5. Teoria qualitativa

Estabilitat de Lyapunov

$$\left[x' = f(x,t) \longrightarrow \begin{matrix} x' = f(x,\theta) \\ \theta' = 1 \end{matrix} \right]$$

Considerem sistemes autònoms $x' = f(x)$. Recordem que
$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0)$

Suposarem $t_0 = 0$ i escriurem $\varphi(t, 0, x_0) =: \varphi(t, x_0)$

<u>Def</u>: <u>Punt fix</u> o <u>punt d'equilibri</u> a p si $f(p) = 0$, és a dir: $\varphi(t, p) = p$

<u>Def</u>: $x' = f(x)$, $f(p) = 0$:

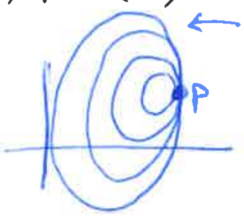
(1) Diem que p és <u>estable</u> si $\forall\, U_p \ni p$ entorn, $\exists\, V_p \ni p$ entorn tal que $\forall q \in V_p$, $\varphi(t, q)$ està definit $\forall t \geq 0$ i $\varphi(t, q) \in U_p$

(2) Diem que p és <u>assimptòticament estable</u> si:

i) p és estable

ii) $\exists\, W_p \ni p$ entorn tq $q \in W_p$ i $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t, q) = p$

<u>Obs</u>: $(ii) \not\Rightarrow (i)$



$\leftarrow$ podem anar tant llung com vulguem
$\Longrightarrow$ no estable.

(3) p és inestable si no és estable.

Ex: Coord polars:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r) \\ \dot{\theta} = \sin^2 \theta/2 \end{cases}$$

$r=1$, corba invariant

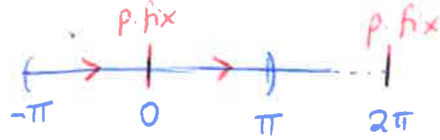
punts fixos: $r=1$, $\theta = 0$

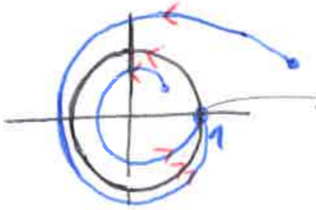
A més, $(x,y) = (0,0)$ també és fix

El radi: $0 < r < 1$, $\dot{r} > 0$

$r > 1$, $\dot{r} < 0$

L'angle: $\dot{\theta} = \sin^2 \theta/2 > 0$





punt inestable

Obs: L'òrbita no és periòdica, ja que no dóna voltes per tenir un punt fix

Criteris d'estabilitat

2 criteris segons com és $Df(p)$:

⊛ **Def:** $x' = f(x)$, $f(p) = 0$

Diem que p és hiperbòlic si $\text{Spec}(Df(p)) \subset \{\text{Re}\,\lambda \neq 0\}$

Prop: $x' = f(x)$ $\mathcal{C}^1$ i un punt fix p hiperbòlic. Llavors:

i) Si $\text{Spec}(Df(p)) \subset \{\text{Re}\,\lambda < 0\} \Longrightarrow p$ assimptòticament estable

ii) Si $\exists$ vap λ : $\text{Re}\,\lambda > 0 \Longrightarrow p$ inestable

Corol·lari: $x' = Ax + g(x,t)$ i $g(x,t) = o(\|x\|)$ unif. en t.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \|x\| < \delta \Longrightarrow \|g(x,t)\| < \varepsilon \|x\| \ \forall t$

Suposem f i g $\mathcal{C}^1$ i g definida $\forall t \in \mathbb{R}$.

Llavors:

1) Si $\text{Spec}\, A \subset \{\text{Re}\,\lambda < 0\} \Longrightarrow x = 0$ és assimptòticament estable

2) Si $\exists \lambda \in \text{Spec}\, A : \text{Re}\,\lambda > 0 \Longrightarrow x = 0$ és inestable.

Obs: Vegem com hem passat de $\dot{x} = f(x) \rightsquigarrow \dot{x} = Ax + g(x)$

$$\dot{x} = f(x) = \cancel{f(p)}^{0} + Df(p)(x-p) + \underbrace{\Theta(\|x-p\|)}_{\tilde{g}(x)} = Df(p)(x-p) + \tilde{g}(x)$$

Definim $y = x - p$:

$$\dot{y} = \dot{x} = \underbrace{Df(p)}_{A}\, y + \tilde{g}(y+p)$$

⊛ Def: Funció de Lyapunov. $x' = f(x)$, $f \in \mathcal{C}^1$, $f(p) = 0$.

