1 Equacions diferencials lineals

En aquesta primera secció introduïrem les equacions diferencials lineals, les quals són les més senzilles que es poden considerar. Donarem les eines conegudes per estudiar les seves solucions, tan des d'un punt de vista quantitatiu com qualitatiu.

1.1 Context, definicions bàsiques i hipòtesis

Considerem equacions diferencials ordinàries (edos) de la forma

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad t \in I \subset \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

amb

- I un interval, que pot ser infinit,
- $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$,
- $b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$,
- $x = x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ la solució.

Per exemple,

- $\dot{x} = 2x$, $\dot{x} = x$,
- $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} x$, $x = (x_1, x_2)$,
- $\dot{x} = t^3 x + 2\cos t$,....

D'altra banda,

Definició 1.1 *Mostrem una sèrie de definicions bàsiques.*

- *A vegades es fa servir també la notació:*

$$' = \frac{d}{dt}.$$

- *En notació no compacte, l'equació lineal* (1.1) *s'escriu:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Per això també s'anomenen sistemes lineals.

- *Edo lineal autònoma si A, b són constants, és a dir, no depenen de t. Altrament diem que l'edo és no autònoma.*
- *Si A és constant diem que l'edo és a coeficients constants.*
- *Diem que l'edo és homogènia si $b \equiv 0$. En cas contrari, diem que és no homogènia.*
- *Si tenim una solució $x : J \to \mathbb{R}^n$, al conjunt $\{x(t)\}_{t\in J} \subset \mathbb{R}^n$ l'anomenem òrbita.*
- *Al conjunt de totes les òrbites se l'anomena retrat de fase.*
- *Al conjunt de totes les solucions, se l'anomena solució general.*

Les preguntes naturals a fer-se i que anirem resolent al llarg de la secció són:

1. Quines edos lineals es poden resoldre explícitament?
2. El Problema de Cauchy o Problema de Valors Inicials (PVI): Donat un $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ podem trobar una solució $x(t)$ de l'edo (1.1) tal que

   $$x(t_0) = x_0.$$

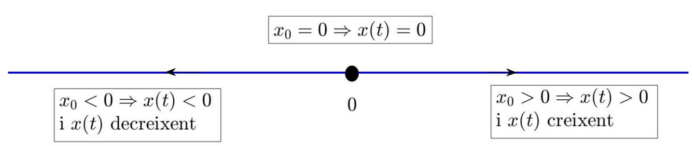
   On està definida x? a I?, hi ha només una solució?.

   A x_0 l'anomenem condició inicial per $t = t_0$.
3. En el cas que no podem donar una solució explícita de l'edo, què podem dir de l'estructura de l'espai de les solucions?
4. Quin és el comportament qualitatiu de les òrbites? és a dir, com és el retrat de fase?. Per exemple,

   (a) Considereu

   $$x' = x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

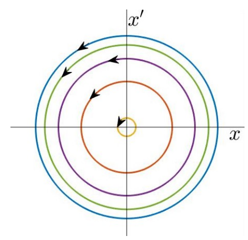
   Clarament totes les funcions $x(t) = e^t K$ amb $K \in \mathbb{R}$. Per tant, si només ens importa el que passa per $x \in \mathbb{R}$,



(b) $x'' = x$, $x \in \mathbb{R}$. Llavors,

$$x(t) = A\cos t + B\sin t, \qquad x'(t) = -A\sin t + B\cos t$$

i podem representar (x, x') al pla:



Qüestió: Penseu perquè ens cal anar al pla per representar les òrbites si la nostra solució $x(t) \in \mathbb{R}$.

1.2 Edos lineals unidimensionals

En aquesta secció resoldrem les equacions

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \qquad x(t) \in \mathbb{R}$$

amb $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a mínim contínues, concretament $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$. Ho farem per parts, començant pels casos més senzills.

1. Cas $a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$, $b \equiv 0$. És a dir, homogènia a coeficients constants:

$$\dot{x} = ax. \tag{1.2}$$

Proposició 1.2 *Totes les solucions de* (1.2) *són de la forma*

$$x(t) = e^{-at}K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

amb K una constant.

A més per cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la única solució de (1.2) *tal que $x(t_0) = x_0$ és*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{a(t-t_0)}x_0.$$

A $\varphi(t; t_0, x_0)$ l'anomenem el flux de (1.2).

Demostració. És clar que $x(t) = e^{-at}K$ és solució. La pregunta és si totes les solucions tenen aquesta forma. Sigui $x(t)$ una solució, considerem

$$y(t) = e^{-at}x(t).$$

És clar que:

$$\dot{y}(t) = -ae^{-at}x(t) + e^{-at}\dot{x}(t) = -ae^{-at}x(t) + e^{-at}ax(t) = 0.$$

Així, x és solució de (1.2) si i només si, $y(t) = e^{-at}x(t)$ és constant. Per tant ja hem demostrat la primera part.

Per veure la segona part, només cal imposar que

$$x_0 = x(t_0) = e^{at_0}K \Rightarrow K = e^{-at_0}x_0$$

i reescriure la solució de la forma que dóna l'enunciat. ■

Observeu que

$$\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \frac{d}{dt}\varphi(t;t_0,x_0) = a\varphi(t;t_0,x_0), \qquad \varphi(t_0,t_0,x_0) = x_0. \quad (1.3)$$

2. Cas $b \equiv 0$. És a dir, homogènia:

$$\dot{x} = a(t)x, \qquad a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}^r. \tag{1.4}$$

Proposició 1.3 *Totes les solucions de* (1.4) *són de la forma*

$$x(t) = e^{-\alpha(t)}K, \qquad K \in \mathbb{R}, \quad \alpha(t) = \int a(t)\,dt$$

amb K una constant i $\alpha(t)$ una primitiva qualsevol de $a(t)$.

A més per cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, la única solució de (1.4) *tal que $x(t_0) = x_0$ és*

$$\varphi(t;t_0,x_0) = e^{\alpha(t)-\alpha(t_0)}x_0.$$

A $\varphi(t;t_0,x_0)$ l'anomenem el flux de (1.4)*. És una funció $\mathcal{C}^r$.*

Demostració. Està clar que $x(t) = e^{-\alpha(t)t}K$ és solució de (1.4). A més, si $x(t)$ és una solució, considerant

$$y(t) = e^{-\alpha(t)}x(t)$$

tenim que:

$$\dot{y} = e^{-\alpha(t)}(-\dot{\alpha})x(t) + e^{-\alpha(t)}\dot{x}(t) = -e^{-\alpha(t)}a(t)x(t) + e^{-\alpha(t)}a(t)x(t) = 0$$

i per tant, el mateix raonament del cas anterior es pot aplicar ara: $x(t)$ és solució de (1.4) si i només si $y(t) = e^{-\alpha(t)}x(t)$ és constant.

Igual que abans deduïm que la única solució tal que $x(t_0) = x_0$ és $\varphi(t; t_0, x_0)$. ■

Per exemple, considereu

$$x' = 2tx.$$

Tenim que $\alpha(t) = t^2$ i per tant:

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{t^2 - t_0^2}x_0.$$

Condicions similars a les donades en (1.3) es donen en el cas no constant tambeé:

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt}\varphi(t; t_0, x_0) = a(t)\varphi(t; t_0, x_0), \qquad \varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0. \tag{1.5}$$

Ara bé, en aquest darrer cas hi ha una diferència amb el cas a coeficients constants. En efecte, observeu que el flux pel cas a coeficients constants, de fet, només depén de $t - t_0$, així el flux de (1.2) és

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^a(t - t_0)x_0 \Rightarrow \varphi(t; t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0). \tag{1.6}$$

Per tant, el t_0 inicial no té molta importància per aquestes equacions, ja que sempre es pot relacionar amb el flux per $t_0 = 0$. No obstant, això no passa en el cas no autònom. En efecte, mireu l'exemple $x' = 2tx$ i és clar que aquesta propietat no es satisfà. El que sí que podem afirmar és que

$$\varphi(t; t_1, \varphi(t_1; t_0, x_0)) = \varphi(t; t_0, x_0) \tag{1.7}$$

Observació 1.4 *Demostreu la igualtat anterior.*

De fet, veurem més endevant que les propietats (1.6) *(cas autònom) i* (1.7) *(cas no autònom) no són exclusives de les equacions diferencials lineals.*

3. Cas general

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \qquad a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}^r. \tag{1.8}$$

Proposició 1.5 *Totes les solucions de* (1.8) *són de la forma*

$$x(t) = e^{-\alpha(t)} \left[K + \int e^{-\alpha(t)} b(t)\, dt \right],$$

amb $K \in \mathbb{R}$ *una constant i* $\alpha(t) = \int a(t)\, dt$ *una primitiva qualsevol de* $a(t)$.
A més per cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, *la única solució de* (1.8) *tal que* $x(t_0) = x_0$ *és*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{\alpha(t)-\alpha(t_0)} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-(\alpha(s)-\alpha(t_0))} b(s)\, ds \right].$$

A $\varphi(t; t_0, x_0)$ *l'anomenem el flux de* (1.8). *És una funció* $\mathcal{C}^r$.

Observació 1.6 *A vegades també escrivim*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(r)\, dr} b(s)\, ds \right].$$

Demostració. Sigui $x(t)$ una solució de (1.8) i considerem

$$y(t) = e^{-\alpha(t)} x(t).$$

Tenim que

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= e^{-\alpha(t)}(-\dot{\alpha}(t))x(t) + e^{-\alpha(t)}\dot{x}(t) = -e^{-\alpha(t)}a(t)x(t) + e^{-\alpha(t)}\big[a(t)x(t) + b(t)\big] \\ &= e^{-\alpha(t)} b(t). \end{aligned}$$

Per tant $x(t)$ és solució de (1.8) si i només si $y(t) = e^{-\alpha(t)}x(t)$ és una primitiva de $e^{-\alpha(t)}b(t)$. És a dir, si i només si:

$$y(t) = K + \int e^{-\alpha(t)} b(t)\, dt \Longleftrightarrow x(t) = e^{\alpha(t)} \left[K + \int e^{-\alpha(t)} b(t)\, dt \right].$$

Per a provar la fòrmula del flux $\varphi(t; t_0, x_0)$, considerem en la prova inicial que triem

$$y(t) = K + \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(s)} b(s)\, ds.$$

Això ho podem fer perquè el raonament és vàlid per qualsevol primitiva de $e^{-\alpha(t)}b(t)$. Llavors si imposem que $x(t_0) = x_0$, tenim que

$$x_0 = x(t_0) = e^{\alpha(t_0)} K \Longleftrightarrow K = e^{-\alpha(t_0)} x_0$$

i reescrivint la solució obtenim el resultat que volíem. ■

1.2.1 El mètode de variació de les constants

La fórmula donada a la proposició 1.5 per trobar les solucions de l'edo (1.8) es pot dedüir seguint el mètode de variació de les constants que consta de dos passos:

i) Solucionem l'equació homogènia

$$\dot{x} = a(t)x$$

associada. Obtenim

$$x_h(t) = e^{\alpha(t)}K = e^{\int a(t)\,dt}K.$$

ii) Considerem que K no és constant i busquem solucions de la forma

$$x(t) = e^{\alpha(t)}K(t).$$

Llavors, com

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a(t)x(t) + b(t) \\ &\dot{x} = e^{\alpha(t)}\dot{\alpha}(t)K(t) + e^{\alpha(t)}\dot{K}(t) = e^{\alpha(t)}a(t)K(t) + e^{\alpha(t)}\dot{K}(t) = a(t)x(t) + e^{\alpha(t)}\dot{K}(t) \end{aligned}$$

tenim que, igualant les dues expressions de $\dot{x}$:

$$a(t)x(t) + b(t) = a(t)x(t) + e^{\alpha(t)}\dot{K}(t) \Longleftrightarrow \dot{K}(t) = e^{-\alpha(t)}b(t).$$

Per tant

$$K(t) = C + \int e^{-\alpha(t)}b(t)\,dt, \qquad C \in \mathbb{R}$$

i així

$$x(t) = e^{\alpha(t)}K(t) = e^{\alpha(t)}\left[C + \int e^{-\alpha(t)}b(t)\,dt\right].$$

Anem a fer un example. Considerem l'equació

$$\dot{x} = 2tx + t^3. \tag{1.9}$$

i) Solucionem l'equació homogènia $\dot{x} = 2tx$ i obtenim

$$x_h(t) = e^{t^2}K$$

ii) Busquem solucions de la forma $x(t) = e^{t^2} K(t)$. D'una banda tenim que:

$$\dot{x} = 2te^{t^2} K(t) + e^{t^2} \dot{K}(t) = 2tx(t) + e^{t^2} \dot{K}(t)$$

ç i d'altre banda, com satisfà (1.9), $\dot{x} = 2tx + t^3$. Per tant, igualant les dues expressions de $\dot{x}$:

$$t^3 = e^{t^2} \dot{K}(t) \Longleftrightarrow \dot{K}(t) = e^{-t^2} t^3$$

obtenim

$$K(t) = C + \int e^{-t^2} t^3 \, dt = C - \frac{1}{2} e^{-t^2} \left(t^2 + 1\right)$$

i per tant

$$x(t) = e^{t^2} \left[C + \int e^{-t^2} t^3 \, dt = C - \frac{1}{2} e^{-t^2} \left(t^2 + 1\right) \right].$$

Ara bé, si intentem trobar les solucions de

$$\dot{x} = 2tx + t^2$$

no podrem fer-ho tan explícitament. En aquest cas

$$K(t) = C + \int e^{-t^2} t^2 \, dt$$

no té una expressió en funcions simples.

Observació 1.7 *Fixeu-vos que inclús en aquest tipus tant simple d'equacions, no és possible en general trobar les solucions en termes de funcions senzilles. Tot i així les podem expressar en termes d'integrals.*

1.3 Equacions lineals homogènies. Generalitats

Considerem sistemes lineals (o equacions lineals) homogènies:

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}),\ \mathcal{C}^r,\ r \geq 0. \tag{1.10}$$

Les equacions homogènies satisfan una propietat important:

Proposició 1.8 (Principi de superposició) *Si $\hat{x}, \tilde{x} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ són dues solucions de* (1.10)*, llavors per a totes constants $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$\alpha\hat{x} + \beta\tilde{x}$$

és també solució.

Demostració. La prova d'aquest fet és trivial. ■

Ara introduïm el concepte de solució matricial i de matriu fonamental.

Definició 1.9 *Considerem l'equació lineal homogènia* (1.10).

1. *Diem que* $X : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *és una solució matricial si cada columna és solució de l'equació diferencial* (1.10).

   És a dir,

$$X(t) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \qquad \dot{x}_i = A(t)x_i$$

   i $x_i : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. *Observeu que també tenim que:*

$$\dot{X} = A(t)X.$$

2. *Diem que* $M : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *és una solució fonamental si* M *és una solució matricial i és invertible per a tot* $t \in I$.

Exercici 1.10 *Siguin* $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$ *i* $B : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R})$ *dues funcions matricials. Considereu* $C(t) = A(t)B(t)$.

Demostreu que

$$\frac{d}{dt}C(t) = \left[\frac{d}{dt}A(t)\right]B(t) + A(t)\left[\frac{d}{dt}B(t)\right].$$

Usarem aquesta propietat sense mencionar-la al llarg d'aquests apunts.

La importància de les matrius fonamentals és que si en coneixem una, ja tenim totes les solucions. Concretament tenim el següent resultat:

Proposició 1.11 *Suposem que el sistema d'equacions lineals* (1.10) *té una (només ens cal una) matriu fonamental*

$$M : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Llavors totes les solucions de (1.10) *són de la forma*

$$x(t) = M(t)K, \qquad K \in \mathbb{R}^n$$

essent K *un vector constant.*

A més per cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, *la única solució de* (1.10) *tal que* $x(t_0) = x_0$ *és*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = M(t)\big[M(t_0)\big]^{-1}x_0.$$

A $\varphi(t; t_0, x_0)$ *l'anomenem el flux de* (1.10). *És una funció* $\mathcal{C}^r$.

