$ i es denota $\overline{z}$. L'aplicació $z \mapsto \overline{z}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'anomena *conjugació complexa* i és un automorfisme de cossos: és bijectiva, envia sumes a sumes, productes a productes, i la unitat a la unitat. Per tant, conjugar una expressió on apareixen sumes, restes, productes i quocients de nombres complexos equival a conjugar cadascun d'aquests nombres. Per exemple, si $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ és un polinomi a coeficients complexos, i es defineix el polinomi conjugat $\overline{P}$ com el que té els coeficients conjugats $\overline{P}(X) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 X + \cdots + \overline{a}_n X^n$ aleshores per a tot nombre complex z es té

$$\overline{P(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 \overline{z} + \cdots + \overline{a}_n \overline{z}^n = \overline{P}(\overline{z})$$

Geomètricament la conjugació complexa és la simetria respecte la recta real. En particular $z \mapsto \overline{z}$ és $\mathbb{R}$-lineal i és una isometria inversa (canvia la orientació).

Les parts real i imaginària d'un complex s'escriuen de la forma

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

i això permet escriure expressions en x i y en funció de z i $\overline{z}$.

Els nombres reals es caracteritzen pel fet que la conjugació complexa no els modifica: donat $z \in \mathbb{C}$ es té: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$. Els nombres reals són els punts fixos de la conjugació complexa.

Un fet important ben conegut és que les arrels complexes dels polinomis a coeficients reals van per parelles. Sigui $f(X) \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$; si $z \in \mathbb{C}$ és una arrel de f aleshores el conjugat $\overline{z} \in \mathbb{C}$ també és una arrel de f. En el cas que $z \notin \mathbb{R}$ es dedueix que $f(X)$ és divisible, com a polinomi de l'anell $\mathbb{R}[X]$, pel polinomi de segon grau:

$$(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2 \in \mathbb{R}[X].$$

1.1 Mòdul i argument

Definició 1.1 (Valor absolut) *El* valor absolut *(o* mòdul*, o* norma*) d'un nombre complex $z = x + iy$ és la seva distància Euclidiana a l'origen en el pla complex. Es denota $|z|$ i val:*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}.$$

En particular, per a un nombre real $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, el valor absolut complex $|x|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2}$ coincideix amb el valor absolut real: $|x|_{\mathbb{R}} = x$ o $-x$ segons que $x \geqslant 0$ o bé $x < 0$. Si el nombre complex $z = x + iy$ s'identifica amb el vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ el valor absolut complex és la norma Euclidiana d'aquest vector: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$. Una propietat òbvia però que resultarà de molta utilitat és la relació següent entre el valor absolut d'un nombre complex i els de les seves parts real i imaginària:

$$|x|, |y| \leqslant |z| \leqslant |x| + |y| \qquad \text{si} \quad z = x + iy.$$

La circumferència unitat. Es denota $\mathbb{S}^1$ la circumferència unitat: el conjunt dels nombres complexos de mòdul 1:

$$\mathbb{S}^1 = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = 1\}.$$

La multiplicativitat del valor absolut assegura que aquest conjunt és tancat per la multiplicació de nombres complexos: és un subgrup del grup multiplicatiu $\mathbb{C}^*$.

Els elements de $\mathbb{S}^1$ estan en bijecció amb els *angles*: cada punt $\omega \in \mathbb{S}^1$ correspon a l'angle amb vèrtex en el punt 0 determinat per la semirecta que passa per 1 (la semirecta real positiva) i la que passa per ω, agafades en aquest ordre. El punt ω és de la forma $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ amb α el nombre real que dóna la longitud de l'arc de la circumferència unitat limitat per les dues semirectes, o qualsevol altre nombre que difereixi d'aquest en un múltiple enter de 2π.

Els complexos de $\mathbb{S}^1$ es caracteritzen també per la propietat que l'invers coincideix amb el conjugat:

$$\omega \in \mathbb{S}^1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\omega} = \omega^{-1}.$$

Definició 1.2 (Argument) *L'*argument *d'un nombre complex no nul $z = x + yi \neq 0$ és un nombre real α tal que*

$$(x, y) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) \qquad \textit{on} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

determinat només llevat de sumar-li múltiples enters de 2π. Es denota $\arg(z)$.

L'argument és doncs l'angle amb vèrtex al punt 0 determinat per la semirecta real positiva i la semirecta que passa per z; un dels seus valors, el positiu mínim és la longitud de l'arc de circumferència unitat limitat per aquestes dues semirectes. En general s'entén que $\arg(z)$ és un conjunt de la forma $\{\alpha + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ per a algun nombre real α.

Els angles es mesuren habitualment en radians: la longitud de l'arc de la circumferència de radi 1 centrada en el vèrtex de l'angle que determinen les dues semirectes, amb el conveni que els angles positius i negatius corresponen a girar en sentit anti-horari i horari, respectivament. De vegades els angles es mesuren en graus, amb el conveni que 2π radians equivalen a 360 graus.

En treballar amb angles sorgeix de manera natural la necessitat de sumar-los, restar-los o multiplicar-los per un nombre enter. Per això no és convenient fixar un valor numèric concret a l'argument, ja que, es faci com es faci, mai es comportarà bé respecte les operacions. Així, l'argument és una *funció multivaluada*, en el sentit que $\arg(z)$ no és un nombre sinó un conjunt de nombres reals la forma $\{\alpha + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Una *determinació de l'argument* a un subconjunt $S \subseteq \mathbb{C}^*$ és una aplicació $\operatorname{Arg}\colon S \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Arg}(z) \in \arg(z)$ per a tot $z \in S$: consisteix a triar, per a cada nombre complex

$z \in S$, un dels nombres reals del conjunt $\arg(z) = \{\alpha + 2\pi il : k \in \mathbb{Z}\}$ que representen l'angle corresponent.

S'anomena *valor principal* de l'argument la determinació $\operatorname{Arg}\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ que pren valors a l'interval $(-\pi, \pi]$. Noti's que aquesta determinació no és contínua a la semirecta real negativa. Hi ha altres determinacions de l'argument a tot $\mathbb{C}^*$; per exemple, es pot considerar la determinació que pren valors a l'interval $[0, 2\pi)$, que no és contínua a la semirecta real positiva. No hi ha cap determinació que sigui contínua a tot $\mathbb{C}^*$ però sí que n'hi ha a molts subconjunts propis: per exemple als conjunts obtinguts eliminant la semirecta formada pels complexos d'argument fixat.

L'argument d'un nombre complex es pot calcular a partir de les inverses de les funcions trigonomètriques però s'ha d'anar amb compte perquè els valors d'aquestes funcions no determinen unívocament l'angle: en general hi ha dos angles diferents amb el mateix cosinus, o sinus, o la mateixa tangent.

Usant la inversa de la funció tangent $\operatorname{Arctan}\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, la inversa del sinus $\operatorname{Arcsin}\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ o la inversa del cosinus $\operatorname{Arccos}\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$, que donen el valor de l'angle dins dels intervals especificats, el valor principal de l'argument d'un complex no nul $z = x + iy$ ve donat per les fórmules següents:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Arg}(z) &= \begin{cases} \operatorname{Arctan}(\frac{y}{x}), & \text{si} \quad x > 0, \\ \operatorname{Arctan}(\frac{y}{x}) + \pi, & \text{si} \quad x < 0, y \geqslant 0, \\ \operatorname{Arctan}(\frac{y}{x}) - \pi, & \text{si} \quad x < 0, y < 0, \\ \pi/2, & \text{si} \quad x = 0, y > 0, \\ -\pi/2, & \text{si} \quad x = 0, y < 0; \end{cases} \\
\operatorname{Arg}(z) &= \begin{cases} \operatorname{Arcsin} \frac{y}{|z|}, & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ \pi - \operatorname{Arcsin} \frac{y}{|z|}, & \text{si} \quad x < 0,\ y \geqslant 0, \\ -\pi - \operatorname{Arcsin} \frac{y}{|z|}, & \text{si} \quad x < 0,\ y < 0; \end{cases} \\
\operatorname{Arg}(z) &= \begin{cases} \operatorname{Arccos} \frac{x}{|z|}, & \text{si} \quad y \geqslant 0, \\ -\operatorname{Arccos} \frac{x}{|z|}, & \text{si} \quad y < 0. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Coordenades cartesianes i polars. Un nombre complex $z = x + yi$ es diu en *forma cartesiana*, i les seves parts real i imaginària x i y són les seves *coordenades cartesianes*.

El mòdul $r = |z|$ i l'argument $\alpha = \arg(z)$ s'anomenen *coordenades polars* de z. En algunes branques de la ciència o l'enginyeria que usen nombres complexos es fa servir la notació $z = r\angle\alpha$ o també $z = r_\alpha$ per donar el nombre complex z que té aquestes coordenades polars. Donar un nombre complex a partir de les seves coordenades polars es diu *forma polar* del nombre complex z.

En parlar del mòdul i l'argument ja s'ha vist com calcular les coordenades polars en funció de les coordenades cartesianes. Les coordenades cartesianes en funció de les polars s'obtenen amb trigonometria elemental com:

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\sin\alpha, \qquad z = x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Aquesta segona expressió dóna el nombre complex z com el producte $z = r\omega$ amb

$$r = |z| \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}, \qquad \omega = \cos\alpha + i\sin\alpha \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C},$$

d'un real positiu r per un complex ω de mòdul 1; aquesta expressió és única.

Proposició 1.3 *En multiplicar dos nombres complexos els seus mòduls es multipliquen i els seus arguments se sumen:*

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad i \quad \arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w).$$

PROVA: La multiplicativitat del mòdul s'obté immediatament usant $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$:

$$|zw| = \sqrt{zw\overline{zw}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}} = |z||w|.$$

Per comprovar l'additivitat de l'argument s'escriuen els dos nombres en funció de les seves coordenades polars. Siguin $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ i $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$. Aleshores, en multiplicar i aplicar les fórmules d'addició trigonomètriques es té:

$$\begin{aligned} zw &= rs\,\big(\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta + i(\cos\alpha\,\sin\beta + \sin\alpha\,\cos\beta)\big) \\ &= rs\,\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big). \end{aligned}$$

que és el complex de mòdul rs i argument $\alpha + \beta$. □

A partir d'aquest resultat es comproven fàcilment les propietats de l'argument següents:

$$\arg(z^{-1}) = -\arg(z), \qquad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w), \qquad \arg(z^n) = n\arg z,$$

on $n \in \mathbb{Z}$ és un enter qualsevol. La primera s'obté a partir de la igualtat $\arg(z)+\arg(z^{-1}) = \arg(z \cdot z^{-1}) = \arg(1) = 0$ i les altres dues són conseqüència immediata de les propietats ja demostrades prèviament.

Proposició 1.4 *Sigui $n \geqslant 1$ un enter positiu. Cada nombre complex no nul té n arrels n-èsimes diferents. Si $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,*

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r}\,\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right) : k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}.$$

PROVA: Un complex $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ és una arrel n-èsima de z si $w^n = z$. Això vol dir que el mòdul és $s^n = r \Rightarrow s = \sqrt[n]{r}$ i l'argument és $n\beta = \alpha$. La solució d'aquesta equació no és simplement $\beta = \frac{\alpha}{n}$ ja que els angles no són nombres reals sinó nombres reals llevat de múltiples de 2π, i per tant s'han de buscar tots els nombres reals β llevat de múltiples de 2π tals que $n\beta = \alpha + 2\pi k$ per a algun nombre enter k. Les solucions són tots els reals de la forma $\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ i d'aquests n'hi ha exactament n de diferents llevat de múltiples de 2π, que són:

$$\frac{\alpha}{n} + 0, \quad \frac{\alpha}{n} + 2\pi\frac{1}{n}, \quad \frac{\alpha}{n} + 2\pi\frac{2}{n}, \quad \ldots \quad , \quad \frac{\alpha}{n} + 2\pi\frac{n-1}{n}.$$

Geomètricament les arrels n-èsimes d'un complex z són n punts situats a la circumferència de radi $\sqrt[n]{r}$ i que formen els vèrtexs d'un polígon regular de n costats, de manera que un d'aquests vèrtexs està al punt d'argument α/n. $\square$

La funció arrel n-èsima és una funció multivaluada al conjunt $\mathbb{C}^*$ dels complexos no nuls. Tota determinació de l'argument $z \mapsto \operatorname{Arg}(z)$ indueix una determinació de l'arrel n-èsima que envia cada complex d'argument $\operatorname{Arg}(z)$ l'arrel n-èsima seva que té argument $\frac{1}{n}\operatorname{Arg}(z)$.

Forma exponencial. Els complexos de mòdul 1 són els de la forma $\omega = \cos\alpha + i\sin\alpha \in \mathbb{S}^1$ per a algun $\alpha \in \mathbb{R}$. La *notació exponencial* per a aquests complexos consisteix a escriure'ls de la forma $\omega = e^{i\alpha}$, expressió que es coneix com a fórmula d'Euler. Així, tot nombre complex z s'escriu en *forma exponencial* com

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha}.$$

En aquesta notació les propietats de la multiplicació de nombres complexos es corresponen amb les propietats formals habituals de l'exponenciació:

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}, \qquad \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}, \qquad (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}.$$

En particular aquesta darrera dóna lloc a la *fórmula de De Moivre*:

$$(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$$

que, desenvolupant pel binomi de Newton i igualant les parts real i imaginària, permet obtenir expressions per al cosinus i el sinus de $n\alpha$ en funció del cosinus i el sinus de α.

La forma exponencial no és només una notació. Més endavant, quan es defineixi la funció exponencial complexa, es veurà que la fórmula d'Euler és el resultat d'avaluar aquesta funció en un complex imaginari pur $i\alpha$.

1.2 Mètrica i topologia al pla

El valor absolut complex, que s'ha definit posant $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$, té les propietats següents:

Proposició 1.5 (Propietats del valor absolut)

1. *$|z| \geqslant 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (positiu);*
2. *$|zw| = |z||w|$ (multiplicativitat);*
3. *$|z+w| \leqslant |z| + |w|$ (desigualtat triangular).*

Prova: El primer punt és obvi. El segon s'ha demostrat a la proposició 1.3. El tercer és la formulació en termes de valor absolut de la desigualtat triangular per a la norma Euclidiana. Recordi's que la demostració de la desigualtat triangular per a la norma Euclidiana en un espai $\mathbb{R}^n$ es basa en la *desigualtat de Cauchy-Schwarz*: $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Es dóna a continuació una demostració alternativa directa per a aquest cas dels nombres complexos. A partir de l'expressió del valor absolut usant el producte amb el conjugat es té:

$$|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z} = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}).$$

Observant que per a tot complex z es té $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$ es dedueix que

$$|z+w|^2 \leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\overline{w})| \leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = \big(|z| + |w|\big)^2$$

i traient arrels quadrades es té la desigualtat triangular. □

Definició 1.6 (Mètrica) *Als nombres complexos es defineix una* distància *a partir del valor absolut posant:*

$$d(z, w) = |z - w|,$$

la qual dóna a $\mathbb{C}$ *estructura d'*espai mètric.

Prova: Les propietats del valor absolut permeten veure immediatament que aquesta definició satisfà efectivament les propietats d'una distància en un espai mètric:

1. $d(z, w) \geqslant 0$; $d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w$;
2. $d(w, z) = d(z, w)$;
3. $d(z, \zeta) = d(z, w) + d(w, \zeta)$ (desigualtat triangular).

Per a la segona condició només cal la multiplicativitat del mòdul i que $|-1| = 1$. □

De fet, la distància definida a 1.6 no és res més que la distancia Euclidiana ordinaria quan s'identifica $\mathbb{C}$ amb l'espai vectorial $\mathbb{R}^2$. Per tant totes les seves propietats són les ja vistes als cursos de geometria Euclidiana i de càlcul en varies variables per a la mètrica Euclidiana.

En relació a aquesta mètrica la notació següent es farà servir sovint:

- $\mathcal{D}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ el *disc obert* o *bola oberta* de centre el punt $z_0 \in \mathbb{C}$ i radi un real $r > 0$;
- $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$ el *disc tancat*, adherència de l'anterior;
- $C(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ la *circumferència* que és la frontera dels anteriors;
- $\mathcal{D}'(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ el *disc perforat*, sense el centre;
- $\mathcal{D}(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ la *corona circular* de radis $r < R$.

Definició 1.7 (Topologia) *Es considera a $\mathbb{C}$ la topologia corresponent a la seva estructura d'espai mètric; és a dir, els oberts són els subconjunts $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ que contenen una bola oberta de centre cadascun dels seus punts: per a tot $z_0 \in \mathcal{U}$ existeix un $r > 0$ tal que $\mathcal{D}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subseteq \mathcal{U}$.*

Per tant les propietats topològiques de $\mathbb{C}$ són les que ja s'han estudiat en els cursos de càlcul en varies variables per als espais Euclidians $\mathbb{R}^n$. Topològicament (i com a espai mètric) $\mathbb{C}$ s'identifica amb $\mathbb{R}^2$.

Topologia al pla. A continuació es recorden alguns conceptes importants de la topologia del pla $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ja vistos en assignatures prèvies de càlcul:

- La reunió arbitrària i la intersecció finita d'oberts és un obert.
- Els tancats són els complementaris dels oberts. La intersecció arbitrària i la reunió finita de tancats és un tancat.
- Un subconjunt $S \subseteq \mathbb{C}$ és *connex* si no existeixen oberts $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ tals que $S \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$, $\mathcal{U} \cap S \neq \varnothing$ i $\mathcal{V} \cap S \neq \varnothing$.
- Un subconjunt $S \subseteq \mathbb{C}$ és *arc-connex* si per a cada parell de punts $z_0, z_1 \in S$ existeix una aplicació contínua $\gamma \colon [0,1] \to S$ tal que $\gamma(0) = z_0$ i $\gamma(1) = z_1$.
- Les propietats de ser connex i arc-connex són equivalents quan es refereixen a *subconjunts oberts* del pla.
- Les *components connexes* d'un conjunt són els subconjunts connexos maximals. Tot conjunt és la reunió disjunta de les seves components connexes. Un conjunt no buit és connex quan té només una component connexa.
- Un subconjunt és *simplement connex* si és arc-connex i "no té forats", en el sentit que dos camins tancats dins del conjunt amb els mateixos extrems es poden deformar contínuament l'un en l'altre mantenint els extrems. La definició precisa es dóna a topologia usant el concepte d'homotopia de camins: un conjunt és simplement connex si, i només si, dos camins qualsevol parell de camins amb els mateixos extrems són homòtops dins del conjunt.
- Un subconjunt és *convex* si conté el segment que uneix qualsevol parell de punts, i és *estrellat* si hi ha un punt del conjunt tal que conté el segment que uneix aquest punt amb qualsevol altre.
- Un subconjunt K és *compacte* si tot recobriment obert té un subrecobriment finit: si $K \subseteq \cup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ amb $\mathcal{U}_i$ subconjunts oberts de $\mathbb{C}$ existeix un nombre finit d'índexs tal que $K \subseteq \mathcal{U}_{i_1} \cup \mathcal{U}_{i_2} \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{i_n}$.
- El teorema de Heine-Borel diu que al pla un conjunt és compacte si, i només si, és tancat i fitat.
- El teorema de Bolzano-Weierstrass assegura que al pla un conjunt és compacte si, i només si, tota successió de punts del conjunt té alguna parcial convergent cap a un punt del mateix conjunt.

1.3 Successions i sèries

Successions de nombres complexos. Com en qualsevol espai mètric, es poden considerar successions $(z_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres complexos $z_n \in \mathbb{C}$, tal i com ja s'ha fet en els cursos de càlcul en una i varies variables amb successions de nombres reals i d'elements de $\mathbb{R}^n$.

De fet, pràcticament tots els conceptes i propietats de les successions de nombres complexos corresponen a considerar aquestes successions com a successions d'elements de $\mathbb{R}^2$. L'única novetat és que, com que a $\mathbb{C}$ hi ha definit un producte, es poden multiplicar i dividir successions terme a terme, i el comportament d'aquestes successions és el mateix que el de les successions de nombres reals.

A continuació es recorden alguns dels conceptes i resultats principals, adaptats al cas de les successions de nombres complexos.

Definició 1.8 *Aquests conceptes estan definits per a successions de punts d'un espai mètric qualsevol:*

1. *$z \in \mathbb{C}$ és el* límit *de la successió (z_n) si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N \Rightarrow |z_n - z| < \epsilon$, i en aquest cas es denota $z = \lim_{n\to\infty} z_n$;*
2. *una successió que tingui límit es diu* convergent*;*
3. *la successió (z_n) és* fitada *si existeix un $M \in \mathbb{R}$ tal que $|z_n| \leqslant M$ per a tot n;*
4. *la successió (z_n) és* de Cauchy *si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geqslant N \Rightarrow |z_n - z_m| < \epsilon$.*

Proposició 1.9 *Les propietats següents valen en un espai mètric qualsevol:*

1. *tota successió convergent és fitada;*
2. *tota successió convergent és de Cauchy;*
3. *una successió és convergent (resp. de Cauchy) si, i només si, ho són totes les seves parcials (recordi's que una* parcial *d'una successió $(z_n)_{n\geqslant 0}$ és una successió de la forma $\left(z_{\nu(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ on $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ és una aplicació estrictament creixent).*

Definició 1.10 *Operacions amb successions: la suma, resta, producte i quocient de les successions (z_n) i (w_n) són les successions $(z_n + w_n)$, $(z_n - w_n)$, $(z_n w_n)$ i (z_n/w_n), on per al quocient es requereix que tots els termes de la segona siguin diferents de zero.*

Proposició 1.11 *Si $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ i $\lim_{n\to\infty} w_n = w$,*

1. *$(z_n + w_n)$ és convergent i té límit $z + w$;*
2. *$(z_n - w_n)$ és convergent i té límit $z - w$;*
3. *$(z_n w_n)$ és convergent i té límit zw;*
4. *si $w \neq 0$ la successió (z_n/w_n) està definida llevat potser d'un nombre finit de termes en què $w_n = 0$, és convergent i té límit z/w.*

Definició 1.12 *La* part real *i la* parti imaginària *d'una successió de nombres complexos* (z_n) *són les successions* (x_n) *i* (y_n) *de nombres reals determinats per* $z_n = x_n + iy_n$.

Proposició 1.13 *Sigui* (z_n) *una successió de nombres complexos i siguin* (x_n) *i* (y_n) *les seves parts real i imaginària.*

1. (z_n) *és convergent si, i només si, ho són* (x_n) *i* (y_n), *i, en aquest cas,*
$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n;$$
2. (z_n) *és de Cauchy si, i només si, ho són ho són* (x_n) *i* (y_n).

Prova: Tots dos apartats es demostren igual. Per exemple, el primer. Suposi's que $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ i sigui $z = x + iy$. Es vol veure que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ i el mateix per la part imaginària. Donat un $\epsilon > 0$ existeix un N tal que $n \geqslant N \Rightarrow |z_n - z| < \epsilon$. Aleshores $|x_n - x| < |z_n - z| < \epsilon$ per a $n \geqslant N$ i això demostra el límit.

Recíprocament, suposi's que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ i $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Sigui $z = x + iy$. Es vol veure que $z_n \to z$. Donat un $\epsilon > 0$ existeixen un N_1 tal que $n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ i un N_2 tal que $n \geqslant N_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$. Aleshores $|z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ per a $n \geqslant N := \max\{N_1, N_2\}$. □

Definició 1.14 *Un espai mètric és* complet *si tota successió de Cauchy és convergent.*

Teorema 1.15 $\mathbb{C}$ *és complet: tota successió de Cauchy de nombres complexos és convergent.*

Prova: Es dedueix de la completesa de $\mathbb{R}$ i els dos apartats de la proposició 1.13. □

Sèries de nombres complexos. Com que a $\mathbb{C}$ hi ha una operació suma es poden considerar sèries: sumes infinites de nombres complexos, de la mateixa manera que s'ha fet en els cursos de càlcul d'una i varies variables, on s'han estudiat sèries de nombres reals o d'elements de $\mathbb{R}^n$. Gairebé totes les propietats de les sèries de nombres complexos corresponen a considerar els nombres complexos com a elements del pla Euclidià $\mathbb{R}^2$, també en tot allò que requereix el concepte de convergència absoluta, ja que el valor absolut complex és el mateix que la norma Euclidiana al pla.

Tal com i s'ha fet per a les successions, a continuació es recorden alguns dels conceptes i resultats principals sobre sèries vistos en altres assignatures, adaptats al cas de les sèries de nombres complexos.

Definició 1.16 *Conceptes bàsics de sèries de nombres complexos:*

1. *una sèrie de nombres complexos és una expressió de la forma* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *amb* $z_n \in \mathbb{C}$;
2. *la seva* successió de sumes parcials *és la successió* $(s_n)_{n\geqslant 0}$ *amb* $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$;

3. $\sum z_n$ *es diu* convergent *o* sumable *si la successió* (s_n) *és convergent; en aquest cas el límit* $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ *es diu* suma *de la sèrie i s'escriu* $\sum z_n = s$*;*
4. *una* reordenació *d'una sèrie* $\sum z_n$ *és una sèrie de la forma* $\sum z_{\sigma(n)}$*, on* $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *és una aplicació bijectiva.*

A partir de la definició, i com que $s_n - s_{n-1} = z_n$, és immediat que:

Proposició 1.17 *Si la sèrie* $\sum z_n$ *és convergent aleshores* $lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Definició 1.18 *La* part real *i la* part imaginària *d'una sèrie de nombres complexos* $\sum z_n$ *són les sèries* $\sum x_n$ *i* $\sum y_n$ *de nombres reals determinats per* $z_n = x_n + iy_n$.

Proposició 1.19 *Una sèrie* $\sum z_n$ *de nombres complexos és sumable si, i només si, ho són les seves parts real i imaginària, i, en aquest cas,* $\sum z_n = \sum x_n + i \sum y_n$.

Proposició 1.20 (Suma i producte per escalars) *Si* $\sum z_n = z$ *i* $\sum w_n = w$ *aleshores* $\sum(z_n + w_n)$ *és convergent amb suma* $z + w$ *i, per a tot complex* λ, $\sum(\lambda z_n)$ *és convergent amb suma* λz.

Proposició 1.21 (Convergència absoluta) *Una sèrie* $\sum z_n$ *es diu* absolutament convergent *si la sèrie (de nombres reals)* $\sum |z_n|$ *és convergent. Es compleixen les propietats:*

1. *tota sèrie absolutament convergent és convergent, però el recíproc no sempre és cert;*
2. *si una sèrie és absolutament convergent totes les seves reordenacions són convergents i tenen la mateixa suma.*

Producte de sèries. El producte de nombres complexos permet definir una operació de multiplicació de sèries de nombres complexos de la manera següent:

Definició 1.22 (Producte de Cauchy) *El* producte *de les dues series de nombres complexos* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *i* $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ *és la sèrie* $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ *amb termes* $p_n = \sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}$.

Aquesta operació, que es pot fer també amb sèries de nombres reals, no forma part de la teoria estàndard de sèries a l'espai Euclidià $\mathbb{R}^n$, ja que en aquest espai no hi ha definit un producte, i juga un paper molt rellevant en variable complexa a l'hora de multiplicar sèries de potències. La propietat més important del producte és que es comporta bé respecte la convergència absoluta:

Proposició 1.23 *Si les dues sèries* $\sum z_n$ *i* $\sum w_n$ *són absolutament convergents la sèrie producte* $\sum p_n$ *també és absolutament convergent i les sumes compleixen:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n\right).$$

Prova: Una sèrie és absolutament convergent si, i només si, les sumes parcials dels seus valors absoluts estan fitades. Siguin M_z i M_w fites per a les sumes parcials de les sèries $\sum |z_n|$ i $\sum |w_n|$. Aleshores, com que $p_n = \sum_{r+s=n} z_r w_s$, es té

$$\sum_{k=0}^{n} |p_n| \leqslant \sum_{r+s\leqslant n} |z_r||w_s| \leqslant \left(\sum_{r=0}^{n} |z_r|\right)\left(\sum_{s=0}^{n} |w_s|\right) \leqslant M_z M_w$$

i per tant les sumes parcials de $\sum |p_n|$ estan fitades pel producte $M_z M_w$ i es dedueix que la sèrie producte també és absolutament convergent.

Siguin ara s_n, t_n i u_n les sumes parcials de les sèries $\sum z_n$, $\sum w_n$ i $\sum p_n$. Com que $s_n t_n = \sum_{r,s\leqslant n} z_r w_s$ i $u_n = \sum_{r+s\leqslant n} z_r w_s$ es té

$$|s_n t_n - u_n| = \left| \sum_{\substack{r,s\leqslant n\\ r+s>n}} z_r w_s \right| \leqslant \sum_{\substack{r,s\leqslant n\\ r+s>n}} |z_r w_s| \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} q_k.$$

on $q_k = \sum_{r+s=k} |z_r||w_s|$ és el terme k-èsim del producte de la sèrie producte de les sèries de valors absoluts $\sum |z_n|$ i $\sum |w_n|$. Com que aquestes dues sèries són (absolutament) convergents la sèrie producte $\sum q_n$ també ho és i per tant satisfà la condició de Cauchy, de manera que la suma de la dreta a

$$|s_n t_n - u_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} q_n$$

es pot fer tan petita com es vulgui agafant n prou gran. Es dedueix que les successions $(s_n t_n)$ i (u_n) tenen el mateix límit i, per tant, que

$$\left(\sum z_n\right)\left(\sum w_n\right) = \lim(s_n)\lim(t_n) = \lim(s_n t_n) = \lim(u_n) = \sum p_n$$

tal com es volia. □

Proposició 1.24 *Criteris de convergència absoluta. Siguin $\sum z_n$ i $\sum w_n$ sèries de nombres complexos.*

1. Criteri de fitació*: $\sum z_n$ és absolutament convergent si, i només si, les sumes parcials de valors absoluts $\sum_{k=0}^{n} |z_k|$ estan fitades.*
2. Criteri de comparació*: si $|z_n| \leqslant |w_n|$ per a n prou gran, si $\sum w_n$ és absolutament convergent aleshores $\sum z_n$ també ho és i si $\sum z_n$ és absolutament divergent aleshores $\sum w_n$ també ho és.*
3. Comparació en el límit*: si el límit $\lim_{n\to\infty} \frac{|z_n|}{|w_n|}$ existeix i val $\ell \in (0,\infty)$ aleshores una sèrie és convergent si, i només si, ho és l'altra. Si el límit val zero o infinit es poden deduir també implicacions que només valen en un sentit.*

4. Criteri del quocient o de d'Alembert*: si el límit* $\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$ *existeix i val* $\ell \in [0,\infty]$ *aleshores* $\sum z_n$ *és absolutament convergent si* $\ell < 1$*, és divergent si* $\ell > 1$ *però si* $\ell = 1$ *no es pot concloure res.*
5. Criteri de l'arrel o de Cauchy*: si el límit* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ *existeix i val* $\ell \in [0,\infty]$ *aleshores* $\sum z_n$ *és absolutament convergent si* $\ell < 1$*, és divergent si* $\ell > 1$ *però si* $\ell = 1$ *no es pot concloure res.*
6. *El criteri de l'arrel val exactament igual si en comptes del límit es considera el límit superior; l'avantatge d'això és que* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ *existeix sempre, acceptant també* ∞ *com un dels valors possibles.*

PROVA:

1. Una sèrie de nombres reals positius té la successió de sumes parcials creixent. Com que una successió de nombres reals creixent és convergent si, i només si, està fitada, el fet que una sèrie $\sum z_n$ sigui absolutament convergent equival a què les sumes parcials de valors absoluts $\sum_{k=0}^{n} |z_k|$ estiguin fitades superiorment.
2. Si les sumes $\sum_{k=0}^{n} |w_k|$ estan fitades també ho estan les sumes $\sum_{k=0}^{n} |z_k|$. Si les segones no ho estan, tampoc ho estan les primeres.
3. Per a n suficientment gran es tenen desigualtats $\frac{\ell}{2}|w_n| \leqslant |z_n| \leqslant 2\ell|w_n|$. Aplicant que la convergència es manté en multiplicar la sèrie per un escalar no nul i el criteri de comparació de l'apartat anterior es dedueix el que diu l'enunciat.
4. Si $\ell < 1$ sigui r tal que $\ell < r < 1$. Per a $n \geqslant N$ es tenen desigualtats $|z_{n+1}| \leqslant r|z_n|$. Es dedueix que $|z_{N+k}| \leqslant r^k|z_N|$ per a tot $k \geqslant 0$. Com que la sèrie $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ és convergent amb suma $1/(1-r)$ la sèrie $\sum r^k|z_N|$ també ho és i, per comparació, la sèrie $\sum z_n$ és absolutament convergent.

   Si $\ell > 1$ sigui r tal que $1 < r < \ell$. Per a $n \geqslant N$ es tenen desigualtats $|z_{n+1}| \geqslant r|z_n|$. Es dedueix que $|z_{N+k}| \geqslant r^k|z_N|$. Per comparació, la sèrie és divergent.
5. Si $\ell < 1$ sigui r tal que $\ell < r < 1$. Per a $n \geqslant N$ es tenen desigualtats $\sqrt[n]{|z_n|} \leqslant r \Leftrightarrow |z_n| \leqslant r^n$. Per comparació amb la sèrie geomètrica convergent $\sum r^n$ es dedueix que la sèrie és absolutament convergent. Si $\ell > 1$ sigui r tal que $1 < r < \ell$. Per a $n \geqslant N$ es tenen desigualtats $\sqrt[n]{|z_n|} \geqslant r \Leftrightarrow |z_n| \geqslant r^n$. Per comparació amb la sèrie geomètrica divergent $\sum r^n$ es dedueix que la sèrie és divergent.
6. Recordi's que el límit superior d'una successió de nombres reals (x_n) es defineix com

   $$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_m : m \geqslant n\} = \inf\big\{ \sup\{x_m : m \geqslant n\} : n \geqslant 0 \big\},$$

   i que coincideix amb el suprem del conjunt dels límits de les parcials convergents. Tant per als límits com per als suprems s'accepta també ∞, i en aquestes condicions tota successió té límit superior.

   L'argument per a $\ell < 1$ és exactament el mateix; la primera definició com a límit dels suprems de les cues assegura que $\sup\{ \sqrt[m]{|z_m|} : m \geqslant n\} \leqslant r$ per a $n \geqslant N$ i, per tant, que $\sqrt[n]{|z_n|} \leqslant r$ per a tot $n \geqslant N$, exactament igual que abans.

En el cas $\ell > 1$ l'argument varia lleugerament; ara es té que $\sup\{\sqrt[m]{z_m} : m \geqslant n\} > r$ per a $n \geqslant N$ i l'únic que es pot concloure és que existeix un $m \geqslant N$ tal que $\sqrt[m]{|z_m|} \geqslant r \Leftrightarrow |z_m| \geqslant r^m > 1$. Això és suficient per assegurar que la successió $(|z_n|)$ no tendeix i zero, i encara menys hi pot tendir (z_n), que és condició necessària per a la sumabilitat. $\square$

1.4 L'esfera de Riemann

Per moltes raons és útil ampliar el conjunt dels nombres complexos afegint un nou element, que es denota ∞. Aquest conjunt ampliat $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es denotarà $\overline{\mathbb{C}}$. En alguns llocs es fa servir la notació $\mathbb{C}^*$, que aquí es reserva per a denotar el *grup multiplicatiu* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

El conjunt ampliat de nombres complexos $\overline{\mathbb{C}}$ té interpretacions i usos diversos en diferents branques de les matemàtiques: en anàlisi el punt ∞ serveix per indicar el límit de certes successions o funcions; en geometria projectiva és el punt de l'infinit que cal afegir a una recta afí per tenir la recta projectiva; en topologia és el punt que cal afegir a un espai topològic per compactificar-lo segons la compactificació d'Alexandroff. En variable complexa, $\overline{\mathbb{C}}$ s'anomena *esfera de Riemann* i s'identifica amb l'esfera unitat 2-dimensional dins de $\mathbb{R}^3$ a través de la projecció estereogràfica

Límit ∞ i aritmètica a $\overline{\mathbb{C}}$. Es considera ∞ com un nombre complex de valor absolut arbitràriament gran però sense imposar condicions sobre l'argument: geomètricament la idea és que ∞ està a distància infinita del zero (i, de fet, de qualsevol nombre complex), però no en una direcció determinada. En considerar límits de successions i de funcions aquest nou element ∞ pot ser límit o (per a funcions) el punt on tendeix la variable:

- $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ si $\forall M > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N \Rightarrow |z_n| > M$;
- $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ si $\forall M > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M$;
- $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ si $\forall \epsilon > 0\ \exists M > 0$ tal que $|z| > M \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon$;
- $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ si $\forall M > 0\ \exists M' > 0$ tal que $|z| > M' \Rightarrow |f(z)| > M$.

D'aquesta manera els límits es comporten bé respecte de les operacions amb successions i funcions si s'estenen les operacions amb nombres complexos al nou element ∞ posant:

- $\infty^{-1} = 0$ (i, per tant, $0^{-1} = \infty$),
- $z + \infty = \infty$ per a tot $z \in \mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$, i
- $z\infty = \infty$ per a tot $z \in \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Les úniques operacions a $\overline{\mathbb{C}}$ que queden indefinides són la suma $\infty + \infty$, el producte 0∞, i els quocients $0/0$ i ∞/∞. Corresponen a casos d'*indeterminació*, en què el límit d'una suma, producte o quocient de successions o funcions no es poden deduir dels límits de totes dues.