Teorema $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Direm que $V: B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $p \in B \subset U$ és una funció de Lyapunov si:

$V(x) > 0 \quad \forall x \in B \setminus \{p\}$ i $V(p) = 0$ i, aleshores:

i) $V'(x) := DV(x) \cdot f(x) \leq 0 \quad \forall x \in B$.

Llavors, p és estable

A més, si enlloc de ii) en té:

ii) $V'(x) < 0 \quad \forall x \in B \setminus \{p\}$

Llavors, p és assimptòticament estable i a V li diem funció de Lyapunov estricte.

$DV(x)\, f(x) = \|DV(x)\|\, \|f(x)\| \cos\alpha \leq 0$

$\Longrightarrow \cos\alpha \leq 0 \Rightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{\alpha > \pi/2}$

Dem:

i) Volem veure $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: x_0 \in B_\delta = \{\|x-p\| < \delta\}$

$\Longrightarrow \varphi(t; x_0)$ està definida $\forall t \geq 0$ i $\varphi(t, x_0) \in B_\varepsilon$

Fixat $\varepsilon > 0$, sigui $m = \min\limits_{x \in \partial B_\varepsilon} V(x) > 0$.

Com $V(p) = 0 \Longrightarrow \exists \delta > 0: V(x) < m$ si $x \in B_\delta$.

Sigui $x_0 \in B_\delta$: Prenem $\varphi(t; x_0)$ la solució maximal a B_ε, és a dir, $\exists (\omega_-, \omega_+): \forall t \in (\omega_-, \omega_+)$, $\varphi(t, x_0) \in B_\varepsilon$

$\longrightarrow$

$f: U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}\times B_\varepsilon$

! Si $\omega_+ < +\infty$: $\lim_{t\to\omega_+} \varphi(t,x_0) \in \partial B_\varepsilon$

En aquest cas, $\varphi(\omega_+, x_0) \in \partial B_\varepsilon \implies \boxed{V(\varphi(\omega_+, x_0)) \geq m}$

D'altra banda, Definim $v(t) = V(\varphi(t,x_0))$.

$$\frac{d}{dt} v(t) = DV(\varphi(t,x_0))\cdot f(\varphi(t,x_0)) \leq 0 \implies \varphi(t,x_0)\in B_\varepsilon$$

hipòtesi

$$\implies \frac{d}{dt} \leq 0 \quad \forall t\in(\omega_-, \omega_+) \implies v(t) \leq v(0) = V(x_0) < m$$

si $t \longrightarrow$: $v(\omega_+) = \boxed{V(\varphi(\omega_+, x_0)) < m}$

!!

Obs: $v(t) = h(\varphi(t; x_0))$. $x_0 \in (\overset{\circ}{\{h(x)=i\}})$

Estudiant $v(t)$ podem veure que $\overset{\circ}{\{h(x)=i\}}$ és invariant per $t\geq 0$

Estabilitat al voltant d'òrbites periòdiques

$x' = f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = \gamma(t+T)$

$$y = x - \gamma(t) \implies y' = f(\gamma(t)+y) - f(\gamma(t))$$
$$= Df(\gamma(t))y + g(y,t),\quad g(y,t) = o(\|y\|)$$

Recordem: Floquet: $Df(\gamma(t))$ matriu T-periòdica

$\implies \exists$ canvi T-periòdic tq

$\dot{y} = Df(\gamma(t))y \longrightarrow \dot{z} = Bz$

Si fem el canvi a $\dot{y} = Df(\gamma(t))y + g(y,t) \longrightarrow$

$$\longrightarrow \dot{z} = Bz + \tilde{g}(z,t),\quad \tilde{g}(z,t) = o(\|z\|)$$

Observem però que la matriu B té vap 0!

Considerem $\dot{y} = Df(\gamma(t))\, y = Df(\varphi(t,p)) \cdot y$ $\hookrightarrow$ variacionals

$$\left[\text{La m.f. } P(t)\, e^{Bt} = D_2 \varphi(t,p)\right]$$

$$B \text{ vap } 0 \iff D_2 \varphi(t,p) \text{ vap } 1$$

EX