Demostració. La prova en realitat és molt semblant a les que hem fet previament pel cas unidimensional. Observem primer que, com

$$\dot{M} = A(t)M$$

és clar que $x(t) = M(t)K$ amb $K \in \mathbb{R}^n$ és solució de l'equació homogènia (1.10).

Sigui ara $x(t)$ una solució qualsevol. Considerem $y(t) = \big[M(t)\big]^{-1}x(t)$ o equivalent (ja que M és invertible) $x(t) = M(t)y(t)$. Llavors,

$$\dot{x} = \dot{M}(t)y(t) + M(t)\dot{y} = A(t)My(t) + M(t)\dot{y} = A(t)x(t) + M(t)\dot{y}.$$

Per tant, com $\dot{x} = A(t)x$, igualant amb l'expressió de $\dot{x}$ anterior, tenim que:

$$M(t)\dot{y} = 0.$$

Com $M(t)$ és invertible, $\dot{y} = 0$ i per tant $y(t) = K$ és a dir, y és constant.

Fixem $t_0 \in I$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$, volem trobar la K corresponent. Per això imposem

$$x_0 = x(t_0) = M(t_0)K \Longleftrightarrow C = \big[M(t_0)\big]^{-1}x_0$$

i obtenim la fórmula que busquem. ∎

Fent servir la proposició anterior podem demostrar la següent important propietat sobre les matrius fonamentals i les solucions matricials.

Corol·lari 1.12 *Suposem que el sistema d'equacions lineals* (1.10) *té una (només ens cal una) matriu fonamental*

$$M : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Llavors tota solució matricial $X(t)$ és pot expressar com

$$X(t) = M(t)K, \qquad K \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

amb K una matriu constant.

A més per cada $t_0 \in I$,

$$X(t) = M(t)\big[M(t_0)\big]^{-1}X(t_0).$$

Demostració. Evident per la proposició anterior, ja que les columnes d'una solució matricial satisfant l'equació diferencial. ∎

Si apliquem el corol·lari anterior a matrius fonamentals, obtenim més informació.

Corol·lari 1.13 *Si*
$$M : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$
és una matriu fonamental de (1.10)*, llavors*

- $M(t)C$*, amb* $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *invertible també és una matriu fonamental.*
- *Si* $\hat{M} : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *és una altra matriu fonamental, llavors, existeix* $\hat{C} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *tal que*
$$\hat{M}(t) = M(t)\hat{C}.$$
De fet, per qualsevol $t_0 \in I$*,*
$$\hat{M}(t) = M(t)\big[M(t_0)\big]^{-1}\hat{M}(t_0).$$
- *Si* $\hat{M} : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *és una altra matriu fonamental i* $\hat{M}(t_*) = M(t_*)$ *per algun* $t_* \in I$*, llavors*
$$\hat{M}(t) = M(t).$$

Per acabar aquesta secció preliminar, observem la següent propietat dels sistemes lineals no homogenis:

Proposició 1.14 *Considerem el sistema lineal no homogeni* (1.1)*:*
$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad t \in I \subset \mathbb{R}. \tag{1.11}$$
Suposem que el sistema homogeni, $\dot{x} = A(t)x$*, té una (només ens cal una) matriu fonamental*
$$M : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$
Llavors totes les solucions de (1.11) *són de la forma*
$$x(t) = M(t)\left(K + \int \big[M(t)\big]^{-1} b(t)\, dt\right),$$
essent K *un vector constant.*

A més per cada $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$*, la única solució de* (1.11) *tal que* $x(t_0) = x_0$ *és*
$$\varphi(t; t_0, x_0) = M(t)\left(\big[M(t_0)\big]^{-1} x_0 + \int_{t_0}^{t} \big[M(s)\big]^{-1} b(s)\, ds\right).$$
A $\varphi(t; t_0, x_0)$ *l'anomenem el flux de* (1.11)*. És una funció* $\mathcal{C}^r$*.*

Demostració. La demostració és molt semblant a la prova de la proposició 1.11. Sigui $x(t)$ una solució de (1.11). Considerem

$$y(t) = \big[M(t)\big]^{-1}x(t) \Longleftrightarrow x(t) = M(t)y(t).$$

Busquem l'equació diferencial que satisfà $y(t)$. D'una banda, com M és solució matricial del sistema homogeni, $\dot{M} = A(t)M$, per tant:

$$\dot{x}(t) = \dot{M}(t)y(t) + M(t)\dot{y}(t) = A(t)M(t)y(t) + M(t)\dot{y}(t) = A(t)x(t) + M(t)\dot{y}(t).$$

D'altre banda, com x és solució:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t).$$

Igualant les dues expressions de $\dot{x}(t)$, tenim que

$$M(t)\dot{y}(t) = b(t) \Longleftrightarrow \dot{y}(t) = \big[M(t)\big]^{-1}b(t) \Longleftrightarrow y(t) = K + \int \big[M(t)\big]^{-1}b(t)\,dt.$$

Com $x(t) = M(t)y(t)$, ja estem.

Per demostrar la fòrmula del flux, fixem $t_0 \in I$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$. És clar que

$$y(t_0) = \big[M(t_0\big]^{-1}x_0,$$

Per tant

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \big[M(s)\big]^{-1}b(s)\,ds = \big[M(t_0\big]^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} \big[M(s)\big]^{-1}b(s)\,ds$$

i la fórmula es dedueix trivialment fent servir $x(t) = M(t)y(t)$. ∎

Per tant la idea principal que hem de tenir és que:

Observació 1.15 *Si coneixem una matriu fonamental de $\dot{x} = A(t)x$, podem escriure totes les solucions de $\dot{x} = A(t)x + b(t)$*

Així a partir d'ara l'objectiu serà trobar o bé si no podem, demostrar la existència de, matrius fonamentals.

1.4 Equacions lineals homogenies a coeficients constants

Durant aquesta secció considerarem sistemes

$$\dot{x} = Ax, \qquad A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}). \tag{1.12}$$

És a dir, A és una matriu constant, que no depén de t. El nostre objectiu és trobar una matriu fonamental d'aquest sistema.

Definició 1.16 (Exponencial d'una matriu) . *Donada una matriu $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, considerem*

$$\mathrm{e}^B := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{B^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{B^k}{k!}.$$

El conveni és $B^0 = \mathrm{Id}$.

Lema 1.17 *La funció e^B està ben definida per tota matriu $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.*

Demostració. Sigui $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Recordem primer la noció de normal matricial induïda. Donada una norma qualsevol $\|\cdot\|$ a $\mathbb{R}^n$, considerem

$$\|B\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \inf\big\{C \,:\, \forall x \in \mathbb{R}^n \ \|Bx\| \leq C\|x\|\big\}.$$

Recordem també que

$$\|Bx\| \leq \|B\|\|x\|, \qquad \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

per a tot $x \in \mathbb{R}^n$ i tota matriu $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A més si la norma és induïda, $\|\mathrm{Id}\| = 1$.

Ara demostrem el lema. El que és clar és que cada terme de la sèrie

$$\left\|\frac{B^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|B\|^k}{k!}.$$

De fet, cada coeficient de la matriu $\frac{B^k}{k!}$ satisfà aquesta desigualtat. Com la sèrie

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\|B\|^k}{k!}$$

és convergent, la e^B és absolutament convergent. ■

La següent proposició, d'entre d'altres propietats, defineix una matriu fonamental del sistema (1.12).

Proposició 1.18 *Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriu. Considerem la funció:*

$$\begin{aligned} \phi_A : &\mathbb{R} &&\to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \\ &t &&\mapsto \mathrm{e}^{tA}. \end{aligned}$$

Llavors:

1. *La sèrie que defineix ϕ_A és absolutament convergent i uniformement convergent sobre compactes de $\mathbb{R}$.*

2. *ϕ_A és $\mathcal{C}^\infty$ i*

$$\frac{d}{dt}\phi_A(t) = \phi_A(t)A = A\phi_A(t) \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\,\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{At} A = A\,\mathrm{e}^{At}.$$

3. *Siguin $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Llavors*

$$AB = BA \Rightarrow \mathrm{e}^{(A+B)t} = \mathrm{e}^{At}\,\mathrm{e}^{Bt} = \mathrm{e}^{Bt}\,\mathrm{e}^{At}.$$

4. *$\phi_A(0) = \mathrm{Id}$.*

5. *$\left[\phi_A(t)\right]^{-1} = \phi_A(-t) = \mathrm{e}^{-tA}$.*

6. *$\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{sA}$.*

Demostració. Fixem $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ i considerem ϕ_A com a l'enunciat.

1. Que la sèrie és absolutament convergent, ho hem vist a la demostració del lema 1.17. És clar que, per a cada compacte $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$, existeix una constant possitiva tal que$\kappa > 0$

$$\forall t \in \mathcal{K}, \qquad |t| \leq \kappa.$$

   Llavors

$$\left\|\frac{(At)^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|A\|^k|t|^k}{k!} \leq \frac{\|A\|^k\kappa^k}{k!}.$$

   Com la darrera cota no depén de t, el criteri M- de Weierstrass ens assegura que la sèrie és uniformement convergent, ja que

$$\sum_{k\geq 0}\frac{\|A\|^k\kappa^k}{k!}$$

   és absolutament convergent.

2. Així la sèrie es pot derivar terme a terme i per tant

$$\frac{d}{dt}\phi_A(t) = \sum_{k\geq 0}\frac{kt^{k-1}A^k}{k!} = \sum_{k\geq 1} A\frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!} = A\phi_A(t)$$

   Obviament és $\mathcal{C}^\infty$.

3. Siguin $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ que conmuten, provem per inducció que:

$$(A+B)^k = k! \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l}. \tag{1.13}$$

En efecte, és clar si $k=1$, però també si $k=2$:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Suposem cert per $k-1$:

$$\begin{aligned}(A+B)^k = (A+B)^{k-1}(A+B) &= (k-1)! \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!(k-1-l)!} A^l B^{k-1-l}(A+B) \\ &= (k-1)! \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!(k-1-l)!} \left[A^{l+1}B^{k-1-l} + A^l B^{k-l}\right].\end{aligned}$$

Agrupem ara els elements de la suma per $A^m B^{k-m}$:

$$\begin{aligned}(A+B)^k &= B^k + (k-1)! \sum_{m=0}^{k-1} A^m B^{k-m} \left[\frac{1}{(m-1)!(k-m)!} + \frac{1}{m!(k-1-m)!}\right] + A^k \\ &= B^k + (k-1)! \sum_{m=0}^{k-1} A^m B^{k-m} \frac{k}{m!(k-m)!} + A^k\end{aligned}$$

i la prova de (1.13) està complerta. Llavors,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{tB} &= \left(\sum_{l\geq 0} \frac{t^l A^l}{l!}\right)\left(\sum_{m\geq 0} \frac{t^m B^m}{m!}\right) = \sum_{m,l\geq 0} t^{l+m} \frac{A^l B^m}{l!m!} \\ &= \sum_{k\geq 0} t^k \sum_{l=0}^{k} \frac{A^l B^{k-l}}{l!(k-l)!} = \sum_{k\geq 0} t^k \frac{(A+B)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{t(A+B)}.\end{aligned}$$

4. És evident.

5. Obvi utilitzant item 3 i 4:

$$\mathrm{Id} = \phi_A(0) = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{(t-t)A} = \mathrm{e}^{tA}\,\mathrm{e}^{-tA} = \mathrm{e}^{-tA}\,\mathrm{e}^{tA}$$

6. Obvi utilitzant item 3.

■

Corol·lari 1.19 *$\phi_A(t) = \mathrm{e}^{tA}$ és la única matriu fonamental del sistema lineal homogeni a coeficients constants $\dot{x} = Ax$ tal que quan $t = 0$, val* Id.

A més, per cada $t_0 \in \mathbb{R}$, $\phi_A(t - t_0) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}$ és la única matriu fonamental de $\dot{x} = Ax$ tal que per $t = t_0$ val Id.

Així, per cada $t_0 \in \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existeix una única solució de $\dot{x} = Ax$ tal que $x(t_0) = x_0$ i és

$$\varphi(t; t_0, x_0) = \mathrm{e}^{t-t_0}\, x_0.$$

Demostració. Pel que acabem de veure, és clar que $\phi_A(t) = \mathrm{e}^{tA}$ és una matriu fonamental. Llavors, per l'item 1.13 del corol·lari 1.13 és la única satisfent que a $t = 0$ val Id.

L'altre propietat és conseqüència directa de l'anterior. ■

Observació 1.20 *L'item 3 no és cert si $AB \neq BA$. En efecte, considerem*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que no conmuten. Tenim que

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{tB} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcular $\mathrm{e}^{(A+B)t}$, trobarem directament la matriu fundamental M del sistema $\dot{x} = (A+B)x$ que per $t = 0$ val Id. *Llavors, tal com hem fet notar en el corol·lari anterior, $M(t) = \mathrm{e}^{(A+B)t}$. Plantegem dons el sistema:*

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= 2x_1 + x_2 \\ \dot{x_2} &= -2x_2 \end{aligned}$$

que en realitat són dos equacions unidimensionals que sabem resoldre:

$$x_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}\, c_2$$

i

$$\dot{x_1} = 2x_1 + \mathrm{e}^{-2t}\, c_2 \Rightarrow x_1 = e^{2t}\left[c_1 + \int \mathrm{e}^{-4t}\, c_2\, dt\right] = \mathrm{e}^{2t}\, c_1 - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2t}\, c_2.$$

Com $\phi_{A+B}(t) = \mathrm{e}^{t(A+B)}$ és una matriu fonamental, les dues columnes seran de la forma

$$\left(\mathrm{e}^{2t} c_1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t} c_2, \mathrm{e}^{-2t} c_2\right)^\top$$

amb constants adequades. Com volem que $\phi_{A+B}(0) = \mathrm{Id}$, ens cal, d'una banda que la primera columna tingui constants (c_1, c_2) tal que

$$\left(c_1 - \frac{1}{4}c_2, c_2\right) = (1,0) \Longleftrightarrow (c_1, c_2) = (1,0).$$

I d'altra banda la segona columna tingui constants

$$\left(c_1 - \frac{1}{4}c_2, c_2\right) = (0,1) \Longleftrightarrow (c_1, c_2) = \left(\frac{1}{4}, 1\right).$$

Per tant, recopilant tota la informació:

$$\mathrm{e}^{t(A+B)} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}\right) \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

És fàcil veure que $\mathrm{e}^{t(A+B)} \neq \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}$.

1.4.1 Càlcul de l'exponencial d'una matriu

En aquesta secció anem a calcular la exponencial d'una matriu.

Lema 1.21 *$x(t)$ és solució de $\dot{x} = Ax$ si i només si $y(t) = P^{-1}x(t)$ és solució de $\dot{y} = P^{-1}APy(t)$, essent $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriu constant invertible.*

Demostració. Observeu que es permet que la matriu P sigui complexa. La prova 'es molt senzilla. Com P és constant

$$\dot{y} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy.$$

■

Lema 1.22 *Si $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ és una matriu invertible,*

$$\mathrm{e}^{tA} = P\,\mathrm{e}^{tP^{-1}AP}\,P^{-1}.$$

Demostració. Anomenem $J = P^{-1}AP$. Pel lema anterior $P^{-1}\mathrm{e}^{tA}$ és una matriu fonamental de $\dot{y} = Jy$. Per tant, existeix una matriu constant C tal que

$$P^{-1}\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tJ}\,C \Longrightarrow C = P^{-1}$$

i en conclusió $\mathrm{e}^{tA} = P\,\mathrm{e}^{tJ}\,P^{-1}$. ■

Així només ens cal saber com calcular e^{tJ} quan J està en forma de Jordan.

