Càlcul en una variable

Carles Padró
Departament de Matemàtica Aplicada IV, UPC

Setembre de 2015

Índex

Capítol 1

Els nombres reals. Successions

1.1 Els nombres reals

1.1.1 La recta real

Necessitem un sistema de nombres que ens sigui útil per representar la realitat. Concretament, per mesurar magnituds físiques com ara la distància, el temps, la intensitat d'un corrent elèctric, l'amplitud i la freqüència d'una ona, etc. Per mesurar aquestes magnituds haurem de fixar una unitat (metre, segon, amper…) i prendre'n fraccions. Si ens centrem en el problema de mesurar distàncies, veiem que hem de cercar un sistema de nombres que ens permeti representar qualsevol punt d'una recta una vegada fixats l'origen i la unitat de mesura, és a dir, els punts corresponents als nombres 0 i 1.

Evidentment, els conjunts $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ dels *nombres naturals*, $\mathbf{Z}$ dels *nombres enters* i $\mathbf{Q}$ dels *nombres racionals o fraccionaris* estaran continguts al sistema de nombres que estem cercant. Veiem però que no són suficients ja que, per exemple, no ens serveixen per mesurar la llargada de la diagonal d'un quadrat amb costat 1.

Proposició 1.1.1 No existeix cap nombre racional $x \in \mathbf{Q}$ tal que $x^2 = 2$. És a dir, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Demostració. Suposem que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$, és a dir, que existeixen enters $p, q \in \mathbf{Z}$ tals que $\sqrt{2} = p/q$, essent p/q una fracció irreduïble. Llavors, $2q^2 = p^2$, d'on deduïm que p^2 és múltiple de 2 i, per tant, també n'és p. Així doncs, p^2 és múltiple de 4 i, com que $p^2 = 2q^2$, tenim que q ha de ser múltiple de 2, el que contradiu que p/q és una fracció irreduïble. En conclusió, $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. ∎

1.1.2 Descripció axiomàtica dels nombres reals

En aquest apartat, presentem les propietats (axiomes) que caracteritzen el sistema de nombres que necessitem. Parlem de *caracterització* ja que es pot demostrar (tot i que no ho farem aquí) que existeix un únic objecte matemàtic que compleix aquests axiomes. Aquest objecte matemàtic és la tupla $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$, és a dir, el conjunt $\mathbf{R}$ dels *nombres reals*, que compleix $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, amb les operacions suma i producte i la relació d'ordre que s'estenen de $\mathbf{Q}$. Comencem amb les propietats relacionades amb les dues operacions internes, *suma* i *producte*, que són l'extensió a $\mathbf{R}$ de la suma i el producte de nombres racionals.

(R1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ per a qualssevol $x, y, z \in \mathbf{R}$.

(R2) $x + 0 = 0 + x = x$ per a tot $x \in \mathbf{R}$.

(R3) Per a tot $x \in \mathbf{R}$, existeix un nombre real $-x \in \mathbf{R}$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(R4) $x + y = y + x$ per a qualssevol $x, y \in \mathbf{R}$.

Les propietats **(R1)**–**(R4)** es resumeixen dient que $(\mathbf{R}, +)$ és un *grup commutatiu.*

(R5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ per a qualssevol $x, y, z \in \mathbf{R}$.

(R6) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ per a tot $x \in \mathbf{R}$.

(R7) $x \cdot y = y \cdot x$ per a qualssevol $x, y \in \mathbf{R}$.

(R8) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ per a qualssevol $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Per les propietats **(R1)**–**(R8)** diem que $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ és un *anell commutatiu.*

(R9) Per a tot nombre real $x \neq 0$, existeix $x^{-1} \in \mathbf{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Les propietats **(R5)**, **(R6)**, **(R7)** i **(R9)**, indiquen que $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ és un *grup commutatiu.* Les propietats **(R1)**–**(R9)** es resumeixen dient que $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ és un *cos commutatiu.* Tenim de manera natural una *relació d'ordre* en els nombres racionals, que s'estén a $\mathbf{R}$. De fet, és l'ordenació que s'obté de manera natural si tenim en compte que els nombres reals representen els punts d'una recta. Aquesta relació d'ordre té les propietats següents.

(R10) $x \leq x$ per a tot $x \in \mathbf{R}$.

(R11) Si x, y són nombres reals amb $x \leq y$ i $y \leq x$, aleshores $x = y$.

(R12) Si x, y, z són nombres reals amb $x \leq y$ i $y \leq z$, aleshores $x \leq z$.

(R13) $x \leq y$ o bé $y \leq x$ per a tot $x, y \in \mathbf{R}$.

Les propietats **(R10)**–**(R13)** indiquen que $(\mathbf{R}, \leq)$ és un *conjunt totalment ordenat*. A partir d'ara usarem els símbols $\geq, <, >$ amb el significat natural que es dedueix de la relació d'ordre $\leq$. Tenim també dues propietats relacionades amb la compatibilitat de la relació d'ordre amb les operacions.

(R14) Si x, y són nombres reals amb $x \leq y$, aleshores $x + z \leq y + z$ per a tot $z \in \mathbf{R}$.

(R15) Si x, y, z són nombres reals amb $x \leq y$ i $z \geq 0$, aleshores $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Les propietats **(R1)**–**(R15)** es resumeixen dient que $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ és un *cos ordenat.*

(R16) Per a qualsevol parell de nombres reals $x, y \in \mathbf{R}$ amb $x, y > 0$, podem trobar un natural $n \in \mathbf{N}$ tal que $nx > y$.

La propietat **(R16)** és la *propietat arquimediana.* Les propietats **(R1)**–**(R16)** indiquen que $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ és un *cos ordenat arquimedià*.

Proposició 1.1.2 $(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leq)$ també compleix les propietats **(R1)**–**(R16)** i, per tant, és també un cos ordenat arquimedià.

Com hem dit abans, els nombres reals han de contenir els nombres racionals. Això es recull en el següent axioma.

(R17) $(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leq)$ és un subcòs ordenat de $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$.

Ens falta afegir ara un únic axioma, que ens distingirà els nombres reals dels racionals: la *completesa* dels nombres reals. Precisament per aquest darrer axioma podem afirmar que els nombres reals representen *tots* els punts de la recta. Però abans d'introduir aquest axioma hem de definir alguns conceptes.

Definició 1.1.3 Sigui $A \subset \mathbf{R}$.

- Direm que A és *fitat superiorment* si existeix un nombre real $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que $\alpha \geq x$ per a tot $x \in A$. En aquest cas, direm que α és una *fita superior* de A.
- Direm que A és *fitat inferiorment* si existeix un nombre real $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que $\alpha \leq x$ per a tot $x \in A$. En aquest cas, direm que α és una *fita inferior* de A.
- Direm que A és *fitat* si és fitat inferiorment i superiorment.

Definició 1.1.4 Direm que $\alpha \in \mathbf{R}$ és el *suprem* del conjunt $A \subset \mathbf{R}$, i escriurem $\alpha = \sup A$, si

- α és una fita superior de A.
- Si $\alpha' < \alpha$, existeix un $x \in A$ tal que $\alpha' < x \leq \alpha$.

Definició 1.1.5 Direm que $\alpha \in \mathbf{R}$ és l'*ínfim* del conjunt $A \subset \mathbf{R}$, i escriurem $\alpha = \inf A$, si

- α és una fita inferior de A.
- Si $\alpha' > \alpha$, existeix un $x \in A$ tal que $\alpha \leq x < \alpha'$.

Observació 1.1.6 El suprem d'un conjunt, si existeix, és únic. Igualment l'ínfim.

Definició 1.1.7 Sigui $A \subset \mathbf{R}$.

- Direm que $M \in \mathbf{R}$ és el *màxim* de A, i escriurem $M = \max A$, si $M \in A$ i $M \geq x$ per a tot $x \in A$.
- Direm que $m \in \mathbf{R}$ és el *mínim* de A, i escriurem $m = \min A$, si $m \in A$ i $m \leq x$ per a tot $x \in A$.

Observació 1.1.8 Sigui $A \subset \mathbf{R}$.

