Problema 11

Dean Zhu

November 19, 2018

Considerem un problema de classificació en dues classes, en les quals es disposa de les probabilitats de cada classe $P(\omega_1)$ i $P(\omega_2)$. Considerem tres possibles regles per classificar un objecte:

1. (R1) Predir la classe més probable
2. (R2) Predir la classe ω_1 amb probabilitat $P(\omega_1)$
3. (R3) Predir la classe ω_1 amb probabilitat $P(0.5)$

Es demana:

1. Donar les probabilitats d'error $\mathrm{P_i}$(error) de les tres regles, i = 1,2,3
2. Demostrar que $P_1(error) \leq P_2(error) \leq P_3(error)$

---

1. La probabilitat d'error de qualsevol de les tres regles és:

$$P_i(error) = P(choose(\omega_1)|R_i) * P(\omega_2) + P(choose(\omega_2)|R_i) * P(\omega_1)$$

A més: $P(choose(\omega_2)|R_i) = 1 - P(choose(\omega_1)|R_i))$

Per les tres regles els valors obtinguts són:
(R1)

$$\begin{aligned} P_1(error) = \quad & P(choose(\omega_1)|R_1) * P(\omega_2) + (1 - P(choose(\omega_1)|R_1)) * P(\omega_1) \\ & On : P(choose(\omega_1)|R_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } P(\omega_1) \geq P(\omega_2) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \end{aligned}$$

Per tant $P_1(error) = min(P(\omega_1), P(\omega_2))$
(R2)

$$\begin{aligned} P_2(error) \quad & = P(choose(\omega_1)|R_2) * P(\omega_2) + (1 - P(choose(\omega_1)|R_2)) * P(\omega_1) = \\ & = P(\omega_1)P(\omega_2) + (1 - P(\omega_1))P(\omega_1) = \\ & = P(\omega_1)P(\omega_2) + P(\omega_2)P(\omega_1) = \\ & = 2P(\omega_1)P(\omega_2) \end{aligned}$$

(R3)

$$\begin{aligned} P_3(error) \quad & = P(choose(\omega_1)|R_3) * P(\omega_2) + (1 - P(choose(\omega_1)|R_3)) * P(\omega_1) \\ & = 0'5 * (P(\omega_2) + P(\omega_1))) = 0'5 \end{aligned}$$

2. Anem a comprovar les desigualtats, sense pèrdua de generalitat, suposarem que $P(\omega_1) \geq P(\omega_2)$. Notem que a la regla 2, també prediem la classe ω_2 amb probabilitat $P(\omega_2)$.

   Donat que:

$$P(\omega_1) \geq P(\omega_2) \implies 2P(\omega_1) = P(\omega_1) + P(\omega_1) \geq P(\omega_2) + P(\omega_1) = 1 \implies 2P(\omega_1) \geq 1$$

$$P_1(error) = P(\omega_2) \leq 2P(\omega_1)P(\omega_2) = P_2(error) \implies P_1(error) \leq P_2(error)$$

   Anem a veure que la probabilitat d'error de la regle 2 es menor igual a 0'5:

$$P_2(error) = 2P(\omega_1)P(\omega_2) = 2(1 - P(\omega_2))P(\omega_2) = 2(P(\omega_2) - P(\omega_2)^2)$$

   Sigui $f(x) = x - x^2$, el máxim de aquesta funció és:

$$\frac{df}{dx} = 1 - 2x, \quad \tilde{x} = 0'5, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = -2 > 0$$

   Al màxim es troba a $\tilde{x} = 0'5$ i $f(\tilde{x}) = 0'25$. Per tant:

$$P_2(error) = 2(P(\omega_2) - P(\omega_2)^2) \leq 2*(0'25) = 0'5 = P_3(error) \implies P_2(error) \leq P_3(error)$$