Recta projectiva. En geometria projectiva la recta projectiva $\mathbb{P}^1(K)$ sobre un cos K es construeix afegint un *punt de l'infinit*, com el quocient del conjunt del parells $[x : y]$ amb $x, y \in K$ no tots dos zero per la relació d'equivalència $[x : y] \sim [\lambda x : \lambda y]$ per a tot $\lambda \in K^*$ (elements no nuls del cos). Les classes d'equivalència admeten com a representants canònics tots els parells $[x : 1]$ per a $x \in K$, que s'identifiquen amb els elements de K, i un element més: $[1 : 0]$, que es coneix com el *punt de l'infinit*, i és el nou element ∞ afegit al cos K. El cas $K = \mathbb{C}$ és simplement un cas particular. Observi's que amb la identificació $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ es podria també considerar el pla projectiu $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, que s'obté a partir de l'$\mathbb{R}$-espai vectorial 2-dimensional $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, però això no és el mateix que la recta projectiva complexa: per a construir el pla projectiu cal afegir una recta projectiva a l'infinit.

Projecció estereogràfica. Una tercera interpretació del conjunt ampliat $\overline{\mathbb{C}}$, de caire topològic i analític, que és la que convé a la teoria de la variable complexa, consisteix a identificar-lo amb l'*esfera 2-dimensional*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

a través de l'aplicació anomenada *projecció estereogràfica*. El punt $N = (0, 0, 1)$ s'anomena *pol nord* de l'esfera. La projecció estereogràfica fa correspondre el pol nord al punt ∞ i els altres punts de l'esfera a nombres complexos de tal manera que, considerant $\mathbb{C}$ com l'hiperplà de $\mathbb{R}^3$ format pels punts amb $x_3 = 0$, cada punt de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ s'envia a l'únic nombre complex en què la recta que passa per N i pel punt talla aquest hiperplà. Concretament

$$\pi\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \qquad \pi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \dfrac{x_1}{1 - x_3} + i\dfrac{x_2}{1 - x_3}, & \text{si} \quad (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1), \\ \infty, & \text{si} \quad (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1), \end{cases}$$

i la seva aplicació inversa $\pi^{-1}\colon \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{S}^2$ envia els nombres complexos $z = x + iy$ al punt de l'esfera:

$$\pi^{-1}(z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$$

i el punt de l'infinit ∞ al pol nord $N = (0, 0, 1)$.

Aquesta bijecció permet dotar d'una topologia $\overline{\mathbb{C}}$ declarant que els oberts són les imatges a través de la projecció estereogràfica dels oberts de $\mathbb{S}^2$. Això no canvia res a $\mathbb{C}$: els oberts segueixen essent els de sempre i en canvi un conjunt de $\overline{\mathbb{C}}$ que contingui ∞ és obert si, i només si, en treure aquest punt és un obert de $\mathbb{C}$ i, a més, existeix un $M > 0$ tal que el conjunt conté tots els complexos de valor absolut $|z| > M$: el conjunt ha de contenir l'exterior d'un disc $\mathcal{D}(0; M)$ de radi M suficientment gran.

2 Funcions de variable complexa

Es volen estudiar funcions $z \mapsto f(z)\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ d'una variable complexa z a valors $f(z)$ nombres complexos. Amb la identificació entre $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ són funcions definides a un obert del pla a valors en el pla: funcions de dues variables reals a valors vectorials. Així tota la teoria de funcions de varies variables reals a valors vectorials (i escalars) és una eina bàsica per a l'estudi de les funcions de variable complexa.

El domini de definició de les funcions considerades serà sempre un obert $\mathcal{U}$ dels complexos (de $\mathbb{R}^2$ quan es pensen com a funcions de dues variables reals). Les notacions $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, etc. indicaran habitualment oberts complexos. És habitual usar també la lletra Ω per denotar els dominis de definició de funcions de variable complexa; aquí també es farà servir de vegades, sobretot quan es tracti d'oberts amb alguna condició addicional: connex, simplement connex, etc. Ocasionalment es consideren funcions sobre conjunts compactes K: un punt, un filferro —la imatge contínua d'un interval real—, un disc tancat, etc. Sempre que es faci això es dóna per sobreentès que la funció amb què es treballa està definida en algun conjunt obert que conté el compacte K.

Donar una funció $\mathcal{U} \to \mathbb{C}$ equival a donar dues funcions $u, v \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ a valors reals, posant $f(z) = u(z) + iv(z)$. Les funcions u i v s'anomenen *funcions components* de la funció f. Es posa també $u = \operatorname{Re} f$ i $v = \operatorname{Im} f$, i les funcions s'anomenen també *part real* i *part imaginària* de la funció f. Aquesta situació és anàloga a la del càlcul de varies variables, en què donar una funció vectorial (camp vectorial) $f \colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ equival a donar m funcions escalars (camps escalars) $f_i \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Recordi's que en el càlcul de varies variables una bona part dels conceptes, propietats i resultats per a funcions vectorials es redueixen als seus anàlegs per a les funcions escalars corresponents. Això mateix passa per a les funcions f a valors complexos en relació a les seves funcions components u i v. Que l'estudi de funcions vectorials sigui equivalent al de les funcions escalars components és conseqüència de les desigualtats següents:

$$|x_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|, \qquad \text{per a tot } \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Aquestes desigualtats permeten reduir l'estudi de límits i continuïtat de funcions vectorials al de les seves funcions components. En el cas que es tracta aquí de funcions a valors complexos $f = u + iv$ es té:

$$|u(z)|, |v(z)| \leqslant |f(z)| \leqslant |u(z)| + |v(z)| \qquad \text{per a tot} \quad z \in \mathcal{U}.$$

Posant $z = x + iy$ les funcions components u i v s'identifiquen amb funcions de les dues variables reals x i y i moltes vegades convé pensar-les d'aquesta manera. Així:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Les funcions a valors complexos es poden sumar i multiplicar per escalars, tal i com es fa amb les funcions a valors vectorials del càlcul de varies variables, però gràcies al producte de nombres complexos a més es poden multiplicar entre elles, tal i com es fa amb les funcions a valors reals.

Definició 2.1 (Límit i continuïtat) *Sigui* $f \colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$.

- *Sigui* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* f *està definida en un entorn seu excepte, potser, en el punt mateix. El* límit *de* f *en* z_0 *és el nombre complex* w_0 *si* $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tal que* $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \epsilon$. *En aquest cas es denota* $w_0 = \lim_{z \mapsto z_0} f(z)$.

- *La funció f és* contínua *en un punt $z_0 \in \mathcal{U}$ si* $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ *i es diu* contínua a tot $\mathcal{U}$ *si ho és en cadascun dels seus punts.*

Tot allò relatiu a límits i continuïtat de funcions de variable complexa és el que ja s'ha vist a càlcul de varies variables en estudiar funcions en el pla Euclidià. Es recorden a continuació algunes propietats importants. En general quan es parla d'una funció contínua en un subconjunt de $\mathbb{C}$ no obert (per exemple un compacte) se sobreentén que es tracta de la restricció a aquest subconjunt d'una funció contínua definida a un obert que el conté.

Proposició 2.2 *Els límits i la continuïtat es comporten bé respecte les operacions:*

1. *Si* $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ *i* $\lim_{z\to z_0} g(z) = w_1$, *aleshores*

$$\lim_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = w_0 \pm w_1, \quad \lim_{z\to z_0} (fg)(z) = w_0 w_1, \quad \lim_{z\to z_0} (f/g)(z) = w_0/w_1,$$

   on, per al quocient, es requereix que $w_1 \neq 0$ *(i això ja garanteix que f/g està definida a algun entorn de z_0).*

2. *Si* $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ *i* $\lim_{w\to w_0} g(w) = \zeta_0$ *aleshores* $\lim_{z\to z_0} (g\circ f)(z) = \zeta_0$.
3. *La suma, resta i producte de funcions contínues és contínua. El quocient és una funció contínua en els punts en què el denominador no s'anul·la. La composició de funcions contínues és contínua.*

Proposició 2.3 *Algunes propietats de les funcions contínues en relació amb la topologia.*

1. $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ *si, i només si, per a tota successió de punts de $\mathcal{U} \setminus \{z_0\}$ que tendeixi a z_0 la successió de les seves imatges per f tendeix a w_0.*
2. *Una aplicació $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és contínua a un obert $\mathcal{U}$ si, i només si, l'antiimatge de tot obert és un obert.*
3. *La imatge d'un connex per una funció contínua és connex.*
4. *La imatge d'un compacte per una funció contínua és compacte.*
5. *Tota funció contínua sobre un compacte a valors reals pren un valor màxim i un valor mínim.*
6. *El mòdul d'una funció contínua sobre un compacte a valors complexos pren un valor màxim i un valor mínim.*

Proposició 2.4 *L'estudi dels límits i la continuïtat de funcions de variable complexa es redueix a les seves funcions components: per a tota funció $f = u + iv$ es compleix*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to z_0} u(z) = \operatorname{Re} w_0 \quad i \quad \lim_{z\to z_0} v(z) = \operatorname{Im} w_0.$$

La funció f és contínua en un punt o un obert si, i només si, ho són les seves funcions components.

Polinomis i funcions racionals. Les funcions de variable complexa més senzilles són les funcions definides per expressions polinòmiques:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \qquad a_i \in \mathbb{C},$$

on $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}$ és un polinomi a coeficients complexos. Estan definides i són contínues a tot el pla complex $\mathbb{C}$.

Les seves funcions components són polinomis a coeficients reals en dues variables: escrivint els coeficients com $a_k = x_k + iy_k$ amb $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ i la variable com $X = Y + iZ$ el polinomi $P(X)$ s'escriu de la forma

$$P(X) = U(Y, Z) + iV(Y, Z), \qquad U, V \in \mathbb{R}[Y, Z].$$

Les funcions racionals són les funcions definides com un quocient de polinomis:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \qquad P(X), Q(X) \in \mathbb{C}[X], \quad Q(X) \neq 0,$$

on es pot suposar que els polinomis P i Q no tenen factors comuns, el qual és equivalent a dir que no tenen arrels comunes. El seu domini de definició és tot $\mathbb{C}$ llevat del subconjunt finit de punts en els quals el denominador s'anul·la. Són funcions contínues on estan definides i en els punts on no estan definides no tenen límit: el seu mòdul tendeix a infinit. Escrivint els polinomis del numerador i denominador en termes de polinomis a coeficients reals en dues variables i multiplicant pel conjugat del denominador es veu que les funcions components d'una funció complexa racional són funcions racionals reals en dues variables: funcions donades pel quocient de polinomis a coeficients reals en dues variables.

Transformacions de Möbius. Un tipus de funcions racionals especialment importants en la teoria de les funcions de variable complexa són les de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Aquestes funcions s'anomenen *transformacions de Möbius* o *transformacions lineals fraccionàries*. Es poden veure com a funcions bijectives $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ de l'esfera de Riemann convenint que $f(\infty) = \frac{a}{c}$ ($= \infty$ si $c = 0$) i que $f(-\frac{d}{c}) = \infty$. Aquesta definició és la natural si es vol que l'aplicació sigui contínua quan s'identifica $\overline{\mathbb{C}}$ amb l'esfera $\mathbb{S}^2$ a través de la projecció estereogràfica. Les transformacions de Möbius formen un grup amb la composició isomorf al grup projectiu lineal $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$.

Arrels de polinomis complexos. Una de les propietats més importants del cos dels nombres complexos és que tot polinomi no constant té alguna arrel. Aquest fet es coneix com a Teorema Fonamental de l'Àlgebra. Les seves demostracions depenen de propietats no només algebraiques dels nombres complexos sinó també de caire mètric i topològic.

Usant la regla de Ruffini es dedueix que tot polinomi $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ descompon com un producte de polinomis de grau 1 de la forma:

$$f(X) = a_n(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n) \quad \text{amb} \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Els cossos que tenen aquesta propietat s'anomenen *algebraicament tancats*.

En els estudis de Matemàtiques s'acostumen a veure diverses demostracions del teorema fonamental de l'àlgebra. Més endavant en aquest curs es donarà la que és típica de la variable complexa, on el Teorema Fonamental de l'Àlgebra s'obté com a conseqüència immediata del teorema de Liouville que diu que tota funció entera fitada és constant. De moment es dóna aquí una demostració que no requereix res més que el fet que una funció contínua a valors reals pren un valor mínim sobre un conjunt compacte.

Teorema 2.5 (Teorema fonamental de l'Àlgebra) $\mathbb{C}$ *és algebraicament tancat.*

PROVA: Sigui $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ un polinomi no constant de grau n. Això vol dir que $n \geqslant 1$ i que $a_n \neq 0$. El fet que f tingui o no una arrel es manté si es canvia la variable X per $aX + b$ amb $a \in \mathbb{C}^*$ i $b \in \mathbb{C}$ qualsevol i es multiplica f per una constant no nul·la $c \in \mathbb{C}^*$. En efecte z és una arrel del polinomi $f(X)$ si, i només si, $w := a^{-1}(z - b)$ és una arrel del polinomi $cf(aX + b)$. Durant la demostració es faran diversos canvis d'aquest tipus.

Com que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = a_n \Rightarrow \lim_{z\to\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^n} = |a_n| > 0 \Rightarrow \lim_{z\to\infty} |f(z)| = \lim_{z\to\infty} |z|^n |a_n| = \infty$$

es dedueix que per a tot M existeix un r tal que $|z| > r \Rightarrow |f(z)| > M$. Sigui r el radi que correspon a $M = |a_0|$ i sigui $m = \min\{|f(z)| : |z| \leqslant r\}$, que existeix per ser $\overline{\mathcal{D}}(0; r)$ compacte. Aleshores, com que $|f(z)| > |a_0| = |f(0)| \geqslant m$ per a tot $|z| > r$, el mínim ho és a tot $\mathbb{C}$: $m = \min\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}$.

Suposi's que el mínim es pren a z_0: $|f(z_0)| = m$. Canviant $f(X)$ per $f(z_0 + X)$ es pot suposar que el mínim es pren al zero, de manera que $|a_0| = |f(0)| = m$.

Si $f(0) = 0$ aleshores $z = 0$ és una arrel del polinomi i s'ha acabat. Suposi's, per arribar a contradicció, que $a_0 = f(0) \neq 0$.

Dividint f per a_0 el mínim de $|f|$ se segueix prenent al punt 0 però ara el polinomi té $f(0) = 1$. Sigui $f(X) = 1 + a_h X^h + \cdots + a_n X^n$ per a un cert h amb $1 \leqslant h \leqslant n$ tal que $a_h \neq 0$. Sigui $w \in \mathbb{C}^*$ un nombre tal que $w^h = -a_h$. Canviant f per $f(X/w)$ el mínim de $|f|$ se segueix prenent al punt 0 i el valor en aquest mínim segueix sent 1.

Ara es té $f(X) = 1 - X^h + a_{h+1} X^{h+1} + \cdots + a_n X^n = 1 - X^h + X^h g(X)$ amb $g(X) \in X\mathbb{C}[X]$ un polinomi múltiple de X, amb $g(0) = 0$. Com que g és continu el seu valor en un entorn de zero es pot fer tan petit com es vulgui. Per als nombres reals x amb $0 < x < 1$ es té $|f(x)| = |1 - x^h + x^h g(x)| \leqslant 1 - x^h + x^h |g(x)|$ i, prenent un x en aquest interval prou petit per tal que $|g(x)| < 1$, es té $|f(x)| < 1 - x^h + x^h = 1$, i això contradiu el fet que el mínim de $|f|$ és 1. $\square$

2.1 Sèries de potències i funcions analítiques

Tal i com ja s'ha vist en l'anàlisi real d'una i varies variables, una de les maneres més importants de definir funcions són les sèries de potències: polinomis de grau infinit que, en substituir la variable per un nombre del domini de definició, donen sèries numèriques convergents. En variable complexa aquestes funcions juguen un paper encara més important que en anàlisi real: tal com es veurà més endavant totes les funcions interessants de variable complexa venen donades localment com a sèries de potències.

Definició 2.6 (Sèrie de potències) *Una* sèrie de potències *centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ és una sèrie de nombres complexos de la forma*

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{C},$$

que depèn d'un nombre complex z. Es diu convergent *a $z \in \mathbb{C}$ si ho és la sèrie numèrica corresponent. Una sèrie de potències defineix una funció $f(z) := \sum a_n(z-z_0)^n$ en el conjunt dels nombres complexos z on sigui convergent.*

Amb el canvi de variable $w = z - z_0$ l'estudi de les sèries de potències es redueix al de les sèries de potències centrades en el punt zero. Això simplifica la notació sense perdre generalitat, ja que totes les propietats de les sèries $\sum a_n(z-z_0)^n$ i $\sum a_n w^n$ són les mateixes, tenint en compte el canvi de variable. Per tant, sempre que convingui, per comoditat es consideraran només sèries centrades al punt zero.

Definició 2.7 (Radi de convergència) *El* radi de convergència *d'una sèrie de potències $\sum a_n(z-z_0)^n$ es defineix com*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty].$$

Teorema 2.8 (Teorema de Cauchy-Hadamard) *La sèrie de potències $\sum a_n(z-z_0)^n$ és absolutament convergent per a $|z-z_0| < R$ i divergent per a $|z-z_0| > R$.*

Per tant, defineix una funció en el disc obert $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z_0; R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ de centre z_0 i radi R, anomenat el seu disc de convergència.

PROVA: Es demostra aplicant el criteri de l'arrel a la sèrie numèrica corresponent. Sigui z amb $|z-z_0| = r$. Com que $\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = r\sqrt[n]{|a_n|}$ es té

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = r \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = rR^{-1}.$$

Si $rR^{-1} < 1 \Leftrightarrow r < R$ la sèrie és absolutament convergent. Si $rR^{-1} > 1 \Leftrightarrow r > R$ la sèrie és divergent. $\square$

Proposició 2.9 (Convergència uniforme sobre compactes) *Tota sèrie de potències és uniformement convergent sobre compactes en el seu disc de convergència.*

PROVA: Tot compacte dins de $\mathcal{D}(z_0;R)$ està contingut en algun disc tancat $\overline{\mathcal{D}}(z_0;r)$ per a un $r<R$: per a cada compacte $K\subseteq\mathcal{D}(z_0;R)$, es pot agafar $r=\max\{|z|:z\in K\}$, amb $r<R$ ja que altrament K contindria algun punt z amb $|z|\geqslant R$.

N'hi ha prou per tant en veure que la sèrie és uniformement convergent sobre aquests compactes. Efectivament,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k(z-z_0)^k\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|r^k$$

i els sumatoris de la dreta tendeixen a zero ja que $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$ és convergent. $\square$

Proposició 2.10 (Continuïtat) *La funció definida per una sèrie de potències és contínua en el seu disc de convergència.*

PROVA: Sigui $f(z)=\sum a_n(z-z_0)^n$ i siguin $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k(z-z_0)^k$ les sumes parcials, que són funcions polinòmiques i, per tant, contínues (a tot $\mathbb{C}$). Sigui $w\in\mathcal{D}$ un punt. Es vol veure que $\lim_{z\to w}f(z)=f(w)$. Sigui r tal que $|w-z_0|<r<R$, on R és el radi de convergència de la sèrie.

Suposi's donat un $\epsilon>0$. Per continuïtat uniforme en el compacte $\overline{\mathcal{D}}(z_0;r)$ existeix un N tal que $|f(z)-P_n(z)|<\frac{\epsilon}{3}$ sempre que $n\geqslant N$, per a tot z amb $|z|\leqslant r$.

S'agafa un $n\geqslant N$ qualsevol. Per continuïtat de la funció polinòmica $P_n(z)$ existeix un $\delta>0$, que es pot suposar $\delta\leqslant r-|w-z_0|>0$ agafant-lo més petit si cal, tal que $|z-w|<\delta\Rightarrow|P_n(z)-P_n(w)|<\frac{\epsilon}{3}$. Aleshores, sempre que $|z-w|<\delta$ també es té $|z-z_0|=|z-w+w-z_0|<\delta+|w-z_0|\leqslant r$ i, per tant,

$$\begin{aligned}|f(z)-f(w)|&=|f(z)-P_n(z)+P_n(z)-P_n(w)+P_n(w)-f(w)|\\&\leqslant|f(z)-P_n(z)|+|P_n(z)-P_n(w)|+|P_n(w)-f(w)|<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon,\end{aligned}$$

ja que tant z com w estan dins del disc tancat de radi r en què la sèrie convergeix absolutament i la segona desigualtat prové de la continuïtat del polinomi $P_n(z)$. $\square$

Convergència uniforme sobre compactes. Les propietats de les sèries de potències són només casos particulars de propietats de les sèries de funcions que requereixen la condició de convergència uniforme.

Definició 2.11 (Convergència uniforme) *Siguin $f_n\colon\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ funcions definides a un obert $\mathcal{U}$ per a cada $n\geqslant 0$. La successió de funcions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ es diu* uniformement convergent *cap a una funció f sobre un subconjunt $S\subseteq\mathcal{U}$ si*

$$\forall\epsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad\textit{tal que}\quad n\geqslant N\quad\Rightarrow\quad|f_n(z)-f(z)|<\epsilon\quad\forall z\in S.$$

La sèrie de funcions $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$ es diu uniformement convergent cap a una funció f sobre S si ho és la successió de les seves sumes parcials.

La successió o sèrie es diu uniformement convergent sobre compactes *a $\mathcal{U}$ si és uniformement convergent sobre tot subconjunt compacte de $\mathcal{U}$.*

Recordi's el *criteri M de Weierstrass*, que és obvi a partir de la definició: si per a tot compacte $K \subset \mathcal{U}$ existeixen nombres reals M_n tals que $\sup\{|f_n(z)| : z \in K\} \leqslant M_n$ i la sèrie numèrica $\sum M_n$ és sumable, aleshores $\sum f_n$ és uniformement convergent sobre compactes. La demostració de la proposició 2.9 s'ha fet agafant $M_n = |a_n|r^n$ amb r el màxim dels valors absoluts $|z - z_0|$ per a $z \in K$.

Amb una demostració anàloga a la de la proposició 2.10 es pot veure el cas general:

Teorema 2.12 (Convergència uniforme i continuïtat) *Si (f_n) és una successió de funcions contínues $f_n\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ uniformement convergent sobre compactes de $\mathcal{U}$ cap a una funció f, la funció f també és contínua.*

El resultat anàleg val per a sèries uniformement convergents.

PROVA: Sigui $f(z) = \lim f_n(z)$ uniformement convergent sobre compactes amb les f_n contínues a $\mathcal{U}$. Donat un punt $z_0 \in \mathcal{U}$ i un $\epsilon > 0$ sigui $K = \overline{\mathcal{D}}(z_0; r) \subset \mathcal{U}$. Per convergència uniforme sobre el compacte K existeix un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}$ per a tot $z \in \overline{\mathcal{D}}(z_0; r)$ (això inclou el punt z_0). Es fixa un $n \geqslant N$ qualsevol. La continuïtat de la funció f_n en el punt z_0 assegura que existeix un $\delta > 0$, que es pot agafar $\leqslant r$ canviant-lo per un de més petit si cal, tal que $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. Aleshores

$$\begin{aligned} |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - f_n(z) + f_n(z) - f_n(z_0) + f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &\leqslant |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

ja que tots els z amb $|z - z_0| < \delta$ estan dins del compacte $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r)$. □

Igual com passa per a les successions i sèries de funcions de variable real estudiades a l'anàlisi funcional, per tal que les bones propietats de continuïtat, derivació i integració de les funcions d'una successió o sèrie es tradueixin en propietats anàlogues de la funció límit o suma s'ha de posar la condició de convergència uniforme sobre compactes.

Les sèries de potències són uniformement convergents sobre compactes en el seu disc de convergència, tal com s'ha vist a la proposició 2.9, i gràcies a això les funcions definides d'aquesta manera tenen el millor comportament possible.

Definició 2.13 (Funcions analítiques) *Una funció de variable complexa $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és* analítica *a un obert $\mathcal{U}$ si per a cada punt $z_0 \in \mathcal{U}$ ve donada per una sèrie de potències amb radi de convergència positiu*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in \mathcal{D}(z_0; R), \quad R > 0.$$

Aquesta condició es pot enunciar dient que f és localment una sèrie de potències.

Proposició 2.14 *Tota funció analítica és contínua.*

PROVA: Conseqüència immediata del fet que les sèries de potències són contínues en el seu disc de convergència. □

La sèrie geomètrica. La sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{amb} \quad a_n = 1 \text{ per a tot } n \geqslant 0$$

té radi de convergència $R = 1$. Al disc unitat defineix una funció que coincideix amb la funció racional $(1-z)^{-1}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad z \in \mathcal{D}(0;1).$$

La funció racional $(1-z)^{-1}$ està definida a tot el pla complex excepte l'únic punt $z = 1$. Existeixen altres sèries de potències que donen aquesta mateixa funció en altres discs, que mai, però, poden contenir $z = 1$, ja que la funció no és contínua en aquest punt. Si $z_0 \neq 1$ és un nombre complex es té una expressió en sèrie de potències:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0+(z-z_0)} &= \frac{1}{1-z_0}\left(\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}}\right) = \frac{1}{1-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \text{amb coeficients} \quad a_n = \frac{1}{(1-z_0)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Els càlculs fets valen sempre que $\left|\frac{z-z_0}{1-z_0}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-z_0| < |1-z-0|$. Això es confirma calculant el radi de convergència de la sèrie obtinguda, que és $R = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\,\right)^{-1} = |1-z_0|$.

La mateixa idea usada per a construir aquesta sèrie es pot fer servir per trobar una expressió com a sèrie de potències d'altres funcions racionals (de fet, de totes les funcions racionals) al voltant d'un punt en que no s'anul·li el denominador. Per exemple, la funció $f(z) = 1/(1+z^2)$ ve donada per la sèrie

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}, \quad \text{on} \quad a_n = \begin{cases}(-1)^{n/2}, & \text{n parell,}\\ 0, & \text{n senar,}\end{cases}$$

que té radi de convergència $R = 1$. Aquesta identitat $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, que val per a tot $x \in \mathbb{R}$ amb $|x| < 1$, ja apareix a l'anàlisi real en estudiar sèries de potències i sèries de Taylor. En aquest cas, a diferència de la sèrie geomètrica $1/(1-x)$, la funció $1/(1+x^2)$ està definida a tot $\mathbb{R}$, i el motiu pel qual la sèrie de potències no aconsegueix donar el valor d'aquesta funció per a nombres reals de valor absolut $\geqslant 1$ apareix en estudiar-la com a funció de variable complexa: el denominador s'anul·la en els complexos $z = \pm i$ de mòdul 1, i això és el que impedeix que la sèrie de potències complexa convergeixi més enllà d'aquest punt.

L'exponencial complexa. La funció exponencial complexa es defineix a partir de la mateixa sèrie de potències que dóna l'exponencial real:

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \text{amb} \quad a_n = \frac{1}{n!}.$$

Té radi de convergència $R = \infty$ i per tant defineix una funció contínua $z \mapsto e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en tot el pla complex. A partir de la definició i del comportament multiplicatiu del producte de Cauchy de sèries numèriques convergents que s'ha vist a la proposició 1.23 es dedueix immediatament que la funció exponencial envia sumes a productes:

Proposició 2.15 *$e^{z+w} = e^z e^w$ per a tot $z, w \in \mathbb{C}$.*

PROVA: Tenint en compte que $\frac{1}{n!}\binom{n}{k} = \frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}$ es calcula

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n \right) = e^z e^w, \end{aligned}$$

on cadascun dels sumands de la sèrie que dóna e^{z+w}, un cop desenvolupat pel binomi de Newton, és el terme corresponent al producte de Cauchy de les sèries de e^z i e^w. □

Proposició 2.16 (Fórmula d'Euler) *Per a tot nombre real t es té la igualtat de nombres complexos següent:*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

PROVA: En avaluar la funció exponencial en un complex imaginari pur $it \in i\mathbb{R}$ i separar les parts real i imaginària del resultat s'obté:

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{(2k+1)}}{(2k+1)!} = \cos t + i \sin t,$$

on s'ha posat $n = 2k$ o $2k+1$ segons la paritat i s'han fet servir les sèries de Taylor de les funcions trigonomètriques reals, que donen el seu valor en tots els $t \in \mathbb{R}$, ben conegudes del curs de càlcul en una variable. □

Combinant la fórmula d'Euler de la proposició 2.16 amb la proposició 2.15 s'obtenen les funcions components de la funció exponencial en termes de la part real i imaginària del paràmetre:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y. \tag{2}$$

És a dir, les funcions components de la funció exponencial són

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \sin y \qquad \text{si} \quad e^{x+iy} = u(x, y) + iv(x, y).$$

Així, en els nombres complexos es descobreix una relació entre les funcions exponencial i trigonomètriques que només considerant funcions de variable real no es veu. En particular, això dóna un sentit matemàtic precís a les fórmules i notacions exponencials per als nombres complexos que moltes vegades s'introdueixen només formalment.

De la multiplicativitat i la identitat d'Euler es dedueixen també les propietats següents de la funció exponencial complexa:

- és periòdica de període $2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z$ per a tot $z \in \mathbb{C}$;
- la seva imatge és $\mathbb{C}^*$: e^z pren tots els valors complexos excepte el zero;
- $e^z = e^w \Leftrightarrow w = z + 2\pi i k$ amb $k \in \mathbb{Z}$.

Funcions trigonomètriques. Les funcions trigonomètriques complexes es poden definir, tal com s'ha fet per a l'exponencial, considerant les sèries de potencies que les defineixen sobre els reals com a sèries sobre els complexos:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Aquestes sèries tenen radi de convergència infinit i per tant defineixen funcions a tot $\mathbb{C}$. Alternativament també es pot considerar l'expressió per a les funcions trigonomètriques reals que s'obté a partir de la fórmula d'Euler $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ i $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, i agafant aquestes mateixes expressions amb valors complexos a la variable:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

El logaritme complex. Es vol que la funció logaritme sigui la inversa de l'exponencial. L'exponencial real és una bijecció $x \mapsto e^x \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ i això permet definir el logaritme en el domini $(0, \infty)$ com la seva funció inversa. En els complexos la situació és diferent ja que l'exponencial no és injectiva; de fet, tot complex no nul és l'exponencial d'infinits nombres complexos diferents:

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \Leftrightarrow \quad |w| = e^x \text{ i } \arg w = y \quad \Leftrightarrow \quad z = \log|w| + i \arg w.$$

Com que l'argument està definit només llevat de múltiples enters de 2π el logaritme és una *funció multivaluada*: cada valor de l'argument de w dóna un logaritme $\log w$ diferent.

Aquesta situació no és nova: el mateix passa sobre els reals amb la funció $\sqrt{x}$ o les funcions inverses de les funcions trigonomètriques arcsin, arccos i arctan, i sobre els complexos amb qualsevol funció $\sqrt[n]{z}$ que pretengui invertir la funció potència $z \mapsto z^n$, o amb la mateixa funció arg, definida a $\mathbb{C}^*$ amb valors reals.

En aquests casos s'acostuma a triar una imatge d'entre totes les possibilitats. Per exemple, el conveni habitual és que $\sqrt{x}$ és el valor positiu, arcsin pren valors a $[0, \pi]$, arccos pren valors a $[-\pi, \pi]$, arctan pren valors a $(-\pi, \pi)$, $\sqrt[n]{z}$ pren valors amb argument $0 \leqslant \alpha < 2\pi/n$ o arg pren valors a $(-\pi, \pi]$. El problema principal que sorgeix en fer aquestes tries és que sobre els complexos moltes vegades és impossible fer-les de manera que el resultat sigui una funció contínua.

Definició 2.17 (Determinació del logaritme) *Una* determinació del logaritme *en un subconjunt* $S \subseteq \mathbb{C}^*$ *és una aplicació* $\mathrm{Log}\colon S \to \mathbb{C}$ *tal que* $\mathrm{Log}(z) \in \log(z)$ *per a tot* $z \in S$. *Equivalentment, tal que* $\mathrm{e}^{\mathrm{Log}(z)} = z$ *per a tot* $z \in S$.

Per exemple, posant $\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$ es té l'anomenada *determinació principal* del logaritme, que correspon a la determinació principal de l'argument. És clar que les determinacions del logaritme corresponen a determinacions de l'argument, i que les determinacions són contínues en un cas si, i només si, ho són en l'altre.

Funció arrel n-èsima. Igual com en intentar invertir l'exponencial s'obté una funció multivaluada, el mateix passa en intentar invertir la funció potència n-èsima: l'equació $w = z^n$ té n solucions diferents $z = \sqrt[n]{w}$.

Anàlogament als casos ja considerats es defineix una *determinació de l'arrel n-èsima* a un subconjunt $S \subseteq \mathbb{C}$ com una aplicació $z \mapsto z^{1/n}\colon S \to \mathbb{C}$ tal que $(z^{1/n})^n = z$ per a tot $z \in S$. Per exemple, l'aplicació $z \mapsto z^{1/n} := \sqrt[n]{|z|}e^{i\,\mathrm{Arg}(z)/n}$, definida a $\mathbb{C}^*$, és la determinació principal de l'arrel, que correspon a la determinació principal de l'argument, i que no és contínua a la semirecta real negativa.

Igualment com en el cas del logaritme, sempre que es tingui una determinació contínua de l'argument la fórmula anterior dóna una determinació contínua de l'arrel n-èsima.

3 Derivació. Funcions holomorfes

La derivada d'una funció de variable complexa es defineix exactament igual que per a funcions de variable real:

Definició 3.1 (Derivació complexa) *La funció* $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *és* derivable *(en sentit complex) en un punt* $z_0 \in \mathcal{U}$ *si existeix el límit*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

En aquest cas el valor del límit és la derivada *de* f *en aquest punt, i es denota* $f'(z_0)$.

Proposició 3.2 (Propietats de la derivació) *La suma, producte, quocient i composició de funcions derivables és derivable, i les derivades venen donades per les fórmules habituals:*

1. $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$;
2. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$;
4. $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ *(regla de la cadena).*

Prova: La demostració és exactament la mateixa que per a funcions de variable real.□

3.1 Funcions holomorfes

Definició 3.3 (Funció holomorfa) *Una funció de variable complexa és* holomorfa *en un obert $\mathcal{U}$ si és derivable en cadascun dels punts de $\mathcal{U}$. En aquest cas la funció $z \mapsto f'(z)$ que dóna la derivada en cada punt és la seva* funció derivada.

Una funció que sigui holomorfa a tot $\mathbb{C}$ es diu funció entera.

Com en el cas de la continuïtat una funció es diu holomorfa en un conjunt compacte (o un subconjunt de $\mathbb{C}$ qualsevol, no necessàriament obert) si és la restricció a aquest subconjunt d'una funció holomorfa en un obert que el contingui.

Definició 3.4 (Primitiva) *La funció F és una* primitiva *(o* antiderivada*) de la funció f en un obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ si F és holomorfa i té derivada $F' = f$ a $\mathcal{U}$.*

Exemples. Aplicant la definició es veu immediatament que tota funció constant és derivable amb derivada zero i que la funció identitat té derivada constant igual a 1. Aplicant la proposició 3.2 es dedueix que tot polinomi i tota funció racional són derivables als seus dominis de definició i que les derivades es calculen de la manera habitual:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \quad \Rightarrow \quad P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1},$$

$$\left(\frac{P}{Q}\right)'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - Q'(z)P(z)}{Q(z)^2},$$

amb les mateixes fórmules que en el cas real. En canvi, moltes altres funcions prou senzilles no són derivables. Per exemple,

- La conjugació complexa $f(z) = \overline{z}$ no és derivable en cap punt de $\mathbb{C}$:

  $$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h} \quad \text{no existeix}$$

  ja que fent tendir h a zero sobre l'eix real posant $h = t \in \mathbb{R}$ el límit de $\frac{\overline{h}}{h} = 1$ és 1 i fent-lo tendir sobre l'eix imaginari posant $h = it$ el límit de $\frac{\overline{h}}{h} = -1$ és -1, i per tant per a valors de h arbitràriament petits el quocient $\overline{h}/h$ no s'acosta a cap límit.

- El quadrat del valor absolut $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$ és derivable només a $z_0 = 0$ ja que

  $$\lim_{h \to 0} \frac{(z_0 + h)\overline{(z_0 + h)} - z_0 \overline{z_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\,\mathrm{Re}(z_0 \overline{h}) + h\overline{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\,\mathrm{Re}(z_0 \overline{h})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ax + by}{x + iy},$$

  posant $h = x + iy$, $2z_0 = a + ib$. Aquest límit només existeix quan $(a, b) = (0, 0)$. Efectivament, en aquest cas és clar que el límit existeix i val zero i altrament el límit sobre la recta real i imaginària donen, respectivament, els valors real a i purament imaginari $-ib$, que només coincideixen si $a = b = 0$.

Observi's que en tots dos exemples les funcions tenen les millors propietats possibles com a funcions de dues variables reals: són $\mathscr{C}^\infty$ i, de fet, són polinomis en les variables x i y.

Proposició 3.5 *Tota funció donada per una sèrie de potències $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ en un disc obert $\mathcal{D}(z_0;R)$ és holomorfa i la seva derivada ve donada per la sèrie de potències $g(z) = \sum_{n=1}^\infty na_n(z-z_0)^{n-1}$ en aquest disc.*

PROVA: Per simplificar la notació se suposarà que les sèries estan centrades al zero. Com que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \to 1$ el radi de convergència d'una sèrie coincideix amb el de la sèrie derivada. Sigui $R > 0$ el radi de convergència comú de totes dues sèries $\sum a_n z^n$ i $\sum na_n z^{n-1}$. Per a cada enter $n \geqslant 0$ siguin $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ i $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^\infty a_k z^k = f(z) - S_n(z)$ la suma parcial i la cua de la sèrie en un punt z del disc de convergència. Es denota $S_n'(z)$ la derivada de la funció polinòmica $S_n(z)$.