- Si $M = \max A$, aleshores, $M = \sup A$. Si $\alpha = \sup A$ i $\alpha \in A$, aleshores, $\alpha = \max A$.
- Si $m = \min A$, aleshores, $m = \inf A$. Si $\alpha = \inf A$ i $\alpha \in A$, aleshores, $\alpha = \min A$.

Observació 1.1.9 El suprem d'un conjunt és el mínim de les seves fites superiors. L'ínfim d'un conjunt és el màxim de les seves fites inferiors.

Amb això podem enunciar el darrer axioma dels nombres reals:

(R18) Si $A \subset \mathbf{R}$ és no buit i fitat superiorment, aleshores existeix $\alpha \in \mathbf{R}$ amb $\alpha = \sup A$.

La propietat **(R18)** ens dóna la *completesa* dels nombres reals. Les propietats **(R1)**–**(R16), (R18)** indiquen que $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ és un *cos ordenat arquimedià complet.* Finalment, tenim que els axiomes **(R1)**–**(R18)** caracteritzen els nombres reals.

Teorema 1.1.10 $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ és l'*únic* cos ordenat arquimedià complet que conté els racionals com a subcòs ordenat.

1.1.3 Altres propietats dels nombres reals

Hem donat els axiomes que ens caracteritzen els nombres reals, el sistema de nombres que utilitzarem per a construir models matemàtics que ens permetin descriure fenòmens físics. Totes les altres propietats dels nombres reals, entre elles les que estudiarem en aquest curs, es dedueixen d'aquests axiomes. Els exercicis que es proposen a continuació en són un exemple.

Definició 1.1.11 Un nombre real x és *positiu* si $x > 0$ is és *negatiu* si $x < 0$. El nombre real 0 no és ni negatiu ni positiu. Els nombres amb $x \geq 0$ (rspectivament, $x \leq 0$) s'anomenen *no negatius* (respectivament, *no positius*).

Exercici 1.1.12 A partir dels axiomes dels nombres reals, proveu les propietats següents.

1. $0 \cdot x = 0$ per a tot $x \in \mathbf{R}$.
2. $(-1) \cdot x = -x$ per a tot $x \in \mathbf{R}$.
3. Si $x > 0$, aleshores $-x < 0$.
4. Si $x < y$, aleshores $-y < -x$.
5. Si $x < 0$ i $y > 0$, aleshores $xy < 0$.
6. Si $x < 0$ i $y < 0$, aleshores $xy > 0$.
7. Si $0 \leq x < y$, aleshores $x^2 < y^2$.

Exercici 1.1.13 Sigui $A = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 \leq 2\}$. Proveu que A és no buit i fitat superiorment. Sigui $\alpha = \sup A$. Proveu que $\alpha^2 = 2$. En particular, tenim que $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$.

Proposició 1.1.14 $(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leq)$ no compleix la propietat **(R18)**. Per tant, $(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leq)$ és un cos ordenat arquimedià *no complet*.

Demostració. El conjunt $A = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 \leq 2\} \subset \mathbf{Q}$ és no buit i fitat superiorment i, en canvi, per la Proposició 1.1.1 i l'Exercici 1.1.13, no existeix $\alpha \in \mathbf{Q}$ tal que $\alpha = \sup A$. ■

Exercici 1.1.15 Proveu que, si $A \subset \mathbf{R}$ és no buit i fitat inferiorment, aleshores existeix $\alpha \in \mathbf{R}$ amb $\alpha = \inf A$.

Exercici 1.1.16 Proveu que, per a tot nombre real $x \in \mathbf{R}$, existeix un únic nombre enter $n \in \mathbf{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$. Aquest nombre s'anomena la *part entera* de x, i s'escriu $[x]$.

Definició 1.1.17 Els elements de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ s'anomenen *nombres irracionals*. Així doncs, tenim una partició del nombres reals en *nombres racionals* i *nombres irracionals*.

Teorema 1.1.18 Siguin $x, y \in \mathbf{R}$ amb $x < y$. Aleshores, existeixen $\alpha \in \mathbf{Q}$ i $\beta \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tals que $x < \alpha < y$ i $x < \beta < y$. Tenim doncs que entre dos reals qualssevol hi ha infinits nombres racionals i infinits nombres irracionals.

Demostració. Siguin $x, y \in \mathbf{R}$ amb $x < y$. Per la *propietat arquimediana* dels nombres reals **(R16)**, existeix $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > 1/(y - x)$. Per l'Exercici 1.1.16, existeix un únic nombre enter $m \in \mathbf{Z}$ tal que

$$\frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}.$$

Vegem que $\alpha = m/n$ és un nombre racional que satisfà $x < \alpha < y$. En efecte, si no fos així, tindríem $y \leq m/n$ i, en conseqüència,

$$y - x \leq \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} = \frac{1}{n},$$

una contradicció amb el fet que $n > 1/(y-x)$.

Considerem ara l'únic enter $m' \in \mathbf{Z}$ tal que

$$\frac{m'-1}{\sqrt{2}\,n} \leq x < \frac{m'}{\sqrt{2}\,n}.$$

Donat que $\sqrt{2}\,n > 1/(y-x)$, podem utilitzar el mateix argument per provar que el nombre irracional $\beta = m'/(\sqrt{2}\,n)$ és tal que $x < \beta < y$. ■

Definició 1.1.19 Un *interval* en $\mathbf{R}$ és qualsevol conjunt d'algun dels tipus que es donen a continuació. Donats $a, b \in \mathbf{R}$ amb $a < b$, considerem els subconjunts de $\mathbf{R}$:

- $[a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$ (*interval tancat*).
- $(a,b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ (*interval obert*).
- $(a,b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$.
- $[a,b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$.
- Per als intervals anteriors, que són subconjunts fitats de $\mathbf{R}$, definim la *longitud de l'interval* com $\ell(I) = b - a$.
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}$.
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} : x < b\}$.
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x\}$.
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : a < x\}$.
- $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$.

Exercici 1.1.20 Un conjunt $I \subset \mathbf{R}$ és un interval si i només si se satisfà la propietat següent:

- Si x, y, z són nombres reals amb $x \leq z \leq y$ i $x, y \in I$, aleshores $z \in I$.

Definició 1.1.21 Sigui $a \in \mathbf{R}$. Definim el *valor absolut* de a:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Proposició 1.1.22 Propietats del valor absolut.

- $|a| \geq 0$. A més a més, $|a| = 0$ si i només si $a = 0$.
- $|ab| = |a| \cdot |b|$.
- Sigui $c \geq 0$. Aleshores $|a| \leq c$ si i només si $-c \leq a \leq c$. En particular, $-|a| \leq a \leq |a|$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$.

- $|a-b| \leq |a| + |b|$.
- $|\,|a| - |b|\,| \leq |a-b|$.

Demostració. Només demostrarem que $|\,|a|-|b|\,| \leq |a-b|$. Observem primer que $|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$ i, per tant, $|a| - |b| \leq |a-b|$. D'altra banda, de $|b| = |b-a+a| \leq |b-a| + |a|$ es deudeix que $|b| - |a| \leq |a-b|$. Així doncs, $|\,|a| - |b|\,| \leq |a-b|$. ■

Exercici 1.1.23 Demostreu les altres propietats de la Proposició 1.1.22.

Definició 1.1.24 Sigui E un conjunt. Una *distància* en E és una aplicació $d : E \times E \to \mathbf{R}$ tal que, per a qualssevol $x, y, z \in E$,

1. $d(x,y) \geq 0$. A més a més, $d(x,y) = 0$ si i només si $x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$.
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Un *espai mètric* és un parell (E,d), on d és una distància en el conjunt E.

Proposició 1.1.25 L'aplicació $d\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida per $d(x,y) = |y-x|$ és una distància en $\mathbf{R}$. Tenim doncs que $(\mathbf{R}, d)$ és un espai mètric.

