TREBALL PRÀCTIC 2

Data de lliurament: divendres 22 de desembre de 2017

- S'ha de lliurar un informe clar i concís (longitud màxima recomenada: 10 pàgines). L'informe ha de contestar amb precisió a les qüestions plantejades, a més d'incloure el títol, els autors i la data del treball (a la capçalera de la primera pàgina).
- L'informe (en format pdf) i els programes (comprimits en un zip) es lliuraran electrònicament a través del Campus Digital, en la data indicada. L'entrega la fa només un dels integrants del grup. Els *noms dels arxius* han de ser TP2***.pdf i TP2***.zip, on *** són els primers cognoms de cadascun dels integrants del grup començant amb majúscules i en ordre alfabètic, sense espais, accents o caràcters especials.

1. Es vol calcular el valor de la integral definida

$$I = \int_0^2 \sin(\mathrm{e}^{2x})\, dx \tag{1}$$

amb 6 xifres significatives.

a) Calculeu una aproximació de la integral I amb les fórmules compostes del trapezi i de Simpson, amb $m = 4, 8, 16, 32$ subintervals de longitud uniforme. Dibuixeu l'evolució de l'error en funció del número d'avaluacions de la funció, per a cadascun dels mètodes, amb escala logarítmica als dos eixos. Analitzeu els resultats: es comporten els mètodes com esperàveu? tenen la convergència esperada?

b) Prediu quants subintervals m de mida uniforme calen per a cadascun dels mètodes per a aconseguir una aproximació amb 6 xifres significatives correctes. Calculeu l'aproximació amb el número de subintervals deduït en cada cas, i comproveu si tenen la precisió requerida. Podeu fer servir Maple o la funció `integral` de Matlab per a calcular un valor de referència de la integral i avaluar l'error de l'aproximació obtinguda.

A la vista de com varia la funció a l'interval $(0, 2)$ sembla raonable fer servir una longitud de subinterval més petita a prop de l'extrem $x = 2$ que a prop de l'extrem $x = 0$. Per a reduir el cost de càlcul de la integral I es planteja, doncs, fer servir una *quadratura de Simpson adaptativa* basada en un algorisme recursiu. Cal implementar una funció, que donada una funció f, un interval (a, b) i una tolerància ϵ,

- calcula les aproximacions $S(a, b)$, $S(a, \frac{a+b}{2})$ i $S(\frac{a+b}{2}, b)$, on $S(u, v)$ denota l'aproximació de la integral amb la quadratura de Simpson simple a l'interval (u, v)
- estima l'error a l'interval (a, b) com $E_{ab} = |S(a, b) - (S(a, \frac{a+b}{2}) + S(\frac{a+b}{2}, b))|$
- si $E_{ab} < \epsilon(b - a)$, l'error és acceptable i retorna el valor de $S(a, b)$

  altrament, crida a la mateixa funció per a calcular les aproximacions de les integrals a l'interval $(a, \frac{a+b}{2})$ i a l'interval $(\frac{a+b}{2}, b)$.

c) Justifiqueu que aquest algorisme recursiu aplicat al càlcul de la integral a $(0, 2)$ proporciona una aproximació amb un error absolut (estimat) menor que 2ϵ.

d) Implementeu l'algorisme recursiu i feu-lo servir per a calcular la integral (1) amb un error absolut menor que 10^{-3}. Feu servir Maple o la funció `integral` de Matlab per a calcular un valor de referència de la integral i avaluar l'error de l'aproximació obtinguda. Comenteu el resultat.

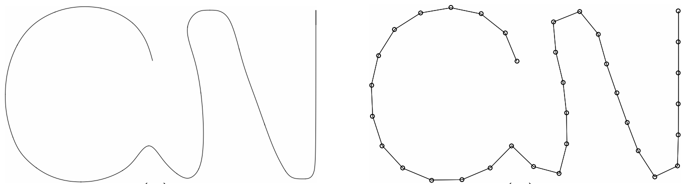
e) Modifiqueu la funció per que retorni, a més del valor de la integral, les abscisses dels punts que divideixen l'interval $(0, 2)$ en subintervals. Representeu gràficament la funció i els punts obtinguts a una figura per visualitzar quins subintervals s'han fet servir en la quadratura adaptativa, per a obtenir una aproximació amb error menor que 10^{-3} i amb error menor que 10^{-6}. Observeu i comenteu com són els subintervals.

f) Compareu el número de subintervals amb el número de subintervals que es necessitarien amb una quadratura composta de Simpson amb longitud de subinterval uniforme.