Observació 1.23 *Quan els valors propis són complexos, J serà una matriu complexa i per tant també ho seran P i P^{-1}.*

- **Primera reducció:** $J = \mathrm{diag}\big(J_1, \cdots, J_m\big)$. Com

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_m^k \end{pmatrix}$$

tenim que

$$\mathrm{e}^{tJ} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{tJ_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathrm{e}^{J_m t} \end{pmatrix}$$

i per tant només cal saber calcular e^{tJ_i}, $i = 1, \cdots, m$.

- **Cas** $J = \lambda\,\mathrm{Id}$.

$$\mathrm{e}^{t\lambda\,\mathrm{Id}} = \sum_{k\geq} \frac{(t\lambda)^k}{k!}\,\mathrm{Id} = \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{Id}\,.$$

- **Cas** $J = N$ amb $N^r = 0$ nilpotent.

$$\mathrm{e}^{tN} = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} N^k = \mathrm{Id} + N + \cdots + \frac{N^{r-1}}{(t-1)!}.$$

En particular si

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

llavors

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} & \cdots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Cas** $J = \lambda \operatorname{Id} + N$, és a dir, capsa de Jordan no diagonalitzable. Com $\lambda \operatorname{Id}$ i N conmuten:

$$e^{Jt} = e^{(\lambda \operatorname{Id} + N)t} = e^{\lambda \operatorname{Id} t} e^{Nt} = e^{\lambda t} e^{Nt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} & \cdots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Cas valor propi complex simple**. En aquest cas podem pensar que tenim

$$A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det(A) < 0.$$

  És a dir, tenim un valor propi complex i el seu conjugat, tots dos amb multiplicitat 1. En aquest cas, podem

  1. Utilitzar que té forma de Jordan complexa $J = \operatorname{diag}(\lambda, \overline{\lambda})$ i per tant existeix una matriu $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ complexa tal que

  $$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\overline{\lambda} t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

  2. O bé no passar pels complexes. És fàcil veure que,

  $$A = Q \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} Q^{-1},$$

     essent $Q \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ una matriu real i $\lambda = \alpha + i\beta$. Pel lema 1.22 podem assegurar que $e^{tA} = Q\, e^{tJ} Q^{-1}$, essent

  $$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \operatorname{Id} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

     Anomenem

  $$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

     És clar que $\alpha \operatorname{Id}$ i βW conmuten, per tant $e^{tJ} = e^{\alpha t} e^{tW}$. És també evident que

  $$W^2 = -\operatorname{Id} \Longrightarrow W^{2k+1} = (-1)^k W,\ W^{2k} = (-1)^k \operatorname{Id}.$$

Així,

$$\begin{aligned}
e^{\beta W t} &= \sum_{k\geq 0} \frac{(\beta t W)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{(\beta t)^{2k}}{(2k)!} \operatorname{Id} + \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{(\beta t)^{2k+1}}{(2k+1)!} W \\
&= \cos(\beta t) \operatorname{Id} + \sin(\beta t) W = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Per tant

$$e^{Jt} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Observació 1.24 *Per trobar la matriu real Q del canvi de variables, recordeu que si $w = u + iv$ és un vector propi de valor propi λ, llavors, com $\overline{w} = u - iv$ és un vector propi de valor propi $\overline{\lambda}$:*

$$Au = A\left(\frac{w + \overline{w}}{2}\right) = \frac{1}{2}(\lambda w + \overline{\lambda w}) = \operatorname{Re}(\lambda w) = \alpha u - \beta v,$$

si $\lambda = \alpha + i\beta$. Anòlogament,

$$Av = A\left(\frac{w - \overline{w}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}(\lambda w - \overline{\lambda w}) = \operatorname{Im}(\lambda w) = \beta u + \alpha v.$$

- **Cas valor propi complex no diagonalitzable**. Com abans podem procedir com s'ha mostrat anteriorment o bé intentar no passar pels complexos. Suposem que tenim una matriu A (real) amb dues capses de Jordan complexes de la forma:

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \overline{J} \end{pmatrix}, \qquad J = \lambda \operatorname{Id} + N,\ \overline{J} = \overline{\lambda} \operatorname{Id} + N$$

essent $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ i N matriu nilpotent amb 1's a sota de la diagonal, com a (1.14).

Exercici 1.25 *En el cas anterior:*

i) Veieu que hi ha un canvi de variables real de la matriu A que la transforma en

$$B = \begin{pmatrix} \widetilde{J} & \cdots & \cdots & 0 \\ \operatorname{Id}_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \widetilde{J} & \vdots \\ 0 & \cdots & \operatorname{Id}_2 & \widetilde{J} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{J} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},\ \operatorname{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

amb $\lambda = \alpha + i\beta$.

ii) Calculeu e^{Bt}.

Observació 1.26 *A efectes de calcular una matriu fonamental del sistema lineal* $\dot{x} = Ax$*, és suficient calcular*
$$\mathrm{e}^{tA} P = P\,\mathrm{e}^{t(P^{-1}AP)}.$$
Així ens estalviem de calcular P^{-1}*.*

Per suposat, $M(t) = \mathrm{e}^{tA} P$*, no satisfà la condició inicial de la exponencial, és a dir,* $M(0) \neq \mathrm{Id}$*.*

Anem a veure dos exemples:

1. Matriu fonamental de
$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} x.$$
La matriu A té valors propis $\lambda_1 = 0, \lambda = -5$ i vectors propis $v_1 = (1,3)$, $v_2 = (2,1)$. Per tant $A = PJP^{-1}$, amb
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
i així, una matriu fonamental és
$$\mathrm{e}^{tA} P = P\,\mathrm{e}^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\,\mathrm{e}^{-5t} \\ 3 & \mathrm{e}^{-5t} \end{pmatrix}$$

2. Matriu fonamental de
$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} x.$$
Aquesta matriu té valors propis $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1+2i, \lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ amb vectors propis respectius:
$$v_1 = (0,-2,1), \quad v_2 = (-(2+i), -3i, 2), \quad v_3 = \overline{v_2}.$$
Per tant $A = PJP^{-1}$ amb
$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
i llavors, una matriu fonamental és
$$\mathrm{e}^{tA} P = P\,\mathrm{e}^{tJ} = P \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t}\cos(2t) & \mathrm{e}^{t}\sin(2t) \\ 0 & -\mathrm{e}^{t}\sin(2t) & \mathrm{e}^{t}\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

1.4.2 Dues propietats importants

Veurem ara dos resultats útils. El primer és una simplificació d'un resultat més general que veurem més endevant i el segon ens dóna unes determinades solucions de $\dot{x} = Ax$ molt senzilles de calcular.

Proposició 1.27 *Suposem que tenim una solució matricial qualsevol $X(t)$ de $\dot{x} = Ax$. Llavors*

$$\det X(t) = \det X(t_0)\, \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A(t-t_0)}, \qquad \forall t, t_0 \mathbb{R}.$$

En particular, $\det X(t_0) \neq 0$ *per algun* $t_0 \in \mathbb{R}$ *si i només si* $\det X(t) \neq 0$ *per a tot* $t \in \mathbb{R}$.

Demostració. La demostració és molt senzilla ja que per ser solució matricial (veieu 1.12)

$$X(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\, X(t_0) \Leftarrow \det X(t) = \det X(t_0) \det \left(\mathrm{e}^{(t-t_0)A}\right).$$

Hem vist que $\mathrm{e}^{tA} = P\, \mathrm{e}^{tJ}\, P^{-1}$, per tant

$$\det \left(\mathrm{e}^{(t-t_0)A}\right) = \det P \det \left(\mathrm{e}^{(t-t_0)J}\right) \det P^{-1} = \det \left(\mathrm{e}^{(t-t_0)J}\right).$$

Siguin $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ els valors propis de A. Sabem que $\mathrm{e}^{(t-t_0)J}$ és triangular inferior:

$$\mathrm{e}^{(t-t_0)J} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \mathrm{e}^{\lambda_2(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix},$$

llavors

$$\det \left(\mathrm{e}^{(t-t_0)J}\right) = \mathrm{e}^{\lambda_1(t-t_0)} \cdots \mathrm{e}^{\lambda_n(t-t_0)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)(t-t_0)}$$

i la prova està complerta. ■

Suposem ara volem trobar una matriu fonamental de

$$\dot{x} = Ax,$$

amb $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriu que diagonalitza (eventualment podria tenir valors propis complexos).

La idea és que no cal passar, si no es vol, per la exponencial de la matriu. En efecte

Proposició 1.28 *Sigui v un vector propi de la matriu A de valor propi λ. Llavors*

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\, v$$

és solució de l'equació diferencial $\dot{x} = Ax$.

Com a conseqüència, si existeix $v_1, v_2, \cdots, v_n$ *una base de vectors propis amb valors propis associats* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, *la matriu*

$$M(t) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, v_1 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\, v_2 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n t}\, v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

és una matriu fonamental. És a dir, qualsevol solució és de la forma:

$$x(t) = c_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, v_1 + \cdots + c_n\, \mathrm{e}^{\lambda_n t}\, v_n,$$

amb $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ *i a més el flux ve definit per*

$$\varphi(t; t_0, x_0) = \varphi(t - t_0; 0, x_0) = c_1^0\, \mathrm{e}^{\lambda_1 (t-t_0)}\, v_1 + \cdots + c_n^0\, \mathrm{e}^{\lambda_n (t-t_0)}\, v_n$$

amb $(c_1^0, \cdots, c_n^0)$ *les coordenades del vector* x_0 *en base* $\{v_1, \cdots, v_n\}$.

Demostració. La demostració és senzilla. En efecte, si v és un vector propi de valor propi λ, definint $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\, v$ tenim que

$$\dot{x} = \mathrm{e}^{\lambda t}\, \lambda v = \mathrm{e}^{\lambda t}\, A v = A\, \mathrm{e}^{\lambda t}\, v = A x(t).$$

Per tant la primera part és immediata.

El fet que $M(t)$ és una matriu fonamental prové del fet que és solució matricial (ja que cada columna ho és) i a més és invertible. En efecte, per la proposició 1.27 és suficient que $M(0)$ sigui invertible:

$$\det M(0) = \det \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \neq 0$$

ja que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ són base.

La resta és immediat. ■

Exercici 1.29 *Utilitzant la observació 1.24, veieu que si* $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ *és un valor propi complex de vector propi* $w = u + iv$, *llavors*

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \big(u \cos(\beta t) - v \sin(\beta t)\big), \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \big(u \sin(\beta t) + v \cos(\beta t)\big)$$

són dues solucions reals linealment independents.

1.5 Sistemes lineals a coeficients constants al pla

En aquesta secció estudiarem el comportament de totes les solucions de sistemes

$$\dot{x} = Ax, \qquad A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ x = (x_1, x_2). \tag{1.15}$$

Concretament estem interessats en el que s'anomena *retrat de fase.* Recordem les definicions:

Definició 1.30 *Donat un sistema lineal al pla* (1.15)*, definim:*

- *Òrbita: Definim l'òrbita d'un punt $p \in \mathbb{R}^2$ com*

$$\mathcal{O}(p) = \{\mathrm{e}^{tA}\, p\}_{t\in\mathbb{R}}.$$

- *Retrat de fase: Definim el retrat de fase com el conjunt de totes les òrbites. L'objectiu d'un retrat de fase és donar un dibuix qualitatiu de tots els diferents comportaments. L'espai on es dibuixa s'anomena espai de fase i les seves variables es denoten per (x_1, x_2) també.*

- *Punt fix o punt d'equilibri: Diem que p és un punt d'equilibri si $Ap = 0$. En aquest cas $\mathcal{O}(p) = \{p\}$. Observeu que $(0, 0)$ és sempre un punt fix.*

De la pròpia definició deduïm que:

Proposició 1.31 *Sigui $p \in \mathbb{R}^2$.*

1. *Si $q \in \mathcal{O}(p)$ llavors $\mathcal{O}(q) = \mathcal{O}(p)$.*
2. *Si $q \notin \mathcal{O}(p)$ llavors $\mathcal{O}(q) \cap \mathcal{O}(p) = \emptyset$.*

Demostració. Fixem un punt del pla $p \in \mathbb{R}^2$.

1. Si $q \in \mathcal{O}(p)$, existeix t_* tal que $q = \mathrm{e}^{t_* A}\, p$. Llavors $\mathrm{e}^{tA}\, q = \mathrm{e}^{(t+t_*)A}\, p$ i per tant $\mathcal{O}(q) = \mathcal{O}(p)$.

2. Fem-ho pel contrarecíproc. Suposem que $\mathcal{O}(q) \cap \mathcal{O}(p) \neq \emptyset$. Llavors, existeixen t_1, t_2 tals que

$$\mathrm{e}^{t_1 A}\, p = \mathrm{e}^{t_2 A}\, q \Longrightarrow q = \mathrm{e}^{(t_1 - t_2)A}\, p \Longrightarrow q \in \mathcal{O}(p).$$

■

Obvserveu que pel lema 1.21, només cal considerar els cassos en els que la matriu A està ja en forma de Jordan. Així ens trobem amb 3 possibilitats:

1. A diagonalitza i té valors propis reals:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2. A no diagonalitza

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. A té valors propis complexos conjugats $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Passem ara a dibuixar el retrat de fase en aquests tres cassos.

1.5.1 Cas A diagonalitzable als reals

En aquest cas tenim el sistema:

$$\dot{x_1} = \lambda_1 x_1,$$
$$\dot{x_2} = \lambda_2 x_2$$

i per tant:

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Així:

$$\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}((p_1, p_2)) = \{(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\, p_1, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\, p_2)\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

A partir d'ara suposarem que $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

Exercici 1.32 *Feu el cas $\lambda_1 = 0$ i/o $\lambda_2 = 0$.*

Recordeu que les variables al pla seran (x_1, x_2) (atenció amb la duplicitat de notació, però és l'habitual!).

- És clar que $(0,0)$ és un punt d'equilibri i per tant $\mathcal{O}((0,0)) = \{(0,0)\}$. Per tant, per la proposició 1.31, cap òrbita pot passar per aquest punt.
- Si $p_1 = 0$ i $p_2 \neq 0$, llavors $\mathcal{O}((0,p_2)) = \{(0, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\, p_2)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Així,

$$p_2 > 0 \Longrightarrow \mathcal{O}((0,p_2)) = \{x_2 > 0\}, \qquad p_2 < 0 \Longrightarrow \mathcal{O}((0,p_2)) = \{x_2 < 0\}.$$

- Si $p_2 = 0$ i $p_1 \neq 0$, llavors $\mathcal{O}((p_1,0)) = \{(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} p_1, 0)\}_{t\in\mathbb{R}}$ i per tant

$$p_1 > 0 \Longrightarrow \mathcal{O}((p_1,0)) = \{x_1 > 0\}, \qquad p_1 < 0 \Longrightarrow \mathcal{O}((p_1,0)) = \{x_1 < 0\}.$$

- Si $p_1, p_2 \neq 0$. Escrivim $p = (p_1, p_2)$. Per dibuixar ens és més còmode escriure una variable en funció de l'altre. Per fer-ho fixem (x_1, x_2) un punt de $\mathcal{O}(p)$ i escrivim:

$$x_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} p_1 \Longleftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_1} \log\left(\frac{x_1}{p_1}\right).$$

Exercici 1.33 *Sigui $p = (p_1, p_2)$. Si $p_1 > 0$, tots els punts de la seva òrbita tenen la primera component possitiva (no zero). El mateix si $p_1 < 0$ o $p_2 > 0$ o bé $p_2 < 0$.*

És a dir, els quadrants són invariants.

Com a conseqüència d'aquest resultat, el logaritme de x_1/p_1 està ben definit.