Demostració. Les propietats 1 i 2 de distància es comproven fàcilment. Per comprovar la 3, $d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$. ■

1.2 Successions de nombres reals

1.2.1 Convergència i límit

Definició 1.2.1 Una *successió de nombres reals* és una aplicació $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. És a dir, una sucessió assigna a cada natural n un nombre real $a_n = a(n)$, el *terme n-èsim* de la successió, Normalment, usarem la notació (a_n) per a designar una successió.

Observació 1.2.2 Una successió es pot definir a partir de l'expressió del seu *terme general*. Per exemple
$$a_n = \frac{n-1}{n^2+1}.$$
Algunes vegades aquesta expressió no serà vàlida per a alguns valors de n. Per exemple, amb l'expressió
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
per al terme general, el terme a_0 no està definit. En situacions com aquesta, farem servir la notació $(a_n)_{n\geq 1}$ o, més generalment, $(a_n)_{n\geq k}$ per a algun natural k. No sempre es té una expressió per al terme general d'una successió. De fet, hi ha altres maneres de definir una successió. Per exemple, per *recurrència*, com en

- $a_0 = 1$, $a_1 = 1$,
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ per a tot $n \geq 2$.

La successió (a_n) determinada per aquesta recurrència s'anomena *successió de Fibonacci*.

Definició 1.2.3 (Operacions amb successions) Siguin (a_n), (b_n) successions de nombres reals.

- *Suma.* $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$.
- *Producte per escalar.* $\lambda \cdot (a_n) = (\lambda \cdot a_n)$.
- *Producte.* $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$.
- *Quocient.* Si $b_n \neq 0$ per a tot $n \in \mathbf{N}$, posem $\dfrac{(a_n)}{(b_n)} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$.

Definició 1.2.4 Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Direm que la successió (a_n) és *convergent* si existeix un nombre real $L \in \mathbf{R}$ tal que

- per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $d(a_n, L) = |\, L - a_n\,| < \varepsilon$ per a tot $n \geq n_0$.

En aquest cas, direm que L és el *límit* de la successió (a_n) i escriurem $\lim a_n = L$ o bé $(a_n) \to L$.

Observem que una successió té límit L si i només si, per a cada $\varepsilon > 0$, com a molt un nombre finit de termes de la successió no pertanyen a l'interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Proposició 1.2.5 El límit d'una successió, si existeix, és únic.

Demostració: Sigui (a_n) una successió de nombres reals i siguin $L_1, L_2 \in \mathbf{R}$ nombres reals tals que ambdós són límits de (a_n). Sigui $\varepsilon > 0$ arbitrari.

- Com que $\lim a_n = L_1$, existeix $n_1 \in \mathbf{N}$ tal que $|L_1 - a_n| < \varepsilon/2$ per a tot $n \geq n_1$.
- Com que $\lim a_n = L_2$, existeix $n_2 \in \mathbf{N}$ tal que $|L_2 - a_n| < \varepsilon/2$ per a tot $n \geq n_2$.

En conseqüència, si $n \geq \max\{n_1, n_2\}$,

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |L_2 - a_n| < \varepsilon.$$

Hem provat doncs que $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ per a tot $\varepsilon > 0$ i, per tant, $L_1 = L_2$. ∎

Exercici 1.2.6 Una successió (a_n) és *constant* si existeix $c \in \mathbf{R}$ tal que $a_n = c$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. Proveu que tota successió constant és convergent.

Exercici 1.2.7 Proveu que la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ definida per $a_n = 1/n$ és convergent amb límit $L = 0$.

Definició 1.2.8 Una successió (a_n) és *fitada (superiorment, inferiorment)* si el conjunt

$$\{a_n \,:\, n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$$

dels seus valors és fitat (superiorment, inferiorment).

Proposició 1.2.9 Tota successió convergent és fitada.

Demostració. Siguin (a_n) una successió convergent i $L = \lim a_n$. Llavors existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|L - a_n| < 1$ si $n \geq n_0$. Així doncs, $|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$ per a tot $n \geq n_0$. Per tant, si prenem $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |L|\}$, tindrem que $|a_n| \leq M$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. Hem provat doncs que la successió (a_n) és fitada. ∎

Exercici 1.2.10 Doneu exemples de successions fitades no convergents.

Exercici 1.2.11 Proveu que la successió (a_n) és convergent amb límit L si i només si la successió $(|a_n - L|)$ és convergent amb límit 0.

Exercici 1.2.12 Sigui (a_n) una successió convergent amb límit L. Proveu que la successió $(|a_n|)$ és convergent amb límit $|L|$.

Exercici 1.2.13 (Criteri de compressió) Siguin (a_n), (b_n) successions convergents amb $\lim a_n = \lim b_n = L$, i sigui (c_n) una successió tal que $a_n \le c_n \le b_n$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. Proveu que (c_n) és convergent amb límit L.

Exercici 1.2.14 Siguin (a_n), (b_n) successions de nombres reals amb $\lim a_n = 0$ i (b_n) fitada. Proveu que $\lim a_n b_n = 0$.

Proposició 1.2.15 Siguin (a_n), (b_n) successions convergents de nombres reals amb $\lim a_n = L_1$ i $\lim(b_n) = L_2$. Aleshores

1. $(a_n + b_n)$ és convergent i $\lim(a_n + b_n) = L_1 + L_2$.
2. $(\lambda \cdot a_n)$ és convergent i $\lim(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot L_1$.
3. $(a_n \cdot b_n)$ és convergent i $\lim(a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$.
4. Si $b_n \neq 0$ per a tot $n \in \mathbf{N}$ i, a més, $L_2 \neq 0$, aleshores (a_n/b_n) és convergent i $\lim \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{L_1}{L_2}$.
5. Si $a_n \le b_n$ per a tot $n \in \mathbf{N}$, aleshores $L_1 \le L_2$.
6. Si $a_n < b_n$ per a tot $n \in \mathbf{N}$, aleshores $L_1 \le L_2$.

Demostració. Demostrem separadament cada un dels apartats.

1. Si $\lim a_n = L_1$ i $\lim b_n = L_2$, aleshores, per a tot $\varepsilon > 0$,

   - existeix $n_1 \in \mathbf{N}$ tal que $|L_1 - a_n| < \varepsilon/2$ per a tot $n \ge n_1$.
   - existeix $n_2 \in \mathbf{N}$ tal que $|L_2 - a_n| < \varepsilon/2$ per a tot $n \ge n_2$.

   Si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, llavors per a tot $n \ge n_0$ es compleix

   $$|(a_n + b_n) - (L_1 + L_2)| \le |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   Per tant, $\lim(a_n + b_n) = L_1 + L_2$.

2. L'enunciat és trivialment cert si $\lambda = 0$. Suposem que $\lambda \neq 0$. Com que $\lim a_n = L_1$, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|a_n - L_1| \le \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$ per a tot $n \ge n_0$. Per tant, $|\lambda a_n - \lambda L_1| = |\lambda|\,|a_n - L_1| < |\lambda| \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$ per a tot $n \ge n_0$. En conseqüència, $\lim(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot L_1$.

3. Suposem que $\lim a_n = L_1$ i $\lim b_n = L_2$. La successió $(|b_n|)$ és fitada perquè (b_n) és convergent. Observem que

   $$0 \le |a_n b_n - L_1 L_2| = |a_n b_n - L_1 b_n + L_1 b_n - L_1 L_2| \le |a_n - L_1|\,|b_n| + |L_1|\,|b_n - L_2|.$$

   Com que $\lim |a_n - L_1| = \lim |b_n - L_2| = 0$ i la successió $(|b_n|)$ és fitada, per la propietat anterior i els Exercicis 1.2.11 i 1.2.14, tenim que

   $$\lim |L_1|\,|b_n - L_2| = \lim |a_n - L_1|\,|b_n| = 0$$

   i, per tant, $\lim a_n b_n = L_1 L_2$.