Donat un punt $z_0 \in \mathcal{D}(0;R)$ es vol demostrar que $f'(z_0)$ existeix i és igual a $g(z_0)$. Això equival a què per a cada $\epsilon > 0$ existeixi un $\delta > 0$ tal que

$$\forall z \in \mathcal{D}, \qquad 0 < |z-z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0)\right| < \epsilon. \tag{3}$$

Per a tot punt z del disc de convergència es té la igualtat següent:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) = \frac{S_n(z)-S_n(z_0)}{z-z_0} - S_n'(z_0) + S_n'(z_0) - g(z_0) + \frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0},$$

i el valor absolut d'això es fitarà en tres trossos.

Sigui r un real positiu tal que $|z_0| < r < R$. Per a tot enter $k \geqslant 1$ es té

$$a_k \frac{z^k - z_0^k}{z-z_0} = a_k\left(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + z^{k-3}z_0^2 + \cdots + z_0^{k-1}\right)$$

i s'obté la desigualtat

$$\left|a_k \frac{z^k - z_0^k}{z-z_0}\right| \leqslant |a_k| \sum_{r=0}^{k-1} |z|^r |z_0|^{k-1-r}| \leqslant k|a_k|r^{k-1} \qquad \text{per a tot} \quad |z| \leqslant r.$$

Com que la sèrie $\sum n|a_n|r^{n-1}$ és sumable les seves cues tendeixen a zero i per tant existeix un N_1 tal que si $n \geqslant N_1$ es té

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^\infty \left|a_k \frac{z^k-z_0^k}{z-z_0}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^\infty k|a_k|r^{k-1} < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{per a tot} \quad |z| \leqslant r.$$

Com que per a cada punt z del disc de convergència, en particular per a $z = z_0$, el valor de la sèrie derivada $g(z)$ és el límit de les sumes parcials $S_n'(z)$, existeix un N_2 tal que per a tot $n \geqslant N_2$ es té $|S_n'(z_0) - g(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Es fixa un enter $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$ qualsevol. Com que S_n' és la derivada del polinomi S_n, la definició de derivada en el punt z_0 assegura que existeix un $\delta > 0$, que es pot suposar $\delta \leqslant r - |z_0|$ agafant-lo més petit si cal, de manera que tot z amb $|z - z_0|$ satisfaci també la condició $|z| = |z - z_0 + z_0| \leqslant \delta + |z_0| = r$, tal que

$$|z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0) \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Combinant les tres desigualtats $< \frac{\epsilon}{3}$, que valen per a tot z del disc $|z - z_0| < \delta$, s'obté la desigualtat (3) i queda demostrat que, efectivament, f és derivable a z_0 amb derivada $f'(z_0) = g(z_0)$. □

Corol·lari 3.6 *Tota funció analítica en un obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ és holomorfa en aquest obert i la seva derivada també és una funció analítica.*

Derivació de sèries terme a terme. La proposició anterior és un cas particular de derivació terme a terme d'una funció definida com la suma d'una sèrie de funcions; en aquest cas la sèrie de potències és la suma de les funcions $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ i la proposició assegura que la funció és derivable i que la seva derivada és la suma de les funcions derivades $f_n'(z) = na_n(z - z_0)^{n-1}$. En anàlisi funcional s'estudia el cas més general de sèries de funcions $f = \sum f_n$; quan totes les f_n són derivables es busquen condicions que garanteixen que f també ho és i que la seva derivada sigui $f' = \sum f_n'$. Sobre els reals la convergència uniforme no és suficient. En canvi, sobre els complexos sí que ho és, tal i com es veurà més endavant.

Terminologia. Holomorfa versus analítica. En molts textos i cursos de variable complexa les funcions derivables en un obert (en sentit complex) s'anomenen analítiques en comptes de fer servir el terme holomorfes. El motiu d'això és que, amb les definicions d'holomorfa i analítica donades aquí (definicions 2.13 i 3.3) tota funció holomorfa en un obert també és analítica en aquest obert: la condició de tenir derivada complexa en tots els punts implica que és localment una sèrie de potències. Aquest resultat es demostrarà més endavant usant l'eina més important de la variable complexa: el Teorema de Cauchy.

Per tant, en variable complexa hi ha una duplicitat de terminologia: holomorfa i analítica són condicions equivalents, tot i que s'han definit de manera diferent (i que l'equivalència no és un fet obvi sinó que requereix una demostració el·laborada).

Aquesta equivalència entre derivabilitat i analicitat és un fet característic de la variable complexa que no es compleix en els reals: sobre oberts de $\mathbb{R}$ la propietat de ser derivable i de ser analítica no són equivalents. Per exemple la funció $f(x) = e^{-1/x^2}$ per a $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ és derivable a tot $\mathbb{R}$ (de fet, és $\mathscr{C}^\infty$) però, en canvi, no ve donada com una sèrie de potències en cap entorn del punt $x = 0$.

3.2 Equacions de Cauchy-Riemann

Les funcions de variable complexa són també funcions de dues variables reals, i per tant a l'hora d'estudiar-les es pot fer servir tota la teoria del càlcul diferencial. L'objectiu d'aquesta secció és veure quina relació hi ha entre el fet que la funció sigui derivable en sentit complex i que sigui diferenciable en sentit real.

Es comença recordant definicions i propietats de la derivació de funcions reals. Es considera una $f\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i com sempre es denoten $f = u+iv$ les funcions components i $z = x+iy$ les parts real i imaginària de la variable. Totes tres funcions f, u i v es poden pensar com a funcions de la variable complexa z o de les dues variables reals x i y. Donat un punt $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, corresponent al punt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

- Les *derivades parcials* de f en el punt z_0 són

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0+t) - f(z_0)}{t}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0+it) - f(z_0)}{t}, \tag{4}$$

  i les de la funció component u (anàlogament per a v) en el punt (x_0, y_0) són

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0+t,y_0) - u(x_0,y_0)}{t}, \ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x_0,y_0+t) - u(x_0,y_0)}{t},$$

  on tota l'estona t denota una variable real. Les derivades parcials de les funcions components són les components de les derivades parcials de la funció:

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

- Si la funció té totes les derivades parcials la seva *matriu jacobiana* és la que té per entrades les derivades parcials de les funcions components:

$$Jf(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \tag{5}$$

- La funció f es diu *de classe* $\mathscr{C}^1$ en un obert $\mathcal{U}$ si les derivades parcials existeixen i són contínues en tots els punts de l'obert; es diu de classe $\mathscr{C}^k$ si les derivades parcials d'ordre k existeixen i són contínues. El *teorema de Schwarz* (o de Clairaut) assegura que si la funció és de classe $\mathscr{C}^2$ aleshores les derivades parcials respecte les dues variables no depenen de l'ordre:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

  que també es pot enunciar dient que la *matriu Hessiana* és una matriu simètrica.

- La *diferencial* de f al punt z_0 (també se li diu derivada de Fréchet) és una aplicació lineal $Df(z_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{\|f(z_0+h) - f(z_0) - \big(Df(z_0)\big)(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

i la diferencial de la funció component u (anàlogament per a v) és una aplicació lineal $Du(x_0, y_0)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|u((x_0, y_0) + h) - u(x_0, y_0) - \big(Du(x_0, y_0)\big)(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

on en tots dos casos h denota una variable a $\mathbb{R}^2$. Les diferencials de les funcions components són les components de la diferencial de la funció.

- Si la funció és diferenciable en un punt z_0 aleshores necessàriament té totes les derivades parcials i la matriu de la diferencial en la base canònica és la matriu jacobiana:
$$\operatorname{Mat}\big(Df(z_0), \{(1,0),(0,1)\}\big) = Jf(z_0).$$
- Només amb l'existència de parcials no es garanteix la diferenciabilitat. Afegint la continuïtat de les derivades parcials sí que es pot assegurar: si la funció és de classe $\mathscr{C}^1$ en un obert aleshores és diferenciable en tots els punts de l'obert.
- Geomètricament les derivades parcials d'una funció escalar tenen la mateixa interpretació que la derivada d'una funció d'una variable: la pendent de la tangent a la gràfica de la funció en el punt; la diferencial d'una funció escalar s'interpreta com l'hiperplà tangent a la gràfica de la funció en el punt: si $f\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és derivable en x_0 la recta tangent a la seva gràfica en el punt (x_0, y_0), amb $y_0 = f(x_0)$, és la recta d'equació $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$; si $f\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és diferenciable en (x_0, y_0) el pla tangent a la seva gràfica en el punt (x_0, y_0, z_0), on $z_0 = f(x_0, y_0)$, és el pla d'equació $z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$.

En endavant, per a una funció de variable complexa es consideraran els tipus de derivada següents: la derivada en sentit complex, que s'anomenarà simplement *derivada*, les *derivades parcials* respecte cadascuna de les dues variables reals, i l'aplicació lineal *diferencial* en el sentit del càlcul de varies variables. En el cas de la derivació complexa no cal una notació especial per indicar el nombre de vegades que la funció és derivable ja que, com es veurà més endavant, tota funció holomorfa és automàticament infinitament derivable en sentit complex. Per tant, la notació $\mathscr{C}^k$ es farà servir només per indicar derivabilitat en sentit real: totes les derivades parcials k-èsimes existeixen i són contínues.

La relació entre la derivabilitat en sentit complex i en sentit real la donen les equacions de Cauchy-Riemann: per tal que una funció sigui derivable en sentit complex cal no només que sigui diferenciable com a funció de dues variables reals sinó que, a més, cal les seves derivades parcials satisfacin unes identitats: les equacions de Cauchy-Riemann. Aquestes equacions equivalen a què l'aplicació lineal diferencial sigui no només $\mathbb{R}$-lineal sinó també $\mathbb{C}$-lineal.

Teorema 3.7 (Equacions de Cauchy-Riemann) *La funció $f = u + iv$ és derivable en el punt $z_0 = x_0 + iy_0$ si, i només si, és diferenciable en el punt (x_0, y_0) i les derivades parcials de u i v satisfan les* equacions de Cauchy-Riemann*:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{6}$$

En aquest cas, la derivada de f en el punt z_0 pren el valor següent:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{7}$$

PROVA: Primerament es fan algunes observacions

- Quan se satisfan les equacions de Cauchy-Riemann (6) la matriu Jacobiana (5) de f en el punt z_0 agafa la forma:

$$Jf(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

- La funció és derivable en el punt z_0 amb derivada el nombre complex $f'(z_0)$ si, i només si,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) + f'(z_0)h}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h}{h} \right| = 0. \tag{9}$$

- La funció és diferenciable en el punt $z_0 = (x_0, y_0)$ amb diferencial l'aplicació lineal $Df(z_0) \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ si, i només si,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(z_0 + h) - f(z_0) - \big(Df(z_0)\big)(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{10}$$

Suposi's primer que f és derivable en el punt z_0. Aleshores el límit que dóna la derivada ha de ser el mateix quan h tendeix a zero per l'eix real, i per tant

$$\begin{aligned} f'(z_0) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{\substack{t\to 0 \\ t\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

i també quan h tendeix a zero per l'eix imaginari, de manera que

$$\begin{aligned} f'(z_0) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{\substack{t\to 0 \\ t\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} \\ &= -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Això assegura que les derivades parcials existeixen i que la derivada $f'(z_0)$ ve donada per les expressions (7). Igualant les parts reals i imaginàries en aquestes identitats s'obtenen les equacions de Cauchy-Riemann (6).

Es considera l'aplicació lineal $Df(z_0)$ que en la base canònica té per matriu la matriu jacobiana (8). Aleshores, amb la identificació de $\mathbb{C}$ amb $\mathbb{R}^2$, el producte de nombres complexos $f'(z_0)h$ correspon a la imatge $\big(Df(z_0)\big)(h)$ de h per l'aplicació lineal $Df(z_0)$. Com que en aquesta identificació el mòdul complex és la norma Euclidiana, la identitat (9) és equivalent a la identitat (10) i es dedueix que la funció és efectivament diferenciable al punt z_0 i que la seva diferencial és l'aplicació lineal $Df(z_0)$.

Recíprocament, suposi's que f és diferenciable i que les seves derivades parcials satisfan les equacions de Cauchy-Riemann. Aleshores la matriu jacobiana de f en el punt z_0 és la matriu (8), que per ser diferenciable és la matriu de l'aplicació lineal diferencial $Df(z_0)$. Tal com ja s'ha argumentat al paràgraf anterior, en aquesta situació la identitat (9) és equivalent a la identitat (10) i ara es dedueix que la funció és derivable en el punt z_0 i que la seva derivada ve donada per les fórmules (7). □

Exemples. Usant les equacions de Cauchy-Riemann es veu immediatament que moltes funcions que apareixen de manera natural no són derivables. Per exemple:

- Les funcions coordenades $z \mapsto \operatorname{Re} z$ i $z \mapsto \operatorname{Im} z$ que donen la part real i imaginària d'un nombre complex no són derivables en cap punt: la funció $\operatorname{Re}(z)$ té funcions components $u(z) = x$ i $v(z) = 0$ i
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(z)$$
i la funció $\operatorname{Im}(z)$ té funcions components $u(z) = y$ i $v(z) = 0$ i
$$\frac{\partial u}{\partial y}(z) = 1 \neq 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(z).$$
- La funció mòdul $z \mapsto |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ no és derivable en cap punt. Les seves funcions components són $u(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $v(z) = 0$. En els punts $z \neq 0$ existeixen les derivades parcials i:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$
que no es compleix mai, i en el punt $z = 0$ no hi ha ni derivades parcials.
- La conjugació complexa no és derivable en cap punt: les funcions components són $u(z) = x$ i $v(z) = -y$ i
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}(z).$$
- La funció $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ només és derivable en el punt $z = 0$:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 2x = 2y = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 2y = -2x = \frac{\partial v}{\partial x}(z) \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0.$$

- La funció $f(z) = 2|z|^2 - \overline{z}^2 = x^2 + 3y^2 - 2ixy$ només és derivable en el punts de la recta real $z \in \mathbb{R}$:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 2x = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 6y = -2y = \frac{\partial v}{\partial x}(z) \quad \Leftrightarrow \quad y = 0.$$

Observi's que les dues darreres funcions, a pesar de ser derivables en alguns punts, no són holomorfes enlloc: no hi ha cap obert no buit en què siguin derivables.

Operadors diferencials a funcions de variable complexa. Per a funcions de variable complexa, a partir dels operadors diferencials (4) es defineixen els *operadors de Wirtlinger* posant

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Aquests operadors diferencials respecte z i $\overline{z}$ estan definits per a funcions f tals que les seves funcions components u i v tinguin totes dues derivades parcials i són no només $\mathbb{R}$-lineals sinó també $\mathbb{C}$-lineals. No tenen una interpretació natural com una derivada parcial com sí que passa amb els operadors (4) i s'han de considerar únicament des del punt de vista formal. Tot i això tenen la seva utilitat ja que permeten expressar moltes propietats de manera intuïtiva i es comporten de manera anàloga als operadors diferencials sobre els reals. Per exemple, les equacions de Cauchy-Riemann es tradueixen en:

Proposició 3.8 *Una funció diferenciable és derivable en el sentit complex si, i només si,*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0,$$

i en aquest cas la seva derivada és

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

4 Integració. Teorema de Cauchy i conseqüències

En aquesta secció s'estudia la integració de funcions complexes sobre contorns, que és una teoria semblant a la de l'integral de línia del càlcul diferencial. Es consideraran només integrals d'un tipus molt senzill, que es defineixen a continuació:

Definició 4.1 (Integrals de funcions a valors complexos) *Sigui $\phi\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funció definida en un interval real a valors complexos. Sigui $\phi = \mu + i\nu$ la seva descomposició en part real i imaginària, amb $\mu, \nu\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funcions a valors reals. Es defineix la* integral de ϕ a l'interval $[a,b]$ *com el nombre complex*

$$\int_a^b \phi(t)\,dt := \int_a^b \mu(t)\,dt + i\int_a^b \nu(t)\,dt$$

amb parts real i imaginària les integrals de les funcions components.

Aquí les integrals reals s'entén que són les integrals de Riemann ordinàries i moltes propietats de les integrals complexes es dedueixen de les propietats d'aquesta integral. La condició que la funció ϕ sigui contínua és suficient per garantir l'existència de la integral a la definició 4.1.

Proposició 4.2 *La integral de funcions $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ compleix les condicions següents:*

1. *$\mathbb{C}$-linealitat: $\int_a^b (\phi+\psi)(t)\,dt = \int_a^b \phi(t)\,dt + \int_a^b \psi(t)\,dt$; $\int_a^b (w\phi)(t)\,dt = w\int_a^b \phi(t)\,dt$;*
2. *fitació del mòdul: $\left|\int_a^b \phi(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |\phi(t)|\,dt$;*
3. *canvi de variable: si $\rho\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ és un canvi de paràmetre de classe $\mathscr{C}^1$ i ϕ està definida a l'interval $\rho([a,b])$, aleshores $\int_a^b \phi\big(\rho(t)\big)\rho'(t)\,dt = \int_{\rho(a)}^{\rho(b)} \phi(t)\,dt$;*
4. *canvi de signe: $\int_b^a \phi(t)\,dt = -\int_a^b \phi(t)\,dt$.*

Prova:

1. L'additivitat és immediata a partir de la de les integrals reals. Si $w = x+iy$ les funcions components de $w\phi$ són les funcions $x\mu - y\nu$ i $x\nu + y\mu$, i les seves integrals són la part real i la part imaginària del producte $w(\int_a^b \mu(t)\,dt + i\int_a^b \nu(t)\,dt)$.
2. Si $\int_a^b \phi(t)\,dt = 0$ la desigualtat és òbvia. Altrament sigui $\int_a^b \phi(t)\,dt = re^{i\alpha}$ amb r i α el mòdul i l'argument del valor de la integral. Aleshores $r = e^{-i\alpha}\int_a^b \phi(t)\,dt$. Passant $e^{-i\alpha}$ a dins de la integral usant la linealitat i com que r és real es té
$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \phi(t)\,dt\right| = r = e^{-i\alpha}\int_a^b \phi(t)\,dt &= \operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{-i\alpha}\phi(t)\,dt\right)\\ &= \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\alpha}\phi(t)\right)\,dt \leqslant \int_a^b |e^{-i\alpha}\phi(t)|\,dt = \int_a^b |\phi(t)|\,dt\end{aligned}$$
on s'ha fet servir que la part real d'un nombre complex és $\leqslant$ que el seu mòdul i que la integral de funcions reals respecta les desigualtats.
3. La identitat val per a les parts real i imaginària de ϕ gràcies al teorema del canvi de variable per a funcions reals:
$$\int_a^b \mu\big(\rho(t)\big)\rho'(t)\,dt = \int_{\rho(a)}^{\rho(b)} \mu(t)\,dt, \qquad \int_a^b \nu\big(\rho(t)\big)\rho'(t)\,dt = \int_{\rho(a)}^{\rho(b)} \nu(t)\,dt,$$
i d'això es dedueix la identitat també per a ϕ.
4. El canvi de signe és un conveni, o una conseqüència de la definició, segons com es faci aquesta, que val per a funcions reals, i aquesta propietat es trasllada a les funcions complexes. □

4.1 Integral de contorn

El concepte de corba o camí apareix en moltes branques de les matemàtiques, especialment a càlcul diferencial, a càlcul integral i a topologia. A continuació es donen algunes definicions i notacions (la terminologia pot canviar lleugerament segons les fonts). Tota l'estona $\mathcal{U}$ denotarà un obert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, ja que les corbes que interessen aquí són corbes al pla complex.

- Una *corba* (a topologia se li diu també *camí*) a $\mathcal{U}$ és una aplicació contínua

$$\gamma \colon [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{U}$$

  d'un interval tancat (compacte) de $\mathbb{R}$ amb imatge dins de $\mathcal{U}$.

- Els seus *extrems* són $\gamma(a)$ (*origen*) i $\gamma(b)$ (*final*).

- Es diu *tancada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

- Es diu *simple* si és injectiva, amb l'única possible excepció dels extrems: els únics punts de $[a, b]$ que poden tenir la mateixa imatge són els extrems a i b.

- Una corba *trivial* o *constant* és una aplicació constant: la imatge és un únic punt.

- No s'ha de confondre la corba, que és l'aplicació contínua γ, amb la seva imatge $\gamma^* = \gamma\big([a, b]\big)$, que és un subconjunt (compacte) de $\mathcal{U}$. De vegades el terme corba es fa servir per referir-se a aquesta imatge γ^* i aleshores per distingir-la de l'aplicació γ aquesta s'anomena *corba parametritzada*. Hi ha moltes corbes parametritzades diferents que tenen la mateixa corba imatge.

- Si γ_1 i γ_2 són corbes tals que el final de γ_1 és l'origen de γ_2 es defineix de manera natural la seva *concatenació*, que és una corba amb origen el de γ_1 i final el de γ_2. Una notació habitual per a la concatenació de corbes és $\gamma_1 + \gamma_2$ (observi's però que la concatenació no és commutativa).

- Una corba *llisa* és una corba γ de classe $\mathscr{C}^1$ (com a funció a valors en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{C}$, tant se val). Si a més es compleix que $\gamma'(t) \neq 0$ per a tot $t \in [a, b]$ (als extrems derivades laterals) se li diu *regular*. De vegades en la definició de corba llisa ja s'inclou la condició que la derivada sigui no nul·la. Geomètricament, la condició de regularitat significa que la corba té tangent en tots els punts.

- Una *corba llisa a trossos* és una corba obtinguda per concatenació de (un nombre finit de) corbes llises: és contínua a tot $[a, b]$ i de classe $\mathscr{C}^1$ excepte en un conjunt finit de punts. És una *corba regular a trossos* si s'afegeix la condició de derivada no nul·la; en aquest cas, en el conjunt finit de punts on no es derivable es requereix que les derivades laterals siguin no nul·les.

- Una *reparametrització* (o *canvi de paràmetre*) és una aplicació contínua bijectiva $\rho \colon [c, d] \to [a, b]$, que necessàriament és un homeomorfisme: té inversa que també és contínua. Es diu positiva o negativa segons que ρ sigui creixent o decreixent.

- Dues corbes $\gamma_1\colon [a,b]$ i $\gamma_2\colon [c,d] \to \mathcal{U}$ són *equivalents llevat de reparametrització* si existeix un canvi de paràmetre positiu ρ tal que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \rho$. Es denota $\gamma_1 \equiv \gamma_2$. Això és una relació d'equivalència que respecta la concatenació de corbes. En particular, llevat de reparametrització es pot suposar que tota corba està parametritzada a l'interval $[a,b] = [0,1]$.
- Es denota $-\gamma$ una corba obtinguda a partir de γ amb una reparametrització negativa. Intuïtivament es tracta de "la mateixa" corba però recorreguda en sentit contrari. És clar que $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \Leftrightarrow -\gamma_1 \equiv -\gamma_2$.
- Per a corbes llises es demana que els canvis de paràmetre siguin funcions de classe $\mathscr{C}^1$ amb derivada no nul·la (que tenen inversa també de classe $\mathscr{C}^1$ amb derivada no nul·la), de tal manera que en reparametritzar no es perdin les propietats de la corba.
- Dues corbes amb el mateix origen i final contingudes a $\mathcal{U}$ són *homòtopes sobre* $\mathcal{U}$ si l'una es pot deformar en l'altra sense sortir de $\mathcal{U}$ i mantenint els extrems fixats. Això vol dir que existeix una aplicació contínua $\phi\colon [a,b] \times [0,1] \to \mathcal{U}$ tal que en el segment $[a,b] \times \{0\}$ és una de les corbes, en el segment $[a,b] \times \{1\}$ és l'altra, en el segment $\{a\} \times [0,1]$ és l'origen de totes dues i en el segment $\{b\} \times [0,1]$ és el final de totes dues. El fet de ser homòtopes és una relació d'equivalència que respecta la concatenació de corbes. Una corba tancada a $\mathcal{U}$ és *contràctil* a $\mathcal{U}$ si és homòtopa sobre $\mathcal{U}$ a una corba trivial.
- L'obert $\mathcal{U}$ es diu *simplement connex* si tota corba tancada és homòtopa a una corba trivial (constant igual a un punt).
- La *longitud* d'una corba γ és $\ell(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \right\} \in [0,\infty]$, on el suprem s'agafa sobre totes les particions $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ de l'interval $[a,b]$. La corba es diu *rectificable* si té longitud finita. La longitud és additiva respecte la concatenació i és un invariant de la classe de reparametrització (però no de la classe d'homotopia).
- Tota corba de classe $\mathscr{C}^1$ és rectificable, amb longitud $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$.

Per a la integració complexa es treballa gairebé sempre amb corbes que són regulars a trossos. Tot i que la gran majoria de resultats valen per a corbes llises o llises a trossos, el tipus de corbes que es apareixeran en endavant són majoritàriament els següents:

Definició 4.3 (Corba regular) *Una* corba (parametritzada) regular *en un obert complex $\mathcal{U} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ és una funció $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{U}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tal que $\gamma'(t)$ no s'anul·la en cap punt de $[a,b]$ (als extrems les derivades laterals).*

Definició 4.4 (Contorn) *Un* contorn *és una corba regular trossos. Es pot pensar que és una concatenació de corbes regulars o també directament com una corba $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{U}$ que és contínua a tot l'interval i és de classe $\mathscr{C}^1$ amb derivada $\gamma'(t) \neq 0$ excepte a un nombre finit de punts de l'interval en els quals té derivades laterals no nul·les.*

Es consideraran només reparametritzacions que siguin de classe $\mathscr{C}^1$ amb derivada no nul·la, per tal que en canviar de paràmetre un contorn sigui essent un contorn.

Exemples. Alguns exemples importants de contorns que apareixen sovint són:

- El *segment* que uneix z_0 amb z_1, que es pot parametritzar amb paràmetre a l'interval $[0,1]$ posant $\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$. La tangent és constant $\gamma'(t) = z_1 - z_0$. La seva longitud és $|z_1 - z_0|$. Es denotarà $\gamma_{z_0 \to z_1}$.
- La *poligonal* que uneix els punts $z_0, z_1, \ldots, z_n$, que s'obté concatenant els n segments que uneixen cada parell de punts consecutius. És tancada si $z_0 = z_n$. La seva longitud és la suma $\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$. Es denotarà $\gamma_{z_0 \to z_1 \to \cdots \to z_n}$. Com a cas particular es poden considerar les *poligonals esgraonades*, que uneixen els punts usant només segments horitzontals o verticals. Un cas especialment important que sortirà sovint més endavant és el dels triangles: poligonals tancades que s'obtenen unint tres punts.
- La circumferència de centre z_0 i radi r recorreguda en sentit positiu (antihorari) amb punt inicial i final el punt $z_0 + r$, que es pot parametritzar a l'interval $[0, 2\pi]$ posant $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$. La tangent és $\gamma'(t) = ire^{it} = re^{i(t+\pi/2)}$. La seva longitud és $\int_\gamma |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |ire^{it}|\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r$. De vegades la notació $C = C(z_0; r)$, que es refereix a la circumferència com a conjunt, es farà servir també per denotar aquesta circumferència parametritzada.
- Es poden considerar també arcs de circumferència agafant l'aplicació γ de l'exemple anterior amb paràmetre variant en altres intervals $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
- Donat un contorn $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ es pot considerar el contorn que té la mateixa imatge però la recorre en sentit contrari, que s'obté amb un canvi de paràmetre negatiu; per exemple amb la reparametrització negativa $t \mapsto a+b-t\colon [a, b] \to [a, b]$ és el contorn $t \mapsto \gamma(a + b - t)$ amb paràmetre $t \in [a, b]$, o amb la reparametrització negativa $t \mapsto -t\colon [-b, -a] \to [a, b]$ és el contorn $t \mapsto \gamma(-t)$ amb paràmetre $t \in [-b, -a]$. Se sol denotar $-\gamma$ o també γ^-.

Com que es vol poder treballar tota l'estona amb corbes que són contorns és útil disposar del resultat següent:

Lema 4.5 *Dos punts qualsevol d'un obert arc-connex es poden unir amb un contorn contingut a l'obert. De fet, es poden unir per una poligonal o fins i tot per una poligonal esglaonada.*

Prova: Siguin $z_0, z_1 \in \Omega$ dos punts de l'obert arc-connex Ω. Per hipòtesi existeix una aplicació contínua $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$ que uneix z_0 amb z_1. Sigui $I \subseteq [a, b]$ el subconjunt format pels punts $t \in [a, b]$ tals que els dos punts $z_0 = \gamma(a)$ i $\gamma(t)$ es poden unir amb un contorn. És un conjunt no buit ja que conté a; de fet conté segur punts $> a$ ja que donat un $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{D}(z_0; \epsilon) \subset \Omega$ existeix un $\delta > 0$ tal que $\gamma([a, a+\delta)) \subset \mathcal{D}(z_0; \epsilon)$ i, per tant, els punts $z_0 = \gamma(a)$ i $\gamma(a + \frac{\delta}{2})$ es poden unir amb un segment contingut a $\mathcal{U}$ ja que tots dos estan dins d'un disc contingut a $\mathcal{U}$.

El conjunt I està fitat superiorment per b. Sigui β el seu suprem. Es vol demostrar que $\beta = b$. Suposi's que no, i que $a < \beta < b$. Per continuïtat en $t = \beta$ sigui $\delta > 0$ tal que $f((\beta - \delta, \beta + \delta)) \subset \mathcal{D}(f(\beta); \epsilon) \subset \Omega$. Com que $\beta - \delta$ no és fita superior existeix un

$t \in I$ amb $\beta - \delta < t \leqslant \beta$. El punt z_0 es pot unir a través d'un contorn amb el punt $\gamma(t)$ i aquest punt es pot unir amb un segment amb el punt $\gamma(\beta + \frac{\delta}{2})$, ja que tots dos estan dins d'un disc contingut a Ω. Concatenant tots dos contorns es veu que $\beta + \frac{\delta}{2} \in I$, que és una contradicció.

Finalment es pot veure que b no només és el suprem sinó que de fet pertany a I, amb un argument semblant a l'anterior. Per tant $z_0 = \gamma(a)$ i $z_1 = \gamma(b)$ es poden unir efectivament amb un contorn, que, si es vol, es pot demanar que sigui una poligonal o fins i tot una poligonal esglaonada. $\square$

Definició 4.6 (Integral de contorn) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ definida a un obert $\mathcal{U}$ i sigui $\gamma\colon [a, b] \to \mathcal{U}$ un contorn. La* integral de contorn *de f sobre γ es defineix com:*

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f\bigl(\gamma(t)\bigr)\gamma'(t)\, dt. \tag{11}$$

La integral de contorn existeix sempre que existeixi la integral de la funció $[a, b] \to \mathbb{C}$ definida per $\phi(t) = \bigl(\gamma(t)\bigr)\gamma'(t)$; per exemple, n'hi ha prou que la funció f sigui contínua, però això no és necessari: si es canvia el valor de la funció f en un conjunt finit de punts la integral segueix existint i val igual.

Observi's que a la definició anterior la derivada $\gamma'(t)$ pot no estar definida en un nombre finit de punts de l'interval $[a, b]$; això no afecta el valor de la integral. Alternativament, es podria definir amb la fórmula (11) només la integral d'una corba regular i després definir la integral sobre un contorn com la suma de les integrals de les corbes regulars de les quals és concatenació. Totes dues definicions són equivalents.

Segons la definició 4.1 la integral de contorn (11) s'obté integrant les funcions components de $\phi(t) = f\bigl(\gamma(t)\bigr)\gamma'(t)$. Si $f = u + iv$ i $\gamma = x + iy$ són les funcions components, les funcions components de ϕ es calculen a partir d'elles. Posant $\phi(t) = \mu(t) + i\nu(t)$, són:

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= u\bigl(x(t), y(t)\bigr)x'(t) - v\bigl(x(t), y(t)\bigr)y'(t),\\
\nu(t) &= u\bigl(x(t), y(t)\bigr)y'(t) + v\bigl(x(t), y(t)\bigr)x'(t),
\end{aligned}$$

i s'obté l'expressió següent per a la integral de contorn en termes d'integrals reals:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f\bigl(\gamma(t)\bigr)\gamma'(t)\, dt = \int_a^b \mu(t)\, dt + i\int_a^b \nu(t)\, dt.$$

Exemple. L'exemple més important d'integral de contorn complexa és el següent: donat un punt $z_0 \in \mathbb{C}$ la funció $\frac{1}{z-z_0}$ és contínua (i holomorfa) a tot $\mathbb{C} \smallsetminus \{z_0\}$. Per a tota circumferència $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ parametritzada a l'interval $[0, 2\pi]$, tenint en compte que $\gamma'(t) = ire^{it}$, la integral dóna

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i \tag{12}$$

independentment de quin sigui el radi r de la circumferència.

Proposició 4.7 *Propietats de la integral de contorn:*

1. *És invariant per canvis de paràmetre positius: si $\gamma_1 \equiv \gamma_2$,*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

2. *Canvia de signe en fer un canvi de paràmetre negatiu:*

$$\int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)\, dz.$$

3. *Fitació: si $|f(z)| \leqslant M$ per a tot $z \in \mathrm{Im}(\gamma)$, aleshores*

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\, dz\right| \leqslant \int_{\gamma} |f(z)|\, dz \leqslant M\ell(\gamma).$$

PROVA:

1. És una conseqüència del teorema del canvi de variable.
2. Es demostra també a partir del teorema del canvi de variable fent un canvi de paràmetre negatiu de la corba. Se suposa, per simplificar la notació, que l'interval del paràmetre és $[0,1]$. Aleshores

$$\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = \int_0^1 f(\gamma^-(t))(\gamma^-)'(t)\, dt = \int_0^1 f(\gamma(1-t))(-\gamma(1-t))\, dt$$

   i, fent el canvi de paràmetre $t \mapsto 1-\tau$ la integral es converteix en

$$\int_1^0 f(\gamma(\tau))(-\gamma'(\tau))\,(-d\tau) = -\int_0^1 f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)\, d\tau = -\int_{\gamma} f(z)\, dz$$

3. És conseqüència del comportament respecte el valor absolut de les integrals complexes vist a la proposició 4.2. Es té:

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\, dz\right| = \left|\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\, dt\right| \leqslant \int_a^b \left|f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\right|\, dt$$
$$\leqslant M\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = M\ell(\gamma). \qquad \square$$

Teorema 4.8 (Convergència uniforme i integració) *Sigui* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *un contorn amb imatge* $\gamma^* = \gamma\big([a,b]\big)$*. Si* (f_n) *és una successió de funcions contínues uniformement convergent sobre el compacte* γ^* *cap a una funció* f *aleshores*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

Es compleix el resultat anàleg per a sèries uniformement convergents sobre γ^**:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz.$$

PROVA: Primerament s'observa que la funció f també és contínua gràcies al teorema 2.12, i per tant les integrals de l'enunciat estan totes definides. Donat un $\epsilon > 0$ es pot fer que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ per a tot $z \in \gamma^*$ agafant un n prou gran. Aleshores

$$\left| \int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right| = \left| \int_\gamma \big(f_n(z) - f(z)\big)\,dz \right| \leqslant \epsilon \ell(\gamma)$$

per a n prou gran. Com que això val per a tot $\epsilon > 0$ es dedueix que $\int_\gamma f(z)\,dz = \lim \int_\gamma f_n(z)\,dz$. Anàlogament per a sèries. $\square$

Notacions i convenis. Per simplificar les notacions de vegades es denota

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz := \int_{\gamma_{z_1\to z_2}} f(z)\,dz$$

la integral sobre el segment que uneix z_1 amb z_2;

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(z)\,dz$$

quan està clara la variable d'integració;

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz := \int_{C(z_0;r)} f(z)\,dz$$

és la integral sobre la circumferència de radi r i centre z_0 recorreguda en sentit positiu segons la parametrització habitual;

$$\left[\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \cdots + \int_{\gamma_n} \right] f$$

és la suma de les integrals sobre cada contorn γ_i; si γ és la concatenació dels contorns γ_i això coincideix amb $\int_\gamma f$.

També és convenient de vegades considerar sumes formals de contorns $c = \sum n_i \gamma_i$ que no necessàriament es poden concatenar (els finals i orígens no tenen perquè coincidir). Aquestes sumes formals s'anomenen *cadenes* a $\mathbb{C}$ i, apart de ser una eina bàsica de la topologia algebraica, permeten simplificar expressions on apareixen sumatoris d'integrals sobre diversos contorns posant

$$\int_c f := \sum n_i \int_{\gamma_i} f.$$

4.2 Teorema fonamental del càlcul

El teorema fonamental del càlcul relaciona derivació amb integració i n'hi ha versions per a diferents classes de funcions i integrals.

En càlcul d'una variable real aquest teorema diu que:

- per a tota funció $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua* la funció $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ és una primitiva: és contínua a $[a,b]$ i $F'(x) = f(x)$ a (a,b);
- si la funció contínua F és una primitiva de la funció integrable $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gairebé a tot punt: $F'(x) = f(x)$ per a tot $x \in (a,b)$ llevat d'un nombre finit, aleshores $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Les dues afirmacions se solen conèixer com a primer i segon teorema fonamental del càlcul, respectivament. Diversos resultats del càlcul integral es poden considerar generalitzacions seves: teorema del gradient, teorema de Green, teorema de Stokes, etc.

