TREBALL PRÀCTIC 2

Eric Valls, Victor Martin, Dean Zhu

December 2017

1 Problema 1

1.1 Mètode del trapezi i quadratura de Newton

1.1.1 Valors obtinguts:

Subintervals	4	8	16	32	64	128
Quadratura de Simpson	0.5811321	0.3350465	0.1059936	0.3529160	0.3162173	0.3159170
Mètode del Trapezi	1.1027294	0.7115314	0.4291677	0.1867871	0.3113838	0.3150090

Subintervals	256	512	1024	2048	4096	8192
Quadratura de Simpson	0.3159050	0.3159043	0.3159043	0.3159043	0.3159043	0.3159043
Mètode del Trapezi	0.3156900	0.3158513	0.3158911	0.3159010	0.3159035	0.3159041

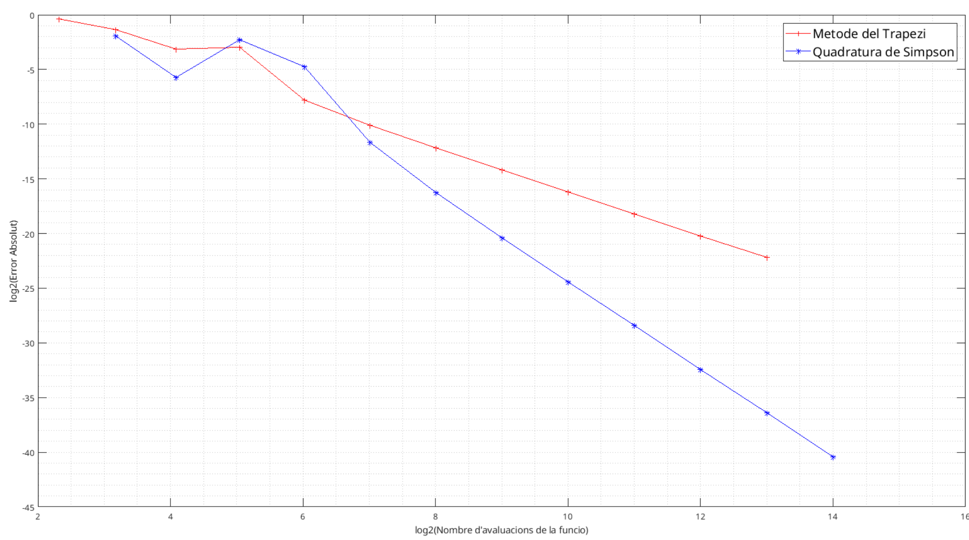


Figura 1: Convergència de les quadratures

Observem que ambdós mètodes convergeixen correctament, el mètode del trapezi té una convergència quadràtica i la quadratura de Simpson comet un error inversament proporcional a m^4.

1.1.2 Cota de l'error

1. Quadratura composta del trapezi

   Sabem que la quadratura composta del trapezi comet un error de:

$$E_m = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\mu) = -\frac{2}{3m^2} f''(\mu)$$

$$f^{''} = 4e^{2x}\cos(e^{2x}) - 4e^{4x}\sin(e^{2x})$$

La segona derivada assoleix un màxim valor absolut en el punt $x = 2$, i $f^{''}(2) \approx 11000$. Per tant:

$$|E_m| \leq \left| \frac{2 \cdot 11000}{3} \cdot m^{-2} \right|$$

Llavors si volem un error menor a 10^{-6}:

$$85000 \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 11000}{10^{-6} * 3}} \geq m$$

Ens dona una fita clarament massa alta ja que amb 8192 intervals, la quadratura composta del trapezi només comet un error de $2 \cdot 10^{-7}$.