4. Vegem en primer lloc que, si (b_n) és una successió convergent tal que $b_n \neq 0$ per a tot $n \in \mathbf{N}$ amb $\lim b_n = L_2 \neq 0$, aleshores la successió $(1/b_n)$ també és convergent i
$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{L_2}.$$
Com que $\lim |b_n| = |L_2|$, donat $k \in \mathbf{R}$ amb $0 < k < |L_2|$, existeix $n_1 \in \mathbf{N}$ tal que $k < |b_n|$ per a tot $n \geq n_1$. A més a més, com que $\lim b_n = L_2$, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_2 \in \mathbf{N}$ tal que $|b_n - L_2| < k\varepsilon|L_2|$ per a tot $n \geq n_2$. Per tant, per a tot $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ es compleix que
$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}\right| = \left|\frac{L_2 - b_n}{b_n L_2}\right| = \frac{|L_2 - b_n|}{|b_n L_2|} \leq \frac{|L_2 - b_n|}{k|L_2|} < \frac{\varepsilon k|L_2|}{k|L_2|} = \varepsilon$$
amb el que obtenim que $\lim 1/b_n = 1/L_2$.

Finalment, podem aplicar la propietat anterior sobre el límit del producte de dues successions convergents per provar que
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}.$$

5. Provarem per reducció a l'absurd que $L_1 \leq L_2$ si $a_n \leq b_n$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. Suposem doncs que $L_2 < L_1$ i prenem $M = (L_1 + L_2)/2$, el punt mig de l'interval $[L_2, L_1]$.

   - Com que $\lim a_n = L_1$, existeix $n_1 \in \mathbf{N}$ tal que $a_n > M$ per a tot $n \geq n_1$.
   - Com que $\lim b_n = L_2$, existeix $n_2 \in \mathbf{N}$ tal que $b_n < M$ per a tot $n \geq n_2$.

   En conseqüència, $a_n > b_n$ per a tot $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$, una contradicció amb el fet que $a_n \leq b_n$ per a tot $n \in \mathbf{N}$.

6. És conseqüència de l'anterior. Observeu que encara que $a_n < b_n$ per a tot $n \in \mathbf{N}$, es pot donar que $L_1 = L_2$. Considereu per exemple les successions (a_n) i (b_n) definides per $a_n = 0$ i $b_n = 1/n$ per a tot $n \in \mathbf{N}$.

■

Definició 1.2.16 Una successió (a_n) de nombres reals és *monòtona creixent* si $a_n \leq a_{n+1}$ per a tot $n \in \mathbf{N}$, i és *estrictament creixent* si $a_n < a_{n+1}$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. Els termes *monòtona decreixent* i *estrictament decreixent* es defineixen anàlogament. Una successió és *monòtona* si és monòtona creixent o monòtona decreixent.

Teorema 1.2.17 Tota successió monòtona i fitada és convergent.

Demostració. Suposem que (a_n) és una successió monòtona creixent i fitada, això és, $a_n \leq a_{n+1}$ per a tot $n \in \mathbf{N}$ i existeix $k \in \mathbf{R}$ tal que $a_n \leq k$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. Així doncs, el conjunt $A = \{a_n : n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$ és no buit i fitat superiorment i, per la propietat **(R18)** dels nombres reals, existeix $\alpha \in \mathbf{R}$ tal que $\alpha = \sup A$.

Vegem que $\alpha = \lim a_n$. En efecte, donat $\varepsilon > 0$, per ser $\alpha = \sup A$ ha d'existir al menys un terme a_{n_0} de la successió tal que $\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq \alpha$. Com que la successió (a_n) és monòtona creixent, també es compleix que $\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha$ per a tot $n \geq n_0$. Així doncs, $\alpha = \lim a_n$. ■

Exercici 1.2.18 Doneu exemples de successions monòtones no convergents i de successions convergents no monòtones.

1.2.2 Límits infinits. Indeterminacions

Definició 1.2.19 Sigui (a_n) una successió de nombres reals.

- Direm que la successió (a_n) *tendeix a infinit* o *té límit infinit*, i escriurem $\lim a_n = \infty$, si, per a tot $M > 0$, existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|a_n| > M$ per a tot $n \geq n_0$.
- Direm que $\lim a_n = +\infty$ si, per a tot $M > 0$, existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $a_n > M$ per a tot $n \geq n_0$.
- Direm que $\lim a_n = -\infty$ si, per a tot $M > 0$, existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $a_n < -M$ per a tot $n \geq n_0$.

Exercici 1.2.20 Òbviament, cap successió amb límit infinit és fitada. Doneu exemples de successions no fitades que no tinguin límit infinit.

Exercici 1.2.21 Proveu que tota successió monòtona és convergent o té límit infinit.

Àlgebra de límits infinits

Les propietats dels límits infinits en relació a les operacions amb successions es resumeixen a la Taula 1.1.

1.2.3 Representació decimal dels nombres reals

Proposició 1.2.22 Donat $r \in \mathbf{R}$, considerem la successió (s_n) definida per

$$s_n = 1 + r + \cdots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

Aquesta successió és convergent si i només si $|r| < 1$ i, en aquest cas, $\lim s_n = 1/(1-r)$.

Demostració. Si $r = 1$, és obvi que la successió no és convergent. Si $r \neq 1$, tenim que

$$s_n = 1 + r + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

per a tot $r \in \mathbf{R}$ i $n \in \mathbf{N}$. Finalment, observem que $\lim r^n = 0$ si $|r| < 1$ i que la successió (a_n) amb $a_n = r^n$ no és convergent si $|r| > 1$ o bé $r = -1$. ■

Proposició 1.2.23 Sigui $(d_n)_{n\geq 1}$ una successió tal que $d_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ per a tot $n \geq 1$ i $d_n \neq 9$ per a infinits valors de n. Aleshores la successió (D_n) definida per

$$D_n = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k}$$

és convergent amb $0 \leq \lim D_n < 1$. Si $x = \lim D_n$, direm que (d_n) és la *representació decimal* del nombre real x i escriurem $x = 0, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$

Demostració. Clarament, la successió (s_n) és monòtona creixent i és fitada perquè

$$D_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

$(a_n) \to +\infty\ (-\infty, \infty),\ \lambda > 0 \Longrightarrow (\lambda a_n) \to +\infty\ (-\infty, \infty)$ $(a_n) \to +\infty\ (-\infty, \infty),\ \lambda < 0 \Longrightarrow (\lambda a_n) \to -\infty\ (+\infty, \infty)$
(a_n) fitada, $(b_n) \to +\infty\ (-\infty, \infty) \Longrightarrow (a_n + b_n) \to +\infty\ (-\infty, \infty)$
$(a_n) \to +\infty$, $(b_n) \to +\infty \Longrightarrow (a_n + b_n) \to +\infty$ $(a_n) \to -\infty$, $(b_n) \to -\infty \Longrightarrow (a_n + b_n) \to -\infty$
$(a_n) \to +\infty$, $(b_n) \to -\infty \Longrightarrow (a_n + b_n) \to$ **?** $(a_n) \to \infty$, $(b_n) \to \infty \Longrightarrow (a_n + b_n) \to$ **?** **Primera indeterminació:** $\infty - \infty$
$\exists k \in \mathbf{R}, n_0 \in \mathbf{N}$ tals que $\lvert a_n\rvert \geq k > 0\ \forall n \geq n_0,\ (b_n) \to \infty \Longrightarrow (a_n b_n) \to \infty$
$(a_n) \to 0$, $(b_n) \to \infty \Longrightarrow (a_n b_n) \to$ **?** **Segona indeterminació:** $0 \cdot \infty$
(a_n) fitada, $(b_n) \to \infty \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to 0,\ \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \to \infty$ $\exists k \in \mathbf{R}, n_0 \in \mathbf{N}$ tals que $\lvert a_n\rvert \geq k > 0\ \forall n \geq n_0,\ (b_n) \to 0 \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \infty,\ \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \to 0$
$(a_n) \to 0, (b_n) \to 0 \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to$ **?** $(a_n) \to \infty, (b_n) \to \infty \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to$ **?** **Tercera indeterminació:** $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Taula 1.1: Àlgebra de límits infinits

per a tot $n \geq 1$. Això implica que (D_n) és convergent amb $0 \leq \lim D_n \leq 1$. Prenem n_0 amb $d_{n_0} < 9$. Llavors, per a tot $n \geq n_0$,

$$D_n = \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_{n_0}+1}{10^{n_0}} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} - \frac{1}{10^{n_0}} \leq 1 - \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n_0}}.$$

Per tant, $\lim D_n \leq 1 - 1/10^{n_0} < 1$. ■

Proposició 1.2.24 Sigui $x \in [0,1)$ un nombre que admet una representació decimal (d_n). Aleshores

$$\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} \leq x < \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

per a tot $n \geq 1$.