En aquesta secció es veurà el teorema fonamental del càlcul per a variable complexa. La segona part, que calcula integrals avaluant una primitiva en els extrems, es dedueix del seu anàleg real:

Teorema 4.9 (Segon teorema fonamental del càlcul) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció contínua que admet una primitiva F a un obert $\mathcal{U}$. Per a tot contorn $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{U}$ es té:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

Prova: N'hi ha prou a demostrar-ho per a una corba regular: per a una corba regular a trossos s'aplica sobre cada tros i s'obté el mateix resultat a partir de la suma telescòpica sobre els extrems dels paràmetres.

Siguin $F = U + iV$ i $\gamma = x + iy$ les funcions components. Es considera la funció $F \circ \gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ amb components $U \circ \gamma = U\big(x(t), y(t)\big)$ i $V \circ \gamma = V\big(x(t), y(t)\big)$. La derivada de la primera funció component respecte de t és:

$$\frac{d\,U \circ \gamma}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\big(x(y), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t).$$

Sigui $f = u + iv$. El fet que sigui $F' = f$ equival a què $u = \frac{\partial U}{\partial x}$ i $v = \frac{\partial V}{\partial x}$. Usant les equacions de Cauchy Riemann es dedueix que:

$$\frac{d\, U \circ \gamma}{dt} = u\big(x(t), y(t)\big)x'(t) - v\big(x(t), y(t)\big)y'(t) = \operatorname{Re}\big(f(\gamma(t))\gamma'(t)\big),$$

i per tant la part real de la integral és

$$U\big(x(b), y(b)\big) - U\big(x(a), y(a)\big) = U\big(\gamma(b)\big) - U\big(\gamma(a)\big).$$

Anàlogament passa amb la part imaginària, i es dedueix el teorema. □

Corol·lari 4.10 *Si la funció contínua $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ admet una primitiva a $\mathcal{U}$ la integral sobre tot contorn tancat val zero.*

De manera equivalent: la integral sobre un contorn qualsevol només depèn dels seus punts inicial i final, i no del contorn concret que uneix l'un amb l'altre.

Corol·lari 4.11 *Una funció holomorfa en un obert connex amb derivada zero és constant.*

PROVA: Sigui $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa a l'obert Ω connex i amb $f'(z) = 0$ per a tot $z \in \Omega$. Es fixa un punt $z_0 \in \Omega$. Donat un punt $z \in \Omega$ sigui $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$ un contorn amb origen a z_0 i final a z (vegi's el lema 4.5). Aleshores

$$0 = \int_\gamma f'(z)\, dz = f(z) - f(z_0) \quad \Rightarrow \quad f(z) = f(z_0),$$

i en tots els punts la funció pren el mateix valor que a z_0.

Observi's que això es pot demostrar sense fer servir res d'integració complexa només a partir del fet que les parcials de la funció són idènticament nul·les. □

La primera part, que dóna una primitiva de la funció, es demostra essencialment igual que el resultat corresponent de variable real. Aquí, però, per a l'existència de primitiva no n'hi ha prou amb la continuïtat de la funció com passa en els reals, sinó que la funció ha de complir una hipòtesi addicional molt forta: que la integral sobre tot contorn tancat sigui zero. El teorema de Cauchy, que es veurà a la propera secció, dóna condicions per tal que aquesta condició es compleixi.

Teorema 4.12 (Primer teorema fonamental del càlcul) *Tota funció contínua a un obert $\mathcal{U}$ tal que la integral sobre tot contorn tancat és zero té una primitiva a $\mathcal{U}$.*

Si $\mathcal{U}$ és un disc n'hi ha prou que la integral sobre tot triangle sigui zero.

PROVA: Es farà la demostració per a un obert connex. En un obert qualsevol es pot fer el mateix sobre cada component connexa.

Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ contínua amb $\mathcal{U}$ obert connex tal que $\int_\gamma f = 0$ per a tot camí tancat γ a $\mathcal{U}$. Es fixa un punt $z_0 \in \mathcal{U}$ i es defineix

$$F(z) = \int_{\gamma[z_0, z]} f(w)\, dw,$$

on $\gamma[z_0, z]$ és un contorn qualsevol amb origen z_0 i final z. El fet que $\mathcal{U}$ sigui connex (i, per tant, arc-connex) i la condició que la integral sobre tot contorn tancat sigui zero garanteixen que aquesta funció està definida en tots els punts, ja que existeix algun contorn que uneix z_0 amb el punt, i està ben definida ja que el valor de F no depèn del contorn.

Sigui $z \in \mathcal{U}$ un punt qualsevol de $\mathcal{U}$. Per a valors de h prou petits els punts $z + h$ estan en un disc obert $\mathcal{D}(z; r) \subseteq \mathcal{U}$, i per tant el segment $\gamma_{z \to z+h}$ que uneix tots dos punts està contingut a $\mathcal{U}$. Usant el fet que la integral en un contorn tancat és zero en el cas del contorn tancat que s'obté com a concatenació de $\gamma[z_0, z]$, $\gamma_{z \to z+h}$ i $-\gamma[z_0, z_0 + h]$ s'obté:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma[z_0, z+h]} f(w)\, dw - \int_{\gamma[z_0, z]} f(w)\, dw = \int_{\gamma_{z \to z+h}} f(w)\, dw.$$

Com que f és contínua a z es pot escriure $f(w) = f(z) + \psi(w)$ amb ψ una funció que té límit zero en z. Aleshores

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z \to z+h}} f(z)\, dw + \int_{\gamma_{z \to z+h}} \psi(w)\, dw.$$

Com que la funció constant $f(z)$ té una primitiva $f(z)w$ la primera integral s'obté restant el valor d'aquesta primitiva en els extrems del contorn, que dóna $f(z)h$. Pel que fa a la segona integral es té

$$\int_{\gamma_{z \to z+h}} \psi(w)\, dw = \int_0^1 \psi(z + th) h\, dt = h \int_0^1 \psi(z + th)\, dt.$$

Per la continuïtat de ψ a z, donat un $\epsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que $|w - z| < \delta \Rightarrow |\psi(w)| < \epsilon$ i, per tant, si $|z + th - z| = |th| \leqslant |h| < \delta$ aleshores $|\psi(z + th)| < \epsilon$. Aleshores,

$$|h| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \int_0^1 \psi(z + th)\, dt \right| = \int_0^1 |\psi(z + th)|\, dt \leqslant \epsilon,$$

i per tant F és derivable a z amb derivada $F'(z) = f(z)$.

En el cas que $\mathcal{U}$ sigui un disc es pot definir la funció F usant només contorns $\gamma[z_0, z]$ que siguin segments, ja que el conjunt és convex i conté els segments que uneixen dos punts qualsevol. L'argument de la demostració en aquest cas només requereix que la integral sobre contorns triangulars sigui zero. $\square$

Els dos teoremes fonamentals són totalment anàlegs al teorema del gradient en la teoria de la integral de línia, que assegura que la integral de línia d'un camp vectorial que és el gradient d'un camp escalar és la diferència entre els valors en els extrems de la corba, i el seu invers, que diu que tot camp vectorial conservatiu (la integral de línia de tota corba tancada és zero) és el gradient d'algun camp escalar. Les demostracions són anàlogues en totes dos casos.

4.3 El Teorema de Cauchy

En càlcul d'una variable el sol fet que una funció $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sigui contínua en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ ja permet construir una primitiva posant

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx, \qquad t \in I,$$

on t_0 és un punt qualsevol de I fixat.

En variable complexa la manera de construir una primitiva d'una funció $f\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en un obert $\mathcal{U}$ és anàloga usant integrals de contorn. Aquí, però, un cop fixat un punt z_0 de $\mathcal{U}$ hi ha molts contorns que l'uneixen amb un altre punt $z \in \mathcal{U}$ i cal que el valor de la integral no depengui del contorn triat. Aquesta propietat no es compleix amb l'única condició que la funció sigui contínua (per poder integrar) i que $\mathcal{U}$ sigui connex (per tal que existeixin contorns que uneixen z_0 amb z) tal i com passa a $\mathbb{R}$. Calen més condicions tant sobre la funció f com sobre l'obert $\mathcal{U}$. D'una banda cal que la funció sigui holomorfa; això és perquè, tal com es veurà més endavant, i a diferència del que passa a $\mathbb{R}$, la derivada d'una funció holomorfa és automàticament holomorfa (i, per tant, infinitament derivable), de manera que les funcions no holomorfes no poden tenir primitiva. D'altra banda calen condicions topològiques sobre l'obert $\mathcal{U}$: ha de ser simplement connex (no pot tenir forats).

El resultat que assegura que, en les condicions esmentades, la integral només depèn dels punts inicial i final, es coneix amb el nom de *Teorema de Cauchy* i és un dels resultats principals de la teoria de la variable complexa.

Per a la majoria d'aplicacions n'hi ha prou amb versions del teorema sobre oberts $\mathcal{U}$ que siguin més simples, com ara conjunts convexos o estrellats; la versió més general es pot deduir a partir d'aquests casos particulars amb una mica de feina. El teorema es demostrarà en tres passos. En el primer es consideraran només contorns d'un tipus molt simple: triangles. En el segon el conjunt on està definida la funció és un disc i els contorns són poligonals. En el tercer i més general la funció està definida en un obert simplement connex i els contorns són arbitraris.

Triangles. En endavant, i per a l'enunciat i la demostració del teorema de Goursat, es consideraran entorns que són triangles $T = \gamma_{z_0 \to z_1 \to z_2 \to z_0}$, on z_0, z_1, z_2 són tres complexos no alineats. Aquests entorns són la vora $\partial\mathscr{T}$ del *triangle sòlid* o *regió triangular*

$$\mathscr{T} = \{t_0 z_0 + t_1 z_1 + t_2 z_2 : t_i \geqslant 0, t_0 + t_1 + t_2 \leqslant 1\}.$$

A l'hora d'integrar sobre entorns com aquests es demanarà que la funció estigui definida a un obert que contingui no només el triangle T sinó també tota la regió triangular $\mathscr{T}$; és a dir, que el domini de definició, i on ha de tenir les propietats que es demanin, no pot tenir forats a l'interior de la regió triangular.

Teorema 4.13 (Teorema de Goursat) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa en un obert $\mathcal{U}$ que contingui el triangle sòlid $\mathscr{T}$ i la seva vora $T = \partial\mathscr{T}$. Aleshores:*

$$\int_T f(z)\,dz = 0.$$

PROVA: Sigui $T = \partial\mathscr{T}$ el triangle de l'enunciat, vist com a contorn poligonal tancat amb una orientació qualsevol, que depèn d'una ordenació dels tres vèrtexs. El resultat de la integral serà zero, independentment de l'orientació triada. Siguin d el seu diàmetre, que és la longitud del costat més llarg, i p el seu perímetre, que és la suma de les longituds dels costats. Unint amb segments els punts mitjos dels tres costats, el triangle sòlid $\mathscr{T}$ es descompon en quatre triangles sòlids $\mathscr{T}^{(i)}$ que comparteixen els costats que queden a l'interior de $\mathscr{T}$. Les seves vores $T^{(i)} = \partial\mathscr{T}^{(i)}$ s'orienten de manera apropiada per tal que els segments interns que pertanyen a dos triangles tinguin orientacions diferents i les seves integrals es cancel·lin. Si z_1, z_2, z_3 són els vèrtexs del triangle T, ordenats segons l'orientació fixada, aquests quatre triangles tenen els vèrtexs següents, donats també en l'ordre corresponent a l'orientació (feu un dibuix):

$$z_1, \frac{1}{2}(z_1+z_2), \frac{1}{2}(z_1+z_3); \quad z_2, \frac{1}{2}(z_2+z_3), \frac{1}{2}(z_2+z_1); \quad z_3, \frac{1}{2}(z_3+z_1), \frac{1}{2}(z_3+z_2);$$

$$\text{i} \qquad \frac{1}{2}(z_1+z_2), \frac{1}{2}(z_2+z_3), \frac{1}{2}(z_3+z_1).$$

Tots quatre triangles tenen el mateix diàmetre i perímetre, que són la meitat dels del triangle inicial: $d(T^{(i)}) = \frac{1}{2}d(T) = \frac{1}{2}d$ i $p(T^{(i)}) = \frac{1}{2}p(T) = \frac{1}{2}t$.

Tal com s'han orientat els contorns $T^{(i)}$ respecte la orientació de T es té:

$$\int_T f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{T^{(i)}} f(z)\,dz.$$

Sigui T_1 el triangle, d'entre els quatre $T^{(i)}$, que té el mòdul de la integral més gran:

$$T_1 = T^{(i)} \qquad \text{si} \quad \left| \int_{T^{(i)}} f(z)\,dz \right| \geqslant \left| \int_{T^{(j)}} f(z)\,dz \right|, \quad j = 1,2,3,4.$$

Es denoten d_1 i p_1 el diàmetre i el perímetre de T_1. Es té:

$$\left| \int_T f(z)\,dz \right| \leqslant 4 \left| \int_{T_1} f(z)\,dz \right|, \qquad d_1 = \frac{1}{2}d, \quad p_1 = \frac{1}{2}p.$$

Es repeteix la maniobra dividint el triangle T_1 en quatre de més petits, de diàmetres i perímetres d_2 i p_2, i s'obté un triangle T_2 amb:

$$\left| \int_{T_1} f(z)\,dz \right| \leqslant 4 \left| \int_{T_2} f(z)\,dz \right|, \qquad d_2 = \frac{1}{2}d_1, \quad p_2 = \frac{1}{2}p_1.$$

Repetint el procés es construeix una successió de triangles $T_0 = T, T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ de diàmetres d_n i perímetres p_n tals que:

$$\left|\int_T f(z)\,dz\right| \leqslant 4^n \left|\int_{T_n} f(z)\,dz\right|, \qquad d_n = \frac{d}{2^n}, \quad p_n = \frac{p}{2^n}.$$

Sigui, per a cada $n \geqslant 0$, $\mathscr{T}_n$ el triangle sòlid del qual T_n és la vora. Els $\mathscr{T}_n$ són compactes no buits que formen una cadena decreixent $\mathscr{T}_0 = \mathscr{T} \supset \mathscr{T}_1 \supset \cdots \supset \mathscr{T}_n \supset \ldots$ i els seus diàmetres, que són els del triangle vora T_n, tendeixen a zero. Per tant, la intersecció de tots ells consisteix en un únic punt z_0, que es pot obtenir com el límit de qualsevol successió (que serà de Cauchy) construïda agafant un punt de cadascun d'ells.

Per ser f holomorfa en z_0 es pot escriure:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0)$$

amb ψ una funció definida a $\mathcal{U}$ que té límit zero en el punt z_0. Calculant la integral de f segons aquesta descomposició s'obté:

$$\begin{aligned}\int_{T_n} f(z)\,dz = \int_{T_n} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\big)\,dz + \int_{T_n} \psi(z)(z - z_0)\,dz \\ = \int_{T_n} \psi(z)(z - z_0)\,dz\end{aligned}$$

ja que la funció polinòmica $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ té una primitiva $f(z_0)z + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2$ a tot el pla complex i per tant la integral d'aquesta funció sobre tot contorn tancat és zero.

Sigui, per a cada $n \geqslant 0$, $\epsilon_n = \sup\{|\psi(z)| : z \in T_n\}$. El fet que ψ tingui límit zero en el punt z_0 assegura que $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$. En efecte, donat un $\epsilon > 0$ sigui δ tal que $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |\psi(z)| < \frac{1}{2}\epsilon$ Sigui N un enter tal que $d_N < \delta$. Aleshores, si $n \geqslant N$, per a tot punt $z \in T_n$ es té $|z - z_0| \leqslant d_n \leqslant d_N < \delta \Rightarrow |\psi(z)| < \frac{1}{2}\epsilon$, i es dedueix que $\epsilon_n \leqslant \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$.

Aleshores el suprem de la funció $\psi(z)(z - z_0)$ al triangle T_n és menor o igual que $\epsilon_n d_n$ i, per tant,

$$\left|\int_{T_n} \psi(z)(z - z_0)\,dz\right| \leqslant \epsilon_n d_n p_n,$$

d'on es dedueix que

$$\left|\int_T \psi(z)(z - z_0)\,dz\right| \leqslant 4^n \epsilon_n d_n p_n = \epsilon_n d p,$$

i aquesta fita tendeix a zero quan n creix, de manera que la integral ha de ser zero. $\square$

De vegades el Teorema de Goursat s'enuncia i demostra per a rectangles en comptes de triangles. L'argument de la demostració és exactament el mateix. Com a conseqüència s'obté immediatament el

Teorema 4.14 (Teorema de Cauchy a un disc) *Si $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ és holomorfa a un disc obert $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$, la integral de f sobre tot contorn tancat és zero.*

PROVA: El teorema de Goursat assegura que la integral és zero sobre tots els contorns poligonals triangulars, ja que els seus interiors estan continguts a l'obert. Això ja és suficient per assegurar l'existència d'una primitiva. En efecte, tot i que el teorema 4.12 requereix que la integral sigui zero sobre tot contorn tancat, en el cas d'un disc es pot fer exactament la mateixa demostració només amb la hipòtesi que els integrals sobre triangles siguin zero, ja que en aquest cas el punt base z_0 i els punts z i $z+h$ de l'argument de la demostració es poden unir amb un triangle gràcies a què l'obert on es treballa és un disc (aquest argument, i per tant el teorema, també serveixen si l'obert és convex —per exemple un rectangle— i també si és un obert estrellat).

Un cop vist que la funció té una primitiva l'enunciat és conseqüència del corol·lari 4.10 del segon teorema fonamental. $\square$

Teorema 4.15 (Teorema de Cauchy) *Si $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és holomorfa a un obert simplement connex $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$, la integral de f sobre tot contorn tancat és zero.*

PROVA: La condició de simplement connex implica que tot contorn tancat és homòtop al contorn trivial (corba constant igual al punt origen i final del camí tancat). Això equival a dir que dos contorns qualsevol amb el mateix origen i final són homòtops. L'enunciat del teorema és doncs equivalent a dir que la integral sobre un contorn només depèn dels seus punts inicials i finals i no del contorn concret; és a dir, que la integral sobre dos contorns homòtops dóna el mateix.

Siguin $\gamma_1, \gamma_2\colon [a,b] \to \mathcal{U}$ contorns homòtops. Per definició això vol dir que existeix una funció contínua $\phi\colon [0,1] \times [a,b] \to \mathcal{U}$ tal que $\phi(0,t) = \gamma_1(t)$ i $\phi(1,t) = \gamma_2(t)$ per a tot $t \in [a,b]$ i $\phi(s,a) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ i $\phi(s,b) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ per a tot $s \in [0,1]$.

El rectangle $[0,1] \times [a,b]$ és un compacte i la seva imatge $K := \phi\big([0,1] \times [a,b]\big)$ també ho és. Sigui $r = d(K, \mathcal{U}^c) > 0$ la distància d'aquest compacte al complementari de $\mathcal{U}$, que és un tancat. Per a tot punt $z \in K$ es té $\mathcal{D}(z;r) \subseteq \mathcal{U}$.

La funció ϕ és uniformement contínua. Agafant $\epsilon = r$ existeix un $\delta > 0$ tal que

$$|s-s'|, |t-t'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\phi(s,t) - \phi(s',t')| < r.$$

Es consideren particions $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ i $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ dels intervals $[0,1]$ $[a,b]$ tals que $s_i - s_{i-1} < \delta$ i $t_j - t_{j-1} < \delta$, que donen una graella de punts (s_i, t_j) sobre el rectangle $[0,1] \times [a,b]$. Siguin $\phi_{i,j} = \phi(s_i, t_j)$ els punts corresponents en la imatge de la homotopia.

Per a cada parell d'índexs $1 \leqslant i \leqslant n$ i $1 \leqslant j \leqslant m$ la imatge $\phi\big([s_{i-1}, s_i] \times [t_{i-1}, t_i]\big)$ està continguda al disc $\mathcal{D}\big(\phi_{i,j}; r\big) \subseteq \mathcal{U}$. Es denotarà $\pi_{i,j}$ la poligonal tancada que uneix els quatre punts $\phi_{i-1,j-1}$, $\phi_{i,j-1}$, $\phi_{i,j}$ i $\phi_{i-1,j}$, en l'ordre indicat, que és la concatenació de quatre segments. Com que la imatge de $\pi_{i,j}$ està continguda al disc $\mathcal{D}\big(\phi_{i,j}; r\big) \subseteq \mathcal{U}$ la integral de f sobre aquest contorn és zero gràcies al teorema **??**

Per tant, la suma de les integrals de f sobre tots els quadrilàters també és zero. Els segments que són costats dels $\pi_{i,j}$ a l'interior de la graella apareixen dues vegades amb orientacions diferents i, per tant, les seves integrals es cancel·len. Els segments inferiors quan $j = 0$ són constants amb valor $\gamma_i(a)$ i per tant no contribueixen a la integral;

anàlogament passa amb els segments superiors quan $j = m$, que són constants $= \gamma_i(b)$ i tampoc contribueixen. Així, del fet que la suma de les integrals sobre tots els $\pi_{i,j}$ sigui zero, i de totes les cancel·lacions, es dedueix que és igual a la integral sobre la poligonal que uneix els punts $\phi_{0,0}, \phi_{0,1}, \cdots, \phi_{0,m-1}, \phi_{0,m}$ dóna el mateix que la integral sobre la poligonal que uneix els punts $\phi_{1,0}, \phi_{1,1}, \cdots, \phi_{1,m-1}, \phi_{1,m}$.

El contorn γ_1 és la concatenació dels m contorns $\gamma_{1,j}$ que són la restricció de γ_1 al subinterval $[t_{j-1}, t_j] \subset [a, b]$. Anàlogament γ_2 és la concatenació dels m contorns $\gamma_{2,j}$ corresponents. Cada contorn $\gamma_{1,j}$ té inici $\gamma_1(t_{j-1}) = \phi(0, t_{j-1})$ i final $\gamma_1(t_j) = \phi(0, t_j)$. Com que tant el contorn com el segment estan continguts al disc $\mathcal{D}\big(\phi_{0,j}; r\big)$ les seves integrals coincideixen. Per tant, $\int_{\gamma_1} f(z)\, dz$ és la integral sobre la poligonal que uneix els punts $\gamma_1(t_j) = \phi_{0,j}$ i $\int_{\gamma_2} f(z)\, dz$ la integral sobre la poligonal que uneix els punts $\gamma_2(t_j) = \phi_{1,j}$, i ja s'ha vist que les integrals sobre totes dues poligonals coincideixen. □

Corol·lari 4.16 (Primitiva d'una funció holomorfa) *Tota funció holomorfa en un obert simplement connex té una primitiva en aquest obert.*

PROVA: És el primer teorema fonamental del càlcul: teorema 4.12. □

Com a aplicació del teorema de Cauchy en oberts simplement connexos es dóna un exemple que d'una situació que apareix molt sovint a l'hora de calcular integrals, que permet reduir el càlcul de la integral sobre un disc donat a la integral de la mateixa funció sobre un disc més petit que estigui contingut al seu interior.

Exemple 4.17 *Si $\overline{\mathcal{D}}(z_1; r) \subseteq \overline{\mathcal{D}}(z_0; R)$ i f és una funció holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ amb $\overline{\mathcal{D}}(z_0; R) \smallsetminus \mathcal{D}(z_1; r) \subset \mathcal{U}$, aleshores*

$$\int_{C(z_0;R)} f(z)\, dz = \int_{C(z_1;r)} f(z)\, dz$$

Per exemple, l'enunciat s'aplica a tota funció de la forma $\dfrac{g(z)}{z - z_1}$ amb g holomorfa.

PROVA: S'uneixen les dues circumferències amb segments que es recorren en tots dos sentits, de manera que les integrals corresponents es cancel·lin, agafant per exemple una recta que passi per z_1 i les seves interseccions amb totes dues circumferències.

Això permet descompondre la diferència entre les dues integrals en les circumferències en dues integrals sobre dos contorns tancats

$$\int_{C(z_0;R)} f(z)\, dz - \int_{C(z_1;r)} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz,$$

on cada γ_i està format per la concatenació de quatre contorns: un arc de la circumferència gran, un de la circumferència petita, i els dos segments recorreguts en un dels sentits (fer un dibuix).

Aquests dos contorns estan continguts en un obert simplement connex on la funció és holomorfa (veure dibuix) i, per tant, les integrals valen zero, i es dedueix que les integrals sobre totes dues circumferències coincideixen. □

Teorema de Cauchy amb singularitats. Els teoremes d'aquesta secció, que asseguren que la integral d'una funció en un contorn dóna zero, també valen amb una hipòtesi lleugerament més dèbil: que la funció sigui holomorfa a l'obert $\mathcal{U}$, excepte potser a un punt, en el qual només se sap que és contínua, o, fins i tot, només que està fitada en algun entorn seu. De fet n'hi ha prou que els punts on es té aquesta condició més dèbil formen un conjunt finit o almenys un conjunt sense punts d'acumulació a $\mathcal{U}$.

En realitat el que passa, tal i com es veurà més endavant, és que una funció holomorfa i fitada a un entorn perforat d'un punt té necessàriament una *singularitat evitable* en aquest punt i, definint-la per tal que sigui contínua, s'obté una funció que és derivable en el punt, i per tant aquesta "anomalia" en realitat no hi és. De totes maneres poder usar aquesta versió del teorema és molt útil mentre no es disposi del teorema 6.3 d'evitació de singularitats.

Teorema 4.18 (Teorema de Cauchy amb singularitats) *Els teoremes de Goursat i de Cauchy, teoremes 4.13, 4.14 i 4.15, també valen amb la hipòtesi més dèbil que la funció sigui holomorfa excepte potser en un punt, en el qual només se sap que és contínua, o fins i tot només que està fitada en algun entorn seu.*

També valen si en comptes d'un únic punt, el conjunt dels punts en aquesta situació no té cap punt d'acumulació a l'obert.

PROVA: Es demostra Goursat, i els demés es dedueixen a partir d'ell com en el cas general.

Sigui f una funció que satisfà les hipòtesi a un obert $\mathcal{U}$. Anomenarem punts singulars els punts on no se sap que f sigui holomorfa.

Sigui $T = \partial\mathscr{T}$ la vora d'un triangle sòlid contingut a $\mathcal{U}$. Com que $\mathscr{T}$ es compacte només pot contenir un nombre finit de punts singulars. Descomponent-lo en quatre com en la demostració del teorema de Goursat, i fent descomposicions successives si cal, s'arriba a un nombre finit de triangles que contenen cadascun com a màxim un punt singular. Com que la integral sobre el triangle inicial és la suma sobre tots aquests n'hi ha prou a demostrar el teorema quan el triangle conté un únic punt singular.

A més es pot reduir també el resultat al cas que el punt singular és un dels vèrtexs del triangle. En efecte, si el punt estigués a una aresta es pot descompondre el triangle en dos unint aquest punt amb el vèrtex oposat, i el resultat es redueix als dos triangles que ara tenen el punt singular en un vèrtex. Si el punt està a l'interior es pot descompondre el triangle en tres unint aquest punt amb tots tres vèrtexs, i el resultat es redueix als tres triangles que ara tenen el punt singular en un vèrtex.

Se suposa, per tant, en endavant, que el punt singular és un vèrtex del triangle.

Aleshores es procedeix com en la demostració del teorema de Goursat subdividint el triangle en quatre de la mateixa manera, però ara en els tres que no contenen el punt z_0 es pot aplicar el teorema de Goursat i la integral val zero, i per tant la integral sobre el triangle gran és la mateixa que sobre cadascun dels triangles més petits, de perímetres tendint a zero. En aquest cas dient M al suprem del valor de la funció f en el triangle sòlid inicial es veu que la integral en el triangle n-èsim està fitada per Md_n, on d_n és el seu perímetre. Com que els d_n tendeixen a zero, la integral és zero.

En la demostració de Cauchy per a un disc s'ha fet servir que per a tot contorn triangular la integral dóna zero, gràcies a què en aquest cas el contorn és la vora d'un triangle sòlid contingut a l'obert. Com que això segueix sent cert, el teorema també val. Finalment, per veure el teorema en un simplement connex la demostració ho redueix a un conjunt de discs que recobreixen la imatge d'una homotopia; com que ja s'ha vist que en cadascun d'aquests discs la integral sobre contorns tancats dóna zero, el teorema segueix sent cert. □

4.4 Aplicacions: funcions multivaluades i càlcul d'integrals

Recordi's que al conjunt $\mathbb{C}^*$ dels complexos no nuls hi ha definides diverses funcions multivaluades, de la manera següent:

- $\arg\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ definida per $\alpha \in \arg z \Leftrightarrow z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$;
- $\log\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ definida per $w \in \log z \Leftrightarrow e^w = z$;
- $\sqrt[n]{\cdot}\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ definida per $w \in \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z$.

S'anomenen *determinacions* les funcions definides en un subconjunt de $\mathbb{C}^*$ que en cada punt trien un dels valors possibles. En el cas de les funcions considerades es denotaran amb majúscula Arg i Log per a les dues primeres i es denotarà $z \mapsto z^{1/n}$ una determinació de l'arrel n-èsima.

El teorema de Cauchy permet assegurar l'existència de determinacions holomorfes del logaritme i l'arrel n-èsima i de classe $\mathscr{C}^\infty$ de l'argument en dominis de definició que siguin *oberts simplement connexos*:

Proposició 4.19 *En tot obert simplement connex que no contingui el punt $z = 0$*

1. *existeixen determinacions del logaritme holomorfes amb derivada $1/z$;*
2. *existeixen determinacions contínues de l'argument, que són $\mathscr{C}^\infty$ amb derivades parcials $\frac{-y}{x^2+y^2}$ i $\frac{x}{x^2+y^2}$, respectivament;*
3. *existeixen determinacions de l'arrel n-èsima $z \mapsto z^{1/n}$ holomorfes amb derivada $z \mapsto \frac{z^{1/n}}{nz}$.*

Prova: Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un obert simplement connex que no contingui $z = 0$.

1. El corol·lari 4.16 assegura que la funció $z \mapsto \frac{1}{z}$ té una primitiva $f(z)$ a l'obert Ω, només determinada llevat d'una constant additiva w. Es vol veure que per a alguns valors de la constant w aquesta funció $f(z) + w$ és una determinació holomorfa del logaritme. Sigui $z_0 \in \Omega$ un punt qualsevol. Sigui $w \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 e^{-f(z_0)-w} = 1 \Leftrightarrow e^w = z_0 e^{-f(z_0)}$, que existeix ja que la funció exponencial pren qualsevol valor de $\mathbb{C}^*$. Es considera la funció $F(z) = ze^{-f(z)-w}$ que és holomorfa a Ω per ser-ne composició i producte. La seva derivada és $F'(z) = ze^{-f(z)-w}(-f'(z)) + e^{-f(z)-w} = 0$, ja que $f'(z) = \frac{1}{z}$. Per tant la funció F és constant. Com que $F(z_0) = 1$ es dedueix que $F = 1$ a tot Ω. Aleshores $e^{f(z)+w} = e^{f(z)+w}F(z) = z$ per a tot $z \in \Omega$ i $f(z) + w$ és, efectivament, una determinació del logaritme a Ω.

2. La identitat $\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$ estableix una bijecció entre determinacions del logaritme i de l'argument, que conserva la continuïtat. Una determinació holomorfa del logaritme és en particular contínua i a través d'aquesta identitat dóna una determinació contínua de l'argument. Com que $\operatorname{Log} = u + iv$ és derivable amb derivada $1/z$ es té

$$\operatorname{Log}'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z) = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

   Com que la component imaginària v és l'argument es dedueix que les derivades parcials d'aquesta funció són les que diu l'enunciat. Com que aquestes funcions són clarament $\mathscr{C}^\infty$ l'argument també ho és.

3. Es considera una determinació holomorfa del logaritme a $\operatorname{Log}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ i es defineix l'arrel n-èsima posant $z^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log}(z)}$. Aquesta funció és holomorfa per ser-ne composició i calculant la seva derivada es veu que és la que diu l'enunciat. $\square$

Càlcul d'integrals definides. Una de les aplicacions més importants del teorema de Cauchy és el càlcul d'integrals definides; especialment integrals de Riemann reals que només amb eines de variable real no es calculen fàcilment. La idea és posar una d'aquestes integrals com una integral de contorn complexa i estendre el contorn fins a tenir un contorn tancat en el qual es pugui aplicar el teorema de Cauchy. A continuació es veuen alguns exemples:

Exemple 4.20

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

Prova: Es considera la funció $f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}$, que és holomorfa a l'obert $\mathbb{C}^*$. Siguin $R > \epsilon$ dos nombres reals positius. S'integra la funció f sobre el contorn format pels dos segments que uneixen $-R$ amb $-\epsilon$ i ϵ amb R i les dues semicircumferències γ_ϵ i γ_R de radis ϵ i R sobre el semiplà superior parametritzades per $\gamma_\epsilon(t) = \epsilon e^{it}$ i $\gamma_R(t)Re^{it}$ amb paràmetre $t \in [0, \pi]$. El teorema de Cauchy assegura que

$$\left[\int_\epsilon^R + \int_{\gamma_R} + \int_{-R}^{-\epsilon} - \int_{\gamma_\epsilon}\right] f(z)\,dz = 0. \tag{13}$$

Es comença calculant les integrals sobre els intervals reals:

$$\int_\epsilon^R f(z)\,dz = \int_\epsilon^R \frac{1-e^{it}}{t^2}\,dt = \int_\epsilon^R \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt - i\int_\epsilon^R \frac{\sin t}{t^2}\,dt,$$

i, com que les funcions de la integral de la part real i imaginària són parell i senar, respectivament,

$$\int_{-R}^{-\epsilon} f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt - i\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\sin t}{t^2}\,dt = \int_\epsilon^R \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt + i\int_\epsilon^R \frac{\sin t}{t^2}\,dt.$$

A continuació es veu que la integral a la semicircumferència γ_R tendeix a zero quan R tendeix a infinit. En els punts d'aquesta semicircumferència, que són de la forma $z = Re^{it}$ amb $t \in [0, \pi]$, es té

$$\left| e^{iRe^{it}} \right| = \left| e^{-R\sin t + iR\cos t} \right| = e^{-R\sin t} \leqslant 1, \quad \text{ja que} \quad \sin t \geqslant 0,$$

i per tant la funció $f(z)$ està fitada per

$$\left| \frac{1 - e^{iz}}{z^2} \right| = \frac{|1 - e^{iz}|}{R^2} \leqslant \frac{2}{R^2},$$

i es dedueix que la integral està fitada per

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \right| \leqslant \frac{2}{R^2} \ell(\gamma_R) = \frac{2\pi}{R},$$

que tendeix a zero quan R tendeix a infinit.

Finalment, es considera la integral sobre la semicircumferència γ_ϵ. Tenint en compte el desenvolupament en sèrie de potències $1 - e^{iz} = -iz - \frac{1}{2}(iz)^2 - \frac{1}{3!}(iz)^3 - \cdots$ es dedueix la identitat següent:

$$f(z) + \frac{i}{z} = \frac{1 - e^{iz} + iz}{z^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} iz + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n+2)!} z^n$$

de manera que la funció a l'esquerra de la igualtat és és analítica dins del radi de convergència de la sèrie de la dreta de la igualtat, que és infinit. En particular aquesta funció és contínua i està fitada a l'entorn de $z = 0$. Si M és una fita per a la funció al disc $\mathcal{D}(0; 1)$ aleshores per a tot $\epsilon < 1$ es té

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} \frac{1 - e^{iz} + iz}{z^2}\, dz \right| \leqslant M\pi\epsilon,$$

que tendeix a zero quan $\epsilon \to 0$. Aleshores

$$\int_{\gamma_\epsilon} f(z)\, dz = \int_{\gamma_\epsilon} \left(f(z) + \frac{i}{z} \right) dz + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{-i}{z}\, dz = \int_{\gamma_\epsilon} \left(f(z) + \frac{i}{z} \right) dz + \pi,$$

on $\int_{\gamma_\epsilon} \frac{-i}{z}\, dz = \pi$ es calcula fàcilment.

Unint tots els càlculs a partir de la igualtat (13) del teorema de Cauchy s'obté

$$2 \int_\epsilon^R \frac{1 - \cos t}{t^2}\, dt = \left[\int_\epsilon^R + \int_{-R}^{-\epsilon} \right] f(z)\, dz = \left[\int_{\gamma_\epsilon} - \int_{\gamma_R} \right] f(z)\, dz,$$

que fent tendir R a infinit i ϵ a zero tendeix a π. $\square$

Transformada de Fourier. L'exemple següent assegura que la transformada de Fourier de la funció $e^{-\pi t^2}$ és ella mateixa. Com que molts càlculs i propietats de la transformada de Fourier es veuen usant integral de contorn complexa, es dóna a continuació la definició per tal que es puguin interpretar els càlculs des d'aquest punt de vista.

Donada una funció $t \mapsto f(t) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que satisfaci propietats prou bones (ha de tendir a zero enèrgicament a $\pm\infty$) la seva *transformada de Fourier* és la funció $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida posant:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} \, dt.$$

En bones condicions la funció es recupera amb la transformada inversa:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i t \xi} \, d\xi.$$

Noti's que les integrals que intervenen en aquestes definicions no són integrals de contorn complexes sinó integrals de funcions de variable real.