2. En diversos camps (visualització gràfica, simulació -MEF-...), donada una corba $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ diferenciable i regular, és necessari trobar una distribució equiespaiada de punts sobre la corba. Per a fer-ho, s'usa el paràmetre arc,

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\xi)\| \, d\xi$$

per trobar la parametrització natural (amb velocitat unitària) de la corba $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$, on $t(s)$ és la inversa de $s(t)$. D'aquesta forma es pot obtenir la distribució desitjada sobre la corba, definint-la prèviament a $[s(a), s(b)]$ i usant $\tilde{\gamma}$, veure exemple 2D a la figura 1.



(a) (b)

Figura 1: (a) Corba al pla amb les sigles de l'assignatura. (b) Punts equiespaiats sobre la corba calculats usant el paràmetre arc.

Donada la corba a l'arxiu `corba.mat`, es demana:

a) Implementeu una funció que, donat un valor de t, calculi $s(t)$ usant una quadratura composta de Simpson amb m intervals. Determineu m per a que $s(b)$ tingui 4 xifres significatives correctes i escriviu el valor obtingut de $s(b)$. Comenteu com heu obtingut aquest valor de m.
Indicació: executeu `load corba` per carregar la funció `gamma` i la seva primera derivada `dgamma`, i els extrems a i b que defineixen el seu espai paramètric.

A partir d'aquest punt, usarem una quadratura de Simpson composta amb $m = 100$ intervals.

b) Proposeu un mètode per a calcular l'antimatge $t \in [a, b]$ corresponent a un valor donat de $s \in [s(a), s(b)]$. Expliqueu el mètode numèric considerat per resoldre el problema i justifiqueu raonadament la tria.

c) Implementeu en una rutina el mètode proposat a l'apartat *b)*. Escriviu el valor de $s = (s(a) + s(b))/2$ i de l'antimatge t corresponent amb 4 xifres significatives. *Indicació:* Per tal de simplificar el càlcul de les derivades, si és necessari, la funció `numericalDerivative.m` calcula la derivada numèrica d'una funció en un punt donat.

d) Useu la rutina anterior per calcular una distribució equiespaiada de 35 punts sobre la corba. Escriviu com a resultat les coordenades paramètriques t_i i les corresponents coordenades físiques $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ dels 3 primers punts, usant 4 xifres significatives. Quina és la distància sobre la corba entre els punts obtinguts?

3. El càlcul de la trajectòria del projectil és un problema de tir parabòlic amb fregament, que es pot plantejar com un sistema de 4 Equacions Diferencials Ordinàries (EDOs),

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -R||\mathbf{v}||\mathbf{v} + \mathbf{g} \tag{2}$$

on les funcions incògnita corresponen a les dues components de la posició $\mathbf{x} = (x(t), y(t))^T$ i de la velocitat $\mathbf{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^T$, $\mathbf{g} = (0, -9.8)^T$ m/s^2 és l'acceleració de la gravetat i R és el coeficient de fregament. Aquest coeficient depèn principalment de l'àrea projectada de l'objecte i de la densitat de l'aire, i aquí es pren com $R = 0.00132$ m^{-1}. Per poder resoldre el problema de forma única cal donar condicions inicials, en aquest cas

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0)^T, \quad \mathbf{v}(0) = v_0(\cos\theta, \sin\theta)^T \tag{3}$$

on $v_0 = 100$ m/s és el mòdul de la velocitat inicial i $\theta = \pi/4$ és l'angle sobre l'horitzontal amb que es fa el llançament.

a) Resolgueu la EDO mitjançant el mètode d'Euler i representeu la trajectòria del projectil durant 10 segons.

b) Sigui $\mathbf{X}_m$, la posició en l'instant final obtinguda mitjançant m passos del mètode d'Euler. L'error d'aquesta aproximació es pot estimar com

$$E = ||\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{2m}|| \qquad r = \frac{E}{||\mathbf{X}_{2m}||}.$$

Feu servir aquestes expressions per estimar l'error de les aproximacions i dibuixeu una gràfica de convergència amb l'evolució de l'error en funció del número de passos. S'observa el comportament esperat?

c) Feu servir la funció `ode45` amb `Events` per, donat un angle θ, determinar la distància recorreguda pel projectil fins a tocar terra, $d(\theta)$. Doneu la distància per $\theta = \pi/4$ amb 3 xifres significatives. Podeu assegurar que són 3 xifres correctes? Per què?

d) Determineu l'angle θ amb què s'ha de disparar el projectil per arribar a un objectiu situat a 500 m. Expliqueu l'estratègia emprada per resoldre el problem i doneu el resultat amb 3 xifres significatives.