Demostració. Com que (D_n) és creixent i $x = \lim D_n$, és clar que $D_n \leq x$. D'altra banda, $x - D_n$ és el límit de la successió (R_m) donada per

$$R_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{d_{n+k}}{10^{n+k}} = \frac{1}{10^n} \sum_{k=1}^{m} \frac{d_{n+k}}{10^k}$$

per a tot $m \geq 1$. Amb el mateix argument que hem usat per provar $\lim D_n < 1$, es demostra que $\lim R_m < 1/10^n$. ■

Teorema 1.2.25 Tots els nombres reals amb $0 \leq x < 1$ admeten una única representació decimal.

Demostració. Comencem provant la unicitat. Siguin $(d_n), (d'_n)$ representacions decimals per als nombres reals $x, x' \in [0,1)$, respectivament. Provarem que $x \neq x'$ si $(d_n) \neq (d'_n)$. Sigui n_0 el mínim natural amb $d_{n_0} \neq d'_{n_0}$. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $d_{n_0} < d'_{n_0}$. Aleshores

$$\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_{n_0}}{10^{n_0}} \leq x < \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{1}{10^{n_0}} \leq x'.$$

Per provar l'existència, usarem el resultat de l'Exercici 1.1.16. Donat $x \in [0,1)$, per a tot $n \geq 1$, existeix un únic nombre enter p_n tal que

$$p_n \leq 10^n x < p_n + 1.$$

Com que $p_n < 10^n$, tenim que

$$p_n = d_1 10^{n-1} + d_2 10^{n-2} + \cdots + d_{n-1} 10 + d_n$$

per a certs $d_1, \ldots, d_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Observem que $10p_n \leq p_{n+1} \leq 10^{n+1}x < 10p_n + 10$ perquè $10p_n$ és un nombre enter menor o igual que $10^{n+1}x$. Per tant,

$$p_{n+1} = d_1 10^n + d_2 10^{n-1} + \cdots + d_n 10 + d_{n+1}$$

per a cert $d_{n+1} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Hem provat doncs que existeix una successió (d_n) d'enters entre 0 i 9 tal que

$$\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} = \frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n + 1}{10^n} = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \tag{1.1}$$

per a tot $n \geq 1$. Només cal provar ara que hi ha infinits termes de la successió amb $d_n \neq 9$. En cas contrari, existeix $n_0 \geq 1$ tal que $d_n = 9$ per a tot $n \geq n_0 + 1$ i, per tant,

$$x = \lim D_n = D_{n_0} + \lim \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{d_k}{10^k} = D_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}} \lim \sum_{k=1}^{n-n_0} \frac{9}{10^k} = D_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}$$

una contradicció amb (1.1). ■

Observació 1.2.26 Així doncs, podem identificar el conjunt dels nombres reals amb $0 \leq x < 1$ amb el conjunt de les successions $(d_n)_{n\geq 1}$ tals que $d_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ per a tot $n \geq 1$ i $d_n \neq 9$ per a infinits valors de n.

Proposició 1.2.27 Sigui $x = 0, d_1 d_2 \ldots d_k \ldots \in [0, 1)$. Aleshores, $x \in \mathbf{Q}$ si i només si existeixen naturals k_0 i r tals que $d_{k+r} = d_k$ per a tot $k \geq k_0$, és a dir, si i només si la representació decimal de x és finita ($d_k = 0$ per a tot $k \geq k_0$) o bé periòdica a partir d'un cert lloc.

Demostració. Sigui $x = p/q \in \mathbf{Q}$, on $p, q \in \mathbf{Z}$ i $q > 0$. Les xifres decimals de x s'obtenen aplicant l'algorisme de la divisió amb dividend p i divisor q, afegint a cada pas un zero al residu sempre que aquest sigui no nul. Aquests residus seran sempre menors que q. Per tant, o bé un d'ells és zero (representació decimal finita) o bé ha d'aparèixer algun valor repetit (representació decimal periòdica).

Recíprocament, si $x = 0, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots \in \mathbf{R}$ és tal que existeixen naturals k_0 y r amb $d_{k+r} = d_k$ per tot $k \geq k_0$, llavors $10^{k_0+r}x - 10^{k_0}x$ és un nombre enter, d'on es dedueix que x és un nombre racional. ■

1.2.4 El nombre e

Comencem recordant, sense demostració, la fórmula del *binomi de Newton*.

Proposició 1.2.28 Si x, y són nombres reals i n és un nombre natural, aleshores

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= x^n + n x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-2} + n x y^{n-1} + y^n
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.29 Les successions (s_n) i $(t_n)_{n\geq 1}$ definides per

- $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$
- $t_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

són convergents i tenen el mateix límit.

Demostració. La successió (s_n) és creixent, i és fitada perquè, per a tot $n \in \mathbf{N}$,

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} \leq 3.$$

Per tant, (s_n) és convergent. Analitzem ara la successió (t_n). Per la fórmula del binomi de Newton,

$$t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Ara bé, per a $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \quad = \quad \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\, n^k}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \\ &= \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \\ &\leq \frac{1}{k!} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Com que

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

si $0 \leq k \leq n$, tenim que la successió (t_n) és creixent. A més a més, per la desigualtat (1.2), s'obté que $t_n \leq s_n \leq 3$ per a tot $n \geq 1$ i, per tant, la successió (t_n) és fitada. Així doncs, (t_n) és convergent i $\lim t_n \leq \lim s_n$, només ens cal provar que $\lim s_n \leq \lim t_n$ per completar la demostració. Fixat $m \in \mathbf{N}$, considerem la successió $(a_n)_{n\geq m}$ definida per

$$a_n = \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

per a tot $n \geq m$. Clarament, $\lim a_n = s_m$. Com que $a_n \leq t_n$, tenim que $s_m \leq \lim t_n$ per a tot $m \in \mathbf{N}$. Això implica que $\lim s_n \leq \lim t_n$. ∎

Definició 1.2.30 El *nombre* e és el límit comú de les sucessions introduïdes al Teorema 1.2.29, és a dir,

$$e = \lim \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Observació 1.2.31 Calculant els valors dels primers termes de la successió (s_n), podem obtenir valors aproximats per al nombre e. Per exemple $2,718281828459045$. A l'Exercici 1.2.32 es detalla com es realitza aquest càlcul. Podríem trobar aproximacions a partir de la successió (t_n), però la convergència és molt més lenta i, per tant, el càlcul és molt més costós.

Exercici 1.2.32 Proveu que, per a tot $n \geq 0$,

$$0 < e - \left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Trobeu el mínim natural n tal que $\dfrac{1}{(n+1)!}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) < 10^{-6}$ i doneu un valor aproximat del nombre e amb un error menor que 10^{-6}.

Teorema 1.2.33 El nombre e és irracional.

Demostració. Per l'Exercici 1.2.32, per a tot $n \in \mathbf{N}$,

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_n, \qquad \text{on } 0 < R_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Per tant, $e = A_n/n! + R_n$, on A_n és un nombre enter i $R_n < 3/(n+1)!$. Suposem que e és racional, és a dir, $e = p/q$ per a certs nombres enters positius p, q. Prenem $n \geq \max\{q, 2\}$. Aleshores $n!p/q = A_n + n!R_n$. Veiem que $n!p/q$ i A_n són nombres enters, però $n!R_n$ no és un enter perquè $0 < n!R_n < 3n!/(n+1)! = 3/(n+1) \leq 1$. Hem obtingut doncs una contradicció que demostra que el nombre e ha de ser irracional. ∎

1.2.5 Successions parcials. Límit superior i límit inferior d'una successió

Definició 1.2.34 Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Direm que una successió (b_k) és una *successió parcial* o *subsuccessió* de (a_n) si, per a tot $k \in \mathbf{N}$, $b_k = a_{n_k}$, on (n_k) és una successió estrictament creixent de nombres naturals.