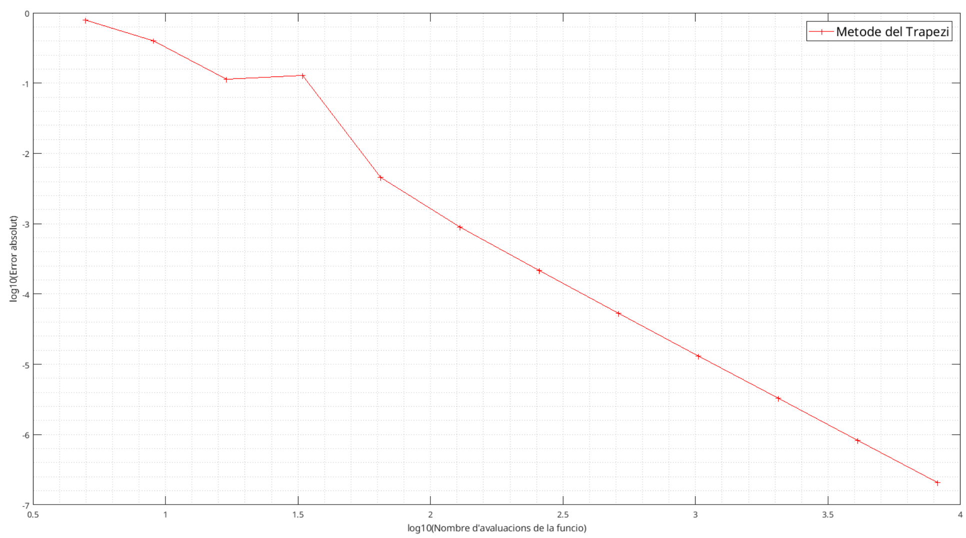


Figura 2: Logaritme en base 10 del error del metode del Trapezi

Ara bé, si ens fixem en la gràfica del error, sembla que el mètode cometrà un error absolut de 10^{-6} quan s'avalua amb $10^{3.6} \approx 4000$ cops. Donat que la funció de l'error té una tendència general a decréixer, podem fer una cerca dicotòmica i obtenim que el nombre de intervals necessaris són 3722. Si avaluem aquestes fites, veiem que la quadratura retorna els valors següents

Intervals	Valor	Error Absolut	Error Relatiu
3722	0.3159032851	$9{,}99959 \cdot 10^{-7}$	$3.16538 \cdot 10^{-6}$
4000	0.3159034192	$8.65787 \cdot 10^{-7}$	$2.74066 \cdot 10^{-6}$
85000	0.3159402831	$1.91722 \cdot 10^{-9}$	$6.06899 \cdot 10^{-9}$

Sembla ser que la cota real està més propera a l'aproximació obtinguda observant la gràfica.

2. Quadratura composta de Simpson

Prenent un altre cop la fita del error en funció de m:

$$|E_m| = \left| \frac{(b-a)^5}{2880m^4} f^{4)}(\mu) \right|$$

$$f^{4)}(\mu) = -112e^{4x}\sin(e^{2x}) + 16e^{8x}\sin(e^{2x}) + 16e^{2x}\cos(e^{2x}) - 96e^{6x}\cos(e^{2x})$$

i assoleix un màxim en valor absolut en el punt $x = 2$, on val $1.26 \cdot 10^8$. Per tant

$$|E_m| \leq \left| \frac{2^5 \cdot 1.26 \cdot 10^8}{2880 \cdot m^4} \right|$$

Llavors si volem un error menor a 10^{-6}:

$$m \leq \sqrt[4]{\left|\frac{2^5 \cdot 1.26 \cdot 10^8}{2880 \cdot 10^{-6}}\right|} \approx 10^3$$