En qualsevol cas, com $x = (x_1, x_2)$ és un punt de $\mathcal{O}(p)$:

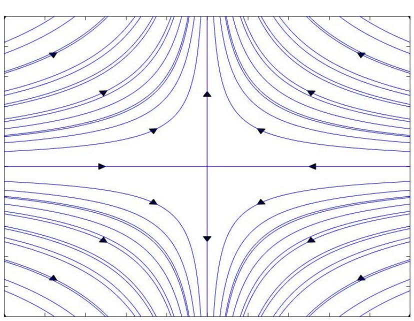
$$x_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} p_2 = \left(\frac{x_1}{p_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1} p_2 = |x_1|^{\lambda_2/\lambda_1} \frac{p_2}{|p_1|^{\lambda_2/\lambda_1}}.$$

En resum totes les òrbites amb $p = (p_1, p_2)$ i $p_1, p_2 \neq 0$ es poden descriure

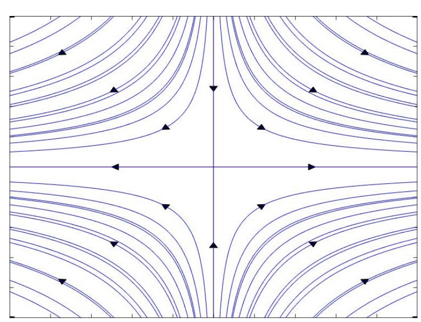
$$x_2 = K|x_1|^{\lambda_2/\lambda_1}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Aquests fets ens donen una idea bastant aproximada de com faran les solucions segons el valor que prenguin λ_1, λ_2. Concretament, tenim que:

- Si $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, diem que $(0,0)$ és un *punt d'equilibri de tipus sella* i tenim



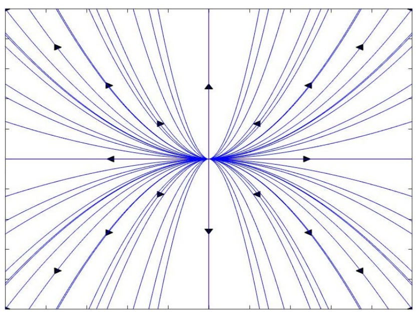
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0.$



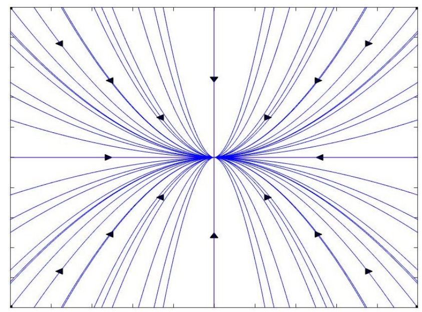
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0.$

- Si $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ diem que $(0,0)$ és un *punt d'equilibri de tipus node.* A més, quan $\lambda_1 > 0$, diem que és un *node repulsor* i quan $\lambda_1 < 0$, diem que és un *node atractor*. El comportament qualitatiu de les solucions és:

  i) Quan $\lambda_2/\lambda_1 > 1$,

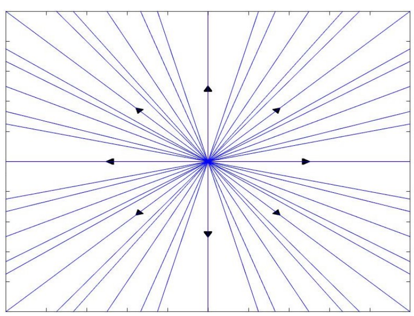


$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, node repulsor

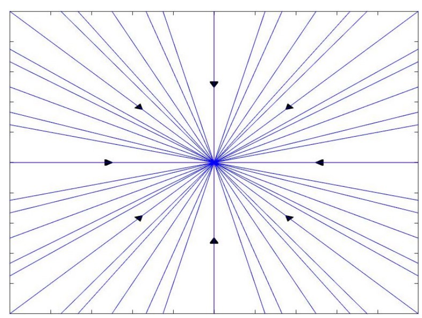


$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, node atractor.

  ii) Quan $\lambda_2/\lambda_1 = 1$,

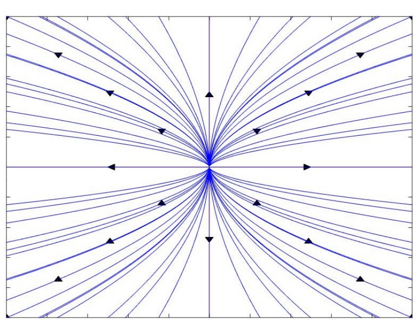


$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, node repulsor.

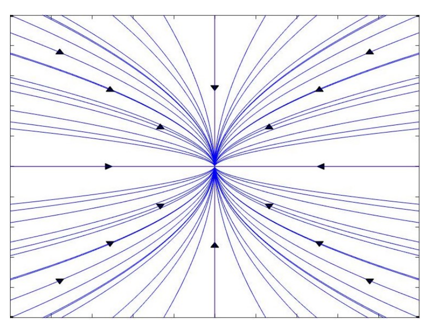


$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, node atractor.

  iii) Quan $\lambda_2/\lambda_1 < 1$,



$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, node repulsor.



$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, node atractor.

1.5.2 Cas A no diagonalitzable

En aquest cas estudiem els sistemes

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \lambda x_1 \\ \dot{x_2} &= x_1 + \lambda x_2 \end{aligned}$$

És molt fàcil veure que

$$\mathcal{O}(p) = \left\{ \left(\mathrm{e}^{\lambda t} p_1, t\, \mathrm{e}^{\lambda t} p_1 + \mathrm{e}^{\lambda t} p_2 \right) \right\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Igual que abans deduïm que

$$\mathcal{O}((0, p_2)) = \{x_1 = 0, x_2 > 0\}, \qquad \text{si } p_2 > 0$$

i

$$\mathcal{O}((0, p_2)) = \{x_1 = 0, x_2 < 0\}, \qquad \text{si } p_2 < 0$$

Suposarem que $\lambda \neq 0$.

Exercici 1.34 *Feu el cas $\lambda = 0$.*

Quan $p_1 \neq 0$, escrivint

$$x_1 = \mathrm{e}^{\lambda t} p_1 \Leftarrow t = \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{x_1}{p_1} \right)$$

obtenim

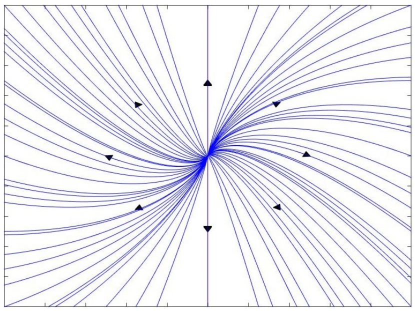
$$x_2 = t\, \mathrm{e}^{\lambda t} p_1 + \mathrm{e}^{\lambda t} p_2 = \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{x_1}{p_1} \right) x_1 + \frac{x_1}{p_1} p_2.$$

Com p_1, p_2 són constants al llarg de l'òrbita, totes les solucions s'escriuen:

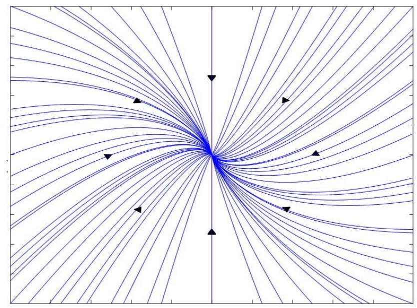
$$x_2 = C x_1 + \frac{1}{\lambda} \log |x_1|$$

Observació 1.35 *Observeu que, igual que ens ha passat en el cas anterior, si $p_1 > 0$, $x_1 > 0$ per qualsevol $x = (x_1, x_2)$ de l'òrbita del punt $p = (p_1, p_2)$. Aquest fet justifica el valor absolut a la fòrmula anterior.*

Pot costar més o menys, però és un estudi bastant estàndard comprovar que els nodes impropis tenen el següent restrat de fase, distinging, com tota la estona, segons el signe de λ:



$\lambda > 0$, node impropi repulsor.



$\lambda < 0$, node impropi atractor.

Observeu que les òrbites són tangents a $\{x_1 = 0\}$.

1.5.3 Cas A amb valors propis complexos conjugats

Estem estudiant els sistemes de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \dot{x_2} &= -\beta x_1 + \alpha x_1. \end{aligned}$$

Escrivim les solucions

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\alpha t} \begin{pmatrix} p_1 \cos(\beta t) + p_2 \sin(\beta t) \\ -p_1 \sin(\beta t) + p_2 \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Siguin, r_0, θ_0 les coordenades polars del punt inicial (p_1, p_2):

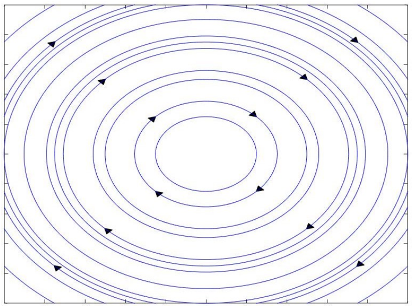
$$p_1 = r_0 \cos\theta_0, \qquad p_2 = r_0 \sin\theta_0.$$

Llavors

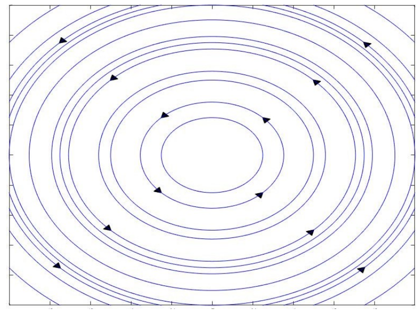
$$\begin{aligned} x(t) &= r_0\, \mathrm{e}^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \cos(\beta t) + \sin\theta_0 \sin(\beta t) \\ -\cos\theta_0 \sin(\beta t) + \sin\theta_0 \cos(\beta t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 - \beta t) \\ \sin(\theta_0 - \beta t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i ja ho tenim tot determinat:

- Si $\alpha = 0$ diem que $(0, 0)$ és un *punt d'equilibri de tipus centre*. Llavors totes les òrbites són circumferències i depenent del signe de β les solucions giren en sentit de les agulles del rellotge o oposat:

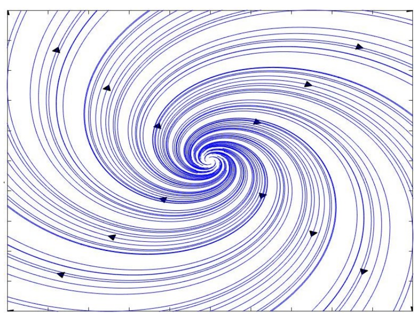


$\beta > 0$, centre.

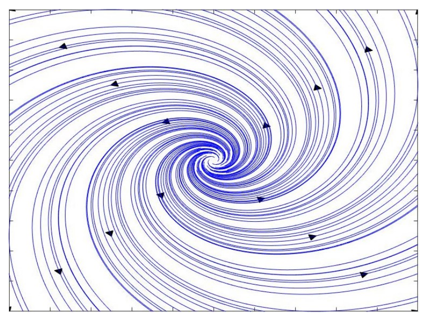


$\beta < 0$, centre.

- Si $\alpha \neq 0$ diem que $(0,0)$ és un *punt d'equilibri de tipus focus*. A més quan $\alpha > 0$, diem que és un *focus repulsor* i quan $\alpha < 0$, diem que és un *focus atractor*. Tenim així que, els focus repulsors són:

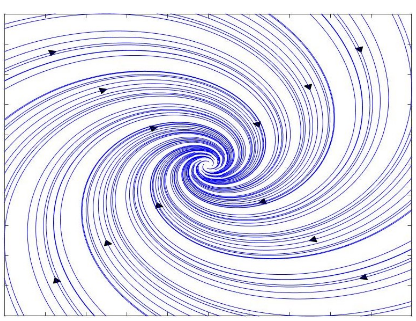


$\alpha > 0, \beta > 0$, focus repulsor.

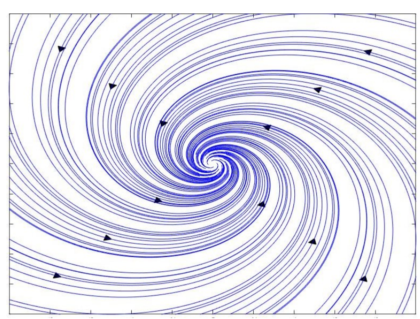


$\alpha > 0, \beta < 0$, focus repulsor.

I els focus atractors:



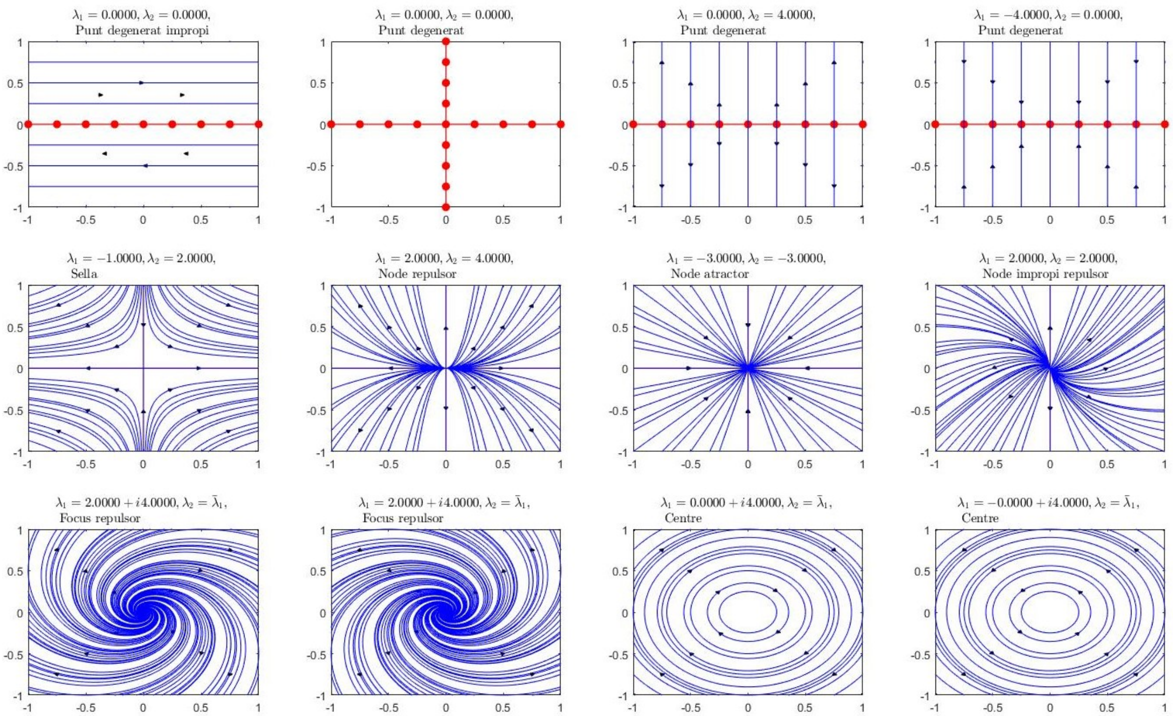
$\alpha < 0, \beta > 0$, focus atractor.



$\alpha < 0, \beta < 0$, focus atractor.

1.5.4 Retrats de fase

Tot resumint, posant també alguns casos degenerats ($\lambda_1 = 0$ o bé $\lambda_2 = 0$), tenim que els diferents comportaments dels sistemes lineals a coeficients constants al pla són:



1.5.5 Classificació de sistemes lineals homogenis al pla

Per acabar aquesta secció dedicada als sistemes al pla, donem una alternativa ràpida per saber de quin tipus de punt d'equilibri és l'origen només calculant la $\operatorname{tr} A$ i el $\det A$.