Proposició 1.2.35 Totes les successions parcials d'una successió convergent són convergents. A més, si $\lim a_n = L$, aleshores $\lim a_{n_k} = L$ per a qualsevol successió parcial (a_{n_k}) de (a_n). Tenim el mateix per als límits infinits: si $\lim a_n = \infty$ $(+\infty, -\infty)$, aleshores $\lim a_{n_k} = \infty$ $(+\infty, -\infty)$ per a qualsevol successió parcial (a_{n_k}) de (a_n).

Demostració. Es dedueix directament de les definicions. ∎

Exercici 1.2.36 Un nombre real L és límit d'una successió parcial d'una successió donada si i només si, per a tot $\varepsilon > 0$, l'interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ conté infinits termes de la successió.

Teorema 1.2.37 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Tota successió fitada de nombres reals admet una successió parcial convergent.

Demostració. Sigui (a_n) uns successió fitada de nombres reals i siguin $a, b \in \mathbf{R}$ amb $a \le a_n \le b$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. Considerem el conjunt B format pels nombres reals c tals que l'interval $[c, +\infty)$ conté infinits termes de la sucessió (a_n). El conjunt B és no buit i fitat superiorment. Efectivament, $a \in B$ i b n'és una fita superior. Per tant, podem prendre $\beta = \sup B$. Per finalitzar la demostració, només cal que provem que β és límit d'una successió parcial. En cas contrari, existeix un nombre real $\delta > 0$ tal que l'interval $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ conté com a molt un nombre finit de termes de la successió. Com que $\beta + \delta \notin B$, l'interval $[\beta + \delta, +\infty)$ també conté com a molt un nombre finit de termes de la successió. Per tant, l'interval $[\beta - \delta/2, +\infty)$ compleix la mateixa propietat. En conseqüència, $[\beta - \delta/2, \beta] \cap B = \emptyset$, una contradicció amb $\beta = \sup B$. ∎

El teorema següent conté també la definició de *límit superior* i *límit inferior* d'una successió fitada.

Teorema 1.2.38 Sigui (a_n) una successió fitada de nombres reals. Aleshores existeixen dues successions parcials convergents amb límits α, β tals que $\alpha \le L \le \beta$ si L és el límit de qualsevol successió parcial convergent de la successió (a_n).

El nombres α, β s'anomenen, respectivament, el *límit superior* i el *límit inferior* de la successió (a_n), i escriurem $\alpha = \liminf a_n$ i $\beta = \limsup a_n$.

Demostració. Comprovem que el nombre β que apareix a la demostració del Teorema 1.2.37 és el límit superior de la successió. Només cal que provem que cap successió parcial pot tenir límit $L > \beta$. En efecte, si $L > \beta$ existeix $\delta > 0$ amb $L - \delta \notin B$ i, per tant, l'interval $[L - \delta, +\infty)$ conté com a molt un nombre finit de termes de la successió. L'existència del límit inferior es demostra per simetria. ∎

Definició 1.2.39 Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Si (a_n) no és fitada superiorment, posarem $\limsup a_n = +\infty$. Si (a_n) no és fitada inferiorment, posarem $\liminf a_n = -\infty$.

Exercici 1.2.40 Considerem la successió $(a_n)_{n \ge 1}$ definida per

- Si $n = p^k$ amb p un nombre primer i $k \ge 1$, aleshores $a_n = 1 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{k}$
- $a_n = 0$ si $n = 1$ o bé n no és una potència d'un nombre primer.

Proveu que hi ha infinits nombres reals que són límits de successions parcials d'aquesta successió. Determineu $\liminf a_n$ i $\limsup a_n$.

1.2.6 Successions de Cauchy

Definició 1.2.41 Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Direm que (a_n) és una *successió de Cauchy* si

- per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $d(a_m, a_n) = |\, a_n - a_m \,| < \varepsilon$ per a qualssevol $m, n \geq n_0$.

En una successió de Cauchy quasi tots els termes de la successió són arbitràriament propers entre ells. En una successió convergent, quasi tots els termes de la successió són arbitràriament propers al límit i, per tant, arbitràriament propers entre ells. Aquest és l'argument de la demostració de la Proposició 1.2.42. Però el resultat realment interessant sobre successions de Cauchy és que, per la completesa dels nombres reals, el recíproc també és cert (Teorema 1.2.43).

Proposició 1.2.42 Qualsevol successió convergent de nombres reals és una successió de Cauchy.

Demostració. Suposem que (a_n) és convergent amb $\lim a_n = L$. Llavors, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon/2$ per a tot $n \geq n_0$ Per tant, per a tot parell $m, n \geq n_0$ es compleix $|a_m - a_n| \leq |a_m - L| + |L - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Així doncs, (a_n) és una successió de Cauchy. ■

Teorema 1.2.43 Qualsevol successió de Cauchy de nombres reals és convergent.

Demostració. Suposem que (a_n) és una successió de Cauchy. Vegem en primer lloc que (a_n) és fitada. Per ser de Cauchy, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$ per a tot $n \geq n_0$. Llavors $|a_n| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < \varepsilon + |a_{n_0}|$ per a tot $n \geq n_0$. Si prenem $M = \max\{|a_0|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0}| + \varepsilon\}$, es compleix que $|a_n| \leq M$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. Així doncs, pel Teorema 1.2.37, existeix una successió parcial (a_{n_k}) convergent. Sigui $\alpha = \lim a_{n_k}$. Ara demostrarem que també $\lim a_n = \alpha$. En efecte,

- per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $k_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|a_{n_k} - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ per a tot $k \geq k_0$.

D'altra banda, com que (a_n) és de Cauchy es compleix que

- per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|a_m - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ per a qualssevol $m, n \geq n_0$.

Ara prenem $n_1 = \max(n_{k_0}, n_0)$ i escollim k amb $n_k \geq n_1$. Amb això,

$$|a_n - \alpha| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - \alpha| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

per a tot $n \geq n_1$. Així doncs, (a_n) és una successió convergent. ■

Observació 1.2.44 Observem que la implicació "convergent $\Longrightarrow$ Cauchy" és certa en qualsevol espai mètric. En canvi, la implicació "Cauchy $\Longrightarrow$ convergent" és conseqüència de la completesa dels nombres reals i no es compleix, per exemple, per a successions de nombres racionals. De fet, en un cos ordenat arquimedià, aquesta implicació és equivalent a l'axioma del suprem **(R18)**. Amb aquesta propietat (Cauchy $\Longrightarrow$ convergent) podem definir *espai mètric complet*.

Definició 1.2.45 Direm que un espai mètric (E, d) és *complet* si tota successió de Cauchy en E té límit en E.

Capítol 2

Funcions reals d'una variable. Límits i continuïtat

2.1 Límits de funcions

2.1.1 Conceptes bàsics sobre funcions

Definició 2.1.1 Un *funció real d'una variable real* és una aplicació

$$\begin{array}{rccc} f: & A \subset \mathbf{R} & \longrightarrow & B \subset \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Els conjunts A i B s'anomemen, respectivament, el *domini* i el *co-domini* de la funció. La *imatge* o *recorregut* de la funció és

$$\operatorname{Im} f = f(A) = \{y \in \mathbf{R} : \text{ existeix } x \in A \text{ amb } f(x) = y\} = \{f(x) : x \in A\}$$

Donats $A_1 \subset A$ i $B_1 \subset B$, definim els subconjunts

$$f(A_1) = \{f(x) : x \in A_1\} \subset B, \qquad f^{-1}(B_1) = \{x \in A : f(x) \in B_1\} \subset A.$$

Sempre és important especificar el domini d'una funció, però la majoria de les vegades no especificarem el co-domini o, parlant amb més propietat, prendrem el co-domini $B = \mathbf{R}$.

Definició 2.1.2 Una funció és *fitada (superiorment, inferiorment)* si el seu recorregut és fitat (superiorment, inferiorment).