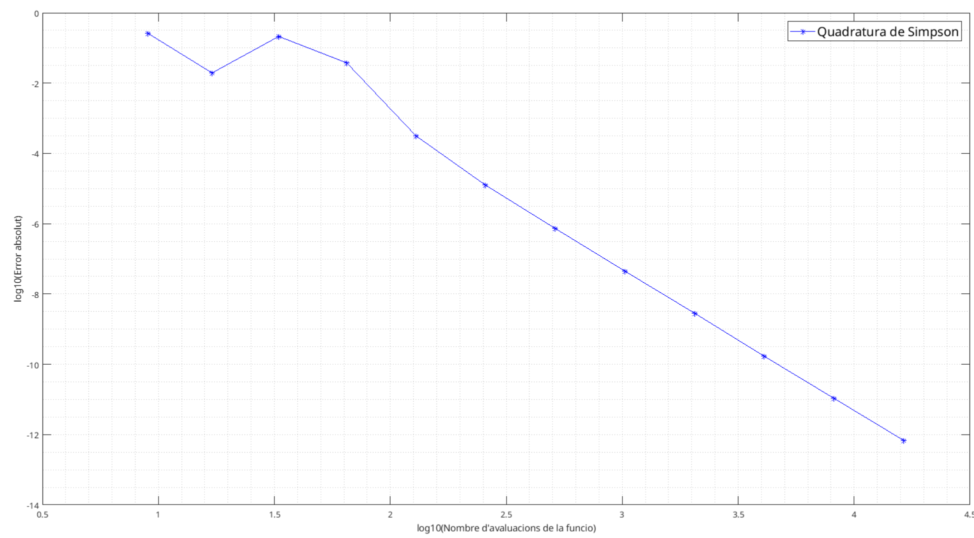


Figura 3: Logaritme en base 10 del error de la quadratura de Simpson

Si ens fixem en la gràfica podem observar que una fita raonable és $10^{2,8} \approx 630$. Com la gràfica és en funció de les avaluacions prenem la meitat. Si suposem un altre cop que l'error és decreixent en general, podem fer una cerca dicotomica i ara obtenim que el nombre d'intervals necessaris són 237. Si avaluem les fites obtenim:

Intervals	Valor	Error Absolut	Error Relatiu
237	0.31590528	$9.986834 \cdot 10^{-7}$	$3.161348 \cdot 10^{-6}$
315	0.31590460	$3.154840 \cdot 10^{-7}$	$9.986699 \cdot 10^{-7}$
1000	0.31590429	$3.055093 \cdot 10^{-9}$	$9.670934 \cdot 10^{9}$

1.2 Quadratura de Simpson Adaptada

1.2.1 Fita del Error

Volem veure que la quadratura de Simpson adaptada ens produeix un error fitat per $(b-a)\epsilon$. Considerem tots els intervals (x_i, y_i) tals que retornen el valor de la quadratura sense fer la crida recursiva. Sigui E_i l'error comès per l'interval i-èssim, com tots aquests intervals són disjunts i la seva unió es $(0,2)$ tenim que:

$$\sum_{i=0}^{r} E_i < \sum_{i=0}^{r} (y_i - x_i)\epsilon = (b-a)\epsilon = 2\epsilon$$

Per tant l'error esta fitat per 2ϵ.

1.2.2 Valors obtinguts

Cridant a la funció amb una tolerància de 10^{-3} obtenim 0.316014 i un error absolut de $1.098123 \cdot 10^{-4}$. Els intervals que utilitzem en aquest cas son (60 punts):

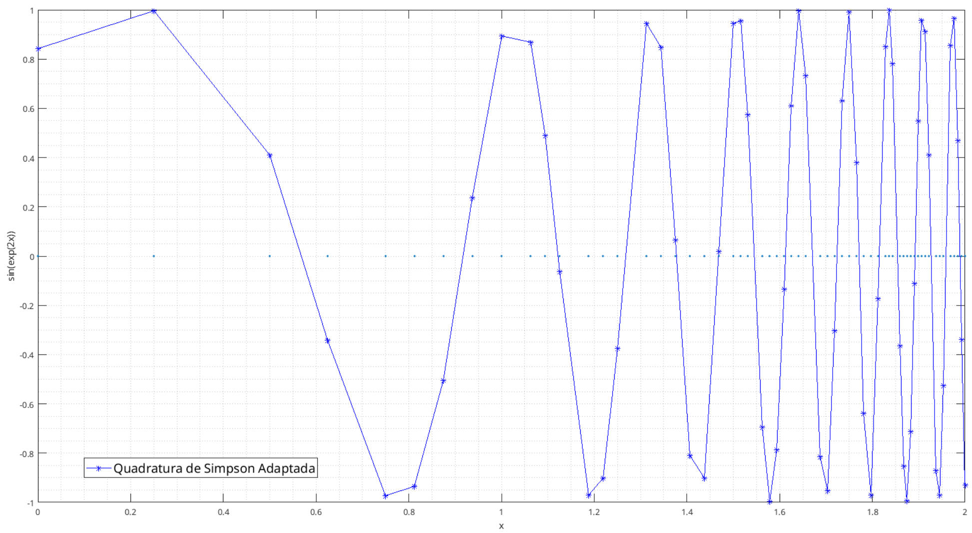


Figura 4: Simpson Adaptat amb tolerància 10^{-3}

Si volem una precisió de 10^{-6} obtenim com 0.3159042, un error absolut de $8.943 \cdot 10^{-8}$, utilitzant 334 punts:

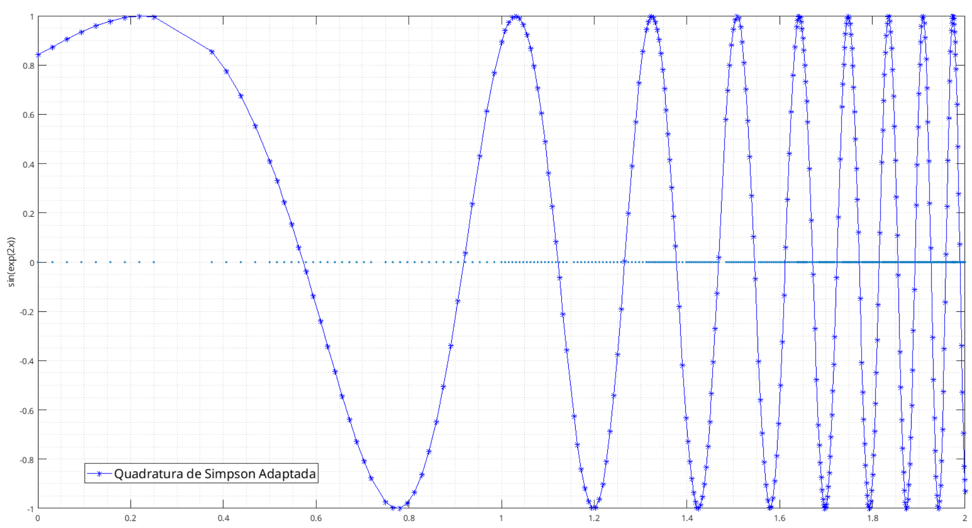


Figura 5: Simpson Adaptat amb tolerància 10^{-6}

A primera vista pensaríem que amb el mètode de Simpson Adaptiu utilitzaríem molts menys intervals, però en realitat no és així doncs la condició de l'error és molt més forta en el mètode adaptiu. Garanteix que tots els intervals utilitzats tenen un error menor a $(b-a)\epsilon$ i per tant que

$$\sum |E_i| < (b-a)\cdot\epsilon$$

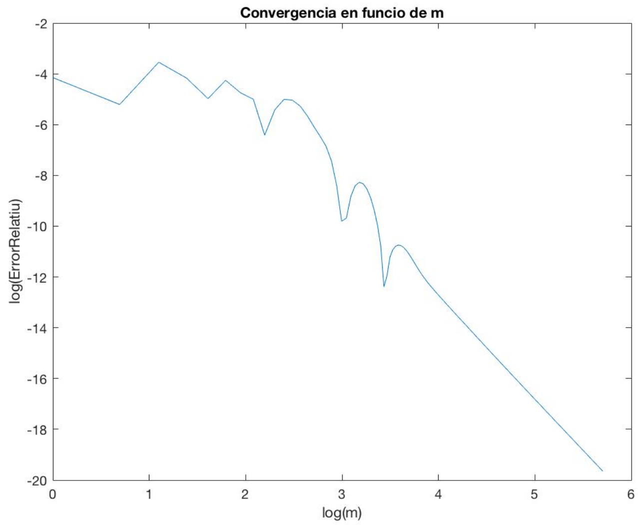
En canvi amb la quadratura composta de Simpson és possible que un interval sobreestimi mentres que un altre subestimi i al final s'acabin compensant. Això es pot observar clarament a l'error comès pel mètode del Simpson adaptiu. Un error absolut de 10^{-4} i 10^{-8} respectivament tot i que demanem 10^{-3} i 10^{-6}.

2 Problema 2

2.1 Càlcul de la integral

Per trobar la mínima m tal que $s(b)$ tingui 4 xifres significatives correctes farem servir dos mètodes diferents:

Mètode 1: Calculem el valor "exacte" (tot i no ser exacte/real ja que també es calcula numèricament, li direm així ja que l'hem calculat amb precisió màquina pràcticament) de $s(b)$ fent servir la funció *integral* de Matlab que ens dona que $s(b) = 21.228219155979843$. Fent servir aquest valor, iterarem per m fins que l'error per una m donada tingui un error relatiu menor a $5 * 10^{-5}$. Aquest mètode ens dona que $m = 29$. A la següent figura podem veure la gràfica de convergència en escala logarítmica.



Podem veure com per a valors petits de m la convergència oscil·la bastant. No obstant, a partir de cert valor, la convergència passa a ser d'ordre entre 4 a 5 com esperàvem al estar fent servir la quadratura composta de Simpson.