Proposició 1.36 *Sigui $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considerem el sistema $\dot{x} = Ax$. Anomenem*

$$D(A) = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A.$$

Llavors l'origen és un punt d'equilibri de tipus

i) Sella si $\det A < 0$.

ii) Node si $\det A > 0$ *i* $D(A) \geq 0$. *És atractor si* $\operatorname{tr} A < 0$ *i repulsor si* $\operatorname{tr} A > 0$. *A més, el node és impropi si* $D(A) = 0$ *i* $A \neq \lambda \operatorname{Id}$, *és a dir, A no diagonalitza.*

iii) Centre si $\operatorname{tr} A = 0$ *i* $\det A > 0$.

iv) Focus si $D(A) < 0$ i $\operatorname{tr} A \neq 0$. A més és atractor si $\operatorname{tr} A < 0$ i repulsor si $\operatorname{tr} A > 0$.

Demostració. Tal com hem vist a les seccions anteriors, l'origen és de tipus sella, node, centre o focus depenent dels valors propis λ_1, λ_2 de la matriu A:

i) Sella si $\lambda_1\lambda_2 < 0$.

ii) Node si $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ i A no diagonalitza llavors tenim un node impropi. Si $\lambda_1 > 0$, diem que és un node repulsor i sino diem que és un node atractor.

iii) Centre si $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\beta$.

iv) Focus quan $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$, amb $\alpha \neq 0$. Quan $\alpha > 0$ diem que és un focus repulsor i quan $\alpha < 0$ diem que és un focus atractor.

És ben conegut que el polinomi característic de la matriu A és

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A$$

i per tant els valors propis de A són

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A}}{2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{D(A)}}{2}.$$

Ara la demostració és un exercici senzill. ■

Aquest tipus de resultats van bé sobretot quan es volen estudiar sistemes que depenen de paràmetres. Per exemple,

$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x.$$

Calculem

$$\operatorname{tr} A = a + 3, \qquad \det A = 3a + 2, \qquad D(A) = (a+3)^2 - 4(3a+2) = a^2 - 6a + 1.$$

Observem que $D(A) = (a - a_-)(a - a+)$ amb $a_\pm = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Llavors, l'origen és de tipus

i) Sella quan $3a + 2 < 0$.

ii) Node quan $3a + 2 > 0$ i $D(A) = (a - a_-)(a - a+) \geq 0$. Com $2/3 \in (a_-, a_+)$, cal $a \in (2/3, a_-] \cup [a_+, +\infty)$. Impropi quan $a = a_\pm$. A més $\operatorname{tr} A = a + 3 > 0$ i per tant sempre serà repulsor.

iii) Podria ser un centre si $\operatorname{tr} A = a + 3 = 0$, és a dir, si $a = -3$. Però en aquest cas $\det A < 0$ i per tant no pot ser un centre.

iv) Pot ser un focus si $D(A) < 0$, és a dir quan $a \in (a_-, a_+)$. En aquest cas a més $\operatorname{tr} A = a + 3 > 0$ i per tant sempre serà repulsor.

1.6 Matrius fonamentals per equacions lineals homogènies

L'objectiu d'aquesta secció és demostrar la existència de matrius fonamentals per equacions lineals homogènies com l'equació (1.10):

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \mathcal{C}^r,\ r \geq 0. \tag{1.16}$$

Per fer-ho, de fet, veurem que el P.V.I.:

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1.17}$$

té solució única definida a l'interval I per cada $t_0 \in I$ i per cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

L'eina més potent que farem servir en aquesta secció és el teorema del punt fix de Banach que passem a repassar a la secció següent.

1.6.1 Teorema del punt fix de Banach

La primera definició és la d'espai de Banach:

Definició 1.37 (Espai de Banach) *Un espai normat $(E, \|\cdot\|)$ diem que és de Banach si és complert, és a dir, si tota successió de Cauchy és convergent.*

Així tenim que:

1. $E = \mathbb{R}^n$ i les normes típiques:

   $$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

   i de fet moltes més, són de Banach.

2. $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$, l'espai de les funcions contínues $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ amb la norma del suprem

   $$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} \|f(x)\|.$$

   és de Banach. Observeu que si $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$, llavors $\|f\|_\infty < \infty$.

3. $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^n)$ amb la norma amb pes

   $$\|f\|_\beta = \max_{x\in[a,b]} \|f(x)\,\mathrm{e}^{\beta x}\|,$$

   essent $\beta \in \mathbb{R}$ també és de Banach.

4. De fet, si $w : [a,b] \to \mathbb{R}$, és contínua i $w(x) > 0$, llavors amb la norma

$$\|f\|_w = \max_{x\in[a,b]} \|f(x)w(x)\|$$

l'espai $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ és també de Banach.

5. Ara bé $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ (entenent que tenim derivades laterals a a i b) amb la norma del suprem no és de Banach. Però sí que ho és si considerem la norma

$$\|f\|_\infty^1 = \max_{x\in[a,b]} \|f(x)\| + \max_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|.$$

Exercici 1.38 *Demostreu les afirmacions anteriors*

Definició 1.39 (Punt fix) *Sigui $X \subset E$ amb E un espai mètric i $F : X \to X$. Diem que p és un punt fix de F si*

$$F(p) = p.$$

Diem que p és un atractor global si

$$\forall x \in X, \qquad \lim_{n\to\infty} F^n(x) = p.$$

La última definició que necessitem és:

Definició 1.40 (Aplicació contractiva) *Sigui E un espai normat i $F : X \subset E \to X$. Diem que F és contractiva si existeix $L \in [0,1)$ tal que*

$$\forall x, y, \in X, \qquad \|F(x) - F(y)\| \le L\|x - y\|.$$

També diem que F és L-contractiva quan volem indicar la constant.

Ara ja estem en condicions d'enunciar i demostrar el teorema del punt fix de Banach.

Teorema 1.41 *Sigui $(E, \|\cdot\|)$ un espai de Banach, $X \subset E$ un subconjunt tancat de E i $F : X \to X$ una aplicació L-contractiva. Llavors existeix un únic punt fix $x_* \in X$ de F i satisfà:*

$$\|F^n(x) - x_*\| \le \frac{L^n}{1-L}\|F(x) - x\|.$$

Demostració. Demostrem primer la unicitat. Suposem que tenim dos punts fixos x_1, x_2 diferents. Llavors

$$\|x_1 - x_2\| = \|F(x_1) - F(x_2)\| \le L\|x_1 - x_2\| < \|x_1 - x_2\|$$

i per tant contradicció.

Ara veiem la existència. El primer que farem és veure que per a qualsevol punt $x \in X$ la successió

$$x_n = F^n(x), \qquad n \geq 0$$

és de Cauchy. Llavors, com E és complert, la successió $\{x_n\}_n$ serà convergent. A més com X és tancat aquest límit pertany a X. D'aquesta manera ja haurem vist la existència d'un únic punt fix x_*.

Anem a veure dons que la successió $\{x_n\}_n$ és de Cauchy si $x = x_0 \in X$. Observeu que trivialment:

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq L\|x_{k-1} - x_{k-2}\| \leq L^{k-1}\|x_1 - x_0\|.$$

Per tant, per $n \geq m$:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_{n-1}\| + \cdots + \|x_{m+1} - x_m\| &\leq \sum_{j=m}^{n-1} L^j \|x_1 - x_0\| \\ = L^m \frac{1 - L^{n-m}}{1 - L}\|x_1 - x_0\| &\leq \frac{L^m}{1 - L}\|x_1 - x_0\|. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Així és clar que la successió és de Cauchy i per tant convergent. Sigui

$$x_a st = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Prenent $n \to \infty$ a la desigualtat (1.18), obtenim

$$\|x_* - x_m\| \leq \frac{L^m}{1 - L}\|x_1 - x_0\| \Longleftrightarrow \|x_* - F^m(x)\| \leq \frac{L^m}{1 - L}\|F(x) - x\|$$

ja que $x_0 = x$.

Per últim, al ser F contínua de la igualtat $x_{n+1} = F(x_n)$ deduïm, prenent límits $n \to \infty$ a banda i banda que $x_* = F(x_*)$. ■

1.6.2 Existència i unicitat de solucions per equacions lineals homogènies

Demostrarem que el P.V.I. (1.17) té solució. L'enunciat concret del resultat és el següent:

Teorema 1.42 *Sigui $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $A : I \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una funció $\mathcal{C}^r(I)$, ≥ 0. Llavors per a tot $t_0 \in I$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de Cauchy*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

té solució única $x : I \to \mathbb{R}^n$, definida a tot I i $\mathcal{C}^{r+1}(I)$.

Demostració. Fixem $t_0 \in I$,$x_0 \in \mathbb{R}^n$, una norma $\|\cdot\|$ a $\mathbb{R}^n$ i un interval compacte $[a,b] \subset I$ tal que $t_{\in} I$.

1. **Reformulació del problema de Cauchy**. Una funció x és solució del problema de Cauchy $\dot{x} = A(t)x$, $x(t_0) = x_0$ si i només si

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\,ds. \tag{1.19}$$

   Demanem que x sigui contínua en $[a,b]$ perquè només busquem solucions $\mathcal{C}^1$.

2. **Espais de Banach**. L'espai de funcions en el que treballarem serà

$$E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n) = \{h : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \text{ contínua}\}.$$

   És cómode considerar una norma amb pes. Concretament, per $\beta < 0$ (que determinarem després), definim la norma:

$$\|h\|_\beta = \max_{t\in[a,b]} \|h(t)e^{\beta|t-t_0|}\|.$$

   Ja havíem comentat que $(E, \|\cdot\|)$ és un espai de Banach.

3. **Reformulació del teorema com una equació de punt fix**. Aquest apartat és semblant al primer, però una mica més sofisticat. Definim el funcional:

$$\mathcal{F}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\,ds.$$

   Està clar que l'equació (1.19) és equivalent a $x(t) = \mathcal{F}(x)(t)$. Per tal el que ens caldrà és veure que $\mathcal{F} : E \to E$ és una aplicació contractiva ja que llavors, pel teorema del punt fix, existeix una única solució $x \in E$ de l'equació de punt fix $x = \mathcal{F}(x)$. Així:

   (a) $x \in E$, vol dir que és contínua a l'interval $[a,b]$ i per tant,

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\,ds$$

   és $\mathcal{C}^1$. Així $x = \mathcal{F}(x)$ és $\mathcal{C}^1$ i per inducció $\mathcal{C}^{r+1}$ ja que $A : [a,b] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ és $\mathcal{C}^r$.

   (b) Clarament $x(t_0) = x_0$.

(c) Ens queda per veure que x està definida a l'interval I inicial i és $\mathcal{C}^{r+1}$. Escrivim
$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n], \qquad t_0 \in [a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}].$$
Tenim que per cada $n \in \mathbb{N}$ existeix una única $x_n : [a_n, b_n] \to \mathbb{R}^n$ solució $\mathcal{C}^{r+1}([a_n, b_n])$, del problema de Cauchy
$$x_n = \mathcal{F}(x_n), \qquad x_n(t_0) = x_0.$$
Definim la funció $x : I \to \mathbb{R}^n$ com
$$x(t) = x_n(t), \qquad \text{si } t \in [a_n, b_n].$$
Llavors

i. La funció $x : I \to \mathbb{R}^n$ està ben definida per unicitat de solucions, és a dir, $t \in [a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$, $x(t) = x_m(t) = x_n(t)$.

ii. x és $\mathcal{C}^{r+1}(I)$ perquè x_n ho són.

iii. x és solució de $\dot{x} = A(t)x$, $x(t_0) = x_0$.

Per tant només ens queda per demostrar:

4. **El funcional $\mathcal{F}$ és contractiu a X.** Notem que està clar que $\mathcal{F} : E \to E$ està ben definit, és a dir:
$$x \in E \Longrightarrow \mathcal{F}(x) \in E.$$
Ara només queda per veure que $\mathcal{F}$ és contractiva, i.e, per alguna $\beta \in \mathbb{R}$ (que de fet triarem $\beta < 0$) , existeix $L \in [0, 1)$ tal que $\forall x_1, x_2 \in E$
$$\|\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2)\|_\beta \leq L\|x_1 - x_2\|_\beta.$$
Sigui $t \in [a, b]$,
$$\|(\mathcal{F}(x_1)(t) - \mathcal{F}(x_2)(t))e^{\beta|t-t_0|}\| \leq \left| e^{\beta|t-t_0|} \int_{t_0}^{t} \|A(s)\big(x_1(s) - x_2(s)\big)\|\, ds. \right|$$
D'una banda, anomenant
$$K = \sup_{s\in[a,b]} \|A(s)\|,$$
tenim que
$$\|A(s)\big(x_1(s) - x_2(s)\big)\| \leq \sup_{s\in[a,b]} \|A(s)\|\|x_1(s) - x_2(s)\| \leq K\|x_1(s) - x_2(s)\|.$$

D'altre banda $\|x_1(s) - x_2(s)\| \le e^{-\beta|s-t_0|}\|x_1 - x_2\|_\beta$. Per tant

$$\|A(s)\big(x_1(s) - x_2(s)\big)\| \le Ke^{-\beta|s-t_0|}\|x_1 - x_2\|_\beta$$

i llavors tenim que

$$\|(\mathcal{F}(x_1)(t) - \mathcal{F}(x_2)(t))e^{\beta|t-t_0|}\| \le K\|x_1 - x_2\|_\beta \left| \int_{t_0}^{t} e^{\beta|t-t_0|} e^{-\beta|s-t_0|}\, ds \right|. \quad (1.20)$$

Veiem que, si $\beta < 0$:

$$\left| \int_{t_0}^{t} e^{\beta|t-t_0|} e^{-\beta|s-t_0|}\, ds \right| \le \frac{1}{|\beta|}. \quad (1.21)$$

En efecte, d'una banda, si $t \ge t_0$, llavors:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^{t} e^{\beta|t-t_0|} e^{-\beta|s-t_0|}\, ds \right| &= \int_{t_0}^{t} e^{\beta(t-t_0)-\beta(s-t_0)}\, ds = \int_{t_0}^{t} e^{\beta(t-s)}\, ds = -\frac{1}{\beta}(1 - e^{\beta(t-t_0)}) \\ &\le \frac{1}{|\beta|}. \end{aligned}$$

Si pel contrari $t \le t_0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^{t} e^{\beta|t-t_0|} e^{-\beta|s-t_0|}\, ds \right| &= \int_{t}^{t_0} e^{\beta(t_0-t)-\beta(t_0-s)}\, ds = \int_{t}^{t_0} e^{\beta(s-t)}\, ds = \frac{1}{\beta}(e^{\beta(t_0-t)} - 1) \\ &\le \frac{1}{|\beta|}. \end{aligned}$$

En qualsevol cas, la cota (1.21) està demostrada. Llavors, utilitzant-la a (1.20):

$$\|(\mathcal{F}(x_1)(t) - \mathcal{F}(x_2)(t))e^{\beta|t-t_0|}\| \le K\|x_1 - x_2\|_\beta \frac{1}{|\beta|}$$

i prenent el màxim sobre els $t \in [a, b]$:

$$\|\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2)\|_\beta \le K\|x_1 - x_2\|_\beta \frac{1}{|\beta|}.$$

Agafem dons β tal que $L := K/|\beta| < 1$ i concluïm que $\mathcal{F}$ és L-contractiva a E.

$\blacksquare$

1.6.3 Estructura de les solucions. Matrius fonamentals

Una forma de dir que els sistemes homogenis $\dot{x} = A(t)x$ tenen matrius fonamentals és la següent:

Proposició 1.43 *Considerem $\dot{x} = A(t)x$ amb $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ i el conjunt*

$$\mathcal{X} = \{x : I \to \mathbb{R}^n, \ \ \textit{una solució de } \dot{x} = A(t)x\}$$

de totes les solucions.

Per cada $t_0 \in I$ definim l'aplicació:

$$\begin{aligned} \Gamma_{t_0} :& \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n \\ & x \longmapsto x(t_0) \end{aligned}$$

(és a dir, considerem la solució avaluada en t_0).