Exemple 4.21 *Per a tot nombre real $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t \xi} \, dt = e^{-\pi \xi^2}$$

Prova: Per a $\xi = 0$ la identitat és la ben coneguda integral Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \, dx = 1,$$

que es calcula convertint el seu quadrat en una integral doble usant Fubini i passant a coordenades polars amb el canvi $(x, y) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$ de jacobiana r:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} \, dy \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi (x^2 + y^2)} \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{-\pi r^2}}{-2\pi} \Bigg]_0^{\infty} \right) d\theta = \frac{2\pi}{2\pi} = 1. \end{aligned}$$

Es considera la funció $f(z) = e^{-\pi z^2}$, que és holomorfa a tot $\mathbb{C}$. Fixat un nombre real $R > 0$ es considera el contorn poligonal tancat que uneix els quatre punts $-R$, R, $R + i\xi$ i $-R + i\xi$ en l'ordre indicat. El teorema de Cauchy assegura que la integral de $f(z)$ sobre aquest contorn dóna zero:

$$\left[\int_{-R}^{R} + \int_{R}^{R+i\xi} + \int_{R+i\xi}^{-R+i\xi} + \int_{-R+i\xi}^{-R} \right] f(z) \, dz = 0.$$

Al segment sobre els reals la integral és

$$\int_{-R}^{R} f(z) \, dz = \int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2} \, dt,$$

i, gràcies a la integral Gaussiana calculada prèviament, aquesta integral tendeix a 1 quan R tendeix a infinit.

La integral en el segment vertical de la dreta és

$$\int_R^{R+i\xi} f(z)\,dz = \int_0^\xi e^{-\pi(R+it)^2} i\,dt.$$

Com que $(R+it)^2 = R^2 - t^2 + 2iRt$ es té $|e^{-\pi(R+it)^2} i| = e^{-\pi(R^2-t^2)} \leqslant e^{-\pi(R^2-\xi^2)}$ per a tot $t \in [0,\xi]$. Es dedueix que el valor absolut de l'integral està fitat per $|\xi| e^{-\pi(R^2-\xi^2)}$ i, per a cada ξ fixat, aquest nombre tendeix a zero quan R tendeix a infinit. Anàlogament es veu que l'integral sobre el segment vertical de l'esquerra tendeix a zero.

El Teorema de Cauchy aplicat al rectangle assegura que la integral sobre el segment superior orientat cap a la dreta tendeix a 1 quan R tendeix a infinit. Aquesta integral és

$$\int_{-R+i\xi}^{R+i\xi} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} e^{-\pi(t+i\xi)^2}\,dt = \int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2}\, e^{\pi\xi^2}\, e^{-2\pi i t\xi}\,dt = e^{\pi\xi^2} \int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t\xi}\,dt.$$

Agafant el límit quan $R \to \infty$ això dóna 1 i passant el factor $e^{\pi\xi^2}$ a l'altre costat s'obté la fórmula de l'enunciat. $\square$

5 Fórmula integral de Cauchy i aplicacions

La fórmula integral de Cauchy permet expressar el valor d'una funció en un punt en termes dels seus valors sobre la imatge d'un contorn tancat que no passa pel punt.

En la seva versió bàsica el contorn és una circumferència. Recordi's el conveni que, si $C = C(z_0; r)$, s'entén que la integral $\int_C f(z)\,dz$ correspon al contorn $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, que recorre la circumferència una única vegada en sentit antihorari, amb inici i final al punt $z_0 + r$, quan el paràmetre t recorre l'interval $[0, 2\pi]$.

Teorema 5.1 (Fórmula integral de Cauchy a un disc) *Si $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ que conté un disc obert $\mathcal{D}$ i la seva frontera, la circumferència C,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad \forall z \in \mathcal{D}.$$

Prova: Sigui $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z_0; r)$, amb centre z_0 i radi r. Donat un punt $z \in \mathcal{D}$ sigui $\epsilon > 0$ prou petit perquè la circumferència C_ϵ de centre z i radi ϵ estigui dins de $\mathcal{D}$: es pot agafar qualsevol ϵ menor que la distància $d(z, C) = \min\{|z-\zeta| : \zeta \in C\}$. En integrar se suposa que C_ϵ està parametritzada de la manera habitual. Es vol veure que les integrals següents sobre totes dues circumferències coincideixen:

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{14}$$

Això es pot veure, per exemple, orientant la circumferència petita en sentit negatiu i agafant dos segments que uneixin totes dues circumferències; per exemple, els segments horitzontals o verticals que passen pel centre de la petita. Recorrent els segments en totes dues direccions s'obtenen dos contorns tancats continguts en oberts simplement connexos on la funció és holomorfa, i la suma de les integrals sobre aquests contorns —que és zero— és la diferència entre les integrals sobre les dues circumferències.

Per a calcular la integral sobre la circumferència petita s'escriu la funció com:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + \frac{f(z)}{\zeta - z} \tag{15}$$

i la integral queda igual a la suma de les integrals sobre totes dues funcions. Pel que fa a la primera funció a (15), i tenint en compte que $\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}$ està fitada a tota la regió compacta $\overline{\mathcal{D}}$, ja que és contínua en afegir el valor $f'(z)$ en el punt $\zeta = z$, i si M és una fita de la funció en aquesta regió, es té:

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \, d\zeta \right| \leqslant \ell(C_\epsilon) M = 2\pi\epsilon M,$$

que val per a tot ϵ i tendeix a zero quan ϵ tendeix a zero. Usant la integral (12) es calcula la integral de la segona funció a (15):

$$\int_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{\zeta - z} \, d\zeta = f(z) \int_{C_\epsilon} \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta = 2\pi i f(z)$$

que no depèn de ϵ. Fent tendir ϵ a zero la integral de la primera tendeix a zero i la de la segona es manté constant igual a $2\pi i f(z)$. Per tant la integral (14) és igual a $2\pi i f(z)$ i dividint per $2\pi i$ s'obté la fórmula de l'enunciat. $\square$

La fórmula integral de Cauchy es pot interpretar com el fet que el valor d'una funció holomorfa en un punt és el valor mitjà de la funció sobre els punts d'una circumferència centrada al punt:

Corol·lari 5.2 (Teorema del valor mitjà) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa a l'obert $\mathcal{U}$. Per a tot $z \in \mathcal{U}$ i $r > 0$ tals que $\overline{\mathcal{D}}(z; r) \subset \mathcal{U}$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \, dt.$$

Índex d'una corba tancada. La circumferència C de la fórmula del teorema 5.1 dóna una volta al voltant de cada punt del disc $\mathcal{D}$. Es pot donar una versió més general de la fórmula integral de Cauchy que val per a contorns tancats qualsevol, la qual en cada punt dóna el valor de la funció multiplicat pel "nombre de voltes" que el contorn dóna al voltant del punt. Primer cal definir aquest nombre de voltes.

Definició 5.3 (Índex d'un contorn al voltant d'un punt) *Sigui $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ un contorn tancat. Per a cada punt $z \notin \gamma\big([a, b]\big)$ es defineix l'índex de γ al voltant de z com*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Proposició 5.4 $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0)$ *és un nombre enter, que s'ha d'interpretar com el nombre de voltes (winding number) de la corba al voltant del punt.*

PROVA: Llevat del coeficient $(2\pi i)^{-1}$ la integral es calcula com

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt = F(b) - F(a)$$

on $F(t)$ és una primitiva de la funció de variable real que s'integra. Una primitiva d'una funció $[a,b] \to \mathbb{C}$ es pot construir a partir de les primitives de les funcions components obtingudes en la teoria d'integració de variable real. Usant el teorema fonamental del càlcul per a variable real la funció següent

$$F(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\, ds$$

és una primitiva. Com que $F(a) = 0$ el valor de la integral que s'ha de calcular és $F(b)$.

Es considera la funció $\phi(t) = \frac{\gamma(t)-z}{e^{F(t)}}$ a l'interval $[a,b]$. La seva derivada és

$$\phi'(t) = \frac{\gamma'(t)e^{F(t)} - e^{F(t)}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}(\gamma(t) - z)}{e^{2F(t)}} = 0.$$

Això implica que ϕ és constant i, per tant, igual a $\phi(a)$. Aleshores

$$\phi(t) = \frac{\gamma(t) - z}{e^{F(t)}} = \frac{\gamma(a) - z}{e^{F(a)}} = \phi(a) \quad \Rightarrow \quad e^{F(t)} = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(a) - z}.$$

Com que $\gamma(a) = \gamma(b)$ per ser la corba és tancada es dedueix que $e^{F(b)} = 1$ i, per tant, $F(b)$ ha de ser un múltiple enter de $2\pi i$.

Altra demostració. Es pot donar una altra demostració on es veu millor la idea que $I_\gamma(z)$ és el nombre de voltes de γ al voltant de z. Per simplificar es pot suposar fent una translació de la variable que $z = 0$, de manera que el contorn γ no passa pel punt zero. Sigui $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{D}(\gamma(t);\epsilon) \subseteq \mathbb{C}^*$ per a tot $t \in [a,b]$; es pot agafar, per exemple, qualsevol $\epsilon \leqslant d\big(0,\gamma^*\big)$. Per continuïtat uniforme de γ sobre el compacte $[a,b]$ existeix un $\delta > 0$ tal que $|t - t'| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(t')| < \epsilon \Rightarrow \gamma(t') \in \mathcal{D}(\gamma(t);\epsilon)$.

Sigui $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partició de l'interval amb $|t_i - t_{i-1}| < \delta$. Sigui γ_i la restricció del contorn γ al subinterval $[t_{i-1}, t_i]$, de manera que γ és la concatenació de tots els γ_i per a $i = 1, \ldots, n$. Sigui $\mathrm{Log}_i \colon \mathcal{D}_i \to \mathbb{C}$ una determinació holomorfa del logaritme al disc $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}(\gamma(t_i);\epsilon)$, que existeix per ser un subconjunt simplement connex de $\mathbb{C}^*$. Per a cada $i = 1, \ldots, n$ la imatge $\gamma_i^* = \gamma\big([t_{i-1}, t_i]\big) \subset \mathcal{D}_i$ i, com que el logaritme Log_i és una primitiva de $1/z$ en aquest conjunt,

$$\int_{\gamma_i} \frac{d\zeta}{\zeta} = \mathrm{Log}_i\big(\gamma(t_i)\big) - \mathrm{Log}_i\big(\gamma(t_{i-1})\big).$$

Cada determinació holomorfa del logaritme és de la forma $\operatorname{Log}_i(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg}_i(z)$ amb $\operatorname{Arg}_i(z)$ una determinació contínua de l'argument. Sumant les integrals sobre tots els trossos γ_i es té:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\,d\zeta = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \frac{1}{\zeta}\,d\zeta &= \sum_{i=1}^n \operatorname{Log}_i\big(\gamma(t_i)\big) - \operatorname{Log}_i\big(\gamma(t_{i-1})\big) \\ &= \sum_{i=1}^n \log|\gamma(t_i)| - \log|\gamma(t_{i-1})| + i\sum_{i=1}^n \operatorname{Arg}_i\big(\gamma(t_i)\big) - \operatorname{Arg}_i\big(\gamma(t_{i-1})\big).\end{aligned}$$

D'aquests dos sumatoris el primer, que dóna la part real, és zero, ja que es tracta d'una suma telescòpica que finalment dóna $\log|\gamma(t_n)| - \log|\gamma(t_0)| = \log|\gamma(b)| - \log|\gamma(a)| = 0$ per ser la corba tancada.

En el segon sumatori, que dóna la part imaginària, cada terme

$$\operatorname{Arg}_i\big(\gamma(t_i)\big) - \operatorname{Arg}_i\big(\gamma(t_{i-1})\big)$$

és un nombre real ben definit independentment de quina sigui la determinació Arg_i, que dóna el valor de l'angle entre les semirectes que passen per $\gamma(t_{i-1})$ i per $\gamma(t_i)$ dins de l'interval $[0, 2\pi)$. En sumar tots aquests nombres s'obté un nombre que representa l'angle entre les semirectes que passen per $\gamma(t_0) = \gamma(a)$ i $\gamma(t_n) = \gamma(b)$, que és l'angle zero, i per tant aquest nombre ha de ser un múltiple de 2π.

Observant com s'obté aquest valor es veu que la integral que defineix $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ correspon realment a comptar el nombre de voltes que el contorn dóna al voltant del punt z. $\square$

La integral, i per tant l'índex, també es pot calcular per a corbes més generals, no necessàriament de classe $\mathscr{C}^1$. A topologia aquest mateix concepte del nombre de voltes d'una corba tancada al voltant d'un punt es defineix a partir del concepte de grau d'una aplicació contínua $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

Teorema 5.5 (Fórmula integral de Cauchy) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa a un obert simplement connex Ω. Per a tot contorn γ i tot punt z que no estigui a la seva imatge,*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

PROVA: Com al cas de la demostració sobre el disc es considera la funció $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ definida de la manera següent:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{si} \quad \zeta \neq z, \\ f'(z), & \text{si} \quad \zeta = z, \end{cases}$$

que és holomorfa a $\mathcal{U}$ excepte potser al punt z, on només es pot assegurar que és contínua. Per la versió del teorema de Cauchy del teorema 4.18 la integral d'aquesta funció sobre qualsevol contorn tancat dins de Ω dóna zero. Per tant

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\gamma \left(g(\zeta) + \frac{f(z)}{\zeta - z} \right) d\zeta = f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z),$$

i dividint per $2\pi i$ s'obté la fórmula del teorema.

Observi's que aquesta demostració també val per al teorema 5.1 en el cas del disc. Simplement s'ha d'observar que tot disc $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{U}$ dins d'un obert qualsevol està contingut en algun obert simplement connex $\overline{\mathcal{D}} \subset \Omega \subseteq \mathcal{U}$. □

5.1 Derivades d'ordre superior

En aquest apartat es demostra que tota funció holomorfa és infinitament derivable; a més, es dóna una representació integral semblant a la fórmula integral de Cauchy que val per a totes les derivades de la funció.

Teorema 5.6 (Fórmula integral de Cauchy per a les derivades) *Tota funció holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ és infinitament derivable en aquest obert. A més, la seva derivada n-èsima en cada punt z d'un disc obert $\mathcal{D}$ amb $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{U}$ ve donada per l'expressió integral:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

on la circumferència C és la frontera del disc $\mathcal{D}$.

PROVA: Es demostra per inducció. El cas $n = 0$ és la fórmula integral de Cauchy. Suposi's demostrat fins a $n - 1 \geqslant 0$. Aleshores, per a h prou petit per tal que $z + h \in \mathcal{D}$, es calcula:

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{h} \left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right) d\zeta$$

Tenint en compte que $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$, la diferència dins del parèntesi és:

$$\frac{h}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\zeta - z - h)^k (\zeta - z)^{n-1-k}} = h \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\zeta - z - h)^k (\zeta - z)^{n+1-k}}.$$

Per tant les h al es cancel·len i l'expressió anterior és igual a la suma

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^k (\zeta - z)^{n+1-k}}\, d\zeta. \tag{16}$$

Es vol veure que per a cada $k = 1, \ldots, n$ es té:

$$\lim_{h \to 0} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^k (\zeta - z)^{n+1-k}}\, d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{17}$$

En efecte, la diferència entre les dues integrals és:

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^k(\zeta - z)^{n+1-k}}\,d\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

$$= \int_C f(\zeta)\left(\frac{(\zeta - z)^k}{(\zeta - z - h)^k(\zeta - z)^{n+1}} - \frac{(\zeta - z - h)^k}{(\zeta - z - h)^k(\zeta - z)^{n+1}}\right) d\zeta$$

i usant de nou l'expressió per a $a^k - b^k$ es veu que la funció de dins del parèntesi és:

$$\frac{(\zeta - z)^k - (\zeta - z - h)^k}{(\zeta - z - h)^k(\zeta - z)^{n+1}} = h\frac{P_z(\zeta, h)}{(\zeta - z - h)^k(\zeta - z)^{n+1}},$$

on P_z és un polinomi en les variables ζ i h (que depèn del punt z). Aquest polinomi està fitat per a $\zeta \in C$ i h fitat. El denominador de l'expressió està fitat inferiorment per a h prou petit; en efecte, sigui $d = d(z, C) = \min\{|z - \zeta| : \zeta \in C\}$ la distància de z a la circumferència, agafant $|h| \leqslant \frac{d}{2}$ es té:

$$|\zeta - z - h| \geqslant |\zeta - z| - |h| \geqslant d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2},$$

i per tant el denominador està fitat inferiorment per $(d/2)^k d^{n+1}$. Siguin M_1 una fita per a $|f(\zeta)|$ quan $\zeta \in C$ i M_2 una fita per a $|P_z(\zeta, h)$ quan $\zeta \in C$ i $|h| \leqslant \frac{d}{2}$. Aleshores

$$\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^k(\zeta - z)^{n+1-k}}\,d\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{M_1 M_2 |h|}{(d/2)^k d^{n+1}}\ell(C),$$

que tendeix a zero quan h tendeix a zero i això demostra el límit de (17).

Substituint aquest límit a (16) per a cada $k = 1, \ldots, n$ es dedueix que

$$f^{(n)}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(z + h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^k(\zeta - z)^{n+1-k}}$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\, n \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

i, per tant, la funció $f^{(n-1)}$ és derivable en el punt z i la seva derivada ve donada per la fórmula de l'enunciat.

Demostració alternativa de la derivabilitat infinita. El fet que tota funció holomorfa és infinitament derivable es dedueix també de la propietat que es veurà més endavant al teorema 5.15, que diu que tota funció holomorfa és analítica. En efecte, tota funció analítica és infinitament derivable. □

Observi's que de la definició de derivada complexa no es dedueix immediatament cap propietat sobre la derivada d'una funció holomorfa. El teorema que s'acaba de demostrar assegura que la derivada d'una funció holomorfa és també holomorfa, i per tant la funció és infinitament derivable. Això en particular assegura que com a funció de dues variables reals tota funció holomorfa és de classe $\mathscr{C}^1$, una propietat que fins ara no es podia donar per certa, i encara més, es de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Corol·lari 5.7 *Tota funció holomorfa en un obert és de classe $\mathscr{C}^\infty$ en aquest obert.*

Aquest fet, de fet només la propietat de ser de classe $\mathscr{C}^1$, permet deduir el teorema de la funció inversa per a funcions de variable complexa, del teorema corresponent per a funcions de dues variables reals.

Teorema 5.8 (Teorema de la funció inversa) *Sigui f holomorfa a un obert. Per a tot punt z_0 amb derivada $f'(z_0) \neq 0$ la funció té una inversa local: existeixen entorns oberts $\mathcal{U}$ de z_0 i $\mathcal{V}$ de $f(z_0)$ tals que la restricció de f a $\mathcal{U}$ és una bijecció $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ i la funció inversa és holomorfa amb derivada $(f^{-1})'\big(f(z)\big) = f'(z)^{-1}$.*

Prova: És conseqüència del teorema de la funció inversa del càlcul diferencial: si f és de classe $\mathscr{C}^1$ a un obert de $\mathbb{R}^2$ i té diferencial $Df(z_0)$ invertible en un punt z_0, aleshores existeixen entorns oberts $\mathcal{U}$ de z_0 i $\mathcal{V}$ de $f(z_0)$ tals que la restricció de f a $\mathcal{U}$ és una bijecció $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, la funció inversa també és de classe $\mathscr{C}^1$ i la seva diferencial satisfà $\mathcal{D}(f^{-1})\big(f(z)\big) = Df(z)^{-1}$.

La hipòtesi d'holomorfia assegura que f és $\mathscr{C}^\infty$ i, en particular, de classe $\mathscr{C}^1$. La condició $f'(z_0) \neq 0$ implica que $\det Jf(z_0) \neq 0$, i per tant la diferencial $Df(z_0)$ és invertible. Pel teorema de la funció inversa del càlcul diferencial s'obté l'existència d'inversa local de classe $\mathscr{C}^1$ i una relació entre les respectives diferencials.

Com que f és holomorfa a $\mathcal{U}$, en cada punt d'aquest obert la diferencial $Df(z)$ és l'aplicació lineal corresponent a la multiplicació pel nombre complex $f'(z)$. Per tant, la seva inversa és l'aplicació lineal corresponent a la multiplicació pel nombre complex $f'(z)^{-1}$, i és l'aplicació lineal diferencial corresponent a la funció inversa f^{-1} en el punt $f(z)$. Es dedueix que les parcials corresponents satisfan les equacions de Cauchy-Riemann, de manera que f^{-1} és derivable complexa en $f(z)$ i la seva derivada és $f'(z)^{-1}$. $\square$

Corol·lari 5.9 (Desigualtats de Cauchy) *Si $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és holomorfa a l'obert $\mathcal{U}$ que conté el disc tancat $\overline{\mathcal{D}}(z_0; R) \subset \mathcal{U}$ i M és una fita de $|f|$ a la circumferència $C(z_0; R)$,*

$$\big|f^{(n)}(z_0)\big| \leqslant \frac{n!}{R^n} M \qquad \forall n \geqslant 0.$$

Prova: S'aplica l'afitació del valor absolut d'una integral de contorn complexa de l'apartat 3 de la proposició 4.7 a la fórmula integral del teorema 5.6 per a la derivada n-èsima, tenint en compte que $\ell(C) = 2\pi R$. $\square$

Corol·lari 5.10 (Teorema de Liouville) *Tota funció entera fitada és constant.*

Prova: Sigui M una fita de $|f|$ a tot $\mathbb{C}$. Es considera la desigualtat de Cauchy per a la primera derivada en un disc de centre un punt $z_0 \in \mathbb{C}$ i radi R. Es té

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{M}{R}.$$

Com que això val per a tot $R > 0$ i la constant M és fixa ha de ser $f'(z_0) = 0$ per a tot punt $z_0 \in \mathbb{C}$. Com que $\mathbb{C}$ és connex es dedueix que f és constant. $\square$

Corol·lari 5.11 (Teorema Fonamental de l'Àlgebra) *Tot polinomi no constant sobre els complexos té alguna arrel.*

PROVA: Sigui $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polinomi no constant. Suposi's que $f(z) \neq 0$ a tot $\mathbb{C}$. Com que $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$ la funció $|f|$ està fitada inferiorment: per exemple s'agafa un m tal que $|f(z)| \geqslant m$ si $|z| \geqslant r$ i es considera el mínim entre m i el mínim de $f(z)$ en el compacte $\overline{\mathcal{D}}(0;r)$. Aleshores la funció $1/|f|$ és entera i està fitada. Per tant és constant, i això contradiu el fet que el polinomi no era constant. □

El teorema 5.6 també permet afirmar que una funció que tingui una primitiva és necessàriament holomorfa. S'obté així el

Teorema 5.12 (Teorema de Morera: recíproc del Teorema de Cauchy) *Sigui f una funció contínua en un obert $\mathcal{U}$. Suposi's que la integral sobre tot contorn tancat a $\mathcal{U}$ és zero. Aleshores f és holomorfa a $\mathcal{U}$.*

El resultat també val només suposant que la integral sobre vores de triangles sòlids continguts a $\mathcal{U}$ és zero.

PROVA: El teorema fonamental del càlcul (teorema 4.12) diu que f té una primitiva F en aquest obert. El teorema 5.6 assegura que la funció F és derivable infinites vegades i, per tant, la seva derivada f també ho és, i en particular és holomorfa.

Per veure que n'hi ha prou que la integral sigui zero sobre contorns que són vores de triangles sòlids primer s'observa que el resultat és local i, per tant, es pot suposar sense pèrdua de generalitat que l'obert és un disc. Tal com ja s'ha fet notar a la demostració del teorema de Cauchy en un obert convex **??**, el fet que la integral sobre tota vora d'un triangle sigui zero és suficient per assegurar que la integral sobre tot contorn tancat és zero. Amb aquesta hipòtesi el teorema fonamental del càlcul 4.12 diu que la funció f té una primitiva F, i per tant f és holomorfa. □

Derivació de successions i sèries. Una altra conseqüència de la fórmula integral de Cauchy per a les derivades és la possibilitat de derivar terme a terme les successions i sèries de funcions holomorfes uniformement convergents sobre compactes. Recordi's que anteriorment ja s'han vist les propietats de la continuïtat al teorema 2.12 i la integració al teorema 4.8 per a aquest tipus de successions i sèries.

Teorema 5.13 (Convergència uniforme i holomorfia) *Si (f_n) és una successió de funcions $f_n \colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfes en un obert $\mathcal{U}$ que convergeix uniformement sobre compactes de $\mathcal{U}$ cap a una funció f, aleshores f també és holomorfa i la successió de derivades (f_n') convergeix uniformement sobre compactes cap a f'.*

El resultat anàleg val per a sèries de funcions holomorfes.

PROVA: Com que la successió convergeix uniformement sobre compactes el teorema 2.12 assegura que el límit f és una funció contínua. La convergència uniforme sobre compactes permet també aplicar el teorema 4.8 i intercanviar integrals de contorn amb el límit. Per a tot contorn tancat dins de $\mathcal{U}$ es té

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz = 0$$

i el teorema de Morera assegura que la funció f és holomorfa a $\mathcal{U}$.

Ara s'ha de veure que $(f_n') \to f'$ uniformement sobre compactes. Per fer-ho es farà servir la fórmula de Cauchy per a la derivada. Primer es veu convergència puntual. Donat un punt $z \in \mathcal{U}$ sigui $r > 0$ tal que $\overline{\mathcal{D}}(z;r) \subset \mathcal{U}$ amb frontera $C = C(z;r)$. La convergència uniforme $(f_n) \to f$ sobre el compacte C assegura que la successió

$$\left(\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\right) \to \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \quad \text{uniformement sobre } C$$

ja que per a tot $\epsilon > 0$ es pot agafar $\epsilon r^2 > 0$ i per la convergència uniforme $(f_n) \to f$ sobre C hi ha un N tal que

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} - \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\right| = \frac{1}{r^2}|f(\zeta) - f_n(\zeta)| \leqslant \frac{\epsilon r^2}{r^2} = \epsilon, \quad \forall \zeta \in C.$$

Aplicant de nou el teorema 4.8 a la fórmula integral de Cauchy per a la primera derivada es té

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta = \lim_{n\to\infty} f_n'(z).$$

Aquest argument és específic per a cada punt $z \in \mathcal{U}$ ja que es basa en el compacte C, que depèn del punt z considerat. Ara es vol veure que la convergència és uniforme sobre compactes (de pas, això demostra de nou la convergència puntual). Sigui $K \subseteq \mathcal{U}$ un compacte qualsevol. Existeix un $r > 0$ tal que $\overline{\mathcal{D}}(z;r) \subseteq \mathcal{U}$ per a tot punt $z \in K$; per exemple, es pot agafar com a r qualsevol nombre positiu més petit que la distància $d(K, \mathcal{U}^c)$ de K a la frontera de l'obert. Sigui $K_1 = \{\zeta \in \mathcal{U} : d(\zeta, K) \leqslant r\} \subset \mathcal{U}$, que és un compacte (és tancat i fitat) una mica més gran que el compacte K, també contingut a $\mathcal{U}$, i tal que totes les circumferències $C(z;r)$ centrades en punts de K estan contingudes a K_1.

Donat un $\epsilon > 0$ es pot agafar $r\epsilon > 0$ i la convergència uniforme $(f_n) \to f$ sobre el compacte K_1 assegura l'existència d'un N tal que

$$\begin{aligned} n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |f'(z) - f_n'(z)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,dz\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi r^2}\ell(C)|f(\zeta) - f_n(\zeta)| = \frac{1}{r}|f(\zeta) - f_n(\zeta)| = \frac{\epsilon r}{r} = \epsilon, \quad \forall z \in K, \end{aligned}$$

on convé observar que quan $z \in K$ tots els punts ζ involucrats en les integrals que apareixen a l'expressió pertanyen a $C(z;r) \subset K_1$. De fet, el compacte K_1 és la reunió de totes les $C(z;r)$ per a $r \in K$. $\square$

Observi's que sobre $\mathbb{R}$ el resultat anàleg és fals: un límit uniforme de funcions derivables no té perquè ser derivable.

Logaritmes i arrels de funcions. El fet que una funció holomorfa sigui sempre infinitament derivable permet assegurar que tota funció holomorfa en un obert *simplement connex* que no s'anul·li en cap punt de l'obert té un logaritme i una arrel n-èsima holomorfes:

Proposició 5.14 *Per a tota funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}^*$ holomorfa a un obert simplement connex $\mathcal{U}$ que no s'anul·la en cap punt existeixen funcions holomorfes $z \mapsto \operatorname{Log} f(z)$ i $z \mapsto f(z)^{1/n}$ tals que $\mathrm{e}^{\operatorname{Log} f(z)} = f(z)$ i $\big(f(z)^{1/n}\big)^n = f(z)$ per a tot $z \in \mathcal{U}$. Les seves derivades són*

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log} f(z) = \frac{f(z)}{f'(z)} \quad i \quad \frac{d}{dz} f(z)^{1/n} = \frac{f(z)^{1/n} f'(z)}{n f(z)}$$

Prova: La funció $z \mapsto f'(z)/f(z)$ és holomorfa a $\mathcal{U}$, ja que és quocient d'holomorfes amb denominador no nul. Observi's que aquí es fa servir que la derivada d'una funció holomorfa és holomorfa. Per tant hi té una primitiva $F(z)$. Agafant adequadament la constant additiva corresponent es pot suposar que $f(z_0) = e^{F(z_0)}$ en algun punt fixat de $\mathcal{U}$. Aleshores la funció $f(z)e^{-F(z)}$ és holomorfa amb derivada $f'(z)e^{-F(z)} + f(z)e^{-F(z)}(-f'(z)/f(z)) = 0$ i per tant és constant, que per força ha de ser igual a 1 ja que pren aquest valor en un punt. Es dedueix que $e^{F(z)} = f(z)$ a tot $\mathcal{U}$. La funció arrel n-èsima es pot agafar com $\sqrt[n]{f(z)} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log} f(z)}$.

5.2 Holomorfia i analicitat

Aquest apartat es dedica a un dels fets més rellevants de la teoria de les funcions de variable complexa: que tota funció holomorfa és analítica.

Teorema 5.15 *Si $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ és holomorfa a l'obert $\mathcal{U}$ i $\overline{\mathcal{D}}(z_0; R) \subset \mathcal{U}$ existeix una sèrie de potències $\sum a_n(z-z_0)^n$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad \forall z \in \mathcal{D}.$$

La sèrie té radi de convergència $\geqslant R$ i els coeficients són

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad C = C(z_0; R).$$

Prova: La fórmula integral de Cauchy permet escriure

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad \forall z \in \mathcal{D}.$$

Tal com s'ha fet notar en estudiar la sèrie geomètrica es pot posar

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 + (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad \text{si} \left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1,$$

i per tant aquesta igualtat val per a tot $z \in \mathcal{D}(z_0; R)$. Sigui M una fita superior de la funció $|f(z)|$ sobre el compacte C. Per a cada punt $z \in \mathcal{D}$ fixat, amb $|z - z_0| = r < R$,

$$\left| f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{M}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^n =: M_n, \qquad \forall \zeta \in C.$$

Com que la suma $\sum M_n$ és convergent ja que $r/R < 1$, el criteri M de Weierstrass diu que la sèrie de funcions $f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ és uniformement convergent sobre el compacte C. Es pot aplicar el teorema 4.8 i intercanviar el sumatori amb la integral, obtenint-se:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_C \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\right)(z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Per tant, efectivament $f(z)$ ve donada per una sèrie de potències centrada a z_0 en tot punt z del disc $\mathcal{D}(z_0; R)$, amb coeficients donats per l'expressió

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Com que la igualtat val per a tot $z \in \mathcal{D}$, la sèrie ha de tenir radi de convergència com a mínim igual a R.

Nova demostració del teorema 5.6. Observi's que en tota la demostració feta fins ara no s'ha fet servir res demostrat a la secció anterior sobre derivades d'ordre superior. Només ha calgut fer servir la fórmula integral de Cauchy i l'intercanvi d'integració amb sumatori per a sèries de funcions uniformement convergents sobre un contorn del teorema 4.8.

A partir d'aquest resultat es pot donar una nova demostració essencialment diferent del teorema 5.6. En primer lloc es veu la derivabilitat infinita: donada $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ per a cada punt $z_0 \in \mathcal{U}$ es pot agafar un R tal que $\overline{\mathcal{D}}(z_0; R) \subset \mathcal{U}$ i s'ha vist que la funció és una sèrie de potències a $\mathcal{D}(z_0; R)$; en particular és infinitament derivable en aquest conjunt i, per tant, ho és a tot $\mathcal{U}$.

Ara s'ha de veure la fórmula integral per a les derivades en tot punt de $\mathcal{D}$. Donat $z \in \mathcal{D}$ s'agafa un radi $\epsilon > 0$ tal que $\overline{\mathcal{D}}(z; \epsilon) \subset \mathcal{D}(z_0; R)$. Aplicant en que s'ha vist a aquest nou disc s'obté la funció com una sèrie de potències:

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z)^n, \quad \forall w \in \mathcal{D}(z;\epsilon), \qquad \text{amb} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z;\epsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,dz.$$

Per altra banda els coeficients d'una sèrie de potències estan relacionats amb les successives derivades de la funció suma en el punt central del desenvolupament: $f^{(n)}(z) = n! a_n$.

Raonant com a la prova de la fórmula integral de Cauchy, les integrals sobre les circumferències $C(z;\epsilon)$ i $C = C(z_0; r)$ coincideixen i, per tant,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C(z;\epsilon)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C(z_0;R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta,$$

que és la fórmula integral de Cauchy per a les derivades de la funció. □

Com a conseqüència s'obté l'equivalència entre les propietats de ser holomorfa i ser analítica per a funcions de variable complexa:

Corol·lari 5.16 (Holomorfa equival a analítica) *Tota funció holomorfa a un obert és analítica en aquest obert.*

Principi de prolongació analítica. Les funcions analítiques tenen la propietat de quedar unívocament determinades pels seus valors en un conjunt qualsevol que tingui algun punt d'acumulació. Com que tota funció holomorfa és analítica, les funcions holomorfes comparteixen aquesta propietat, que es demostra a continuació:

Teorema 5.17 (Principi de prolongació analítica) *Siguin f i g funcions holomorfes a un obert* connex $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. *Suposi's que $f(z) = g(z)$ per a tot z d'un subconjunt $S \subset \Omega$ que té un punt d'acumulació a Ω. Aleshores totes dues funcions coincideixen en Ω.*

Prova: L'enunciat és equivalent a assegurar que una funció holomorfa f tal que el seu conjunt de zeros tingui un punt d'acumulació a un obert connex Ω és idènticament nul·la en aquest obert.

Sigui $z_0 \in \Omega$ un punt d'acumulació del conjunt de zeros. Per continuïtat de la funció ha de ser $f(z_0) = 0$. Es vol veure que f s'anul·la en algun entorn d'aquest punt. Sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ la sèrie de potències que dóna la funció f en un disc obert de centre z_0. Si tots els a_n són zero aleshores f s'anul·la en aquest disc i ja es té el que es volia. Suposi's que no és així, per arribar a una contradicció. Sigui $m = \min\{n \geqslant 0 : a_n \neq 0\}$. Com que $f(z_0) = 0$ ha de ser $m \geqslant 1$. Aleshores

$$f(z) = (z - z_0)^m \big(a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \cdots\big) = (z - z_0)^m g(z),$$

on $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n$ és una funció holomorfa (i, per tant, contínua) al mateix entorn de z_0 on ho és la sèrie que dóna la funció f.

Com que $g(z_0) = a_m \neq 0$ la funció g no s'anul·la en algun entorn de z_0, i, com que $(z - z_0)^m$ només s'anul·la en el punt $z = z_0$, es dedueix que z_0 és un zero aïllat de la funció f, el qual contradiu la hipòtesi que z_0 era un punt d'acumulació de zeros. Per tant, necessàriament ha de ser $a_n = 0$ per a tot n i f és idènticament nu·la a un entorn de z_0.

Sigui $\mathcal{U} \subseteq \Omega$ l'interior del conjunt de zeros de f a Ω. Per definició, $\mathcal{U}$ és un obert, i és no buit ja que s'acaba de veure que conté tot punt d'acumulació del conjunt de zeros, dels quals n'hi ha algun per hipòtesi. Es vol veure que $\mathcal{U}$ també és tancat dins de Ω: tot punt de Ω que sigui de l'adherència de $\mathcal{U}$ és un punt d'acumulació de zeros de f i, tal com s'ha vist, també pertany a $\mathcal{U}$.

Com que l'obert Ω és connex un subconjunt obert i tancat ha de ser o buit o el total. Com que $\mathcal{U}$ és no buit ha de ser el total $\mathcal{U} = \Omega$, i $f(z) = 0$ per a tot $z \in \Omega$. □

Una versió equivalent d'aquest enunciat, que justifica el nom de "prolongació analítica", és la següent: donat un obert connex Ω i una funció f holomorfa a algun obert $\mathcal{U} \subseteq \Omega$

existeix com a màxim una funció $\widetilde{f}$ holomorfa a tot Ω que coincideixi amb la funció f donada a l'obert $\mathcal{U}$.

Funcions no constants. El principi de prolongació analítica assegura que una funció f no constant al voltant d'un punt z_0 pren valors diferents, $f(z) \neq f(z_0)$, en algun entorn del punt. Aquesta propietat té algunes conseqüències interessants, que es veuen a continuació.

Corol·lari 5.18 (Principi del mòdul màxim i mínim) *Sigui $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa no constant a un obert* connex Ω. *La funció $|f(z)|$ no té cap màxim local a Ω i els seus únics mínims locals els pren en els punts en què $f(z) = 0$.*

PROVA: Suposi's que $|f|$ té un màxim local a un punt z_0. Sigui $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z_0; R) \subset \Omega$ un entorn en què $|f(z_0)| \geqslant |f(z)|$ per a tot punt $z \in \mathcal{D}$. Es demostrarà que $|f(z)| = |f(z_0)|$ per a tot punt de $\mathcal{D}$. Com que tota funció holomorfa de mòdul constant a un obert connex és constant, d'això es dedueix que $f(z) = f(z_0)$ a l'obert $\mathcal{D}$, i, per prolongació analítica, la funció f és constant igual a $f(z_0)$ a tot l'obert Ω.