Mètode 2: Si no tinguéssim el valor real de la integral (per ser massa costós de calcular, per exemple) no podríem fer servir el mètode anterior. Aquest segon mètode consisteix a iterar per m fins que l'error relatiu entre m i $m - 1$ sigui més petit que $5 * 10^{-5}$. Aquest mètode ens dona que $m = 21$.

Conclusió: El primer mètode dona el resultat correcte però òbviament requereix de tenir un valor real de la integral. No obstant, això en general no ho tindrem en general i haurem servir el mètode 2. Sembla que el mètode 2 hagi calculat m amb poca precisió ja que ens ha donat 21 enlloc de 29. Ara, si calculem l'error relatiu de la integral amb $m = 21$ ens dóna $6.243341155780989 \cdot 10^5$ que s'apropa bastant a les 4 xifres significatives. Per tant, en aquest cas, el mètode 2 ha funcionat bastant bé. Ara, en general, no podem garantir que funcioni bé en general.

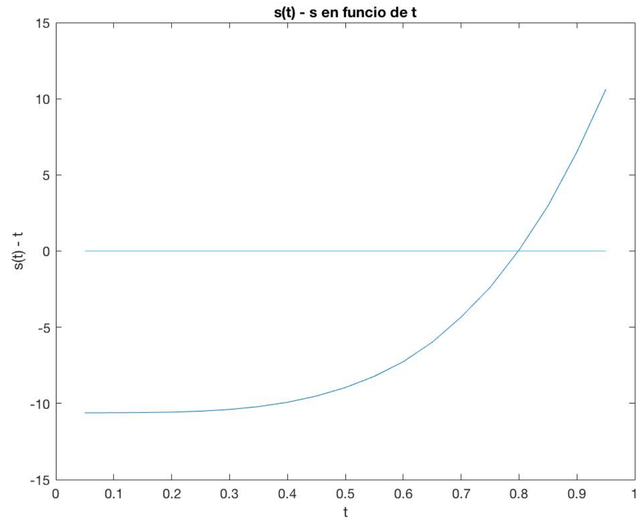
Fent servir $m = 29$, $s(t) = 21.227$.

2.2 Mètode per trobar la inversa

Ara, donat un $s \in [s(a), s(b)]$, volem trobar $k \in [a, b]$ tal que $s(k) = s$. Sabem que aquest valor existeix perquè $s(t)$ és contínua i podem aplicar el teorema del valor mitjà.

Trobar aquesta imatge és equivalent a resoldre $s(t) = s$ que és equivalent a resoldre $s(t) - s = 0$. Sembla raonable utilitzar un dels mètodes per trobar zeros implementats a la pràctia 1, com per exemple, el mètode de Newton. A més a més, observem que com $s(t)$ és creixent (al ser no negativa la funció a integrar), aquesta equació només té una solució i, per tant, si el mètode de Newton convergeix, sabrem que convergeix a la única solució. Triem Newton ja que tenim una derivada numèrica i no bisecció perquè convergeix més ràpidament.

Volem calcular ara l'antiimatge per $s = \frac{s(a)+s(b)}{2}$. Per fer això implementem el que hem fet a l'apartat b i iterem Newton fins que l'error entre resultats successius sigui menor a $5 * 10^{-5}$. L'aproximació inicial la trobem representant la gràfica de la funció que podem veure a la imatge següent.



Aquesta gràfica ens confirma el que hem dit anteriorment (existeix una única solució) i observem que 0.8 sembla una aproximació inicial prou bona pel mètode de Newton. Aplicant el mètode de Newton amb aquesta aproximació inicial, obtenim que $k = 0.7988492827$.

Si no poguéssim dibuixar la gràfica (per un cost massa alt, per exemple) podríem fer unes quantes iteracions del mètode de la bisecció entre a i b i després, aplicar Newton.

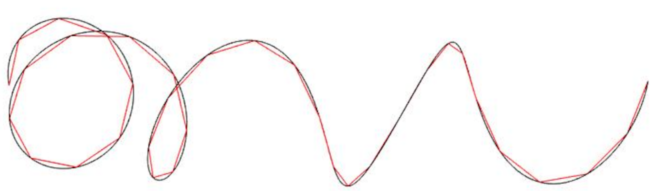
2.3 Cerca dels 35 punts equidistants

Per trobar una distribució equiespaiada de 35 punts sobre la corba, cal que la distància entre punts consecutius sigui $(s(b) - s(a))/34$ que és 0.62436. Per tant, $t_i = \text{antiimatge}(a + h \cdot i), 0 \leq i \leq 34$. Per tant, hem de calcular aquestes 35 antiimatges amb la funció implementada a l'apartat c.