Definició 2.1.3 Considerem una funció $f : A \subset \mathbf{R} \to B \subset \mathbf{R}$.

- Direm que f és *injectiva* si, per a tot $x, y \in A$ amb $x \neq y$, es compleix $f(x) \neq f(y)$.
- Direm que f és *exhaustiva* si $f(A) = B$.
- Direm que f és *bijectiva* si és injectiva i exhaustiva.

Definició 2.1.4 Si $f : A \subset \mathbf{R} \to B \subset \mathbf{R}$ és una funció bijectiva, podem considerar la funció $f^{-1} : B \subset \mathbf{R} \to A \subset \mathbf{R}$, que s'anomena *funció inversa* de f, definida com segueix. Per a cada $y \in B$, el valor $x = f^{-1}(y)$ és l'únic element de A amb $f(x) = y$.

Definició 2.1.5 Una funció $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és *constant* si existeix $c \in \mathbf{R}$ tal que $f(x) = c$ per a tot $x \in A$.

Definició 2.1.6 La *funció identitat* al conjunt A és la funció $I_A \colon A \to A$ definida per $I_A(x) = x$ per a tot $x \in A$. La funció I_A és bijectiva i la seva inversa és I_A.

Definició 2.1.7 Sigui $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció.

- Direm que f és *creixent* en A si $f(x) \leq f(y)$ per a qualssevol $x, y \in A$ amb $x < y$.

- Direm que f és *estrictament creixent* en A si $f(x) < f(y)$ per a qualssevol $x, y \in A$ amb $x < y$.

- Anàlogament es defineixen els conceptes de funció *decreixent* i *estrictament decreixent*.

- Direm que f és *monòtona* en A si és creixent o decreixent en A. Direm que f és *estrictament monòtona* en A si és estrictament creixent o estrictament decreixent en A.

Exercici 2.1.8 Sigui $f \colon A \subset \mathbf{R} \to B \subset \mathbf{R}$ una funció bijectiva i creixent (respectivament, decreixent). Proveu que la funció inversa f^{-1} és creixent (respectivament, decreixent).

Definició 2.1.9 (Operacions amb funcions) Siguin $f, g : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

- *Producte per escalar*. Sigui $\lambda \in \mathbf{R}$ un escalar. Definim la funció $\lambda f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ com $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

- *Suma*. La funció $f + g : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es defineix per $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

- *Producte*. La funció $fg : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es defineix per $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

- *Quocient*. Suposem que $g(x) \neq 0$ per a tot $x \in A$. La funció $(f/g) \colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es defineix per $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Definició 2.1.10 (Composició de funcions) Siguin $f \colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i $g \colon B \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dues funcions tals que el recorregut de f està inclòs en el domini de g, és a dir, tals que $f(A) \subset B$. La *composició de f amb g* és la funció $g \circ f \colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida per $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Observació 2.1.11 Si $f \colon A \subset \mathbf{R} \to B \subset \mathbf{R}$ és bijectiva, la funció inversa f^{-1} és l'única funció $g \colon B \subset \mathbf{R} \to A \subset \mathbf{R}$ tal que $g \circ f = I_A$ i $f \circ g = I_B$, on $I_A \colon A \to A$ és la funció identitat.

Definició 2.1.12 (Funcions polinòmiques i racionals) Les *funcions polinòmiques* s'obtenen amb sumes i productes de la funció identitat i funcions constants. Són funcions $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

per a certs $n \in \mathbf{N}$ i $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$. Les *funcions racionals* s'obtenen a partir de quocients de polinomis. El domini d'una funció racional $f(x) = P(x)/Q(x)$ està format pels nombres $x \in \mathbf{R}$ amb $Q(x) \neq 0$.

2.1.2 Límits

Límit d'una funció en un punt

Definició 2.1.13 Sigui $A \subset \mathbf{R}$ un conjunt de nombres reals.

- Direm que $a \in A$ és un *punt aïllat* de A si existeix $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \cap A = \{a\}$.
- Direm que $a \in \mathbf{R}$ és un *punt d'acumulació* de A si $((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ per a tot $\delta > 0$.

Exercici 2.1.14 Proveu que $a \in \mathbf{R}$ és un punt d'acumulació del conjunt $A \subset \mathbf{R}$ si i només si existeix una successió (x_n) tal que $x_n \in A \setminus \{a\}$ per a tot $n \in \mathbf{N}$ i $\lim x_n = a$.

Definició 2.1.15 Siguin $f \colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció, $a \in \mathbf{R}$ un punt d'acumulació del domini i $L \in \mathbf{R}$ un nombre real. Direm que el *límit de la funció f quan x tendeix a a és igual a L*, i escriurem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si

- per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ per a tot $x \in A$ amb $0 < |x - a| < \delta$.

Observació 2.1.16 Observem que no és necessari que a sigui un punt del domini de f per a poder definir $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. El que necessitem és que a sigui un *punt d'acumulació* del domini.

Observació 2.1.17 El valor $f(a)$ no intervé en la definició del límit $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Exercici 2.1.18 Considerem la funció constant $f(x) = c$. Proveu que $\lim_{x \to a} f(x) = c$ per a tot $a \in \mathbf{R}$. Per a la funció identitat $I = I_{\mathbf{R}}$, proveu que $\lim_{x \to a} I(x) = a$ per a tot $a \in \mathbf{R}$.

Proposició 2.1.19 Siguin $f \colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció, $a \in \mathbf{R}$ un punt d'acumulació del domini i $L \in \mathbf{R}$ un nombre real. Aleshores $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si i només si, per a qualsevol successió de nombres reals (x_n) tal que $x_n \in A \setminus \{a\}$ per a tot $n \in \mathbf{N}$ i $\lim x_n = a$, se satisfà $\lim f(x_n) = L$.

Demostració. Suposem que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, i sigui (x_n) una successió de nombres reals tal que $x_n \in A \setminus \{a\}$ i $\lim x_n = a$. Llavors, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in A$ i $0 < |x - a| < \delta$. A més a més, la convergència de la successió (x_n) implica que existeix un natural $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|x_n - a| < \delta$ per a tot $n \geq n_0$ i, per tant, $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ per a tot $n \geq n_0$. En conseqüència $\lim f(x_n) = L$.

Demostrarem l'altra implicació pel mètode del contrarecíproc. És a dir, suposarem que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no és L i hem de provar que existeix una successió que no compleix la hipòtesi. En efecte, si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no és L, aleshores existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que per a tot $\delta > 0$ es podria trobar un $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ i $|f(x) - L| \geq \varepsilon_0$. Llavors, per a cada $\delta_n = 1/n$, prenem un $x_n \in A \setminus \{a\}$ que compleixi $0 < |x_n - a| < \delta$ i $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$. És clar que la successió (x_n) així formada compleix que $x_n \in A \setminus \{a\}$ i $\lim x_n = a$. En canvi, com que $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ per a tot $n \in \mathbf{N}$, és obvi que $\lim f(x_n)$ no és L, el que contradiu la hipòtesi. ■

Proposició 2.1.20 El límit d'una funció en un punt, si existeix, és únic.

Demostració. Immediata a partir de les Proposicions 1.2.5 i 2.1.19. ■

Límits infinits

Definició 2.1.21 Siguin $f\colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció i $a \in \mathbf{R}$ un punt d'acumulació del domini. Direm que la funció f té *límit infinit* quan x tendeix a a, i escriurem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, si

- per a tot $N > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x)| > N$ per a tot $x \in A$ amb $0 < |x - a| < \delta$.

Exercici 2.1.22 Per a la funció $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ amb $f(x) = 1/x$, proveu que $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

Definició 2.1.23 Siguin $f\colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció i $a \in \mathbf{R}$ un punt d'acumulació del domini. Direm que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si

- per a tot $N > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) > N$ per a tot $x \in A$ amb $0 < |x - a| < \delta$.

Exercici 2.1.24 Per a la funció $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ definida per $f(x) = 1/x^2$, proveu que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Definició 2.1.25 Es defineix anàlogament $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exercici 2.1.26 Enuncieu i demostreu per als límits infinits una propietat anàloga a la Proposició 2.1.19.