Per a cada r amb $0 < r < R$ sigui $C = C(z_0; r)$. El teorema del valor mitjà (corol·lari 5.2) aplicat al punt z_0 i el contorn C assegura que

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt \leqslant \frac{1}{2\pi} |f(z_0)| 2\pi = |f(z_0)|,$$

ja que $|f(z_0 + re^{it})| \leqslant |f(z_0)|$ per a tot $t \in [0, 2\pi]$. Per tant les desigualtats anteriors han de ser igualtats. Suposi's que existeix un punt $t \in [0, 2\pi]$ en el qual es tingués una desigualtat estricta $|f(z_0 + re^{it})| < |f(z_0)|$. Aleshores es tindria una desigualtat estricta en les integrals (la integral d'una funció contínua no negativa no idènticament nul·la no pot ser zero) i seria

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)|\, dt = |f(z_0)|,$$

que dóna la contradicció $|f(z_0)| < |f(z_0)|$. Per tant ha de ser $|f(z)| = |f(z_0)|$ per a tot punt $z \in \mathcal{D}$ i, efectivament, la funció $|f|$ és constant en aquest disc.

L'afirmació sobre el mínim s'obté agafant la funció $1/f(z)$ a un entorn d'un punt on f no s'anul·li: si $|f|$ té un mínim local a z_0 i $f(z_0) \neq 0$ aleshores $1/f$ és una funció holomorfa en un obert connex $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z_0; R)$ i té un màxim local a z_0, per tant és constant al disc $\mathcal{D}$, per tant f també ho és, i per prolongació analítica ho és a tot Ω. $\square$

D'aquí es pot deduir que tota funció analítica és oberta:

Teorema 5.19 *[Teorema de l'aplicació oberta] Tota funció holomorfa no constant a un obert connex és oberta: envia oberts a oberts.*

PROVA: Sigui f holomorfa no constant a un obert connex Ω. Per veure que f és oberta s'ha de veure que per a tot obert $\mathcal{U} \subseteq \Omega$ i tot punt $z_0 \in \mathcal{U}$ existeix un entorn de $w_0 = f(z_0)$ contingut a $f(\mathcal{U})$. Canviant f per $f(z) - f(z_0)$ es pot suposar sense pèrdua de generalitat que $f(z_0) = 0$.

Com que f no és constant a Ω no pot ser constant a l'entorn de cap punt i per tant existeix un disc $\mathcal{D}(z_0; r) \subseteq \mathcal{U}$ tal que l'únic punt de $\overline{\mathcal{D}}$ en què f s'anul·la és el mateix z_0. Sigui $2\epsilon = \min\{|f(z)| : z \in C\} > 0$ el mínim a la vora $C = C(z_0; r)$. Per a cada $w \in \mathcal{D}(0; \epsilon)$ es considera la funció $f_w(z) := f(z) - w$ i es té

$$|f_w(z)| = |f(z) - w| \geqslant |f(z)| - |w| > \epsilon \qquad \text{per a tot} \quad z \in C,$$

mentre, en canvi,

$$|f_w(z_0)| = |f(z_0) - w| = |w| < \epsilon.$$

Es dedueix que $|f_w(z)|$ pren un valor mínim al disc obert $\mathcal{D}(z_0; r)$ i, pel principi del mòdul mínim, aquest valor mínim només pot ser el zero. Per tant $f_w(z) = 0 \Rightarrow f(z) = w$ per a algun punt $z \in \mathcal{D}(z_0; r) \subseteq \mathcal{U}$ i això assegura que tot punt $w \in \mathcal{D}(0; \epsilon)$ pertany a la imatge $f(\mathcal{U})$. Per tant, $\mathcal{D}(0; \epsilon) \subseteq f(\mathcal{U})$ i f és oberta. □

Les demostracions dels resultats anteriors de vegades es presenten en ordre invers. El teorema de l'aplicació oberta es demostra primer com a conseqüència de l'analicitat de la funció f a partir del corol·lari 5.22, que assegura que si la funció no és localment constant a z_0 tot punt d'un entorn de $f(z_0)$ té tantes antiimatges com la multiplicitat $\geqslant 1$ corresponent. Després el teorema del mòdul màxim és una conseqüència immediata: per a tot punt $z_0 \in \Omega$ la imatge de tot entorn és un obert que conté $f(z_0)$ i, per tant, conté un disc $\mathcal{D}\big(f(z_0); \epsilon\big)$ per a algun $\epsilon > 0$, i tot disc conté punts de mòdul estrictament més gran que el mòdul del seu centre.

5.3 Ordre i multiplicitat

El fet que les funcions holomorfes siguin analítiques implica que en alguns sentits es comporten com a polinomis. Aquí es veu que té sentit parlar de l'ordre d'anul·lació d'una funció holomorfa en un punt, que és un concepte anàleg al de multiplicitat del zero d'un polinomi. A partir d'això es veurà que les funcions holomorfes es comporten localment de manera molt semblant a una funció $z \mapsto z^m$ i es deduiran algunes conseqüències.

Proposició 5.20 (Zeros de funcions holomorfes) *Una funció f holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ s'anul·la a un punt $z_0 \in \mathcal{U}$ si, i només si, existeix una funció g holomorfa a $\mathcal{U}$ tal que $f(z) = (z - z_0)g(z)$ per a tot $z \in \mathcal{U}$.*

PROVA: Si la funció es pot escriure de la forma $f(z) = (z - z_0)g(z)$ per a alguna funció g aleshores $f(z_0) = 0$.

Recíprocament, suposi's que $f(z_0) = 0$. Una funció g tal que $f(z) = (z - z_0)g(z)$ per a tot $z \in \mathcal{U}$ queda unívocament determinada (i és holomorfa) a $\mathcal{U} \setminus \{z_0\}$ per la identitat $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$. En el punt z_0 se li pot donar qualsevol valor i la igualtat sempre es complirà;

l'únic que cal veure és que se li pot donar un valor de manera que sigui holomorfa. Això es demostrarà usant l'analicitat de les funcions holomorfes.

Sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ el desenvolupament en sèrie de potències a algun disc $\mathcal{D}(z_0; R)$, amb coeficient $a_0 = f(z_0) = 0$. Traient factor comú de $(z - z_0)$ es té $f(z) = (z - z_0)\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(z - z_0)^n = (z - z_0)g_1(z)$ a $\mathcal{D}$ amb g_1 la funció holomorfa definida a $\mathcal{D}$ per la sèrie de potències. Les funcions g i g_1 coincideixen en el disc perforat $\mathcal{D}'(z_0; R)$. Definint $g(z_0) := a_1 = g_1(z_0)$ s'obté la prolongació holomorfa de g al punt z_0.

Hi ha altres maneres de demostrar aquest resultat. Per exemple, usant la versió el teorema de Cauchy amb punts singulars. Es defineix la funció

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si} \quad z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{si} \quad z = z_0, \end{cases}$$

que satisfà la igualtat de l'enunciat (recordi's que $f(z_0) =$). S'ha de veure que és holomorfa a tot $\mathcal{U}$. La funció g és és holomorfa a $\mathcal{U}$ llevat, potser, del punt z_0. En el punt z_0 és contínua i, per tant, està fitada a un entorn seu. Pel teorema de Cauchy amb singularitats la integral sobre contorns tancats dóna zero. Pel teorema fonamental del càlcul té una primitiva F a $\mathcal{U}$ i, per tant, és holomorfa. □

Proposició 5.21 (Ordre del zero en un punt) *Tota funció f holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ no localment zero a un punt $z_0 \in \mathcal{U}$ es pot escriure de manera única de la forma*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \qquad \text{amb} \quad m \geqslant 0, \quad g \text{ holomorfa a } \mathcal{U}, \quad g(z_0) \neq 0.$$

El nombre m s'anomena ordre de f en el punt z_0 *i es denota*

$$\mathrm{ord}_{z_0}(f) = m.$$

Si f s'anul·la en algun entorn de z_0 es posa $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = \infty$.

PROVA: Primer es veu l'existència d'una tal descomposició. Per a tot enter $m \geqslant 1$ existeix una única funció g a l'obert perforat $\mathcal{U} \setminus \{z_0\}$ que satisfaci la igualtat: la funció $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$, que és holomorfa. Només cal veure que aquesta funció es pot estendre de manera holomorfa a tot $\mathcal{U}$ amb un valor no nul per a un m.

Sigui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ el desenvolupament en sèrie de potències en un disc $\mathcal{D}(z_0; R) \subseteq \mathcal{U}$ de centre z_0. No tots els coeficients poden ser zero, ja que aleshores la funció s'anul·laria en aquest entorn del punt z_0. Sigui m el mínim enter tal que $a_m \neq 0$. Sigui $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n$, que és holomorfa al disc $\mathcal{D}$. Com que $f(z) = (z - z_0)^m g_1(z)$ al disc, la funció g_1 coincideix amb g al disc perforat. Definint $g(z_0) := a_m = g_1(z_0) \neq 0$ s'obté la funció holomorfa g que satisfà la condició de l'enunciat.

Per veure la unicitat siguin $f(z) = (z - z_0)^m g(z) = (z - z_0)^p h(z)$ amb $h(z_0) \neq 0$. Suposi's que $m \geqslant p$. Aleshores $(z - z_0)^{m-p} g(z) = h(z)$. Si fos $m > p$ avaluant en $z = z_0$ es té la contradicció $h(z_0) = 0$. Per tant ha de ser $m = p$. Dividint per $(z - z_0)^m$ es dedueix que les funcions g i h són iguals en tots els punts $z \neq z_0$ i, per continuïtat, han de ser iguals també en aquest punt. $\square$

El resultat anàleg no és cert sobre els reals. La funció $f(x) = e^{1/x^2}$ és derivable a tot $\mathbb{R}$, i de fet és de classe $\mathscr{C}^\infty$. S'anul·la en el punt $x = 0$ i és no nul·la en tot punt $x \neq 0$, però no es pot posar de la forma $(x - 0)^m g(x)$ amb g derivable. El problema és que no és analítica en el punt $x_0 = 0$: no ve donada per cap sèrie de potències a un entorn d'aquest punt ja que $f^{(n)}(0) = 0$ per a tot $n \geqslant 0$ i, per tant, la sèrie hauria de ser la sèrie zero.

Corol·lari 5.22 (Multiplicitat) *Sigui f una funció holomorfa no localment constant al punt z_0. Sigui $w_0 = f(z_0)$ i $m = \operatorname{ord}_{z_0}\big(f(z) - w_0\big) \geqslant 1$. Existeix un entorn $\mathcal{U}$ del punt z_0 tal que:*

1. *$f(z) = w_0 + h(z)^m$ a $\mathcal{U}$ amb h holomorfa a $\mathcal{U}$ tal que $h(z_0) = 0$ i $h'(z_0) \neq 0$;*
2. *el punt w_0 té una única antiimatge z_0 a $\mathcal{U}$; i*
3. *tot punt $w \in f(\mathcal{U})$ diferent de w_0 té exactament m antiimatges diferents a $\mathcal{U}$.*

L'enter m s'anomena multiplicitat *de f en el punt z_0.*

Prova: Sigui $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$ la descomposició de la proposició 5.21, que ha de tenir $m \geqslant 1$ ja que la funció $f(z) - w_0$ s'anul·la en el punt z_0.

Com que $g(z_0) \neq 0$ existeix un disc $\mathcal{D}(z_0; R)$ en què la funció no s'anul·la. La proposició 5.14 assegura que existeix una l'arrel n-èsima holomorfa $z \mapsto g(z)^{1/n}$ de la funció g en aquest entorn. Es defineix $h(z) = (z - z_0)g(z)^{1/m}$ al disc $\mathcal{D}(z_0; R)$, que és una funció holomorfa amb $h(z_0) = 0$ i amb $h'(z_0) = g(z_0)^{1/m} \neq 0$, ja que la seva derivada és

$$h'(z) = g(z)^{1/m} + (z - z_0)\frac{g(z)^{1/m} g'(z)}{m g(z)}.$$

Elevant a m s'obté la igualtat $f(z) = w_0 + h(z)^m$ en aquest disc. Això demostra el primer apartat amb obert $\mathcal{U}$ el disc $\mathcal{D}(z_0; R)$.

El segon apartat també es compleix en aquest obert ja que $h(z) = (z - z_0)g(z)^{1/m}$ només s'anul·la en el punt $z = z_0$ del disc per ser $g(z) \neq 0$ en tots els seus punts. Per tant, $f(z) \neq w_0$ per a tot punt $z \neq z_0$ de $\mathcal{D}(z_0; R)$.

Pel teorema de la funció inversa aplicat a la funció h en el punt z_0 existeixen entorns oberts $\mathcal{U}$ de z_0 i $\mathcal{V}$ de $0 = h(z_0)$ tals que h és una bijecció entre tots dos. Agafant un disc obert $\mathcal{D}(0; r) \subseteq \mathcal{V}$ i $\mathcal{U}$ l'entorn obert de z_0 que és la seva antiimatge per h es pot suposar que $\mathcal{V} = \mathcal{D}(0; r) = h(\mathcal{U})$ és un disc centrat al zero.

Sigui $w = f(z) \in f(\mathcal{U})$ un punt diferent de z_0; que equival a què $z \neq z_0$. Aleshores $h(z) \in \mathcal{V} = \mathcal{D}(0; r)$ és diferent de zero. Es consideren els m punts diferents $e^{2\pi i k/m} h(z) \in \mathcal{D}(0; r)$ per a $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Siguin $z'_k \in \mathcal{U}$ les seves antiimatges per h, que són totes diferents ja que $h\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ és bijectiva. De fet, $z'_0 = z$ és el punt inicial. Aleshores

$$f(z'_k) = w_0 + h(z'_k)^m = w_0 + \big(e^{2\pi i k/m} h(z)\big)^m = w_0 + h(z)^m = f(z) = w$$

i, per tant, aquests $z'_k \in \mathcal{U}$ són m antiimatges diferents de w. Per veure que no n'hi ha més, sigui $z' \in \mathcal{U}$ tal que $f(z') = f(z)$. Aleshores

$$w_0 + h(z')^m = w_0 + h(z)^m \Rightarrow \left(\frac{h(z')}{h(z)}\right)^m = 1 \Rightarrow h(z') = e^{2\pi ik/m}h(z) = h(z'_k) \Rightarrow z' = z'_k$$

per a algun enter $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Amb això queda demostrat el tercer apartat per a aquest obert $\mathcal{U}$, en el qual clarament també se satisfan els dos primers. $\square$

Corol·lari 5.23 *Tota funció holomorfa injectiva $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ en un obert $\mathcal{U}$ té derivada no nul·la en tot punt: $f'(z) \neq 0$ per a tot $z \in \mathcal{U}$.*

Prova: Si f és injectiva la seva multiplicitat ha de ser 1 en cada punt $z_0 \in \mathcal{U}$, ja que altrament no seria injectiva en algun entorn del punt. Per tant $f(z) = f(z_0) + h(z)^m$ on $m = 1$ i $h'(z_0) \neq 0$. Es dedueix que $f'(z_0) = h'(z_0) \neq 0$ en cada punt $z_0 \in \mathcal{U}$. $\square$

Observi's que l'anàleg d'aquest resultat no és cert en variable real: $f(x) = x^3$ és derivable injectiva a tot $\mathbb{R}$ però la seva derivada és zero en el punt $x = 0$. Observi's també que el recíproc no és cert a $\mathbb{C}$: $f(z) = e^z$ té derivada no nul·la en tot punt $z \in \mathbb{C}$ però no és injectiva a $\mathbb{C}$; aplicant el teorema de la funció inversa l'únic que es pot dir de la funció exponencial és que és localment injectiva, però globalment no ho és.

El fet que la derivada d'una funció injectiva sigui no nul·la permet aplicar el teorema de la funció inversa i obtenir la conseqüència següent, que tampoc és certa sobre els reals (la inversa de la funció $x \mapsto x^3$ és la funció $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, que no és derivable en el zero):

Corol·lari 5.24 *Tota funció holomorfa injectiva en un obert té inversa holomorfa.*

5.4 Derivació sota el signe integral

Moltes funcions es defineixen a partir d'expressions integrals, per exemple les transformades integrals, i en aquesta situació és important poder deduir bones propietats de la funció a partir de les propietats de la funció que s'integra. El fet més rellevant en aquest context és la *regla integral de Leibniz*, que també es coneix com a regla de *derivació sota el signe integral*. Es tracta d'un fet bàsicament equivalent a la possibilitat d'intercanviar l'ordre en integrals iterades (teorema de Fubini) o també a la igualtat entre derivades parcials mixtes (teorema de Schwarz).

En aquesta secció s'enuncia els teorema corresponent per a funcions de variable complexa, que es dedueix immediatament a partir dels seu anàleg de variable real. Primer es veu una versió del teorema de Fubini per a integrals de contorn:

Lema 5.25 *Siguin $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ i $\eta\colon J \to \mathbb{C}$ contorns i sigui $\Phi\colon \gamma^* \times \eta^* \to \mathbb{C}$ una funció contínua en el producte cartesià de les seves imatges. Aleshores*

$$\int_\gamma \left(\int_\eta \Phi(z,\zeta)\, d\zeta\right) dz = \int_\eta \left(\int_\gamma \Phi(z,\zeta)\, dz\right) d\zeta.$$

Prova: El teorema de Fubini assegura que si I i J són intervals compactes de $\mathbb{R}$ i $(t,s) \mapsto \phi(t,s) \colon I \times J \to \mathbb{R}$ és una funció contínua definida al seu producte cartesià,

$$\int_{I\times J} \phi(t,s)\,dt\,ds = \int_I \left(\int_J \phi(t,s)\,ds \right) dt = \int_J \left(\int_I \phi(t,s)\,dt \right) ds.$$

Aleshores

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left(\int_\eta \Phi(z,\zeta)\,d\zeta \right) dz &= \int_\gamma \left(\int_J \Phi\big(z,\eta(s)\big)\eta'(s)\,ds \right) dz \\
&= \int_I \left(\int_J \Phi\big(\gamma(t),\eta(s)\big)\eta'(s)\,ds \right) \gamma'(t)\,dt = \int_I \left(\int_J \Phi\big(\gamma(t),\eta(s)\big)\eta'(s)\gamma'(t)\,ds \right) dt \\
&= \int_J \left(\int_I \Phi\big(\gamma(t),\eta(s)\big)\eta'(s)\gamma'(t)\,dt \right) ds = \cdots = \int_\eta \left(\int_\gamma \Phi(z,\zeta)\,dz \right) d\zeta
\end{aligned}$$

on el teorema de Fubini s'ha aplicat a les dues components reals de la funció

$$\Phi\big(\gamma(t),\eta(s)\big)\eta'(s)\gamma'(t) = \phi(s,t) + i\psi(s,t),$$

que són funcions contínues en el producte $I \times J$. □

Teorema 5.26 (Derivació sota el signe integral) *Sigui $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un contorn. Sigui $\Phi \colon \mathcal{U} \times \gamma^* \to \mathbb{C}$ definida al producte cartesià d'un obert complex $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ i la imatge $\gamma^* = \gamma\big([a,b]\big)$. Suposi's que la funció Φ satisfà les condicions següents*

1. *és contínua a tot $\mathcal{U} \times \gamma^*$;*
2. *per a cada $\zeta \in \gamma^*$ la funció $z \mapsto \Phi(z,\zeta)$ és holomorfa a $\mathcal{U}$ com a funció de la variable z; es denota $z \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial z}(z,\zeta)$ la funció derivada corresponent;*
3. *la funció $(z,\zeta) \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial z}(z,\zeta)$ és contínua a tot $\mathcal{U} \times \gamma^*$.*

Aleshores la funció $f \colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ definida posant

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(z,\zeta)\,d\zeta$$

és holomorfa a $\mathcal{U}$ i la seva derivada és

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial\Phi}{\partial z}(z,\zeta)\,d\zeta.$$

Prova: La propietat de l'enunciat és local i per tant es pot reduir la demostració al cas que $\mathcal{U}$ sigui un disc. Sigui $\eta \colon J \to \mathcal{U}$ un contorn tancat. Aleshores aplicant el lema 5.25 es calcula

$$\int_\eta f(z)\,dz = \int_\eta \left(\int_\gamma \Phi(z,\zeta)\,d\zeta \right) dz = \int_\gamma \left(\int_\eta \Phi(z,\zeta)\,dz \right) d\zeta = 0$$

aplicant el teorema de Cauchy en un disc a la funció $\Phi(z,\zeta)$, que és holomorfa en z per a cada $\zeta \in \gamma^*$ fixat. La funció $f(z)$ és contínua, per exemple gràcies a la continuïtat uniforme de $\Phi(z,\zeta)$ sobre subconjunts compactes de $\mathcal{U} \times \gamma^*$. Aplicant el teorema de Morera es dedueix que f és holomorfa a $\mathcal{U}$.

Per calcular la seva derivada es fa servir la fórmula integral de Cauchy i de nou el lema 5.25 per intercanviar les integrals:

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-w)^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\int_\gamma \frac{\Phi(z,\zeta)}{(z-w)^2}\,d\zeta\right) dz$$
$$= \int_\gamma \left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z,\zeta)}{(z-w)^2}\,dz\right) d\zeta = \int_\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z}(w,\zeta)\,d\zeta,$$

on, per a cada $w \in \mathcal{U}$ s'ha agafat un disc $\overline{\mathcal{D}}(z_0;r) \subset \mathcal{U}$ amb $w \in \mathcal{D}$ i la integral es fa sobre la circumferència C corresponent. $\square$

6 Funcions meromorfes i residus

En aquesta secció s'estudien funcions que són holomorfes en un obert excepte a un subconjunt de punts aïllats, anomenats *singularitats aïllades* de la funció. Aquestes singularitats es classificaran en tres categories: les *singularitats evitables*, on la funció es pot estendre de manera holomorfa; els *pols*, que són punts on la funció tendeix a infinit, i les *singularitats essencials*, que són aquelles en què els valors de la funció en tot entorn seu són gairebé tots els nombres complexos.

Les singularitats evitables ja han sortit abans en el curs: el teorema de Cauchy amb singularitats (teorema 4.18) és una versió per a funcions que poden tenir singularitats d'aquest tipus.

Les funcions meromorfes són funcions holomorfes amb singularitats que són pols. Es poden pensar com a funcions holomorfes amb valors a l'esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, de manera que la imatge dels pols és el punt de l'infinit de $\mathbb{C}$, i en molts aspectes el seu comportament és anàleg al de les funcions holomorfes.

6.1 Singularitats aïllades

Definició 6.1 (Singularitat aïllada) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa a un obert $\mathcal{U}$. Un punt z_0 és una* singularitat aïllada *de la funció f si $\mathcal{D}'(z_0;r) \subseteq \mathcal{U}$ per a algun $r > 0$.*

O sigui, la funció f està definida i és holomorfa a un entorn de z_0.

Com que només es consideraran singularitats aïllades se'ls dirà simplement singularitats. Una *funció holomorfa amb singularitats* a un obert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ és una funció $f\colon \mathcal{U} \setminus \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ definida i holomorfa a tot punt de $\mathcal{U}$ excepte a un subconjunt $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$ de punts que són singularitats aïllades de f. La funció pot no estar definida als punts de $\mathcal{S}$ o pot estar-ho però no ser (necessàriament) holomorfa. Observi's que $\mathcal{S}$ és tancat dins de $\mathcal{U}$ ja que està format per punts aïllats. Per tant, el conjunt $\mathcal{U} \setminus \mathcal{S}$ és un obert. Observi's també que tot compacte dins de $\mathcal{U}$ conté només un nombre finit de singularitats.

Exemples. A continuació es donen exemples de funcions holomorfes a l'obert $\mathcal{U} = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ amb una singularitat aïllada en el punt $z_0 = 0$, on es veuen els tres comportaments típics a l'entorn d'una singularitat.

- Qualsevol funció f que sigui la restricció a $\mathcal{U}$ d'una funció holomorfa a tot $\mathbb{C}$. En aquest cas, definint $f(0)$ com el valor d'aquesta funció en el punt singular $z_0 = 0$ s'obté una extensió holomorfa de f a aquest punt. Un altre exemple del mateix tipus és la funció $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ per a $z \in \mathcal{U}$. Tot i que aquesta fórmula no val en el punt $z = 0$, ja que dóna la indeterminació $0/0$, si es posa $f(0) = \lim_{z\to z_0} f(z) = 1$ es té una extensió que és la funció entera donada per la sèrie de potències
$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^2}{(2n+1)!} z^{2n}$$
- La funció $f(z) = 1/z$ és holomorfa a $\mathcal{U}$ i tendeix a zero en apropar-se al punt singular $z_0 = 0$. No es pot estendre de manera holomorfa en aquest punt. Anàlogament les funcions $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ amb $n \geqslant 1$ tenen una singularitat en el punt z_0 amb $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
- La funció $f(z) = e^{1/z}$ és holomorfa a $\mathcal{U}$ i no existeix el límit a la singularitat. En efecte, si t és real $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \infty$, $\lim_{t\to 0^-} f(t) = 0$ i $\lim_{t\to 0} f(it)$ no existeix ja que $f(it) = e^{-i/t}$ dóna infinites voltes a la circumferència de radi 1 quan t s'apropa a zero. De fet, és fàcil veure que $f\big(D'(0;\epsilon)\big) = \mathbb{C}^*$ per a tot disc perforat de radi ϵ tan petit com es vulgui, i per tant els valors de la funció en tot entorn de la singularitat són tots els nombres complexos excepte un: el zero.

Definició 6.2 (Tipus de punts singulars) *Una singularitat z_0 d'una funció f holomorfa es diu*

- singularitat evitable *si existeix el límit* $\lim_{z\to z_0} f(z)$*;*
- pol *si* $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$*; i*
- singularitat essencial *altrament: el límit en el punt z_0 no existeix ni és infinit.*

En aquesta definició la singularitat evitable ho és en el sentit de continuïtat: correspon a discontinuïtat evitable en el sentit que l'únic que es demana és que la funció es pugui estendre de manera contínua en el punt z_0. A continuació es veurà que aquesta extensió és necessàriament una funció holomorfa. Aquest fet és fals sobre els reals: una funció derivable de variable real pot tenir una discontinuïtat evitable en un punt però, en estendre-la de manera contínua, donar una funció que no sigui derivable en aquest punt. Per exemple la funció $f(x) = |x|$ és derivable a $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i té límit zero en el punt $x_0 = 0$ però en completar-la posant $f(0) = 0 = |0|$ la funció que s'obté és contínua però no derivable.

Teorema 6.3 (Teorema de Riemann d'evitació de singularitats) *Una singularitat z_0 és evitable si, i només si, la funció està fitada en algun entorn seu. En aquest cas posant $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$ es té una extensió holomorfa de la funció al punt singular.*

Prova: Si existeix el límit la funció està fitada en algun entorn del punt. Recíprocament, suposi's que f és holomorfa i està fitada a un disc perforat $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(z_0; R)$. Sigui $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z_0; R)$ el disc obert corresponent. Es defineix una funció g en aquest disc posant

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & \text{si} \quad z \neq z_0, \\ 0, & \text{si} \quad z = z_0. \end{cases}$$

Aquesta funció és holomorfa al disc perforat $\mathcal{D}'$ per ser-ho f. També ho és a z_0, amb derivada zero, ja que

$$g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)^2 f(z) - 0}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

per estar f fitada al disc perforat. La funció $g(z)$ és holomorfa a $\mathcal{D}(z_0; R)$ i per tant admet desenvolupament en sèrie de potències:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \forall z \in \mathcal{D}(z_0; R).$$

Els dos primers coeficients són $a_0 = g(z_0) = 0$ i $a_1 = g'(z_0) = 0$. Aleshores

$$(z - z_0)^2 f(z) = g(z) = (z - z_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z - z_0)^n, \qquad \forall z \in \mathcal{D}'(z_0; R).$$

Dividint per $(z - z_0)^2$ a cada costat, es té

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z - z_0)^n, \qquad \forall z \in \mathcal{D}'(z_0; R).$$

Es dedueix que $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_2$, i per tant z_0 és una singularitat evitable. A més, definit $f(z_0) := a_2$ la funció que resulta ve donada per la sèrie de potències anterior a tot al disc $\mathcal{D}(z_0; R)$ i, per tant, és holomorfa a z_0. $\square$

El comportament d'una funció holomorfa a l'entorn d'un pol és anàleg al que s'ha vist a la proposició 5.21 per als zeros:

Proposició 6.4 (Ordre d'un pol) *Sigui f holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ excepte a un punt $z_0 \in \mathcal{U}$ en què té una singularitat. La singularitat z_0 és un pol si, i només si, existeix una descomposició de la forma*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \qquad m \geqslant 1, \quad g \text{ holomorfa a } \mathcal{U}, \quad g(z_0) \neq 0.$$

En aquest cas la descomposició és única, es diu que z_0 és un pol d'ordre m, *i es posa*

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f) = -m.$$

PROVA: La demostració és anàloga a la de la proposició 5.21. Com que f té un pol en el punt z_0 es té $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Sigui $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(z_0; R)$ un entorn de z_0 en el qual f no s'anul·la, que existeix gràcies a què el límit és infinit. la funció $f_1(z) = 1/f(z)$ està definida i és holomorfa en aquest disc perforat. Com que $\lim_{z\to z_0} f_1(z) = 1/\infty = 0$ el teorema d'evitació de singularitats de Riemann assegura que posant $f_1(z_0) = 0$ s'obté una extensió holomorfa d'aquesta funció a tot el disc $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z_0; R)$.

Per la proposició 5.21 aquesta funció es pot escriure de la forma $f_1(z) = (z-z_0)^m g_1(z)$ amb $m > 0$ (ja que $f_1(z_0) = 0$) i g_1 holomorfa a $\mathcal{D}$ amb $g_1(z_0) \neq 0$.

Es defineix la funció g posant

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^m f(z), & \text{si} \quad z \neq z_0, \\ g_1(z_0)^{-1}, & \text{si} \quad z = z_0 \end{cases}.$$

Aquesta funció satisfà la fórmula de l'enunciat, és holomorfa excepte potser en el punt z_0 i té $g(z_0) \neq 0$. Per tant l'únic que falta és veure que també és holomorfa en aquest punt. Les dues funcions g i $1/g_1$ coincideixen al disc perforat $\mathcal{D}'$. En efecte, en aquest disc es té

$$f_1(z) = (z-z_0)^m g_1(z) \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{f_1(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m g_1(z)} \Leftrightarrow \frac{1}{g_1(z)} = (z-z_0)^m f(z) = g(z).$$

La funció $1/g_1$ és holomorfa a tot el disc $\mathcal{D}'$ i, per tant, definint $g(z_0)$ com el valor d'aquesta funció es té la extensió holomorfa que es volia.

La unicitat de la descomposició es demostra exactament igual com en la proposició 5.21: sigui $f(z) = (z-z_0)^{-m} g(z) = (z-z_0)^{-p} h(z)$ amb $h(z_0) \neq 0$. Suposi's que $m \leqslant p$. Aleshores $(z-z_0)^{p-m} g(z) = h(z)$. Si fos $m < p$ avaluant en $z = z_0$ es té la contradicció $h(z_0) = 0$. Per tant ha de ser $m = p$. Multiplicant per $(z-z_0)^m$ es dedueix que les funcions g i h són iguals en tots els punts $z \neq z_0$ i, per continuïtat, han de ser iguals també en aquest punt. $\square$

A tot entorn d'una singularitat essencial la funció es comporta molt erràticament, en el sentit que els seus valors es distribueixen per tot el pla complex. Hi ha dos resultats molt importants que descriuen aquest comportament. El primer, que es demostrarà a continuació, és el teorema de Casorati-Weierstrass, que assegura que els valors de la funció en tot entorn del punt són densos a $\mathbb{C}$. L'altre és el *teorema gran de Picard*, que és més difícil de demostrar i no es veurà en aquest curs. Diu que els valors de la funció en tot entorn del punt són tot $\mathbb{C}$ llevat, potser, d'un únic punt.

Teorema 6.5 (Casorati-Weierstrass) *Una singularitat és essencial si, i només si, la imatge de tot entorn seu és densa a $\mathbb{C}$.*

PROVA: Si la funció té una singularitat aïllada o un pol la imatge d'un disc perforat prou petit està fitada o el seu valor absolut és arbitràriament gran, respectivament. En tots dos casos aquestes imatges no són denses a $\mathbb{C}$.

Recíprocament, suposi's que la imatge d'un disc perforat $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(z_0; R) \subseteq \mathcal{U}$ no és densa a $\mathbb{C}$. Això equival a què existeixi un punt $w \in \mathbb{C}$ i un disc obert $\mathcal{D}(w; r)$ tal que la funció no pren cap valor en aquest disc; o sigui, tal que $|f(z) - w| \geqslant r$ per a tot $z \in \mathcal{D}'$. per a algun $w \in \mathbb{C}$ i algun $r > 0$. Es considera la funció

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}, \qquad z \in \mathcal{D}'(z_0; R),$$

que és holomorfa a $\mathcal{D}'$ i hi està fitada ja que $|f(z) - w| \geqslant r \Rightarrow |g(z)| \leqslant r^{-1}$. Pel teorema d'evitació de singularitats de Riemann es pot definir $g(z_0)$ com el límit corresponent obtenint-se així una funció holomorfa g a tot el disc $\mathcal{D}(z_0; R)$ que només es pot anul·lar en el punt z_0, en el cas que aquest límit fos zero. Aleshores

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w, \qquad z \in \mathcal{D}'(z_0; R) \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = \frac{1}{g(z_0)} + w,$$

i per tant f té una singularitat evitable si $g(z_0) \neq 0$ o un pol si $g(z_0) = 0$. $\square$

Definició 6.6 (Funció meromorfa) *Una* funció meromorfa *a un obert $\mathcal{U}$ és una funció definida i holomorfa a $\mathcal{U} \setminus \mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$ que té pols en tots els punts de $\mathcal{S}$.*

O sigui, una funció que, en cada punt de $\mathcal{U}$, o bé és holomorfa o bé hi té un pol.

Igual que per a les funcions holomorfes, una funció es diu meromorfa a un subconjunt de $\mathbb{C}$ qualsevol, no necessàriament obert, per exemple un compacte o un punt, si és la restricció d'una funció meromorfa a algun obert que conté aquest conjunt.

Definició 6.7 (Ordre) *Si f és una funció meromorfa a $\mathcal{U}$ per a cada $z_0 \in \mathcal{U}$ es defineix*

$$\mathrm{ord}_{z_0}(f) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

com l'enter $m \geqslant 0$ determinat per la proposició 5.21 si f és holomorfa no localment zero en el punt, ∞ si és holomorfa localment zero, i com l'enter $-m < 0$ determinat per la proposició 6.4 si f té un pol en el punt.

Les funcions que tenen ordre finit en un punt es caracteritzen de la manera següent:

Lema 6.8 (Funcions d'ordre finit) *Una funció f no localment zero és meromorfa en un punt z_0 si, i només si, existeix una funció g holomorfa amb $g(z_0) \neq 0$ tal que*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

en algun entorn del punt per a algun enter $m \in \mathbb{Z}$. En aquest cas, $m = \mathrm{ord}_{z_0}(f)$.

Prova: És conseqüència immediata de les proposicions 5.21 i 6.4. Si la funció és holomorfa no localment zero la proposició 5.21 diu que és de la forma indicada amb $m \geqslant 0$ i si té un pol la 6.4 diu que és de la forma indicada amb $m < 0$. En tots dos casos aquest enter s'ha definit com l'ordre de la funció en el punt. Recíprocament, si la funció es pot escriure com a l'enunciat el límit $\lim_{z \to z_0} f(z)$ és 0, $g(z_0) \neq 0$ o ∞ segons que $m > 0$, $m = 0$ o $m < 0$, amb $m = \mathrm{ord}_{z_0}(f)$. $\square$

Proposició 6.9 *Si f i g són funcions meromorfes a un punt z_0,*

1. *$f+g$ és meromorfa a z_0 i $\operatorname{ord}_{z_0}(f+g) \geqslant \min\{\operatorname{ord}_{z_0}(f), \operatorname{ord}_{z_0}(g)\}$, amb igualtat si tots dos ordres són diferents;*
2. *fg és meromorfa a z_0 i $\operatorname{ord}_{z_0}(fg) = \operatorname{ord}_{z_0}(f) + \operatorname{ord}_{z_0}(g)$;*
3. *si f no és localment zero a z_0, $1/f$ és meromorfa a z_0 i $\operatorname{ord}_{z_0}(1/f) = -\operatorname{ord}_{z_0}(f)$.*

PROVA: Suposi's primer que una de les dues funcions, per exemple f, és localment zero en en el punt z_0. Aleshores $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = \infty$. La suma $f+g$ és localment igual a la funció g; per tant és una funció meromorfa i es té sempre la igualtat $\operatorname{ord}_{z_0}(f+g) = \operatorname{ord}_{z_0}(g) = \min\{\operatorname{ord}_{z_0}(g), \infty\}$, sigui quin sigui l'ordre de g. El producte fg és localment zero; per tant és una funció meromorfa i es té $\operatorname{ord}_{z_0}(fg) = \infty = \infty + \operatorname{ord}_{z_0}(g)$. Això demostra els dos primers apartats en aquest cas particular.

Un cop vist aquest cas a partir d'ara se suposa que cap de les dues és localment zero en z_0. Pel lema 6.8 això equival a què es puguin escriure com

$$f(z) = (z-z_0)^m \phi(z), \qquad g(z) = (z-z_0)^n \psi(z)$$

amb ϕ i ψ holomorfes no nul·les a un entorn del punt, on $m = \operatorname{ord}_{z_0}(f)$ i $n = \operatorname{ord}_{z_0}(g)$.