Executar el codi i ens dona per als primers 3 punts:

t	$\gamma(t).x$	$\gamma(t).y$	$\gamma(t).z$
0.0500	-4.250	-0.00008345	0.0001473
0.3900	-4.050	-0.2950	0.4985
0.4650	-3.538	-0.5233	0.7461

Si dibuixem els 35 punts junt amb γ i els connectem amb línies obtenim la següent imatge.



En aquesta es pot observar com efectivament sembla que els punts són equidistants i aproximen bé γ.

3 Problema 3

En aquest problema, volem determinar la trajectòria d'un projectil, amb la complicació extra, respecte el problema tradicional de tir parabòlic, que aquí hi considerem l'acció del fregament de l'aire.

Com que trobar una fórmula tancada per a aquesta trajectòria pot resultar impossible, podem considerar com varien les variables del problema (posició i velocitat) respecte del temps per a plantejar el sistema d'EDOs següent:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad , \frac{d\mathbf{v}}{dt} = R\|\mathbf{v}\|\mathbf{v} + \mathbf{g}$$

On $\mathbf{x} = (x, y)$ és la posició del projectil, i $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ és el seu vector velocitat. Aquí, R és la constant de fregament, que tindrà valor $R = 0.00132\text{m}^{-1}$ i $\mathbf{g} = (0, -9.8)\text{m/s}^2$ és l'acceleració donada per la gravetat, que assumirem constant arreu.

Finalment, dotarem al problema de les següents condicions inicials: $\mathbf{x}(0) = (0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = v_0(\cos\theta, \sin\theta)$.

En primer lloc, volem determinar la trajectòria del projectil en els primers 10 segons, amb condicions inicials $v_0 = 100\text{m/s}, \theta = \pi/4$. Per a fer-ho, resoldrem la EDO mitjançant el mètode d'Euler amb aquestes condicions inicials a l'interval $[0, 10]$. Amb l'ajuda de la funció `Euler(f, a, b, y0, nsteps)`, que resol la EDO $y' = f(x, y)$ a l'interval $[a, b]$, on `y0` guarda la condició inicial $y(a)$ i `nsteps` guarda el nombre de passos que farà el mètode de Euler; la funció `trajectory(v0, theta, t, nsteps, show_plot)` resol aquesta EDO amb condicions inicials donades per `v0, theta` a l'interval $[0, t]$ i amb nombre de passos igual a `nsteps`. Si el booleà `show_plot` té valor 1, escriu la gràfica $y(x)$ de la trajectòria. D'aquí en endavant, a més, les funcions de Matlab utilizades també faran ús de la funció `f(x,y)` que retorna $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right)$, l'equació de la EDO, i de `init_cond(v0,theta)`, que donades una velocitat inicial `v0` i un angle de llançament `theta` retorna el vector $(x(0), y(0), v_x(0), v_y(0))$ de les variables donades per aquestes condicions inicials. Al llarg d'aquest exercici totes les funcions estan guardades en fitxers igual al nom de la funció i extensió `.m`.

Per a `trajectory(100, pi/4, 10, 65536, 1)` obtenim que a $t = 10$ la posició del projectil és $(x(10), y(10)) = (499.44, 100.28)\text{m}$. Cal destacar que eliminant l'efecte del fregament de l'aire, és a dir, posant $R = 0\text{m}^{-1}$, obtindríem $(x(10), y(10)) = (707.11, 217.11)\text{m}$, és a dir, l'efecte del fregament és molt significatiu. La trajectòria obtinguda és la següent:

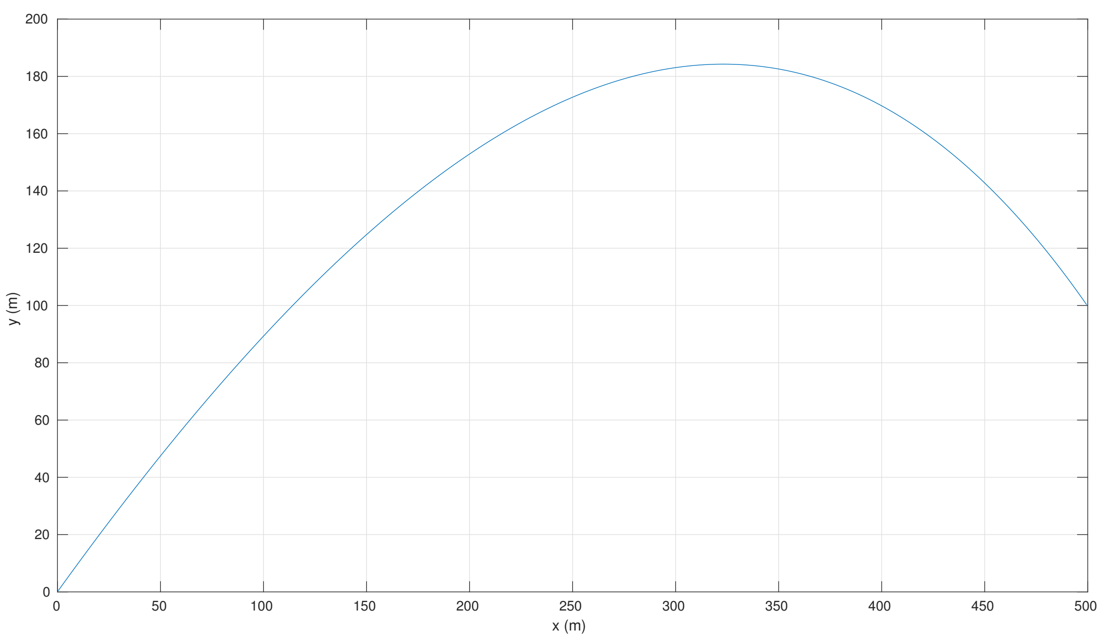


Figura 6: Trajectòria del projectil amb velocitat i angle inicials $v_0 = 100\text{m/s}$ i $\theta = \pi/4$, respectivament, durant els 10 primers segons, resolent l'EDO descrita prèviament amb 65536 passos del mètode d'Euler

A continuació volem trobar quins són els errors relatiu i absolut que dona el mètode d'Euler amb m passos. Sigui $\mathbf{X}_m$ la posició obtinguda després de $t = 10$ segons amb m passos del mètode d'Euler. Podem estimar l'error absolut per m passos com $E_m = \|\mathbf{X}_m - \mathbf{X}_{2m}\|$ i l'error relatiu per $r_m = \frac{E_m}{\|\mathbf{X}_{2m}\|}$. A la funció `error_plot(v0, theta, t, maxnsteps)` resolem la EDO mitjançant el mètode d'Euler, i resolem `trajectory(100, pi/4, 10,` per a $i = 2, 4, 8, \ldots, 2^k$ on k és el major natural tal que `2^k <= maxnsteps`. A continuació trobem els errors absolut i relatiu per aquests valors de i, i, excepte per a $i = 2^k$, fem la gràfica per E i r. Per a `error_plot(100, pi/4, 10, 2^20)`, obtenim la següent gràfica de convergència.