Llavors per cada $t_0 \in I$, Γ_{t_0} és un isomorfisme. Com a conseqüència

$$\dim \mathcal{X} = n$$

i si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ és una base de $\mathbb{R}^n$ i $t_0 \in I$, llavors

$$\{\varphi(t; t_0, v_1), \cdots, \varphi(t; t_0, v_n)\}$$

és una base de $\mathcal{X}$.

És clar dons que

$$M(t) = \begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi(t; t_0, v_1) & \cdots & \varphi(t; t_0, v_n) \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

és una matriu fonamental de $\dot{x} = A(t)x$.

Demostració. La demostració és en realitat molt senzilla. En efecte, pel principi de superposició (proposició 1.8) $\mathcal{X}$ és un espai vectorial. A més clarament Γ_{t_0} és una aplicació lineal. La injectivitat prové de la unicitat de les solucions. En efecte, si $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ tals que $\Gamma_{t_0}(x_1) = \Gamma_{t_0}(x_1)$, llavors $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ i per tant $x_1(t) = x_2(t)$, pel teorema 1.42. La exhaustivitat també es dedueix del teorema 1.42, ja que per a qualsevol $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existeix $x \in \mathcal{X}$ tal que $x(t_0) = x_0$.

Si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ és una base de $\mathbb{R}^n$,

$$\varphi(t; t_0, v_j) = \Gamma_{t_0}^{-1}(v_j),$$

i per tant $\{\varphi(t;t_0,v_1),\cdots,\varphi(t;t_0,v_n)\}$ és una base de $\mathcal{X}$. Amb això acabem la demostració. ■

La proposició 1.14 és per tant certa per a tots els sistemes lineals

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

ja que l'existència de matrius fonamentals està garantida. Concretament:

Proposició 1.44 *L'equació diferencial $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ té associat un flux, és a dir, una aplicació $\varphi : I \times I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\frac{d}{dt}\varphi(t;t_0,x_0) = A(t)\varphi(t;t_0,x_0) + b(t), \qquad \varphi(t_0;t_0,x_0) = x_0$$

i té la forma escrita a la proposició 1.14.

A més, per a cada $t_1,t_2,t_3 \in I$ i $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(t_1;t_2,\varphi(t_2,t_3,x_0)) = \varphi(t_1,t_3,x_0).$$

A més $\phi_{t_1,t_2} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida per $\phi_{t_1,t_2}(x_0) = \varphi(t_1;t_2,x_0)$ és bijectiva.

Demostració. Feu-la com exercici. ■

1.6.4 El Teorema de Liouville

El teorema de Liouville ens permetrà calcular l'evolució d'un volum al llarg de les solucions d'un sistema d'equacions lineals (no necessàriament homogènies).

La part més difícil de demostrar és el següent resultat:

Teorema 1.45 *Sigui $X(t)$ una solució matricial d'un sistema lineal homogeni $\dot{x} = A(t)x$ amb $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$.*

Llavors per a tot $t, t_0 \in I$,

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds.\right)$$

Demostració. Escrivim la solució matricial per fileres i per columnes, és a dir:

$$X(t) = \big((x_{ij}(t)\big)_{i,j} = \begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1(t) & \cdots & x_n(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \tilde{x}_1^t(t) & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \tilde{x}_n^t(t) & \cdots \end{pmatrix}.$$

i definim

$$d(t) = \det X(t) = \det(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = \det(\tilde{x}_1(t), \cdots, \tilde{x}_n(t)).$$

És clar que, per la multilinealitat del determinant

$$\dot{d}(t) = \sum_{i=1}^{n} \det(\tilde{x}_1(t), \cdots, \dot{\tilde{x}}_i(t), \cdots, \tilde{x}_n(t)).$$

Escrivim ara la igualtat $\dot{X} = A(t)X$ per fileres. És clar que les fileres de $A(t)X$ són

$$\dot{\tilde{x}}_i(t) = a_i^t(t)X(t), \qquad i = 1, \cdots, n,$$

essent $a_i^t(t)$, $i = 1, \cdots, r$ les fileres de la matriu $A(t)$. Més encara:

$$\dot{\tilde{x}}_i = a_i^t(t)X(t) = (a_i^t(t)x_1(t), \cdots, a_i^t(t)x_n(t))$$

i per tant

$$\det(\tilde{x}_1(t), \cdots, \dot{\tilde{x}}_i(t), \cdots, \tilde{x}_n(t)) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & a_i^t(t)x_1(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1n}(t) & \cdots & a_i^t(t)x_n(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Com $a_i^t(t)x_j(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kj}(t)$,

$$\begin{aligned} \det(\tilde{x}_1(t), \cdots, \dot{\tilde{x}}_i(t), \cdots, \tilde{x}_n(t)) = & \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{k1}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{1n}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kn}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \\ =& a_{ii}(t) \det(\tilde{x}_1(t), \cdots, \tilde{x}_i(t), \cdots, \tilde{x}_n(t)) \\ =& a_{ii}(t)d(t). \end{aligned}$$

Així tenim que

$$\dot{d}(t) = \big(\operatorname{tr} A(t)\big)d(t)$$

i per tant, la proposició 1.3 conclou. ■

Com a corol.lari

Corol·lari 1.46 *Sigui $X(t)$ una solució matricial d'un sistema lineal homogeni $\dot{x} = A(t)x$ amb $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$.*

Llavors

$$\exists t_0 \in I, \ \ \det X(t_0) = 0, \iff \forall t \in I, \ \ \det X(t) = 0.$$

Enunciem i demostrem el teorema de Liouville sobre l'evolució del volum d'un conjunt per un flux lineal. Denotarem per $\mathrm{vol}(V)$ el volum d'un conjunt V.

Teorema 1.47 *Sigui $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b : I \subset T \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$. Considerem el sistema lineal*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t).$$

Sigui $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt. Per a tot $t, t_0 \in I$ definim

$$V_{t,t_0} = \{\varphi(t; t_0, x_0),\ x_0 \in V\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Llavors

$$\mathrm{vol}(V_{t,t_0}) = \mathrm{vol}(V) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\, A(s)\, ds\right).$$

En particular si A és una matriu constant:

$$\mathrm{vol}(V_{t,t_0}) = \mathrm{vol}(V)\, \mathrm{e}^{(t-t_0)\,\mathrm{tr}\, A}\,.$$

Demostració. És clar que

$$\mathrm{vol}(V_{t,t_0}) = \int_{V_{t,t_0}} 1\, dy.$$

La proposició 1.44 ens assegura que el canvi de variable:

$$y = \varphi(t; t_0, x_0)$$

està ben definit. Llavors:

$$\mathrm{vol}(V_{t,t_0}) = \int_V |\det D_{x_0}\varphi(t; t_0, x)|\, dx.$$

Sigui $M(t)$ la matriu fonamental del sistema homogeni $\dot{x} = A(t)x$ tal que $M(t_0) = \mathrm{Id}$. Llavors, per la proposició 1.44 (o aplicant la proposició 1.14):

$$D_{x_0}\varphi(t; t_0, x_0) = M(t)$$

i per tant, aplicant el teorema 1.45

$$\mathrm{vol}(V_{t,t_0}) = |\det M(t)| \int_V 1\, dx = \mathrm{vol}(V) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\, A(s)\, ds\right).$$

■

1.7 Equacions lineals amb coeficents periòdics

Considerem equacions

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{1.22}$$

amb $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$ i

$$A(t+T) = A(t), \qquad b(t+T) = b(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

essent $T > 0$.

El resultat principal que diferencia les equacions lineals amb coeficients periòdics de la resta d'equacions lineals és:

Proposició 1.48 *Si $x(t)$ és una solució de* (1.22) *amb A, b T-periòdiques. Llavors $\hat{x}(t) := x(t+T)$ és també solució.*

Demostració. Només cal derivar $\hat{x}$ i tenir en compte que A, b són T-periòdiques:

$$\dot{\hat{x}} = \dot{x}(t+T) = A(t+T)x(t+T) + b(t+T) = A(t)\hat{x}(t) + b(t).$$

■

A partir d'aquest resultat deduïm que:

Corol·lari 1.49 *Si $M(t)$ és una matriu fonamental de $x' = A(t)x$ amb A T-periòdica, llavors*

$$M(t+T) = M(t)C_M, \qquad C_M \in \mathcal{M}_{n\times n},$$

essent C_M una matriu constant, que depén de M. De fet

$$C_M = M(T)[M(0)]^{-1}.$$

A més si M i $\widehat{M}$ són dues matrius de monodromia, C_M i $C_{\widehat{M}}$ són similars, és a dir,

$$C_M = PC_{\widehat{M}}P^{-1}, \qquad P \text{ matriu invertible constant.}$$

Demostració. És clar per la proposició 1.48, si $M(t)$ és matriu fonamental també ho serà $\widetilde{M}(t) := M(t+T)$ i ja sabem que dues matrius fonamentals estan relacionades per una matriu constant (veieu el corol·lari 1.13). Per tant l'existència de C_M constant està garantida i la fórmula $C_M = M(T)[M(0)]^{-1}$ és conseqüència directa de la definició.

D'altra banda, siguin $C_{\widehat{M}}, C_M$ són matrius de monodromia associades a matrius fonamental $M, \widehat{M}$. Com $\hat{M}(t) = M(t)P$ amb P matriu constant invertible,

$$M(t+t)P = \widehat{M}(t+T) = \widehat{M}(t)C_{\widehat{M}} = M(t)PC_{\hat{M}} \Longrightarrow M(t+t) = M(t)PC_{\widehat{M}}P^{-1}$$

i per tant $C_M = PC_{\widehat{M}}P^{-1}$. ■

Així la següent definició té sentit:

Definició 1.50 *Sigui $\dot{x} = A(t)x$ un sistema lineal T- periòdic. Definim els multiplicadors característics com els valors propis de qualsevol matriu de monodromia.*

1.7.1 Teoria de Floquet

Aquesta teoria ens descriu com són les matrius fonamentals dels sistemes lineals periòdics i a més ens prova que, mitjançant un canvi de variables adequat (tot i que sovint desconegut) podem escriure aquestes equacions com equacions lineals a coeficients constants. El resultat més important és el següent:

Teorema 1.51 *Sigui $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$, T-periòdica. Tota matriu fonamental, $M(t)$, del sistema lineal $\dot{x} = A(t)x$ es pot escriure:*

$$M(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{Bt}, \qquad P(t+T) = P(t),\ \ B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}),\ \textit{tal que}\ \mathrm{e}^{BT} = C_M.$$

Per demostrar-ho necessitem primer un lema tècnic:

Lema 1.52 *Sigui $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ amb $\det C \neq 0$. Llavors existeix una matriu $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $\mathrm{e}^B = C$.*

De fet si $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ és una matriu real, la matriu B serà (en general) complexa.

Demostració. Observem primer que només cal calcular B en el cas que C tingui la forma d'un bloc de Jordan. En efecte, primer notem que si tenim una matriu J en forma de Jordan amb blocs $J_1, \cdots, J_r$ i sabem calcular B_i tals que $J_i = e^{B_i}$, llavors

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_r \end{pmatrix}$$

satisfà $\mathrm{e}^{\widetilde{B}} = J$. Llavors

$$C = PJP^{-1} = P\,\mathrm{e}^{\widetilde{B}}\,P^{-1} = \mathrm{e}^{P\widetilde{B}P^{-1}}$$

i per tant $B = P\widetilde{B}P^{-1}$ resol el problema.

Per tant fem el cas $C = \lambda\,\mathrm{Id}$ o bé $C = \lambda\,\mathrm{Id} + N$ amb N matriu nilpotent $N^n = 0$.

Clarament, si $C = \lambda\,\mathrm{Id}$, agafant $B = [\log\lambda]\,\mathrm{Id}$ tenim que $C = \mathrm{e}^B$ i en aquest cas ja estem. Si $C = \lambda\,\mathrm{Id} + N$, ens inspirem en el fet que

$$\log(\lambda + x) = \log\lambda + \log\left(1 + \frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k\geq 1}(-1)^k \frac{x^k}{k\lambda^k}$$

per definir

$$B = [\log\lambda]\,\mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{k\lambda^k} N^k$$

aprofitant el fet que $N^n = 0$.

Com la igualtat $\lambda + x = e^{\log(\lambda+x)}$ també es satisfà amb les sèries, ja sabem que:

$$\lambda + x = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\left(\log\lambda + \sum_{l\geq 1}(-1)^j \frac{x^j}{j\lambda^j}\right) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$$

i per tant, com $\lambda \operatorname{Id}$ i N conmuten:

$$\mathrm{e}^B = \sum_{k\geq 0} a_k N^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k N^k = \lambda \operatorname{Id} + N.$$

■

Final de la prova del teorema 1.51. Sigui $M(t)$ una matriu fonamental. Pel lema anterior, existeix B tal que $\mathrm{e}^{BT} = C_M$ amb C_M la matriu de monodromia. Llavors, $P(t) := M(t)\,\mathrm{e}^{-Bt}$ satisfà:

$$P(t+T) = M(t+T)\,\mathrm{e}^{-B(t+T)} = M(t)C_M\,\mathrm{e}^{-BT}\,\mathrm{e}^{-Bt} = M(t)\,\mathrm{e}^{-Bt} = P(t).$$

■

Com a corol·lari d'aquest resultat tenim que podem reduir un sistema lineal a coeficients periòdics a un a coeficients constants:

Corol·lari 1.53 *Sigui $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$, T-periòdica. Llavors $x(t)$ és solució de $\dot{x} = A(t)x$ si i només si $y(t) = [P(t)]^{-1}x(t)$ és solució de $\dot{y} = By$.*

A més si $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, llavors $\dot{y} = By + [P(t)]^{-1}b(t)$.

Demostració. Sigui $M(t)$ una matriu fonamental del sistema $\dot{x} = A(t)x$. $x(t)$ és solució de $\dot{x}$ si i només si existeix un vector constant $c \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x(t) = M(t)c = P(t)\,\mathrm{e}^{Bt}\,c.$$

Com $x(t) = P(t)y(t)$, tenim que $y(t) = \mathrm{e}^{Bt}\,c$ que és, trivialment, solució de $\dot{y} = By$. L'argument a la inversa també és vàlid.

Finalment, si $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, llavors les solucions són de la forma

$$x(t) = M(t)\left[c + \int [M(s)]^{-1}b(s)\,ds\right] = P(t)\,\mathrm{e}^{Bt}\left[c + \int \mathrm{e}^{-Bs}[P(s)]^{-1}b(s)\,ds\right].$$

Per tant

$$y(t) = [P(t)]^{-1}x(t) = \mathrm{e}^{Bt}\left[c + \int \mathrm{e}^{-Bs}[P(s)]^{-1}b(s)\,ds\right]$$

és solució de $\dot{y} = By + [P(t)]^{-1}b(t)$. ■

Definició 1.54 *Sigui $\dot{x} = A(t)x$ un sistema lineal i $M(t)$ una matriu fonamental. Definim els exponents característics com els valors propis de qualsevol matriu B satisfent $\mathrm{e}^{BT} = C_M$.*

Observació 1.55 *Noteu que els exponents caracterísitics estan definits excepte múltiples sencers de $\frac{2\pi i}{T}$. En efecte, si B satisfà $\mathrm{e}^{BT} = C_M$, llavors*

$$\mathrm{e}^{\left(B+\frac{2\pi ik}{T}\,\mathrm{Id}\right)T} = C_M, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Per tant si λ_j és un multiplicador característic, $\lambda_j = \mathrm{e}^{T\mu_j}$ amb $\mu_j = \frac{1}{T}\left(\log \lambda_j + 2\pi ik\right)$, amb $k \in \mathbb{Z}$.