1. Es pot suposar que $m = \min\{m, n\}$. Aleshores

   $$(f+g)(z) = (z-z_0)^m \big(\phi(z) + (z-z_0)^{m-n}\psi(z)\big) = (z-z_0)^m h(z)$$

   a un entorn de z_0 amb h holomorfa ja que s'obté sumant i multiplicant funcions holomorfes (l'exponent $m-n$ és positiu). Hi ha dos casos:

   - h és localment zero a z_0. Això passa si $m = n$ i $\psi = -\phi$ en un entorn del punt. En aquest cas $f+g$ és localment zero, i per tant meromorfa en z_0, i $\operatorname{ord}_{z_0}(f+g) = \infty > m$.
   - Altrament, usant de nou la proposició 5.21 es pot posar $h(z) = (z-z_0)^p \xi(z)$ amb $p \geqslant 0$ i ξ una funció holomorfa en aquest entorn amb $\xi(z_0) \neq 0$. Aleshores $(f+g)(z) = (z-z_0)^{m+p}\xi(z)$ i el lema 6.8 assegura que $f+g$ és meromorfa amb $\operatorname{ord}_{z_0}(f+g) = m+p \geqslant m = \min\{m,n\}$. Si $m \neq n \Leftrightarrow m < n$ es té $h(z_0) = \phi(z_0) \neq 0$ i per tant $p = 0$ i $\operatorname{ord}_{z_0}(f+g) = m$ és igual al mínim de tots dos ordres.

2. Multiplicant les funcions s'obté

   $$(fg)(z) = (z-z_0)^{m+n}(\phi\psi)(z), \qquad (\phi\psi)(z_0) = \phi(z_0)\psi(z_0) \neq 0.$$

   Aplicant el lema 6.8 es veu que la funció producte és meromorfa i que el seu ordre és la suma dels de les dues funcions.

3. La funció inversa multiplicativa s'escriu com

$$\frac{1}{f}(z) = (z - z_0)^{-m} \frac{1}{\phi}(z)$$

amb $1/\phi$ holomorfa a un entorn de z_0 que no s'anul·la en aquest punt. Novament el lema 6.8 diu que $1/f$ és meromorfa i que el seu ordre és menys l'ordre de f. □

Corol·lari 6.10 *El conjunt $\mathscr{M}(\Omega)$ de les funcions meromorfes en un obert connex Ω és un cos.*

PROVA: Els dos primers punts de la proposició demostren que la suma i el producte de funcions meromorfes són funcions meromorfes. Si f és una funció meromorfa no idènticament zero a Ω per prolongació analítica no pot ser localment zero en cap punt, i, per tant, la funció $1/f$ també és meromorfa a tot Ω. □

Exemples. Les funcions racionals són funcions meromorfes a qualsevol obert de $\mathbb{C}$. Si

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n(z-\alpha_1)^{n_1}\cdots(z-\alpha_r)^{n_r}}{b_m(z-\beta_1)^{m_1}\cdots(z-\beta_s)^{m_s}}$$

aleshores f té pols en els punts β_i en què s'anul·la el denominador, d'ordres m_i, les multiplicitats corresponents. En els zeros α_i del numerador la funció té ordre positiu n_i i en tot altre punt $z \neq \alpha_i, \beta_j$ l'ordre de la funció és zero.

La funció $f(z) = 1/(e^z - 1)$ és meromorfa a $\mathbb{C}$ amb infinits pols al conjunt $\mathcal{S} = 2\pi i\mathbb{Z}$, tots d'ordre 1. En efecte, tenint en compte el desenvolupament en sèrie de potències és clar que $\mathrm{ord}_0(e^z - 1) = 1$. Per tant, $\mathrm{ord}_0\big(1/(e^z-1)\big) = -1$. En els altres punts l'odre és el mateix per periodicitat de la funció exponencial: a un entorn de zero i d'un complex de la forma $2\pi ik$ la funció exponencial i, per tant, la funció $f(z)$, pren els mateixos valors.

6.2 Sèries de Laurent

Definició 6.11 *Una* corona circular *amb radi petit r i radi gran R, on $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, és un obert de la forma*

$$\mathcal{D}(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

Es denotarà $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r \leqslant |z - z_0| \leqslant R\}$ la seva adherència i $C_r = C(z_0; r)$ i $C_R = C(z_0; R)$ les dues circumferències que són la seva frontera. L'*exterior* de la corona és el conjunt

$$\overline{\mathcal{D}}(z_0; r, R)^c = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r \text{ o } |z| > R\} = \mathcal{D}(z_0; r) \cup \overline{\mathcal{D}}(z_0; R)^c.$$

Definició 6.12 (Sèries de Laurent) *S'anomena* sèrie de Laurent *una sèrie de la forma:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n \in \mathbb{C}. \tag{18}$$

La seva part principal *és la sèrie dels termes amb índex negatiu:*

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}, \tag{19}$$

i la seva part ordinària *és la sèrie de potències d'exponent positiu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{20}$$

La convergència de les sèries de Laurent s'entén com la convergència per separat tant de la seva part principal com de la seva part ordinària i la suma de la sèrie (18) és la suma de les dues sumes (19) i (20).

Quan hi ha convergència absoluta no cal especificar com es calcula la suma ja que no depèn de l'ordre amb què s'agafen els seus termes.

Proposició 6.13 (Corona de convergència) *Tota sèrie de Laurent és absolutament convergent en una corona circular $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z_0; r, R)$ de radis*

$$r = \limsup_{n \geqslant 1} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \qquad i \qquad R = \frac{1}{\limsup_{n \geqslant 0} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

i divergent a l'exterior de la corona.

A més, és uniformement convergent sobre compactes a $\mathcal{D}$ i, per tant, defineix una funció holomorfa en aquesta corona.

Prova: La part ordinària és absolutament convergent per a $|z - z_0| < R$ i és divergent per a $|z - z_0| > R$. La sèrie de potències $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ té radi de convergència $1/r$. Per tant, la part principal és absolutament convergent per a

$$|w| = \left| \frac{1}{z - z_0} \right| < \frac{1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_0| > r$$

i és divergent per a $|w| > \frac{1}{r} \Leftrightarrow |z - z_0| < r$. Tenint en compte la convergència de totes dues parts es dedueix que la sèrie és absolutament convergent a la corona i és divergent al seu exterior.

La convergència uniforme sobre compactes es veu igual que en el cas de les sèries de potències. Donat un compacte $K \subset \mathcal{D}$ siguin

$$M = \max \big\{ |z - z_0| : z \in K \big\}, \qquad m = \min \big\{ |z - z_0| : z \in K \big\},$$

que satisfan $r < m \leqslant M < R$. Com que

$$|a_n(z-z_0)^n| \leqslant |a_n|M^n \qquad \text{amb} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|M^n < \infty,$$

$$\left|\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}\right| \leqslant \frac{|a_{-n}|}{m^n} \qquad \text{amb} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}| \left(\frac{1}{m}\right)^n < \infty,$$

es pot aplicar el criteri M de Weierstrass per a la convergència uniforme tant a la part principal com a la part ordinària i es dedueix que la sèrie de Laurent és (absoluta i) uniformement convergent sobre el compacte K. El teorema 5.13 assegura que la seva suma és una funció holomorfa a la corona $\mathcal{D}$. □

Lema 6.14 (Integral d'una sèrie de Laurent) *Sigui* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *definida per una sèrie de Laurent convergent a la corona* $\mathcal{D}(z_0; r, R)$. *Per a tota circumferència* $C = C(z_0; \rho)$ *amb* $r < \rho < R$,

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Prova: Com que la convergència és uniforme sobre el compacte C el teorema 4.8 permet calcular la integral de la sèrie integrant terme a terme. Les funcions $(z-z_0)^n$ tenen funció primitiva $\frac{1}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ a la corona $\mathcal{D}(z_0; r, R)$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$ excepte per a $n = -1$. Per tant,

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_C (z-z_0)^n\,dz = a_{-1} \int_C \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i a_{-1}$$

ja que totes les integrals $\int_C (z-z_0)^n\,dz$ són zero per a $n \neq -1$. □

Lema 6.15 (Teorema de Cauchy a una corona) *Si* $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *és una funció holomorfa a un obert* $\mathcal{U}$ *que conté la corona circular tancada* $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r, R)$,

$$\int_{C_R} f(\zeta)\,d\zeta - \int_{C_r} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Prova: Unint les dues circumferències de radis r i R amb dos segments, agafats en sentit positiu i negatiu, es descompon la integral de l'enunciat en una suma d'integrals sobre dos contorns tancats continguts en subconjunts simplement connexos de $\mathcal{U}$, en els quals el teorema de Cauchy assegura que la integral dóna zero. Per tant la integral de l'enunciat també és igual a zero. □

Corol·lari 6.16 (Fórmula integral de Cauchy a una corona) *Si* $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ *és una funció holomorfa a un obert* $\mathcal{U}$ *que conté la corona circular tancada* $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r, R)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad \forall z \in \mathcal{D}(z_0; r, R).$$

PROVA: Es demostra exactament igual que la fórmula integral de Cauchy per a contorns tancats feta al teorema 5.5: es considera la funció

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{si} \quad \zeta \neq z, \\ f'(z), & \text{si} \quad \zeta = z, \end{cases}$$

que és holomorfa a $\mathcal{U}$ excepte, potser, al punt z, en el qual només es pot assegurar que és contínua.

Igual que passa sobre un disc o un obert simplement connex, el teorema de Cauchy a una corona també val amb la hipòtesi més general que la funció pugui no ser holomorfa en un punt en el qual sigui contínua o almenys estigui fitada en algun entorn seu. Això es veu perquè en la demostració del teorema de Cauchy que s'ha fet al lema anterior, quan se separa la integral sobre les circumferències com la suma de dues integrals sobre contorns tancats contràctils a $\mathcal{U}$ es pot aplicar la versió del teorema de Cauchy amb singularitats (teorema 4.18) a cadascuna d'elles i se segueix tenint que la integral és zero.

Alternativament, el teorema de Riemann d'evitació de singularitats assegura que la funció g és, de fet, holomorfa a tota la corona.

El teorema de Cauchy dóna, per tant,

$$\int_{C_R} g(\zeta)\, d\zeta - \int_{C_r} g(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{21}$$

Com que el punt z no pertany a cap de les dues circumferències es té

$$\int_{C_R} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{C_R} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \int_{C_R} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z)$$

a la circumferència gran, ja que el punt z està contingut en el disc $\mathcal{D}(z_0; R)$, i

$$\int_{C_r} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \int_{C_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

a la circumferència petita, ja que z no està contingut al disc $\mathcal{D}(z_0; r)$. Substituint aquestes dues igualtats a la igualtat (21) s'obté la fórmula integral de l'enunciat. $\square$

Proposició 6.17 *Tota funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ que conté una corona circular tancada $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r, R)$ es pot posar de manera única com una suma $f = f_1 + f_2$ amb*

- *f_1 holomorfa a $\mathcal{D}(z_0; R) \cup \mathcal{U}$, i*
- *f_2 holomorfa a $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r)^c \cup \mathcal{U}$ i amb $\lim_{z\to\infty} f_2(z) = 0$.*

PROVA: Es veu primer l'existència de funcions com aquestes. El teorema 5.26 de derivació sota el signe integral assegura que les funcions

$$z \mapsto \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{i} \quad z \mapsto \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

són holomorfes en els punts de $\mathbb{C}$ que no pertanyen a les circumferències C_R i C_r, respectivament.

Es defineix la primera funció posant

$$f_1(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz, & \text{si} \quad z \in \mathcal{D}(z_0; R), \\ f(z) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz, & \text{si} \quad z \in \overline{\mathcal{D}}(z_0, r)^c \cap \mathcal{U}. \end{cases}$$

Aquesta funció està ben definida gràcies a la fórmula integral de Cauchy en una corona (corol·lari 6.16), ja que els punts que pertanyen als dos dominis en què la funció s'ha definit de manera diferent són els punts de la corona $\mathcal{D}(z_0; r, R)$, i en aquests punts la diferència entre les dues expressions que defineixen la funció és

$$f(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = 0,$$

i és holomorfa ja que les dues definicions en tots dos oberts ho són.

Es defineix la segona funció posant

$$f_2(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz, & \text{si} \quad z \in \overline{\mathcal{D}}(z_0; r)^c, \\ f(z) - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz, & \text{si} \quad z \in \mathcal{D}(z_0, R) \cap \mathcal{U}. \end{cases}$$

Igualment com abans aquesta funció està ben definida i és holomorfa. Per veure que el límit a l'infinit és zero primerament s'observa que per a $|z|$ prou gran, per exemple sempre que $|z - z_0| > r$, la definició de la funció ve donada per la primera fórmula i, per tant, $|\zeta - z| \geqslant |z| - |\zeta| \geqslant |z| - \big(|z_0| + |z_0 - \zeta|\big) > |z| - (|z_0| + r)$ per a tot $\zeta \in C_r$. Agafant una fita M per a la funció $|f|$ a la circumferència petita C_r es té

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| < \frac{M}{|z| - (|z_0| + r)} \quad \Rightarrow \quad |f_2(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{M}{|z| - (|z_0| + r)}\ell(C_r) = \frac{Mr}{|z| - (|z_0| + r)}$$

i això tendeix a zero quan $|z|$ tendeix a infinit.

La suma de totes dues funcions és la funció f en tot punt de $\mathcal{U}$.

Només falta veure la unicitat. Suposi's que $f_1 + f_2 = g_1 + g_2 = f$ amb funcions f_i i g_i que satisfan les condicions de l'enunciat. Es considera la funció

$$h(z) = \begin{cases} f_1(z) - g_1(z), & \text{si} \quad z \in \mathcal{D}(z_0; R) \cup \mathcal{U}, \\ g_2(z) - f_2(z), & \text{si} \quad z \in \overline{\mathcal{D}}(z_0; r)^c \cup \mathcal{U}, \end{cases}$$

que està ben definida ja que en els punts que pertanyen a $\mathcal{U}$, que és la intersecció dels dos conjunts on s'ha definit separadament, la igualtat $f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ assegura que totes dues expressions donen el mateix. Aquesta funció és holomorfa a tot $\mathbb{C}$. La condició

$\lim_{z\to\infty} f_2(z) = \lim_{z\to\infty} g_2(z)$ implica que també $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$. Per tant la funció h és una funció entera fitada i, pel teorema de Liouville, és constant. Usant de nou que el límit a l'infinit és zero es veu que aquesta constant ha de ser zero. Per tant $h = 0$ a tot $\mathbb{C}$ i es dedueix que $f_1 = g_1$ i $f_2 = g_2$ en els dominis de definició respectius. $\square$

Teorema 6.18 (Desenvolupament de Laurent) *Tota funció f holomorfa en una corona circular $\mathcal{D}(z_0; r, R)$ ve donada per una (única) sèrie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \forall z \in \mathcal{D}(z_0; r, R),$$

amb coeficients

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \qquad \forall n \in \mathbb{Z},$$

on $C = C(z_0; \rho)$ és una circumferència qualsevol de radi $r < \rho < R$.

Prova: Agafant radis r' i R' amb $r < r' < R' < R$ i aplicant la proposició 6.17 a l'obert $\mathcal{U} = \mathcal{D}(z_0; r, R)$ i la corona tancada $\overline{D}(z_0; r', R') \subset \mathcal{U}$ s'obté una descomposició $f = f_1 + f_2$ amb f_1 holomorfa al disc $\mathcal{D}(z_0; R) = \mathcal{D}(z_0; R) \cup \mathcal{U}$ i f_2 holomorfa a l'exterior $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r)^c = \overline{\mathcal{D}}(z_0; r')^c \cup \mathcal{U}$ amb límit zero a l'infinit.

Sigui $f_1 = \sum a_n (z - z_0)^n$ la sèrie de potències que dóna f_1 en aquest disc. Usant f_2 es pot definir una funció holomorfa

$$g(z) := f_2\left(\frac{1}{z - z_0} + z_0\right), \qquad z \in \mathcal{D}'(z_0; r^{-1})$$

en el disc disc perforat indicat. Com que $\lim_{z\to\infty} f_2(z) = 0$ es té $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$. Pel teorema de Riemann d'evitació de singularitats la funció g es pot estendre a una funció holomorfa a tot el disc $\mathcal{D}(z_0; r^{-1})$ posant $g(z_0) = 0$. Sigui $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ la sèrie de potències que dóna g en aquest disc. Aleshores

$$f_2(z) = g\left(\frac{1}{z - z_0} + z_0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \qquad |z - z_0| > r.$$

Definint $a_{-n} = b_n$ per a $n \geqslant 1$ s'obté l'expressió de f com a sèrie de Laurent

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \forall z \in \mathcal{D}(z_0; r, R).$$

Per calcular els coeficients es considera el desenvolupament de Laurent

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1} (z - z_0)^k$$

i aplicant el lema 6.14 es calcula la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = a_{-1+n+1} = a_n,$$

demostrant-se així la fórmula per als coeficients. La unicitat prové del fet que aquests coeficients estan unívocament determinats pels valors de la funció a la corona; de fet, pels valors en una circumferència qualsevol continguda a la corona. □

Com que un disc perforat és una corona amb radi petit igual a zero aquest teorema es pot aplicar a discs perforats de centre una singularitat d'una funció holomorfa f:

Corol·lari 6.19 (Sèrie de Laurent en un punt singular) *Tota funció f holomorfa a un obert $\mathcal{U}$ excepte a un punt z_0, on té una singularitat, ve donada per una sèrie de Laurent en tot disc perforat $\mathcal{D}'(z_0;R) \subseteq \mathcal{U}$:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad \forall z \in \mathcal{D}'(z_0;R).$$

El tipus de singularitat queda caracteritzat per la part principal de la sèrie de Laurent corresponent:

Corol·lari 6.20 (Caracterització de les singularitats) *Una singularitat d'una d'una funció holomorfa és*

1. *evitable si, i només si, la part principal de la sèrie de Laurent és zero;*
2. *un pol si, i només si, la part principal de la sèrie de Laurent és no nul·la amb només un nombre finit de termes;*
3. *essencial si, i només si, la part principal de la sèrie de Laurent té infinits coeficients no nuls.*

Prova: Sigui $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ la sèrie de Laurent que dóna la funció f a un entorn perforat $\mathcal{D}'(z_0;R)$ de la singularitat z_0.

1. La singularitat a z_0 és evitable si, i només si, la funció es pot estendre de manera holomorfa en aquest punt, i això equival a què es pugui posar com una sèrie de potències $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ al disc $\mathcal{D}(z_0;R)$. La igualtat de les dues sèries al disc perforat equival a què sigui $c_n = a_n$ per a $n \geqslant 0$ i que $c_n = 0$ per a $n < 0$. O sigui, a què la sèrie de Laurent té part principal igual a zero.
2. La singularitat és un pol si, i només si, la funció es pot posar de la forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = (z-z_0)^{-m}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-m}^{\infty} a_{n+m}(z-z_0)^n, \quad a_0 \neq 0,$$

per a algun enter $m \geqslant 1$. La igualtat de les dues sèries al disc perforat equival a què $c_n = a_{n+m}$ per a tot $n \geqslant -m$ (en particular $c_{-m} \neq 0$) i $c_n = 0$ per a tot $n < -m$. Això és dir que la part principal de la sèrie de Laurent és de la forma $\sum_{n=-m}^{-1} a_n(z-z_0)^n$, amb $a_{-m} \neq 0$; és a dir, és no nul·la i té només un nombre finit de termes.

3. La singularitat és essencial si no és ni evitable ni un pol, i aplicant els apartats anteriors això equival a què la part principal de la sèrie de Laurent contingui infinits termes no nuls.. □

6.3 Residus

Definició 6.21 (Residu) *El residu d'una funció holomorfa en una singularitat aïllada z_0 és el coeficient a_{-1} del desenvolupament de Laurent corresponent. Es denota* $\operatorname{Res}(f; z_0)$.

Lema 6.22 (Càlcul del residu en un pol) *Si f té un pol simple en el punt z_0,*

$$\operatorname{Res}(z_0; f) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Més en general, si el pol és d'ordre m, posant $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ aleshores

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big((z-z_0)^m f(z) \big).$$

Prova: El desenvolupament de Laurent de f és de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

i per tant la funció g ve donada per la sèrie de potències

$$g(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{m+n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-z_0)^n$$

i el coeficient a_{-1} s'obté per al valor $n = m-1$ en la darrera expressió, que es pot calcular amb la fórmula de l'enunciat. □

Teorema 6.23 (Teorema del residu) *Sigui $f \colon \mathcal{U} \setminus \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa amb singularitats aïllades als punts d'un conjunt $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$. Per a tot disc tancat $\overline{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{U}$ tal que la seva frontera C no passa per cap singularitat,*

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \mathcal{D} \cap \mathcal{S}} \operatorname{Res}(f; z_i),$$

on la suma s'agafa sobre totes les singularitats de l'interior del disc.

PROVA: La suma de l'enunciat és finita ja que hi pot haver només un nombre finit de singularitats dins del compacte $\overline{\mathcal{D}}$.

El resultat és cert si la funció té una única singularitat al centre del disc $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z_0; R)$. En aquest cas la funció és holomorfa a una corona circular $\mathcal{D}(z_0; r, R+\epsilon)$ per a tot $r < R$ i algun $\epsilon > 0$ i la fórmula del teorema és simplement el lema 6.14.

Per veure el cas general s'agafa una circumferència C_i centrada en cada punt singular $z_i \in \mathcal{D}$ que només contingui aquest punt singular al seu interior i tal que C i totes les C_i siguin disjuntes. Unint C amb un punt de cadascuna de les C_i a través d'un contorn recorregut en tots dos sentits es veu que

$$\int_C f(z)\,dz = \sum \int_{C_i} f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f; z_i),$$

i queda demostrada la fórmula en el cas general. $\square$

Teorema 6.24 (Principi de l'argument) *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció meromorfa. Per a tot disc tancat $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{U}$ tal que la seva vora C no passa per cap zero ni cap pol de la funció,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{f(z)\in\{0,\infty\}} \operatorname{ord}_z(f),$$

on la suma s'agafa sobre els zeros i pols de f a l'interior del disc.

PROVA: La funció f'/f és holomorfa en tot punt en què f no tingui ni un zero ni un pol. Si f té un zero o un pol en en punt z_0 es pot posar $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ amb $m \neq 0$ i g holomorfa a un entorn del punt amb $g(z_0) \neq 0$. La derivada de f és $f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$ i, per tant,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

amb $g'(z)/g(z)$ holomorfa a un entorn del punt z_0 en el qual la funció g no s'anul·li. Posant aquesta funció com una sèrie de potències al voltant de z_0 l'expressió anterior és un desenvolupament de Laurent de f'/f al voltant d'aquest punt amb part principal igual a $\frac{m}{z-z_0}$. Això diu que f'/f té un pol simple amb residu $a_{-1} = m = \operatorname{ord}_{z_0}(f)$ en el punt z_0 i el teorema del residu dóna la fórmula de l'enunciat. $\square$

Teorema 6.25 (Teorema de Rouché) *Siguin f i g holomorfes a un obert $\mathcal{U}$ que conté el disc tancat $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{U}$ de circumferència C. Si $|f(z)| > |g(z)|$ per a tot $z \in C$ aleshores f i $f + g$ tenen el mateix nombre de zeros en el disc $\mathcal{D}$.*

PROVA: Es considera la família de funcions $f_t(z) = f(z) + tg(z)$ per a $t \in [0, 1]$, que varia contínuament entre f i $f + g$. Totes elles són holomorfes a $\mathcal{U}$ i la desigualtat imposada assegura que no s'anul·len a la circumferència C ja que $f_t(z) = 0 \Rightarrow f(z) =$

$-tg(z) \Rightarrow |f(z)| \leqslant |g(z)|$. El nombre de zeros n_t d'aquestes funcions ve donat pel principi de l'argument com la integral

$$n_t = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\, dz.$$

Aquest nombre varia contínuament amb t ja que valor de les funcions que s'integren és una funció contínua alhora de t i de $z \in C$. Com que només pren valors enters ha de ser constant i, per tant, $n_0 = n_1$. Aquests dos valors són els nombres de zeros de f i de $f + g$ al disc. □

Observi's que el teorema val també en la situació una mica més general en què les funcions f i g són meromorfes i la circumferència C no conté ni zeros ni pols. En aquest cas es conserva la diferència entre el nombre de zeros i de pols de les funcions f i $f + g$. La demostració és exactament la que s'ha donat.

6.4 Càlcul d'integrals

Lema 6.26 *Es considera una funció $f(z)/g(z)$ donada com a quocient de funcions f i g holomorfes al voltant d'un punt z_0. Si $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ i $g'(z_0) \neq 0$ aleshores la funció f/g té un pol simple en z_0 i*

$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

PROVA: Les condicions asseguren que $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = 0$ i que $\mathrm{ord}_{z_0}(g) = 1$. Per tant $\mathrm{ord}_{z_0}(f/g) = -1$ i això vol dir que f/g té un pol simple. Sigui $g(z) = (z - z_0)g_1(z)$ a un entorn de z_0, amb $g_1(z_0) \neq 0$. Aleshores

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)\frac{f(z)}{g_1(z)},$$

amb $f(z)/g_1(z)$ holomorfa a un entorn de z_0. Desenvolupant en sèrie de potències aquesta funció en aquest punt es té $f(z)/g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ amb $a_0 = f(z_0)/g_1(z_0)$. Per tant

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-1} = \frac{a_0}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(z - z_0)^n$$

i la part principal de la sèrie de Laurent de f/g en z_0 és $a_0/(z - z_0)$ de manera que el residu és

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = a_0 = \frac{f(z_0)}{g_1(z_0)}.$$

La fórmula de l'enunciat es veu observant que $g'(z_0) = g_1(z_0)$. En efecte, derivant es té $g'(z) = (z - z_0)g_1'(z_0) + g_1(z)$ i avaluant en $z = z_0$ s'obté aquesta igualtat. □

Exemple 6.27

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$$

Prova: Es considera la funció $f(z) = 1/(1+z^2)$, que és meromorfa a $\mathbb{C}$ amb dos pols simples als punts $\pm i$ de residus $\pm 1/2i$, ja que la descomposició en fraccions simples dóna

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1/2i}{z-i} + \frac{-1/2i}{z+i}$$

i, com que cada sumand és una funció holomorfa excepte en el pol corresponent, aquest sumands són les parts principals de les sèries de Laurent al voltant dels pols i i $-i$, respectivament.

El residu en els pols també es pot calcular fent servir el lema anterior, agafant $f(z) = 1$ i $g(z) = z^2$, amb derivada $g'(z) = 2z$.

Sigui $R > 1$. S'integra la funció al contorn format pel segment I_R que uneix els punts $-R$ i R i la semicircumferència $\frac{1}{2}C_R$ que els uneix al semiplà superior. La integral al llarg d'aquest contorn és el residu en el punt i. Per tant:

$$\int_{I_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\pi i \frac{1}{2i} - \int_{\frac{1}{2}C_R} \frac{dz}{1+z^2} = \pi - \int_{\frac{1}{2}C_R} \frac{dz}{1+z^2},$$

i n'hi ha prou a veure que la integral sobre la semicircumferència tendeix a zero quan R tendeix a infinit. En els punts d'aquesta semicircumferència es té $|1+z^2| \geqslant |z|^2 - 1 = R^2 - 1 > 0$ i per tant la integral està fitada per

$$\left| \int_{\frac{1}{2}C_R} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leqslant \int_{\frac{1}{2}C_R} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| dz \leqslant \frac{1}{R^2-1} \ell\left(\frac{1}{2}C_R\right) = \frac{\pi R}{R^2-1},$$

que tendeix a zero quan R tendeix a infinit. □

Exemple 6.28

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at}}{1+e^t}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \qquad 0 < a < 1.$$

Prova: S'integra la funció $f(z) = e^{az}/(1+e^z)$ al contorn poligonal tancat rectangular format unint els quatre punts $-R$, R, $R+2\pi i$ i $-R+2\pi i$. L'únic pol de la funció f a l'interior d'aquest contorn és en el punt $z = \pi i$, en el qual té residu $\frac{e^{a\pi i}}{1+e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}$.

Per tant la integral que es demana calcular és el límit quan R tendeix a infinit de la integral I_R sobre el segment real de $-R$ a R. La integral sobre el segment superior és

$$\int_{R}^{-R} \frac{e^{a(t+2\pi i)}}{1+e^{t+2\pi i}}\,dt = e^{2\pi i a} \int_{R}^{-R} \frac{e^{at}}{1+e^t}\,dt = -e^{2\pi i a} I_R.$$

La integral en els segment lateral dret dóna zero, ja que la funció en aquests segment té valor absolut

$$\left| \frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}} \right| = \frac{e^{aR}}{|1+e^R e^{it}|} \leqslant \frac{e^{aR}}{e^R - 1} = \frac{1}{e^{(1-a)R} - e^{-aR}},$$

que tendeix a zero quan R tendeix a infinit per ser $0 < a < 1$. Com que la longitud del segment és constant igual a 2π la integral tendeix a zero. Anàlogament al segment esquerre es té

$$\left|\frac{e^{a(-R+it)}}{1+e^{-R+it}}\right| = \frac{e^{-aR}}{|1+e^{-R}e^{it}|} \leqslant \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}} = \frac{1}{e^{aR}-e^{(a-1)aR}},$$

que també tendeix a zero atenent el valor de a. Per tant, posant $I = \lim_{R\to\infty} I_R$, que és la integral que es vol calcular, es té

$$I = -2\pi i e^{a\pi i} - e^{2a\pi i} I \Rightarrow I = \frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1-e^{2a\pi i}} = \frac{-2\pi i}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin \pi a},$$

tenint en compte que $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$. □

Exemple 6.29 *La transformada de Fourier de la funció* $1/\cosh \pi x$ *és ella mateixa:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh \pi t} e^{-2\pi i t \xi}\, dt = \frac{1}{\cosh \pi \xi}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Prova: Donat un nombre real ξ es considera la funció $f(z) = \frac{e^{-2\pi i z \xi}}{\cosh \pi z}$, on la funció cosinus hiperbòlic és $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$. La funció $\cosh \pi z$ s'anul·la en els punts $z = x + iy$ on $e^{\pi z} = -e^{-\pi z} \Leftrightarrow e^{2\pi z} = e^{2\pi x} e^{2\pi i y} = -1$, que equival a què sigui $x = 0$ i $2y$ un enter senar.

Es considera el contorn poligonal tancat rectangular que uneix els punts $-R$, R, $R+2i$ i $-R+2i$. Dins d'aquest contorn la funció té dos pols, en els punts $\frac{i}{2}$ i $\frac{3i}{2}$.

El càlcul és semblant al del problema anterior. Primerament es veu que els residus en els dos pols són $e^{\pi\xi}\pi i$ i $-e^{3\pi\xi}\pi i$, respectivament. A continuació es veu que les integrals als segments verticals tendeixen a zero veient que la funció està fitada amb fita que tendeix a zero quan $R \to \infty$. Després es comprova que la integral en el segment superior és $-e^{4\pi\xi}$ vegades la del segment inferior usant que $\cosh \pi z$ és periòdica de període $2i$. Finalment, fent-ho servir tot es pot calcular la integral I, que s'obté a partir de

$$I - e^{4\pi\xi} I = 2\pi i \left(\frac{e^{\pi\xi}}{\pi i} - \frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i} \right)$$

i operant amb aquesta expressió s'arriba al resultat. □

7 Temes complementaris

7.1 Teorema de Runge

En anàlisi real d'una variable el *teorema d'aproximació de Weierstrass* o *teorema de Stone-Weierstrass* diu que tota funció contínua en un interval compacte $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es pot aproximar uniformement per polinomis.

En aquesta secció es demostrarà el *Teorema d'aproximació de Runge*, que assegura que les funcions holomorfes en un compacte es poden aproximar uniformement per funcions racionals. De fet, es pot afinar una mica més l'enunciat i veure que la funció és límit uniforme de funcions racionals que tenen tots els seus pols en un conjunt finit que depèn de la topologia del compacte K. En endavant es denotarà $K^c = \mathbb{C} \setminus K$ el complementari del compacte.

Observi's que dir que una funció "es pot aproximar (uniformement)" per funcions d'una classe determinada equival a dir que la funció és límit (uniforme) d'una successió de funcions d'aquesta classe.

Es comença amb un lema que diu que, en bones condicions, una funció definida per una expressió integral és el límit uniforme sobre compactes d'una successió de funcions que corresponen a sumes de Riemann de la integral:

Lema 7.1 *Siguin $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ un obert, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un contorn i $\Phi\colon \mathcal{U} \times \gamma^* \to \mathbb{C}$ una funció contínua. Es defineix la funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ com la integral de contorn*

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(z,\zeta)\, d\zeta, \qquad z \in \mathcal{U}.$$

Per a cada $n \geqslant 1$ es defineix la funció $R_n\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ posant

$$R_n(z) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(z,\zeta_i)(\zeta_i - \zeta_{i-1}), \qquad \zeta_i = \gamma(t_i), \quad t_i = a + i\frac{b-a}{n}b.$$

Aleshores la successió de funcions R_n convergeix cap a la funció f uniformement sobre tot compacte K contingut a l'obert $\mathcal{U}$.

PROVA: La funció $(z,t) \mapsto \Phi\big(z,\gamma(t)\big)\colon K \times [a,b] \to \mathbb{C}$ és uniformement contínua per ser contínua sobre un conjunt compacte. Donat $\epsilon > 0$ existeix un $\delta > 0$ tal que

$$|t-t'| < \delta \quad \Rightarrow \quad \big|\Phi\big(z,\gamma(t)\big) - \Phi\big(z,\gamma(t')\big)\big| < \epsilon, \qquad \forall z \in K, \quad t,t' \in [a,b].$$

Sigui n un enter tal que $\frac{b-a}{n} \leqslant \delta$. Es considera la partició de $[a,b]$ de l'enunciat, en n subintervals de la mateixa mida. Per a tot punt $t \in [t_{i-1},t_i]$ es té $\big|\Phi\big(z,\gamma(t)\big) - \Phi(z,\zeta_i)\big| < \epsilon$.

La integral que defineix $f(z)$ és la suma de les n integrals corresponents als contorns γ_i, restricció de γ als subintervals $[t_{i-1},t_i]$, i cada sumand de la funció R_n és la integral de la funció $\Phi(z,\zeta_i)$ sobre aquest contorn γ_i. Per tant,

$$\begin{aligned}
|f(z) - R_n(z)| &= \left| \int_\gamma \Phi(z,\zeta)\, d\zeta - \sum_{i=1}^{n} \Phi(z,\zeta_i)(\zeta_i - \zeta_{i-1}) \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \Phi(z,\zeta)\, d\zeta - \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \Phi(z,\zeta_i)\, d\zeta \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{\gamma_i} \big(\Phi(z,\zeta) - \Phi(z,\zeta_i)\big)\, d\zeta \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \epsilon\ell(\gamma_i) = \epsilon\ell(\gamma), \qquad \forall z \in K,
\end{aligned}$$

i efectivament la successió R_n convergeix uniformement sobre compactes cap a f.

Les funcions $R_n(z)$ són sumes de Riemann per a la integral que defineix $f(z)$ corresponents a la partició de $[a,b]$ en n subintervals de la mateixa longitud i triant en cadascun la imatge del punt de la dreta de l'interval. Es podria haver argumentat amb qualsevol altra successió de sumes de Riemann per a particions de diàmetre tendint a zero. $\square$

Corol·lari 7.2 *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa en un obert $\mathcal{U}$, $K \subset \mathcal{U}$ un subconjunt compacte i $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{U}$ un contorn amb imatge $\gamma^* \cap K = \varnothing$. Suposi's que la funció ve donada a K per la fórmula integral de Cauchy:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,dz, \qquad \forall z \in K.$$

Aleshores la funció f és límit uniforme sobre K de funcions racionals amb tots els seus pols en punts de γ^*.

Prova: S'aplica el lema a la funció $\Phi\colon (\mathcal{U} \setminus \gamma^*) \times \gamma^* \to \mathbb{C}$ definida per $\Phi(z,\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. La condició $\gamma^* \cap K \neq \varnothing$ garanteix que el compacte K està contingut a l'obert on està definida aquesta funció. Per a aquesta funció les sumes de Riemann del lema són

$$R_n(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\zeta_i)}{\zeta_i - z}(\zeta_i - \zeta_{i-1}),$$

que són funcions racionals amb tots els pols en punts de la forma $\zeta_i = \gamma(t_i)$; o sigui, amb tots els seus pols al conjunt γ^*. $\square$

Recordi's que s'anomena *cadena* a una suma formal de contorns $\Gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ i que es defineix la integral sobre Γ posant $\int_\Gamma f(z)\,dz := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\,dz$. Es denota $\Gamma^* = \bigcup \gamma_i^*$ la reunió de la imatge de tots els contorns.

En el lema següent es veu que sempre que es té un conjunt compacte contingut a un obert $K \subset \mathcal{U}$ existeix una cadena Γ amb imatge $\Gamma^* \subset \mathcal{U} \setminus K$ tal que la fórmula integral de Cauchy dóna els valors de les funcions holomorfes a $\mathcal{U}$ en tots els punts del compacte K en integrar sobre aquesta cadena.

Aquest resultat es pot veure com una generalització més de la fórmula integral de Cauchy, que s'ha demostrat abans per a punts d'un disc (teorema 5.1) i després per a contorns tancats qualsevol on s'ha de tenir en compte l'índex de cada punt (teorema 5.5). Això es pot interpretar com que la cadena Γ dóna una volta a cada punt del compacte K dins del l'obert $\mathcal{U}$, que és el domini de definició de la funció.