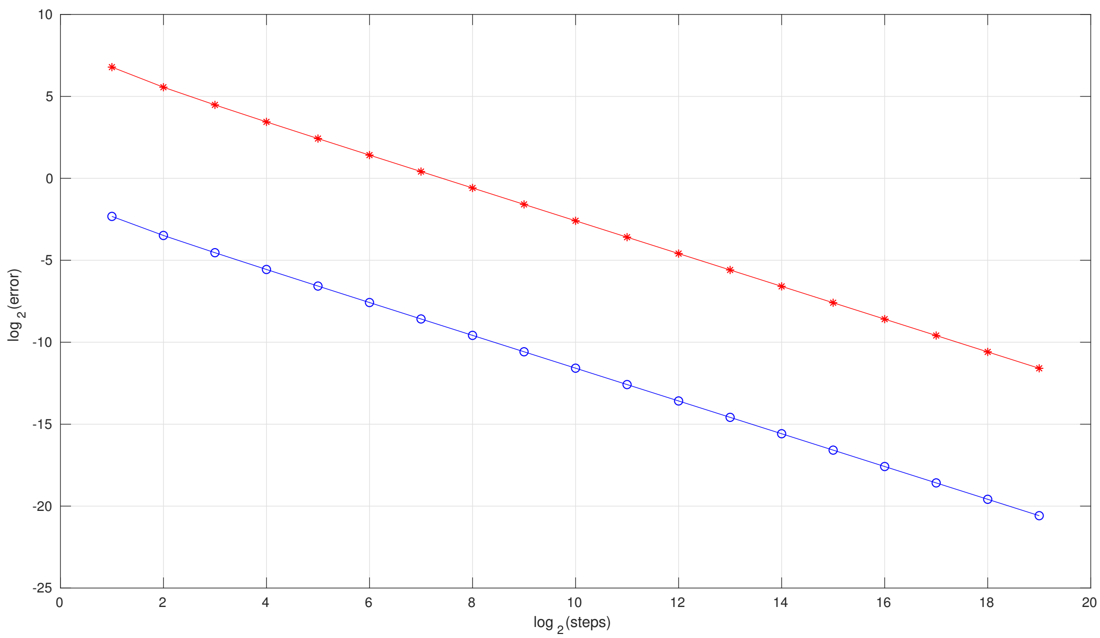


Figura 7: Error absolut (en vermell) i relatiu (en blau) en funció del nombre de passes del mètode d'Euler

A ull es veu clarament que la relació entre el logaritme de l'error (tant l'absolut com el relatiu, que són proporcionals entre ells) amb el del logaritme del nombre de passos dona una recta amb pendent -1, que és el comportament esperat ja que l'error donat pel mètode d'Euler cau proporcionalment amb l'amplada dels intervals, i per tant l'error comès és inversament proporcional al nombre d'intervals.

Utilitzarem la funció `distance(v0, theta, t, tol)`, que ens donarà la distància a la que el projectil arriba a terra després de ser llençat des de l'origen amb velocitat `v0` i angle `theta` amb una tolerància `tol`. La variable `t` simplement correspon a un valor del temps pel que estiguem segurs que el projectil toca terra en algun instant pertanyent a $[0, t]$. Amb les condicions habituals $v_0 = 100\text{m/s}$, $\theta = \pi/4$, amb $t = 50\text{s}$ és suficient.

A la funció `distance`, utilitzem la funció `ode45` per a resoldre la EDO usant la funció `event` per a indicar que s'aturi la resolució de l'EDO quan el valor `y(2)` corresponent a la coordenada y de la posició del projectil sigui 0, i, a més, decreixent (és a dir, quan el projectil toqui terra mentre estigui caient).

Amb `distance(100, pi/4, 50, 1e-8)`, obtenim que el projectil arriba a terra a distància 575m de l'origen. Podem assegurar que són 3 xifres significatives correctes ja que hem passat a la funció `distance` l'argument `tol = 1e-8` que farà que l'EDO se'ns resolgui, mitjançant la funció `ode45`, amb un error absolut de `1e-8`, i per tant la precisió que hi donem ens dona sobradament la precisió de les 3 xifres significatives que hi demanàvem.

Utilitzant el mètode de la secant a la funció `distance` de l'apartat anterior, i fixant la velocitat inicial a $v_0 = 100\text{m/s}$, podem trobar l'angle θ pel cual, amb condicions inicials (v_0, θ) el projectil toca terra a distància $d = 500\text{m}$ de l'origen. Ho farem mitjançant la funció `find_angle (x1, x2, d, t, v0, tol1, tol2)`, que amb aproximacions inicials d'angles `x1, x2`, trobarà l'angle inicial `theta` que busquem. La resta d'arguments de la funció són `d`, la distància des de l'origen a la qual el projectil ha de tocar terra, el temps `t` pel qual tenim confiança que hi tocarà a l'interval $[0, t]$, la velocitat inicial `v0`, i `tol1, tol2` que seran, respectivament, la tolerància que hi posarem a les crides a la funció `distance`, i la tolerància que hi posarem per a trobar el valor correcte de `theta`.

Òbviament amb angles 0 i $\pi/2$ la distància a la que arriba el projectil és 0m, i hem vist que amb angle $\pi/4$ arriba a distància $d = 575$m. Per tant hi haurà dos angles (com a mínim, tot i que es pot veure que en són exactament dos) que facin que el projectil caigui a distància $d = 500$m, un a $(0, \pi/4)$ i l'altre a $(\pi/4, \pi/2)$. Amb `find_angle(pi/16, pi/4, 500, 50, 100, 1e-8, 1e-8)` obtenim un valor $\theta_1 = 0.464$ rad $= 26.6°$, i amb `find_angle(pi/2, pi/2, 500, 50, 100, 1e-8, 1e-8)` obtenim $\theta_2 = 1.107$ rad $= 63.4°$.