Per acabar, enunciem un resultat, conseqüència del Teorema de Liouville:

Proposició 1.56 *Sigui $\dot{x} = A(t)x$ un sistema lineal T-periòdic continu. Siguin $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ els multiplicadors característics. Llavors*

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = exp\left(\int_0^T \mathrm{tr}\, A(s)\, ds\right).$$

Demostració. Sigui $M(t)$ la matriu fonamental tal que $M(0) = \mathrm{Id}$. Llavors:

$$C_M = M(T).$$

Per la fórmula de Liouville

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det C_M = \det M(T) = \exp\left(\int_0^T \mathrm{tr}\, A(s)\, ds\right).$$

■

1.8 Estabilitat de sistemes lineals. Cas constant i periódic

Considerem un sistema lineal homogeni

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad A(t+T) = A(t), \text{ o bé } A \text{ constant.}$$

Està clar que

- Les solucions estan definides $\forall t \in \mathbb{R}$. Per tant té sentit preguntar-se per

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = ?$$

- Està clar que $x \equiv 0$ és solució del sistema lineal.

Podem dir alguna cosa sobre el comportament qualitatiu quan $t \to \pm\infty$ de *totes* les solucions? A vegades:

Definició 1.57 *Diem que el sistema $\dot{x} = A(t)x$ amb $A(t+T) = A(t)$ o constant és*

- ***Repulsor****. Quan totes les solucions excepte la solució trivial ($x \equiv 0$) satisfà*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty.$$

- ***Atractor*** *(o assimptòticament estable). Si totes les solucions satisfan*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0.$$

- ***Estable****. Si totes les solucions estan acotades per a tot $t \in \mathbb{R}$.*

- ***Inestable****. Si existeix una solució $x(t)$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty.$$

Observació 1.58 *Observeu que si existeix alguna solució $x(t) = c \in \mathbb{R}^n$ constant no nul·la, llavors el sistema no pot ser ni atractor ni repulsor.*

És important destacar que, els vectors propis de matrius senyalades, juguen un paper important a l'hora de trobar solucions. En concret tenim que:

Proposició 1.59 *Considerem*

1. *$\dot{x} = Ax$, amb A una matriu constant. Sigui v un vector propi de valor propi λ. Llavors*
$$x(t) = \varphi(t; 0, v) = \mathrm{e}^{tA}\, v = \mathrm{e}^{\lambda t}\, v$$

2. *$\dot{x} = A(t)x$, amb $A(t+T) = A(t)$ una matriu periòdica. Sigui v un vector propi de valor propi λ d'una matriu de monodromia C_M associada a una matriu fonamental $M(t)$. Llavors $x(t) = M(t)v$ satisfà*
$$x(t+T) = \lambda x(t).$$
En particular, una solució de $\dot{x} = A(t)x$ és T-periòdica si i només si $x(t) = \varphi(t; t_0, v)$ amb v un vector propi de valor propi 1 d'una matriu de monodromia.

Demostració. El primer ítem és immediat. Anem a veure el segon. Fixem $M(t)$ una matriu fonamental i considerem C_M la seva matriu de monodromia. Llavors

$$x(t+T) = M(t+T)v = M(t)C_M v = \lambda M(t)v.$$

És clar que si una matriu de monodromia té el valor propi 1, llavors $x(t) = M(t)v$ és periòdica si v és vector propi de valor propi 1. L'altra implicació també és veritat ja que, si una solució $x(t)$ és periòdica, d'una banda tenim que $x(t) = M(t)c$ amb $c \in \mathbb{R}^n$ un vector constant, a més, com $x(t+T) = x(t)$:

$$M(t+T)c = M(t)c \Longleftrightarrow M(t)C_M c = M(t)c \Longleftrightarrow C_M c = c.$$

Per tant C_M té el valor propi 1. A la darrera implicació hem utilitzat que $M(t)$ és invertible. ■

1.8.1 Criteris d'estabilitat

Ara anem a donar les condicions necessàries per classificar l'estabilitat dels sistemes a coeficients constants i periòdics. Primer per això veurem un lema tècnic.

Lema 1.60 *Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matriu tal que tots els valors propis d'A tenen part real negativa, és a dir:*

$$\mathrm{Spec}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}.$$

Llavors, existeixen $K, \mu > 0$ tal que

$$\| \mathrm{e}^{tA} \| \le K\, \mathrm{e}^{-\mu t}, \qquad t \ge 0.$$

Demostració. La prova és molt calculística. Primer recordeu que en un espai vectorial de dimensió finita totes les normes són equivalents, és a dir: donades dues normes $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ qualsevols, existeixen constants K_1, K_2 tals que

$$K_1\|\cdot\| \le \|\cdot\|' \le K_2\|\cdot\|.$$

Per tant, és suficient comprovar el resultat per una norma determinada. Triem la norma infinit:

$$A = \max_{i=1,\cdots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad A = \big(a_{ij}\big)_{i,j}.$$

A més, com $A = PJP^{-1}$ amb J en forma de Jordan:

$$\| \mathrm{e}^{tA} \| = \| \mathrm{e}^{tPJP^{-}} \| = \|P\, \mathrm{e}^{tJ}\, P^{-1}\| \le \|P\|\|P^{-1}\|\, \| \mathrm{e}^{tJ} \|.$$

Finalment, recordeu que, si $J = \operatorname{diag}(J_1, \cdots, J_r)$, llavors

$$\mathrm{e}^{tJ} = \operatorname{diag}\left(\mathrm{e}^{tJ_1}, \cdots, \mathrm{e}^{tJ_r}\right)$$

i per tant

$$\| \mathrm{e}^{tJ} \|_\infty = \max_{i=1,\cdots,r} \| \mathrm{e}^{tJ_i} \|_\infty.$$

Així només cal estudiar la norma $\| \mathrm{e}^{tJ_i} \|_\infty$ amb J_i un bloc de Jordan. En el cas $J_i = \lambda_i \operatorname{Id}$, tenim que

$$\| \mathrm{e}^{tJ_i} \|_\infty = \| \mathrm{e}^{\lambda_i t} \operatorname{Id} \|_\infty \le \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_i t}\,. \tag{1.23}$$

En el cas $J_i = \lambda_i \operatorname{Id} + N$, recordeu que

$$\mathrm{e}^{J_i t} = \mathrm{e}^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} & \cdots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant

$$\| \mathrm{e}^{J_i} \|_\infty = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_i t} \left(1 + |t| + \frac{|t|^2}{2!} + \cdots + \frac{|t|^{r_i}}{r_i!} \right)$$

essent r_i la dimensió de J_i. Llavors, agafant

$$\mu > \max_{i=1,\cdots,n} -\operatorname{Re}\lambda_i \Longleftrightarrow \mu < \min_{i=1,\cdots,n} |\operatorname{Re}\lambda_i|$$

és clar que existeix una constant $K > 0$ tal que

$$\| \mathrm{e}^{J_i} \|_\infty \le K\, \mathrm{e}^{-\mu t}, \qquad t \ge 0.$$

Juntant aquesta cota amb (1.23) obtenim el resultat. ■

Ara ja sí donem el criteri d'estabilitat per sistemes lineals a coeficients constants i com a corol·lari, el criteri corresponent per sistemes lineals a coeficients periòdics.

Proposició 1.61 *Sigui $\dot{x} = Ax$ amb $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Llavors*

1. *Si existeix un valor propi λ d'A tal que* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *o* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *amb caixa de Jordan* $\lambda \operatorname{Id} + N$ *(no semi simple), és inestable.*

2. *Si $\forall \lambda \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$, és atractor.*

3. *Si $\forall \lambda \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, és repulsor.*

4. Si $\forall \lambda \in \operatorname{Spec} A$, $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ i quan $\operatorname{Re}\lambda = 0$ la capsa de Jordan és $\lambda \operatorname{Id}$ (semi simple), estable.

Demostració. Anem a veure cada implicació.

1. Si existeix un valor propi λ amb part real positiva, sigui v el seu vector propi associat. Llavors $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} v$ és solució de $\dot{x} = Ax$ i
$$\|x(t)\| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda t} \|v\| \to \infty, \qquad \text{si } t \to \infty.$$
Suposem ara que $\operatorname{Re}\lambda = 0$ i la capsa de Jordan associada és $\lambda \operatorname{Id} + N$. Siguin v_1, v_2 els vectors tals que
$$Av_1 = \lambda v_1, \qquad Av_2 = \lambda v_2 + v_1.$$
Llavors
$$\mathrm{e}^{At} v_2 = \mathrm{e}^{\lambda t}(v_2 + tv_1)$$
i per tant
$$\| \mathrm{e}^{At} v_2\| = \|v_2 + tv_1\| \to \infty, \qquad \text{si } t \to \infty.$$

2. En aquest cas, pel lema 1.60
$$\| \mathrm{e}^{tA} \| \leq K \mathrm{e}^{-\mu t} \to 0 \qquad , \text{si } t \to \infty$$
i per tant el resultat és clar.

3. Qualsevol solució $x(t) = \mathrm{e}^{tA} c$ amb $c \in \mathbb{R}^n$ constant. Per tant, com $c = \mathrm{e}^{-tA} x(t)$ i $-A$ té tots els valors amb part real estrictament negativa, utilitzant el lema 1.60:
$$\|c\| \leq \| \mathrm{e}^{-tA} x(t)\| \leq K \mathrm{e}^{-\mu t} \|x(t)\| \Longleftrightarrow \|c\| \mathrm{e}^{\mu t} \leq K\|x(t)\|.$$
Per tant, si $c \neq 0$ (és a dir si x no és la solució idènticament nul·la) $\|x(t)\| \to \infty$ quan $t \to \infty$.

4. Ens cal veure que totes les solucions estan acotades o equivalentment que $\| \mathrm{e}^{tA} \|$ està acotada. Clarament, és equivalent a veure que $\| \mathrm{e}^{tJ} \|$ està acotada, essent J la matriu de Jordan associada a A. Sigui $J = \operatorname{diag}(J_1, \cdots, J_r)$ i $\mathrm{e}^{tJ} = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{tJ_1}, \cdots, \mathrm{e}^{tJ_r})$. Si el bloc de Jordan està associat a un valor propi λ_i amb $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, apliquem el lema 1.60 i tenim
$$\| \mathrm{e}^{tJ_i} \| \leq K_i \mathrm{e}^{-\mu_i t}, \qquad K_i, \mu_i > 0.$$
En cas contrari, el bloc de Jordan és $J_i = \lambda_i \operatorname{Id}$ amb $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$. En aquest cas
$$\| \mathrm{e}^{tJ_i} \| = \| \mathrm{e}^{t\lambda_i} \| = 1.$$
En qualsevol dels casos $\| \mathrm{e}^{tJ_i} \|$ està acotada i per tant també ho està $\| \mathrm{e}^{tJ} \|$.

■

No ho farem però es pot veure la implicació contrària també. És a dir, la condició que hem donat sobre els valors propis és una condició necessària.

Exercici 1.62 *Demostreu el comentari anterior (no és fàcil).*

Per acabar, el criteri per sistemes lineals amb coeficients periòdics.

Corol·lari 1.63 *Sigui $\dot{x} = A(t)x$ amb $A(t+T) = A(t)$. Llavors*

1. *Si existeix un multiplicador caracterìstic λ tal que $|\lambda| > 1$ o $|\lambda| = 1$ amb caixa de Jordan (per la matriu de monodromia C_M) $\lambda \operatorname{Id} + N$ (no semi simple), és inestable.*
2. *Si $\forall \lambda$ multiplicador característic, $|\lambda| < 1$, és atractor.*
3. *Si $\forall \lambda$ mutiplicador caracterísitic, $|\lambda| > 1$, és repulsor.*
4. *Si $\forall \lambda$ mutiplicador caracterísitic $|\lambda| \leq 1$ i quan $|\lambda| = 1$ la capsa de Jordan (per la matriu de monodromia C_M) és $\lambda \operatorname{Id}$ (semi simple), és estable.*

Demostració. Només cal fer notar que si B és tal que $C_M = \mathrm{e}^{TB}$ amb C_M matriu de monodromia, llavors $x(t) = P(t)y(t)$ és solució de $\dot{x} = A(t)x$ si i només si $\dot{y} = By$ (veieu corol·lari 1.53). Com els valors propis de C_M (λ_i) i els de B (μ_i) estan relacionats per

$$\lambda_i = \mathrm{e}^{\mu_i T},$$

tenim que $|\lambda_i| < 1$ si i només si $\operatorname{Re} \mu_i < 0$ i $|\lambda_i| = 1$ si i només si $\operatorname{Re} \mu_i = 0$. Per tant el resultat és conseqüència directa de la proposició anterior i del fet que $x(t) = P(t)y(t)$ amb $P(t)$ T-periòdica. ■

1.8.2 Estabilitat d'equacions de segon ordre

Una especial atenció per les equacions

$$\ddot{x} + a(t)x = 0, \qquad a(t+T) = a(t),\ a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Les més famoses equacions d'aquest estil són l'equació de Mathiew: $a(t) = a + \varepsilon \cos(2t)$ amb $\varepsilon << 1$ i l'equació de Hill amb $a(t) = a + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \cos(2\theta_i t)$ amb $\varepsilon << 1$ i $\theta_1, \cdots, \theta_n$ fixats. Aquestes equacions sorgiren en estudiar el sistema Terra-LLuna.

Escrivim l'equació de segon grau com un sistema lineal a coeficients periòdics:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix} y := A(t)y, \qquad y = (x, \dot{x}). \tag{1.24}$$

Proposició 1.64 *Considereu el sistema* (1.24) *i sigui* C_M *una matriu de monodromia. Anomenem* $\alpha = \frac{\operatorname{tr} C_M}{2}$.

1. *Si* $|\alpha| < 1$, *el sistema és estable no atractor.*
2. *Si* $|\alpha| > 1$, *el sistema és inestable.*
3. *Si* $|\alpha| = 1$ *i* C_M *diagonalitza, el sistema és estable.*
4. *Si* $|\alpha| = 1$ *i* C_M *no diagonalitza, el sistema és inestable.*
5. *Si* $\alpha = 1$, *tenim com a mínim una òrbita periòdica de període* T.
6. *Si* $\alpha = -1$, *tenim com a mínim una òrbita periòdica de període* $2T$.

Demostració. Recordeu que per la fòrmula de Liouville:

$$\det M(T) = \det M(0) \exp\left(\int_0^T \operatorname{tr} A(s)\, ds\right) = \det M(0)$$

si $M(t)$ és una matriu fonamental de $\dot{y} = A(t)y$. Així agafant

$$C_M = M(T)[M(0)]^{-1},$$

matriu de monodromia, tenim que $\det C_M = 1$. Per tant si λ_1, λ_2 són els multiplicadors característics

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1.$$

Anomenem

$$\alpha = \frac{\operatorname{tr} C_M}{2} \in \mathbb{R}.$$

Llavors el polinomi característic de C_M és

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 \Longleftrightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Ara anem a distingir els cassos:

1. Si $|\alpha| < 1$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ són complexos conjugats, per tant com

   $$1 = \lambda_1 \lambda_2 = |\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2.$$

   Com C_M diagonalitza, el corol·lari 1.63 ens assegura que és estable i clarament no atractor.

2. Si $|\alpha| > 1$, els valors propis són reals. Com el seu producte és 1, ha d'haver-hi un valor propi de mòdul més gran estricte que 1. Per tant inestable.

3. Si $|\alpha| = 1$ (que és equivalent a $\alpha = \pm 1$) i C_M diagonalitza, llavors $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, valor propi doble. Llavors, utilitzant altre cop el corol·lari 1.63 tenim que és estable.

4. Si $\alpha = \pm 1$ i C_M no diagonalitza, el sistema és inestable.

5. Si $\alpha = 1$, per la proposició 1.59, el sistema té una òrbita periòdica (ja que C_M té el valor propi 1).

6. Si $\alpha = -1$, C_M té el valor propi -1. Llavors per la proposició 1.59, si v és un vector propi, $x(t) = M(t)v$ satisfà:

$$x(t+T) = -x(t) \Longrightarrow x(t+2T) = -x(t+T) = x(t).$$

■

2 Teoria de Pertorbacions als Sistemes Lineals

Aquesta teoria (que de fet es pot generalitzar a equacions diferencials més generals) ens permet trobar solucions de sistemes lineals depenent d'un paràmetre petit, ε com pertorbacions de les solucions del sistema per $\varepsilon = 0$.