Lema 7.3 *Sigui $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa a un obert $\mathcal{U}$. Per a cada subconjunt compacte $K \subseteq \mathcal{U}$ existeix una cadena Γ amb imatge Γ^* continguda a $\mathcal{U} \setminus K$ tal que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad \forall z \in K.$$

PROVA: Es construirà una cadena com aquesta que és una suma de contorns tancats que són poligonals esglaonades.

Sigui $d = d(K, \mathcal{U}^c) > 0$. Per a tot $z \in K$ es té $\mathcal{D}(z; d) \subseteq \mathcal{U}$. Sigui $\delta > 0$ qualsevol nombre amb $\delta < d/\sqrt{2}$. Aleshores tot quadrat $[x, x + \delta] \times [y, y + \delta]$ de costat δ que talli K en algun punt està completament contingut a l'obert $\mathcal{U}$.

Es considera a $\mathbb{C}$ una graella de quadrats de costat δ; per exemple la formada per tots els quadrats $[(i - 1)\delta, i\delta] \times [(j - 1)\delta \times j\delta]$ per a tots els $i, j \in \mathbb{Z}$, que enrajolen completament el pla complex $\mathbb{C}$. Cada costat d'una d'aquestes rajoles el comparteixen exactament dues d'elles. Siguin $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ tots els que tinguin intersecció no nul·la amb K, dels quals només n'hi ha només un nombre finit ja que K està fitat. Siguin ∂Q_i les fronteres corresponents, que són poligonals tancades formades per quatre segments, que es consideren orientades en sentit positiu.

Cada segment que sigui un costat d'algun Q_i o bé apareix només en aquest quadrat o bé apareix també a un únic altre quadrat, i en aquest cas ho fa amb orientació contraria. De fet, si un segment té intersecció no nul·la amb K aleshores necessàriament apareix en dos dels quadrats Q_i ja que els dos quadrats de l'enrajolament que el tenen com a costat tenen intersecció no nul·la amb K.

Els segments que apareixen en un únic Q_i es poden concatenar sempre que l'origen de l'un sigui el final de l'altre És fàcil veure (fer un dibuix) que el final de cadascun d'aquests segments es pot connectar amb l'origen d'un únic altre segment de tal manera que les orientacions siguin coherents i tots dos deixin (els quadrats Q_i que tenen intersecció amb) el compacte a la seva esquerra. D'aquesta manera s'obté un conjunt finit de contorns tancats que són poligonals esglaonades. Sigui $\Gamma = \sum \gamma_i$ la cadena corresponent. De fet, per a l'argument de la demostració del lema en realitat no cal veure que Γ és de fet un conjunt finit de poligonals tancades i es podria considerar simplement com la suma de tots els costats dels quadrats que apareixen només una vegada en els Q_i; es tracta simplement de fer-se una idea intuïtiva de l'aspecte que té la cadena Γ en relació amb el compacte K.

Com que cap dels segments que formen part de Γ tallen K aquesta cadena satisfà la condició $\Gamma^* \subset \mathcal{U} \setminus K$.

Sigui $z \in K$ un punt que no pertanyi a cap de les fronteres ∂Q_i. Sumant i restant les integrals sobre els costats que apareixen dues vegades es té

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = f(z),$$

ja que les integrals del sumatori són totes iguals a zero excepte una, corresponent a l'únic quadrat Q_j que conté el punt z, la qual val $f(z)$ gràcies a la fórmula integral de Cauchy, ja que el contorn ∂Q_j dóna una volta al punt z. Això demostra que la fórmula de l'enunciat val per a aquests punts.

Per als punts $z \in K$ que pertanyen a algun segment d'algun Q_i es pot argumentar de manera semblant: en cas que no sigui un vèrtex aleshores pertany exactament a dos segments, que es poden eliminar del càlcul de la integral anterior ja que estan orientats en sentit contrari. En aquest cas la integral també dóna $f(z)$ ja que és la integral sobre un rectangle amb costats de mides δ i 2δ que conté z al seu interior. Finalment si el punt z és un vèrtex aleshores pertany a quatre quadrats. Traient tots els segments que contenen z (n'hi ha vuit, que es cancel·len en considerar les orientacions) el valor de la integral torna a ser $f(z)$, aquesta vegada com a integral sobre la vora d'un quadrat de costats de mida 2δ que conté z al seu interior.

Una altra manera d'argumentar sobre els punts z que són a l'esquelet de l'enrajolat és usar que la identitat

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

ja s'ha demostrat als punts de K que són de l'interior dels quadrats Q_i. Com que totes dues funcions a l'expressió són contínues a K (de fet són holomorfes; la segona gràcies al teorema de derivació sota el signe integral) i els punts dels segments són límit de punts interiors del quadrat, la igualtat també ha de ser certa en tots aquests punts. $\square$

Lema 7.4 *Sigui $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacte. Sigui $P \subseteq K^c$ un conjunt de punts (potser buit). El conjunt de les funcions $K \to \mathbb{C}$ que es poden aproximar uniformement per funcions racionals amb tots els pols a P és tancat per sumes, productes i límits uniformes.*

PROVA: Sigui R_P el conjunt de les funcions racionals amb tots els pols en punts de P i sigui $L_P(K)$ el conjunt de les funcions de K que són límit uniforme de funcions de R_P.

El conjunt R_P és clarament tancat per sumes i productes. Si dues funcions són límit uniforme de funcions de R_P la seva suma i el seu producte també ho són, ja que són el límit uniforme de les successions suma i producte corresponents, les quals estan formades per funcions de R_P.

Per als límits, sigui $(f_n)_{n\geqslant 0}$ una successió de funcions de $L_P(K)$ amb límit uniforme la funció f. Sigui $f_n = \lim_{m\to\infty} f_{n,m}$ amb $f_{n,m} \in R_P$. Donat un $\epsilon > 0$ existeix un N tal que $|f(z) - f_n(z)| < \frac{\epsilon}{2}$ per a tot $z \in K$ sempre que $n \geqslant N$. Agafant un $n \geqslant N$ qualsevol existeix un M tal que si $m \geqslant M$ aleshores $|f_n(z) - f_{n,m}(z)| < \frac{\epsilon}{2}$ per a tot $z \in K$. Per tant $|f(z) - f_{n,m}(z)| < \epsilon$ per a tot $z \in K$ amb $f_{n,m} \in R_P$ i la funció f es pot, efectivament, aproximar uniformement per funcions de R_P. $\square$

Lema 7.5 *Sigui $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunt compacte i sigui $\Omega \subseteq K^c$ un subconjunt connex del seu complementari. Per a cada $w \in \Omega$ es defineix la funció $f_w\colon K \to \mathbb{C}$ posant $f_w(z) = \frac{1}{w-z}$.*

1. *Si Ω és no fitat, $f_w(z)$ és límit uniforme de polinomis per a tot $w \in \Omega$.*
2. *Fixat un punt $p \in \Omega$, tota funció $f_w(z)$ és límit uniforme de funcions racionals amb un únic pol a p per a tot $w \in \Omega$.*

PROVA: La demostració es farà seguint l'estratègia següent, la mateixa per a tots dos apartats. Es defineix $S \subseteq \Omega$ com el subconjunt format pels punts $w \in \Omega$ on es compleix l'enunciat. Es veurà que:

1. S és no buit;

2. donats $w, w' \in \Omega$, si $w \in S$ i $|w' - w| < d(w, K)$ aleshores $w' \in S$;
3. per a tot punt $w \in \Omega$ existeix una successió de punts $w_0, w_1, \dots, w_n$ amb $w_0 = w$, $w_n \in S$ i tals que $|w_i - w_{i-1}| \leqslant d(w_i, K)$.

Combinant tots tres fets es dedueix que $S = \Omega$ i, per tant, el resultat queda demostrat.

Es veuen a continuació les tres afirmacions:

1. Sigui Ω no fitat. Per a tot $w \in \Omega$ amb valor absolut $|w| > M = \max\{|z| : z \in K\}$ és $|z/w| < 1$ per a tot $z \in K$ i per tant es té l'expressió següent en sèrie de potències

   $$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{w}}\right) = \frac{1}{w}\left(1 + \frac{z}{w} + \frac{z^2}{w^2} + \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w^{n+1}} z^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{w^{n+1}} z^n$$

   que val en tot el disc $D(0; M)$ que conté K. Com que les sèries de potències convergeixen uniformement sobre compactes continguts en el seu disc de convergència, l'expressió anterior dóna la funció racional $\frac{1}{w-z}$ com a límit uniforme de polinomis sobre el compacte K. Per tant tot complex $w \in \Omega$ de valor absolut $> M$ pertany a S i, en particular, S és no buit.

   Per a Ω fitat el punt fixat p pertany a S ja que la funció $f_p(z) = \frac{1}{p-z}$ té un pol simple en aquest punt p.
2. Si $w \in S$ i $|w' - w| < d(w, K)$ aleshores $|w' - w| < |w - z|$ per a tot $z \in K$ i es té

   $$\frac{1}{w'-z} = \frac{1}{w-z}\left(\frac{1}{1-\frac{w-w'}{w-z}}\right) = \frac{1}{w-z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-w'}{w-z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-w')^n}{(w-z)^{n+1}}.$$

   per a tot $z \in K$. La sèrie anterior és una sèrie de potències en la variable $\frac{w-w'}{w-z}$ convergent en el disc de radi 1, i per tant uniformement convergent sobre compactes. Quan $z \in K$ els valors $\frac{w-w'}{w-z}$ formen un compacte dins d'aquest disc de manera que la sèrie és uniformement convergent sobre K.

   El fet que $w \in S$ assegura que $f_w(z) = \frac{1}{w-z}$ és límit uniforme de funcions racionals amb un únic pol al punt p. Pel la part del lema 7.4 que es refereix a sumes i productes totes les sumes parcials $\sum_{n=0}^{N} \frac{(w-w')^n}{(w-z)^{n+1}}$ de la sèrie anterior també tenen aquesta propietat i, novament aplicant el lema, ara la part que es refereix a límits uniformes, es dedueix que la suma de la sèrie també hi pertany. Per tant $f_{w'}(z) = \frac{1}{w'-z}$ també és límit uniforme de funcions racionals amb un únic pol al punt p i $w' \in S$.
3. El conjunt Ω és arc-connex. Donat un punt $w \in \Omega$ sigui $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$ una corba que connecta el punt donat $\gamma(a) = w$ amb algun punt $\gamma(b) \in S$. La imatge $\gamma^* \subset \Omega$ és un compacte. Sigui $d = d(K, \gamma^*) > 0$. Per continuïtat uniforme existeix un $\delta > 0$ tal que $|t - t'| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(t')| < d$. Sigui $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partició de $[a, b]$ amb $|t_i - t_{i-1}| < \delta$. Siguin $w_i = \gamma(t_i)$, amb $w_0 = w$ i $w_n = \gamma(b) \in S$. Per construcció aquests punts w_i satisfan la condició $|w_i - w_{i-1}| \leqslant d = d(\gamma^*, K) \leqslant d(w_i, K)$ i queda demostrada la tercera afirmació. $\square$

Teorema 7.6 (Teorema de Runge) *Tota funció holomorfa en un conjunt compacte K es pot aproximar uniformement per funcions racionals. A més,*

- *si K^c és connex, la funció es pot aproximar uniformement per polinomis i*
- *donat un conjunt P que contingui punts en totes les components connexes fitades de K^c, la funció es pot aproximar uniformement per funcions racionals que només tenen pols en punts de P.*

PROVA: La primera part de l'enunciat és conseqüència del corol·lari 7.2 i el lema 7.3. Aquest lema assegura que la funció es pot donar amb la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad \forall z \in K$$

per a alguna cadena Γ que és una suma directa de contorns, i el corol·lari diu que la integral sobre cada contorn és límit uniforme de funcions racionals amb pols situats sobre el contorn en qüestió, concretament,

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} R_n(z), \quad \text{amb} \quad R_n(z) = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\zeta_i - z}, \qquad \zeta_i \in \Gamma^*.$$

Cadascun dels ζ_i pertany a alguna component connexa Ω de K^c i el lema 7.5 assegura que és límit uniforme de polinomis, si es tracta de la componen connexa no fitada, o és límit uniforme de funcions racionals amb un únic pol en un punt fixat de $\Omega \cap P$ quan sigui un component connexa fitada. Per tant cada funció R_n és límit uniforme de funcions racionals amb pols només en punts de P i, aplicant novament el lema 7.4, es dedueix que f, per ser límit d'aquest tipus de funcions, també. $\square$

Observi's que, tot i que per a un compacte K el complementari K^c pot tenir infinites components connexes (per exemple conjunts del tipus $\overline{D}(1;1) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}(\frac{1}{n};\epsilon_n)$, que és un disc tancat on s'han tret infinits discs oberts disjunts), a la pràctica sempre es pot agafar un conjunt P que sigui finit, gràcies al fet que K està contingut en un obert on hi ha definida la funció holomorfa i les components connexes fitades que estiguin dins de l'obert en realitat no compten, ja que de fet la funció es pot estendre de manera holomorfa en aquests "forats" i es pot treballar amb un compacte una mica més gran que tingui només un nombre finit de forats. En efecte, si $\Gamma = \sum \gamma_i$ és la cadena del lema 7.3 aleshores cadascun dels contorns γ_i està contingut en alguna component connexa Ω_i de K^c i en l'argument de la demostració n'hi ha prou a passar els pols de les funcions $R_n(z)$, que són punts de Γ^*, a un pol en cadascuna de les components connexes Ω_i.

7.2 Teorema de l'aplicació conforme de Riemann

Etimològicament la paraula *conforme* significa "amb la mateixa forma". Intuïtivament les aplicacions conformes són les que preserven localment la forma. En càlcul diferencial s'anomenen així les funcions que conserven els angles en cada punt. En variable complexa aquest concepte es fa servir com a sinònim de "biholomorfisme": una funció que tant ella com la seva inversa són holomorfes. Concretament, es defineix de la manera següent:

Definició 7.7 (Transformacions conformes) *Siguin $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ oberts de $\mathbb{C}$. Una* transformació conforme *entre $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ és una funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ holomorfa, bijectiva i amb inversa holomorfa.*

Els oberts $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ es diuen conformement equivalents *si existeix una transformació conforme de l'un a l'altre.*

Les transformacions conformes d'un obert $\mathcal{U}$ en ell mateix s'anomenen automorfismes *i es denoten* $\operatorname{Aut}(\mathcal{U})$. *Formen un grup amb la composició.*

El teorema de l'aplicació oberta (teorema 5.19) junt amb el corol·lari 5.24 asseguren que tota funció $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorfa i injectiva és una transformació conforme entre $\mathcal{U}$ i la seva imatge $f(\mathcal{U})$: el teorema diu que $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ és un obert de $\mathbb{C}$ i el corol·lari que la funció inversa $f^{-1}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ també és holomorfa.

La condició de ser conformement equivalents és una relació d'equivalència i classifica els oberts de $\mathbb{C}$ en classes d'equivalència conforme. L'objectiu a continuació és demostrar un dels resultats més importants en relació a aquesta classificació, el teorema de l'aplicació conforme de Riemann, que diu que els oberts simplement connexos formen dues classes: una conté només el propi $\mathbb{C}$ i l'altra conté tots els demés oberts simplement connexos diferents de tot $\mathbb{C}$. Un representant d'aquesta segona classe és el disc unitat $\mathbb{D} = \mathcal{D}(0;1)$. L'afirmació es redueix a veure que $\mathbb{C}$ i $\mathbb{D}$ no són conformement equivalents, i això és una conseqüència immediata del teorema de Liouville, i que tot obert simplement connex diferent de $\mathbb{C}$ és conformement equivalent al disc $\mathbb{D}$.

Exemple 7.8 *L'aplicació $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ és una transformació conforme entre el disc unitat $\mathbb{D}$ i el semiplà superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im} z > 0\}$.*

Tot disc i tot semiplà són conformement equivalents i es poden trobar transformacions conformes de l'un en l'altre que siguin transformacions de Möbius.

Exemple 7.9 *L'aplicació exponencial és una transformació conforme entre una banda horitzontal $\{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Im} z < a + \alpha\}$ i un sector circular $\{z \in \mathbb{C}^* : a < \operatorname{Arg} z < a + \alpha\}$ per a tot $0 < \alpha < 2\pi$.*

Exemple 7.10 (Factors de Blaschke) *Per a cada $w \in \mathbb{C}$ amb $|w| < 1$ la funció definida posant $B_w(z) = \frac{w-z}{1-\overline{w}z}$ és un automorfisme del disc $\mathbb{D}$ que intercanvia 0 amb w.*

PROVA: La funció és holomorfa al disc ja que el denominador no s'anul·la mai perquè $|\overline{w}z| < 1$. Pren valors al disc ja que

$$\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow |w-z|^2 \leqslant |1-\overline{w}z|^2 \Leftrightarrow (w-z)(\overline{w}-\overline{z}) \leqslant (1-\overline{w}z)(1-w\overline{z})$$

$$\Leftrightarrow |w|^2 + |z|^2 \leqslant 1 + |w|^2|z|^2 \Leftrightarrow |w|^2\bigl(1-|z|^2\bigr) \leqslant 1-|z|^2$$

i aquesta darrera desigualtat és evident ja que $1 - |z|^2 > 0$ i $|w|^2 < 1$. Efectivament, intercanvia 0 i w. És un automorfisme ja que és la seva pròpia inversa: amb un càlcul es veu immediatament que $B_w \circ B_w = \mathrm{Id}$. □

Lema 7.11 (Lema de Schwarz) *Si $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ és holomorfa amb $f(0) = 0$,*

- $|f(z)| \leqslant |z|$ *per a tot* $z \in \mathbb{D}$, *i*
- $|f'(0)| \leqslant 1$.

A més, $|f(z)| = |z|$ per a algun $z \in \mathbb{D}'$ o bé $|f'(0)| = 1$ aleshores f és una rotació: $f(z) = e^{i\theta} z$ per a algun $\theta \in \mathbb{R}$.

Prova: Sigui $f(z) = zg(z)$ amb $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Sigui $z \in \mathbb{D}$. Sigui r tal que $|z| < r < 1$. En tot punt $\zeta \in C(0; r)$ es té $|f(\zeta)| < 1 \Rightarrow |g(\zeta)| < \frac{1}{r}$. El principi del mòdul màxim assegura que $|g| < \frac{1}{r}$ en tot el disc $\overline{\mathcal{D}}(0; r)$. Per tant $|g(z)| < \frac{1}{r}$ per al z agafat inicialment. Fent tendir r a 1 es dedueix que $|g(z)| \leqslant 1 \Rightarrow |f(z)| \leqslant |z|$. Que això implica $|f'(0)| \leqslant 1$ és immediat tenint en compte que $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$.

Suposi's ara que f conserva el valor absolut en algun punt $z \neq 0$. Aleshores $|g(z)| = 1$ en aquest punt i com que ja s'ha vist abans que $|g| \leqslant 1$ a tot $\mathbb{D}$ el principi del mòdul màxim assegura que la funció g és constant. Aquesta constant ha de tenir mòdul 1 i per tant $g(z) = e^{i\theta}$ per a algun angle θ. Es dedueix que $f(z) = e^{i\theta} z$ és, efectivament, una rotació.

Suposi's que $|f'(0)| = 1$. Com que $f' = g + zg' \Rightarrow f'(0) = g(0)$ es dedueix que $|g(0)| = 1$ i es pot aplicar el mateix argument d'abans. □

Teorema 7.12 (Automorfismes del disc) *Els automorfismes del disc $\mathbb{D}$ són les funcions de la forma $z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-w}{1-\overline{w}z}$ amb $\theta \in \mathbb{R}$ i $w \in \mathbb{D}$. Els que fixen el zero són les rotacions.*

Prova: Tal com s'ha vist a l'exemple 7.10 els factors de Blaschke $B_w(z) = \frac{w-z}{1-\overline{w}z}$ són automorfismes del disc que intercanvien w amb 0. Les rotacions també són clarament automorfismes del disc. Per tant, les aplicacions de l'enunciat, composició d'un factor de Blaschke amb una rotació, són efectivament automorfismes del disc. S'ha de veure que són tots.

Si $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ és un automorfisme que fixa el zero el lema de Schwarz aplicat a f assegura que $|f'(0)| \leqslant 1$ i aplicat a f^{-1} (que també fixa el zero) que $|(f^{-1})'(0)| \leqslant 1$. Per la regla de la cadena $(f^{-1})'(0) = f'(0)^{-1}$ i, per tant, ha de ser $|f'(0)| = 1$. Aplicant de nou el lema de Schwarz es veu que f és una rotació.

Si f és un automorfisme qualsevol tal que $f^{-1}(0) = w$ aleshores $f \circ B_w$ és un automorfisme que fixa el zero i, per tant, una rotació. Es dedueix que f és la composició del factor de Blaschke B_w amb aquesta rotació i és de la forma de l'enunciat. □

Proposició 7.13 *Per a tot obert simplement connex $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ diferent de tot $\mathbb{C}$ existeix una funció holomorfa injectiva $f\colon \Omega \hookrightarrow \mathbb{D}$ en el disc unitat.*

Prova: Suposi's que Ω no conté cap punt d'un disc tancat $\overline{\mathcal{D}}(z_0; r)$. Aleshores la funció $z \mapsto \frac{r}{z-z_0}$ compleix la condició que es demana: és holomorfa, injectiva i té la imatge dins del disc unitat $\mathbb{D}$.

Es considera ara el cas general. Llevat d'una translació es pot suposar que $0 \notin \Omega$. Aleshores existeix una branca holomorfa de l'arrel quadrada $z \mapsto z^{1/2} \colon \Omega \to \mathbb{C}$ La funció $z^{1/2}$ és injectiva ja que el seu quadrat ho és. No és constant ja que el seu quadrat no ho és. Pel teorema de l'aplicació oberta envia oberts a oberts; sigui $\Omega^{1/2}$ la seva imatge, que és un obert de $\mathbb{C}$. Gràcies a la injectivitat de $z^{1/2}$, per a cada $w \in \Omega^{1/2}$ es té $-w \notin \Omega^{1/2}$. Es dedueix que si $\overline{D}(z_0; r)$ és un disc tancat contingut a $\Omega^{1/2}$. aleshores $\overline{\mathcal{D}}(-z_0; r) \cap \Omega^{1/2} = \varnothing$. Per tant l'aplicació $z \mapsto \frac{r}{z^{1/2}+z_0}$ està ben definida a tot Ω, és holomorfa i injectiva per ser-ne composició i pren valors al disc unitat $\mathbb{D}$. $\square$

A continuació es dona un resultat que es pot veure com la versió en variable complexa del teorema d'Arzelà-Ascoli de l'anàlisi funcional.

Lema 7.14 (Teorema de Montel) *Sigui $(f_i)_{i\in I}$ una família de funcions holomorfes en un obert $\mathcal{U}$. Suposi's que $(f_i)_{i\in I}$ és uniformement fitada sobre compactes: per a cada subconjunt compacte $K \subset \mathcal{U}$ existeix una constant M_K tal que $|f_i(z)| \leqslant M_K$ per a tot $i \in I$ i tot $z \in K$. Aleshores tota successió de funcions d'aquesta família té una parcial uniformement convergent sobre compactes.*

Prova: Primer es veu que la família és equicontínua sobre els compactes. Sigui K un compacte i sigui $r > 0$ tal que $\mathcal{D}(z; 3r) \subseteq \mathcal{U}$ per a tot $z \in K$; això es pot aconseguir agafant $r \leqslant \frac{1}{3}d(K, \mathcal{U}^c)$. Per a tot parell de punts $z, w \in K$ amb $|z-w| < r$ es considera la circumferència $C(w; 2r)$, que conté z al seu interior i que té la vora continguda a $\mathcal{U}$. El teorema de Cauchy assegura que

$$f_i(z) - f_i(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f_i(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w}\right) d\zeta = \frac{z-w}{2\pi i}\int_C \frac{f_i(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - w)}\, d\zeta.$$

Com que $|\zeta - w| = 2r$ i $|\zeta - z| \geqslant r$, agafant M una fita uniforme de totes les $|f_i(\zeta)|$ sobre el compacte C s'obté

$$|f_i(z) - f_i(w)| \leqslant \frac{|z-w|}{2\pi}\frac{M}{2r^2}\ell(C) = c|z-w|$$

per a una constant c i per a tot índex i, i això assegura la equicontinuïtat de la família: donat $\epsilon > 0$ s'agafa $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ i aleshores $|z-w| < \delta \Rightarrow |f_i(z) - f_i(w)| < \epsilon$ per a tot $z, w \in K$ i tota funció

Sigui ara (f_n) una successió de funcions de la família; o sigui, una successió de funcions equicontínua sobre compactes. Sigui K un compacte. Aleshores $|f_n(K)|$ està uniformement fitat. Sigui (w_i) una successió de punts que sigui densa K (per exemple, els punts amb coordenades racionals que pertanyen a aquest compacte).

Sigui $(f_{1,n})$ una parcial tal que la successió de nombres complexos $(f_{1,n}(w_1))$ és convergent, que existeix ja que tots aquests nombres estan fitats per estar les funcions uniformement fitades a K. Sigui $(f_{2,n})$ una parcial de $(f_{1,n})$ tal que $(f_{2,n}(w_2))$ és convergent, que existeix pel mateix motiu; naturalment, $(f_{2,n}(w_1))$ també és convergent, i té el mateix límit que $(f_{1,n}(w_1))$, per ser-ne una parcial. Seguint amb aquest procediment s'obtenen successions $(f_{i,n})$ parcials de la inicial que en avaluar en tots els $w_1, \dots, w_i$ són sèries numèriques convergents. Sigui (g_n) la successió de funcions $f_{n,n}$, que és una parcial de la inicial. Totes les successions numèriques $\big(g_n(w_i)\big)$ són ara convergents, per a tot $i \geqslant 1$.

Ara es vol veure que (g_n) convergeix uniformement a K. Per a tot $\epsilon > 0$ sigui $\delta > 0$ el corresponent a la equicontinuïtat de les funcions al compacte K. Com que els w_i són densos a K els oberts $\mathcal{D}(w_i; \delta)$ el recobreixen, i com que K és compacte existeix un subrecobriment finit format pels $i \in J \subset \mathbb{N}$ amb J un conjunt finit de naturals. Per a cada $i \in J$ la successió $\big(g_n(w_i)\big)$ és de Cauchy i per tant existeix un N_i tal que $n, m \geqslant N_i \Rightarrow |g_n(w_i) - g_m(w_i)| < \epsilon$. Sigui $N = \max\{N_i : i \in J\}$. Per a cada $z \in K$ existeix un $i \in J$ tal que $z \in \mathcal{D}(w_i; \delta)$ i es té

$$n, m \geqslant N \Rightarrow |g_n(z) - g_m(z)| \leqslant |g_n(z) - g_n(w_i)| + |g_n(w_i) - g_m(w_i)| + |g_m(w_i) - g_m(z)| \leqslant 3\epsilon,$$

i per tant la successió de funcions (g_n) és uniformement de Cauchy i, per tant, uniformement convergent al compacte K.

La construcció que s'ha fet és específica per al compacte K i l'enunciat demana una parcial de (f_n) que sigui uniformement convergent sobre tots els compactes $K \subset \Omega$ alhora. Per fer això es procedeix de la manera següent. S'agafa una successió de compactes $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \cdots \subseteq \Omega$ tals que tot compacte estigui contingut en algun d'ells (lema de la ceba). Sigui $(g_{1,n})$ una parcial de (f_n) uniformement convergent sobre K_1. Sigui $(g_{2,n})$ una parcial de l'anterior uniformement convergent sobre K_2. Es procedeix de la mateixa manera i s'agafa la successió formada per les funcions $h_n = g_{n,n}$. Aquesta és uniformement convergent sobre tots els K_j i, per tant, sobre tot compacte de Ω. $\square$

Teorema 7.15 (Teorema de Hurwitz) *Sigui f el límit uniforme sobre compactes de la successió de funcions holomorfes (f_n). Si $\operatorname{ord}_{z_0}(f) = m \geqslant 0$ aleshores per a tot $r > 0$ existeix un N tal que si $n \geqslant N$ tota funció f_n té exactament m zeros a $\mathcal{D}(z_0; r)$, comptant multiplicitats. Aquests zeros tendeixen a z_0 quan $n \to \infty$.*

Prova: Es pot suposar, agafant un r més petit si cal, que la funció no s'anul·la en el disc tancat perforat $\overline{\mathcal{D}}'(z_0; r)$. Sigui $C = C(z_0; r)$. Sigui $m = \min\{|f(z)| : z \in C\}$. Per la convergència uniforme sobre compactes $f_n \to f$ existeix un N tal que per a tot $n \geqslant N$ serà $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \frac{m}{2}$ per a tot $z \in C$. Aleshores

$$|f_n(z)| \geqslant |f(z)| - |f_n(z) - f(z)| \geqslant |f(z)| - \frac{m}{2} > \frac{m}{2}, \qquad \forall z \in C.$$

Les funcions $f_n'(z)/f_n(z)$ estan ben definides i són holomorfes on no s'anul·la el denominador, i en particular, per a $n \geqslant N$, a (un entorn de) la circumferència C. Gràcies a la fita inferior per a f_n sobre C és fàcil comprovar que la successió f_n'/f_n convergeix uniformement sobre C cap a f'/f: el teorema 5.13 assegura que $f_n' \to f'$ uniformement sobre compactes. Siguin M_1 i M_2 fites per a f i f' al compacte C. Donat $\epsilon > 0$ siguin N_1

i N_2 tals que $n \geqslant N_1 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{M_2}$ i $n \geqslant N_2 \Rightarrow |f_n'(z) - f'(z)| < \frac{\epsilon}{M_1}$ per a tot $z \in C$. Aleshores

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_n'(z)}{f_n(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right| &= \left|\frac{f_n'(z)f(z) - f'(z)f(z) + f'(z)f(z) - f'(z)f_n(z)}{f_n(z)f(z)}\right| \\ &\leqslant \frac{3}{m}\big(|f_n'(z) - f'(z)||f(z)| + |f'(z)||f(z) - f_n(z)|\big) = \frac{3\epsilon}{m}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

sempre que sigui $n \geqslant \max N, N_1, N_2$. La convergència uniforme sobre el compacte C permet aplicar a aquesta successió el teorema 4.8 d'intercanvi de la integral amb el límit.

Siguin m i m_n els nombres de zeros de f i f_n al disc $\mathcal{D}$. Pel principi de l'argument,

$$m = \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_C \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz = \lim_{n\to\infty} m_n.$$

Com que tots els nombres m_n i m són enters es dedueix que la successió (m_n) ha de ser constant d'un lloc endavant, igual a m.

Els m zeros de la funció f_n a un disc fixat $\mathcal{D}(z_0; r)$ estan dins de tots els discs $\mathcal{D}(z_0; \epsilon)$ per a tot ϵ per a n prou gran, i per tant tendeixen a z_0. $\square$

Corol·lari 7.16 *El límit uniforme sobre compactes d'un obert connex de funcions holomorfes injectives és una funció holomorfa injectiva o és constant.*

Prova: Sigui Ω obert connex i $f = \lim f_n$ uniforme sobre compactes a Ω. Suposi's que f no és injectiva: $f(z_1) = f(z_2)$ amb $z_1 \neq z_2$. Sigui $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)$. Les funcions g_n tenen un únic zero, en el punt z_1 i convergeixen uniformement sobre compactes cap a la funció $g(z) = f(z) - f(z_1)$. Si g no és constant aleshores z_2 és un zero aïllat d'aquesta funció. Es dedueix que $m = \operatorname{ord}_{z_2}(g) \geqslant 1$. Sigui $r = |z_1 - z_2| > 0$. Pel teorema de Hurwitz totes les funcions g_n han de tenir $m \geqslant 1$ zeros en el disc $D(z_2; r)$ per a n prou gran, però l'únic zero d'aquestes funcions, que és z_1, està fora d'aquest disc. $\square$

Teorema 7.17 (Teorema de l'aplicació conforme de Riemann) *Tot obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplement connex diferent de tot $\mathbb{C}$ és conformement equivalent al disc unitat.*

Prova: Per la proposició 7.13 existeix una funció holomorfa injectiva $\Omega \hookrightarrow \mathbb{D}$. Composant amb un factor de Blaschke (exemple 7.10) es pot suposar que la seva imatge conté el zero. Identificant Ω amb la seva imatge per la inclusió, amb la qual es conformement equivalent, es pot suposar, sense perdre generalitat, que Ω està contingut a $\mathbb{D}$ i conté el zero, i que l'aplicació contínua injectiva és simplement la inclusió.

Sigui $\mathcal{I}$ el conjunt de les funcions injectives holomorfes $f\colon \Omega \hookrightarrow \mathbb{D}$ tals que $f(0) = 0$, que és no buit, ja que conté la inclusió, i és una família uniformement fitada per 1, i per tant se li aplica el teorema de Montel.

Sigui $M = \sup\{|f'(0)| : f \in \mathcal{I}\}$. Aquest nombre és finit. En efecte, sigui $\overline{\mathcal{D}}(0; r)$ un disc tancat contingut a Ω. La desigualtat de Cauchy (corol·lari 5.9) aplicada a la primera derivada de f sobre la frontera $C = C(0; r)$ d'aquest disc assegura que $|f'(0)| \leqslant \frac{1}{r}$ per a tota funció f, ja que, com que la imatge està continguda a $\mathbb{D}$, la funció està fitada per 1.

Sigui f_n una successió de funcions de $\mathcal{I}$ tals que $|f'(0)|$ tendeix a M. Aquesta successió es pot suposar uniformement convergent sobre compactes gràcies al teorema de Montel. Sigui f el seu límit, que pel teorema 5.13 és una funció holomorfa a Ω. Pel corol·lari 7.16 del lema de Hurwitz és una funció injectiva o constant. D'entrada la funció f pren valors a $\overline{\mathbb{D}}$ ja que els seus valors són límits de valors de f_n, que són punts de $\mathbb{D}$. El principi del mòdul màxim assegura que en realitat pren valors a $\mathbb{D}$. Pel teorema 5.13 les derivades f_n' tendeixen a f' i, per tant, $|f'(0)| = M = \lim_{n\to\infty} |f_n'(0)|$. Això assegura que f no és constant i, per tant, és injectiva.

Per veure que és una transformació conforme només falta veure que f és exhaustiva. Suposi's que no ho és, per arribar a contradicció, i que $f(z) \neq w$ per a un $w \in \mathbb{D}$. Composant amb el factor de Blaschke B_w (exemple 7.10) que envia w a 0 es es té una funció injectiva $B_w \circ f \Omega \to \mathbb{D}$, tal que $(B_w \circ f)(z) \neq 0$ per a tot $z \in \Omega$. Com que Ω és simplement connex existeix una arrel quadrada de $B_w \circ f$: una funció $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z)^2 = (B_w \circ f)(z)$ per a tot $z \in \Omega$. Com que $B_w \circ f$ és injectiva g també ho ha de ser. Es té $g(0) = \sqrt{w}$ per a alguna arrel quadrada de w, ja que $g(0)^2 = (B_w \circ f)(0) = w$. Sigui $B_{\sqrt{w}}$ el factor de Blaschke corresponent, que intercanvia $g(0)$ amb 0. La funció $h = B_{\sqrt{w}} \circ g$ és injectiva $\Omega \to \mathbb{D}$ i envia zero a zero, i per tant $h \in \mathcal{I}$. Sigui s l'aplicació "elevar al quadrat": $s(z) = z^2$. Es té

$$f = B_w \circ s \circ B_{\sqrt{w}} \circ h$$

L'aplicació $B_w \circ s \circ B_{\sqrt{w}}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ és holomorfa i envia zero a zero, però no és injectiva ja que $s(z) = s(-z)$, i per tant no pot ser una rotació. Pel lema de Schwarz 7.11 ha de ser $|(B_w \circ s \circ B_{\sqrt{w}})'(0)| < 1$. Aplicant la regla de la cadena a la funció $f = B_w \circ s \circ B_{\sqrt{w}} \circ h$ es dedueix que

$$M = |f'(0)| = |(B_w \circ s \circ B_{\sqrt{w}})'(h(0))||h'(0)| = |(B_w \circ s \circ B_{\sqrt{w}})'(0)||h'(0)| < |h'(0)|$$

el qual contradiu el fet que M era el suprem dels valors absoluts de les derivades en zero de les funcions de $\mathcal{I}$. $\square$

Referències

[1] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979 (3rd. ed.)

[2] M. Beck; G. Marchesi; D. Pixton; L. Sabalka *A first course in Complex Analysis*, San Francisco State University course notes online, 2009.

[3] Joaquim Bruna; Julià Cufí, *Anàlisi Complexa*, Publicacions UAB, 2008.
English translation: *Complex Analysis*, EMS Textbooks in Mathematics, 2010.

[4] Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1985 (6ème. éd.)

[5] John B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer GTM-11, 1978 (2nd. ed.)

[6] Eberhard Freitag; Rolf Busam, *Complex Analysis*, Springer 2005.

[7] T.W. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer, 2001.

[8] Peter Henrici, *Applied and computational Complex Analysis* (3 vols.), Wiley, 1974–1977–1986.

[9] Steven G. Krantz, *Handbook of complex variables*, Birkhäuser, 1999.

[10] Serge Lang, *Complex Analysys*, Springer GTM-103, 1999 (4th. ed.)

[11] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1970.

[12] Elias M. Stein; Rami Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, 2003.

[13] Terence Tao, UCLA fall 2016 Math 246A - Complex Analysis, Course notes.