2.1 Context i hipòtesis

Considerem un sistema lineal no homogeni

$$\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + b(t,\varepsilon) \tag{2.1}$$

essent $A : I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ i $b : I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de la forma

$$\begin{aligned} A(t,\varepsilon) &= A_0(t) + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon^r A_r(t) + \varepsilon^r \tilde{A}_{r+1}(t,\varepsilon), \\ b(t,\varepsilon) &= b_0(t) + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon^r b_r(t) + \varepsilon^r \tilde{b}_{r+1}(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Per simplificar suposarem que I és un obert. A més les hipòtesis sobre les funcions que assumirem són:

H1 Per $i = 1, \cdots, r$, assumim que A_i, b_i, $i = 1, r$ pertanyen a $\mathcal{C}^m(I)$.

H2 Assumim que, fixat $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, les funcions $\tilde{A}_{r+1}(\cdot, \varepsilon)$ i $\tilde{b}_{r+1}(\cdot, \varepsilon)$ també pertanyen a $\mathcal{C}^m(I)$.

H3 Els restes $\tilde{A}_{r+1}$ i $\tilde{b}_{r+1}$ són $o(\varepsilon)$ uniformement sobre compactes de I. És a dir, fixat $J \subset I$ interval compacte i fixat $\eta > 0$, existeix $\varepsilon_* > 0$ (que depén de J i η) tal que
$$\max_{t \in J,\, |\varepsilon| \leq \varepsilon_*} \|\tilde{A}_{r+1}(t, \varepsilon)\| \leq \eta, \qquad \max_{t \in J,\, |\varepsilon| \leq \varepsilon_*} \|\tilde{b}_{r+1}(t, \varepsilon)\| \leq \eta.$$

2.1.1 Un apunt sobre diferenciabilitat

Noteu que com $I \subset \mathbb{R}$ és un obert i A, b són funcions $\mathcal{C}^k$ a $I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, llavors, fixat $t \in I$, pel teorema de Taylor tenim que per a tot $r \leq k$:

$$b(t, \varepsilon) = b(t, 0) + \varepsilon \partial_\varepsilon b(t, \varepsilon)_{|\varepsilon=0} + \sum_{i=2}^{r} \varepsilon^i \frac{1}{i!} \partial_\varepsilon^i b(t, \varepsilon)_{|\varepsilon=0} + R_{r+1}(t, \varepsilon)$$

amb $R_{r+1}(t, \varepsilon) = o(\varepsilon^r)$.

A més $\partial_\varepsilon^i b(t, \varepsilon)_{|\varepsilon=0}$ són $\mathcal{C}^{k-i}(I)$ per $i = 1, \cdots, r$. Per tant totes aquestes funcions són (com a mínim) $\mathcal{C}^{k-r}(I)$.

Respecte el reste $R_{r+1}(t, \varepsilon)$. Tenim que

$$R_{r+1}(t, \varepsilon) = \int_0^\varepsilon \left[\partial_\varepsilon^r b(t, u) - \partial_\varepsilon^r b(t, 0)\right] \frac{(\varepsilon - u)^{r-1}}{(r-1)!}\, du.$$

Clarament la funció $\left[\partial_\varepsilon^r b(t, u) - \partial_\varepsilon^r b(t, 0)\right]$ és contínua i per tant quan la considerem definida sobre un compacte és uniformement contínua (teorema de Heine). Així, fixats $J \subset I$ un interval compacte i $\eta > 0$, existeix un ε_* tal que

$$\|\partial_\varepsilon^r b(t, u) - \partial_\varepsilon^r b(t, 0)\| \leq \eta, \qquad \forall (t, \varepsilon) \in J \times [-\varepsilon_*, \varepsilon_*].$$

Per tant, si $t \in J$ i $|\varepsilon| \leq \varepsilon_*$:

$$\|R_{r+1}(t, \varepsilon)\| \leq \eta \int_0^\varepsilon \frac{(\varepsilon - u)^{r-1}}{(r-1)|}\, du \leq \frac{1}{r!} \eta \varepsilon^r$$

i $R_{r+1}(t, \varepsilon)/\varepsilon^r$ satisfà H3. A més, per definició, $R_{r+1}(\cdot, \varepsilon)$ és $\mathcal{C}^{k-r}(I)$.

Per les funcions matricials $A_0, \cdots, A_r$ i A_{r+1} raonem igual.

Concluim que si A, b són funcions $\mathcal{C}^k$ a $I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, llavors es satisfant les hipòtesis H1, H2, H3, però perdem diferenciabilitat respecte t ja que només podem garantir diferenciabilitat $\mathcal{C}^{k-r}(I)$.

2.2 Resultat amb demostració constructiva

Provarem el resultat descrit a la següent proposició, la demostració del qual dóna el procediment per calcular les diferents aproximacions de la solució.

Proposició 2.1 *Considerem un sistema lineal de la forma*

$$\dot{x} = A(t,\varepsilon)x + b(t,\varepsilon) \tag{2.3}$$

essent $A : I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *i* $b : I \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *de la forma* (2.2)*. Assumin les hipòtesi H1, H2, H3 de la secció anterior.*

Llavors, per a tot $t^0 \in I$ *i per a tot* $x^0 \in \mathbb{R}^n$*, la solució* $x(t,\varepsilon)$ *del sistema* (2.3) *amb condicions inicials* $x(t^0,\varepsilon) = x^0$ *té la forma*

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon^i x_i(t) + \varepsilon^r \tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon) \tag{2.4}$$

amb $x_0(t^0) = x^0$*,* $x_1(t^0) = \cdots = x_r(t^0) = 0$*,* $\tilde{x}_{r+1}(t^0,\varepsilon) = 0$ *i satisfent:*

- T1 *Per* $i = 1, \cdots, r$*,* x_i*,* $i = 1, r$ *pertanyen a* $\mathcal{C}^{m+1}(I)$*.*
- T2 *Fixat* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$*, la funció* $\tilde{x}_{r+1}(\cdot,\varepsilon)$ *també pertany a* $\mathcal{C}^{m+1}(I)$*.*
- T3 *El reste* $\tilde{x}_{r+1}$ *és* $o(\varepsilon)$ *uniformement sobre compactes de* I*. És a dir, fixat* $J \subset I$ *interval compacte i fixat* $\eta > 0$*, existeix* $\varepsilon_* > 0$ *(que depén de* J *i* η*) tal que*

$$\max_{t\in J,\, |\varepsilon|\le\varepsilon_*} \|\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)\| \le \eta.$$

Observació 2.2 *És a dir, les propietats assumides a les hipòtesis H1, H2, H3, es mantenen per les solucions.*

Demostració. La primera cosa que notem és que la forma (2.4) no ens diu molt si no es satisfan T1, T2 i T3. Així que està clar que, si no busquem bé els primers terms $x_0, x_1, \cdots, x_r$ de la solució no podrem concloure res.

Fixem $t^0 \in I$ i $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Sembla raonable plantejar el sistema (2.3) per ordres $O(\varepsilon^j)$, és a dir, igualar als dos costats del sistema els termes del mateix ordre en ε. Per això notem que

$$\left(\sum_{i=0}^{r} \varepsilon^i A_i(t)\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k x_k(t)\right) = \sum_{j=0}^{2r} \varepsilon^j \left(\sum_{k=0}^{j} A_{j-k} x_k\right),$$

on aquí denotem $A_l = 0$, $b_l = 0$ per $l \geq r+1$. Llavors

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{r} \varepsilon^j \dot{x}_j + \varepsilon^r \dot{\tilde{x}}_{r+1}(t,\varepsilon) = & \sum_{j=0}^{2r} \varepsilon^j \left(\sum_{k=0}^{j} A_{j-k} x_k \right) + \sum_{j=0}^{r} \varepsilon^j b_j \\ & + \varepsilon^r A(t,\varepsilon) \tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon) \\ & + \varepsilon^r \tilde{A}_{r+1}(t,\varepsilon) \sum_{j=0}^{r} \varepsilon^j x_j + \varepsilon^r \tilde{b}_{r+1}(t,\varepsilon)\end{aligned} \tag{2.5}$$

Imposem ara que els ordres $O(1), O(\varepsilon), \cdots, O(\varepsilon^r)$ coincideixin als dos costats de l'igualtat (2.5). Per exemple per $O(1), O(\varepsilon), O(\varepsilon^2)$ tenim que:

$$\begin{aligned}\dot{x_0} &= A_0 x_0 + b_0 \\ \dot{x_1} &= \sum_{k=0}^{1} A_{1-k} x_k + b_1 = A_0 x_1 + \left[A_1 x_0 + b_1 \right] \\ \dot{x_2} &= \sum_{k=0}^{2} A_{2-k} x_k + b_2 = A_0 x_2 + \left[A_2 x_0 + A_1 x_1 + b_2 \right]\end{aligned}$$

i més generalment, per $j = 0, \cdots, r$:

$$\dot{x_j} = \sum_{k=0}^{j} A_{j-k} x_k + b_j = A_0 x_j + \left[\sum_{k=0}^{j-1} A_{j-k} x_k + b_j \right]. \tag{2.6}$$

El punt clau és que, si resolem les equacions per $x_0, x_1, \cdots, x_r$ en ordre, són equacions lineals no homogènies amb la mateixa matriu A_0. En efecte, si suposem conegudes $x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}$, llavors l'únic terme en l'equació per x_j (equació (2.6)) que involucra x_j és $A_0 x_j$, la resta només depén de $x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}$ i per tant és conegut.

Així és clar que, si denotem per $M_0(t)$ la matriu fonamental de $\dot{x} = A_0(t) x$ satisfent $M_0(t^0) = \mathrm{Id}$:

$$\begin{aligned}x_0(t) &= M_0(t) \left[x^0 + \int_{t^0}^{t} [M_0(s)]^{-1} b_0(s)\, ds \right] \\ x_j(t) &= M_0(t) \int_{t^0}^{t} [M_0(s)]^{-1} \left[\sum_{k=0}^{j-1} A_{j-k}(s) x_k(s) + b_j(s) \right] ds,\end{aligned}$$

amb $j = 1, \cdots, r$. Per tant les $x_0, x_1, \cdots, x_r$ satisfan T1.

Tornem a mirar l'equació (2.5). Els termes que ens falta anular ens donen l'equació que $\tilde{x}_{r+1}$ ha de satisfer:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_{r+1}(t,\varepsilon) = &\sum_{j=r+1}^{2r} \varepsilon^{j-r}\left(\sum_{k=0}^{j} A_{j-k}x_k\right)\\ &+ A(t,\varepsilon)\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)\\ &+ \tilde{A}_{r+1}(t,\varepsilon)\sum_{j=0}^{r}\varepsilon^j x_j + \tilde{b}_{r+1}(t,\varepsilon).\end{aligned} \tag{2.7}$$

De moment, és clar que $\tilde{x}_{r+1}$ satisfà T2 per la teoria general de solucions de sistemes lineals.

Recordem que $A(t,\varepsilon)$ té la forma donada en (2.2). Definim $\bar{A}(t,\varepsilon)$ per la igualtat $A(t,\varepsilon) = A_0(t) + \varepsilon\bar{A}(t,\varepsilon)$, és a dir:

$$\bar{A}(t,\varepsilon) = A_1(t) + \sum_{i\geq 2}\varepsilon^{i-1}A_i(t),$$

i reescrivim l'equació (2.7) com

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_{r+1}(t,\varepsilon) = &A_0\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon) + \varepsilon\bar{A}(t,\varepsilon)\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)\\ &+ \sum_{j=r+1}^{2r} \varepsilon^{j-r}\left(\sum_{k=0}^{j} A_{j-k}x_k\right)\\ &+ \tilde{A}_{r+1}(t,\varepsilon)\sum_{j=0}^{r}\varepsilon^j x_j + \tilde{b}_{r+1}(t,\varepsilon).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Si $\tilde{x}_{r+1}$ és solució de (2.8) amb $\tilde{x}_{r+1}(t^0,\varepsilon) = 0$, cal que:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon) = &M_0(t)\int_{t^0}^{t}[M_0(s)]^{-1}\varepsilon\bar{A}(t,\varepsilon)\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)\,ds\\ &+ M_0(t)\int_{t^0}^{t}[M_0(s)]^{-1}\sum_{j=r+1}^{2r}\varepsilon^{j-r}\left(\sum_{k=0}^{j}A_{j-k}(s)x_k(s)\right)ds\\ &+ M_0(t)\int_{t^0}^{t}[M_0(s)]^{-1}\left[\tilde{A}_{r+1}(s,\varepsilon)\sum_{j=0}^{r}\varepsilon^j x_j(s) + \tilde{b}_{r+1}(s,\varepsilon)\right]ds.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Anem a comprovar T3. És suficient considerar un compacte J que contingui t^0 perquè sino el podem ampliar fins que contingui t^0 i tot el que es cert per aquesta ampliació també serà cert pel compacte inicial. Fixem dons J i una quantitat positiva $\eta > 0$. Sigui ε_* tal que H3 és certa, és a dir:

$$\max_{t\in J,\, |\varepsilon|\le\varepsilon_*} \|\tilde{A}_{r+1}(t,\varepsilon)\| \le \eta, \qquad \max_{t\in J,\, |\varepsilon|\le\varepsilon_*} \|\tilde{b}_{r+1}(t,\varepsilon)\| \le \eta. \tag{2.10}$$

Denotem per

$$\|\tilde{x}_{r+1}\|_\infty = \max_{t\in J,\, |\varepsilon|\le\varepsilon_*} \|\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)\|.$$

Fixem $t, t^0 \in J$ i $|\varepsilon| \le \varepsilon_*$. Com $J \times [-\varepsilon_*, \varepsilon_*]$ és un compacte, totes les funcions involucrades a (2.9) estaran acotades. Fent servir també les desigualtats a (2.10), és clar dons que existeix una constant C tal que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)\| \le & |\varepsilon|\|M_0(t)\| \left| \int_{t^0}^{t} \|[M_0(s)]^{-1}\|\|\bar{A}(t,\varepsilon)\|\|\tilde{x}_{r+1}(t,\varepsilon)\|\, ds \right| \\
& + |\varepsilon|\|M_0(t)\| \left| \int_{t^0}^{t} \|[M_0(s)]^{-1}\| \sum_{j=r+1}^{2r} |\varepsilon|^{j-r-1} \left(\sum_{k=0}^{j} \|A_{j-k}(s)\|\|x_k(s)\| \right) ds \right| \\
& + \|M_0(t)\| \left| \int_{t^0}^{t} \|[M_0(s)]^{-1}\| \left[\|\tilde{A}_{r+1}(s,\varepsilon)\| \sum_{j=0}^{r} |\varepsilon|^j \|x_j(s)\| \right] ds \right| \\
& + \|M_0(t)\| \left| \int_{t^0}^{t} \|[M_0(s)]^{-1}\|\|\tilde{b}_{r+1}(s,\varepsilon)\|\, ds \right| \\
\le & C\varepsilon_*\|\tilde{x}_{r+1}\|_\infty + C\varepsilon_* + C\eta.
\end{aligned}$$

Com la darrera acotació és independent de t i ε, tenim que

$$\|\tilde{x}_{r+1}\|_\infty \le C\varepsilon_*\|\tilde{x}_{r+1}\|_\infty + C\varepsilon_* + C\eta.$$

Per tant, agafant ε_* més petit per tal que (per exemple) $\varepsilon_* \le \eta$ i $1 - C\varepsilon_* > 1/2$,

$$\|\tilde{x}_{r+1}\|_\infty \le C\frac{\varepsilon_* + \eta}{1 - C\varepsilon_*} \le 4C\eta$$

i el resultat està demostrat. ∎