Límits a l'infinit

Definició 2.1.27 Sigui $f\colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on el domini A no és fitat superiorment, i sigui $L \in \mathbf{R}$ un nombre real. Direm que el *límit de la funció f quan x tendeix a més infinit* és igual a L, i escriurem $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$, si

- per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $M > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ per a tot $x \in A$ amb $x > M$.

Definició 2.1.28 Anàlogament es defineix $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L \in \mathbf{R}$.

Observació 2.1.29 Una successió de nombres reals és una funció $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Clarament,

$$\lim a_n = \lim_{x\to +\infty} a(x)$$

si la successió és convergent.

Definició 2.1.30 Sigui $f\colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on el domini A no és fitat superiorment. Direm que la funció f té *límit infinit* quan x tendeix a més infinit, i escriurem $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$, si

- per a tot $N > 0$ existeix $M > 0$ tal que $|f(x)| > N$ per a tot $x \in A$ amb $x > M$.

Definició 2.1.31 Anàlogament es defineixen els conceptes $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

Exercici 2.1.32 Considerem la funció constant $f(x) = c$. Proveu que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = c$. Per a la funció identitat $I = I_{\mathbf{R}}$, proveu que $\lim_{x\to +\infty} I(x) = \infty$.

Exercici 2.1.33 Proveu $\lim_{x\to +\infty} 1/(1 + x^2) = 0$.

Exercici 2.1.34 Enuncieu i demostreu per als límits a l'infinit propietats anàlogues a les Proposicions 2.1.19 i 2.1.20.

Límits laterals

Definició 2.1.35 Siguin $f\colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció, $a \in \mathbf{R}$ tal que és punt d'acumulació del conjunt $A \cap (-\infty, a)$, i $L \in \mathbf{R}$ un nombre real. Direm que el *límit de la funció f quan x tendeix a a per l'esquerra* és igual a L, i escriurem $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, si

- per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ per a tot $x \in A$ amb $0 < a - x < \delta$.

Definició 2.1.36 Siguin $f\colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció, $a \in \mathbf{R}$ tal que és punt d'acumulació del conjunt $A \cap (a, +\infty)$, i $L \in \mathbf{R}$ un nombre real. Direm que el *límit de la funció f quan x tendeix a a per la dreta* és igual a L, i escriurem $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, si

- per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ per a tot $x \in A$ amb $0 < x - a < \delta$.

Proposició 2.1.37 Siguin $f\colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció i $a \in \mathbf{R}$ un punt d'acumulació d'ambdós conjunts $A \cap (-\infty, a)$ i $A \cap (a, +\infty)$ i $L \in \mathbf{R}$ un nombre real. Aleshores, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si només si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Demostració. Suposem que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Aleshores, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in A$ i $0 < |x - a| < \delta$. En particular, $|f(x) - L| < \varepsilon$ si $x \in A$ i $0 < x - a < \delta$. Així doncs, el $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existeix i és igual a L. Anàlogament, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Suposem ara que els dos límits laterals existeixen i tenen el mateix valor, és a dir, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L \in \mathbf{R}$. Per tant, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ per a tot $x \in A$ amb $0 < x - a < \delta_1$. També existeix $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ per a tot $x \in A$ amb $0 < a - x < \delta_2$. Si prenem $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, llavors $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in A$ i $0 < |x - a| < \delta$. Per tant, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. ■

Exercici 2.1.38 Doneu definicions per als límits laterals infinits: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Exercici 2.1.39 Enuncieu i demostreu un resultat anàleg a la Proposició 2.1.37 per als límits laterals infinits.

Exercici 2.1.40 Enuncieu propietats anàlogues a les Proposicions 2.1.19 i 2.1.20 per als límits laterals.

Àlgebra de límits

Proposició 2.1.41 Siguin $f, g\colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dues funcions i $a \in \mathbf{R}$ un punt d'acumulació del seu domini. Suposem que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1 \in \mathbf{R}$ i que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2 \in \mathbf{R}$. Aleshores

- Si $\lambda \in \mathbf{R}$ és un escalar, $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda L_1$.
- $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = L_1 + L_2$.
- $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = L_1 L_2$.
- Si $L_2 \neq 0$, aleshores $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{L_1}{L_2}$.

Demostració. Farem només la demostració per a la suma. La prova dels altres casos és anàloga. Com que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ i $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, per cada successió de nombres reals (x_n) tal que $x_n \in A\setminus\{a\}$ i $\lim x_n = a$, tenim que $\lim f(x_n) = L_1$ i $\lim g(x_n) = L_2$. Per les propietats dels límits de successions (Proposició 1.2.15), es compleix $\lim(f+g)(x_n) = \lim(f(x_n)+g(x_n)) = L_1 + L_2$, d'on es dedueix que $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = L_1 + L_2$. ■

Observació 2.1.42 Les mateixes propietats es compleixen per als límits laterals i per als límits a l'infinit.

Observació 2.1.43 Les propietats dels límits infinits (en un punt, laterals o a l'infinit) en relació a les operacions són les mateixes que les de les successions (vegeu l'Apartat 1.2.2). Així doncs, per a límits infinits de funcions tenim les mateixes indeterminacions que per als límits infinits de successions.

Observació 2.1.44 Siguin $f\colon A\subset \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ i $g\colon B\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcions tals que $f(A)\subset B$ i $a\in\mathbf{R}$ un punt d'acumulació del conjunt A. Suposem que $\lim_{x\to a} f(x) = b$, on b és un punt d'acumulació del conjunt B, i que $\lim_{y\to b} g(y) = c$. Aleshores *no sempre* es compleix que $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$.

Demostració. Només cal presentar un contraexemple. Siguin $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ i $g\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, on f és la funció constant igual a 0 i g està definida per

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

Llavors, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ i $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$. En canvi, $\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to 0} g(f(x)) = g(0) = 1 \neq 0$. ■

2.2 Funcions contínues

Definició 2.2.1 Siguin $f\colon A\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funció i $a\in A$ un punt del seu domini. Direm que la funció f és *contínua en el punt* a si

- per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ per a tot $x\in A$ amb $|x-a|<\delta$.

Proposició 2.2.2 Siguin $f\colon A\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ i $a\in A$ un punt del domini que també és punt d'acumulació del domini. Aleshores, f és contínua en a si i només si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Demostració. Conseqüència directa de les Definicions 2.1.15 i 2.2.1. ■

Observació 2.2.3 Si $a\in A$ no és un punt d'acumulació de A, és a dir, si a és un punt aïllat de A, aleshores f és contínua en a.

Exercici 2.2.4 Siguin $f\colon A\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funció i $a\in A$ un punt del seu domini. Proveu que f és contínua en a si i només si, per a qualsevol sucessió de nombres reals (x_n) amb $x_n\in A$ per a tot $n\in\mathbf{N}$ i $\lim x_n = a$, es compleix $\lim f(x_n) = f(a)$.

Definició 2.2.5 Direm que una funció $f\colon A\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ és contínua en A si és contínua en tots els punts de A.

Exercici 2.2.6 Proveu que les funcions constants i la funció identitat son contínues en el seu domini.

Proposició 2.2.7 Siguin $f, g: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dues funcions que són contínues en el punt $a \in A$. Aleshores les funcions λf, $f+g$, fg són contínues en el punt a. A més a més, si $g(a) \neq 0$, la funció f/g és també contínua en el punt a.
Si f i g són contínues en A, aleshores les funcions λf, $f+g$, fg són contínues en A. A més a més, f/g és contínua en A si $g(x) \neq 0$ per a tot $x \in A$.

Demostració. Si a és un punt d'acumulació del domini, és conseqüència directa de la Proposició 2.2.2 i de les propietats dels límits (Proposició 2.1.41). Si a és un punt aïllat del domini, és evident. ■

Exercici 2.2.8 Proveu que qualsevol funció polinòmica contínua en el seu domini. Siguin P, Q funcions polinòmiques i prenem $A = \{x \in \mathbf{R} : Q(x) \neq 0\}$. Proveu que la funció P/Q és contínua en A.

Proposició 2.2.9 Siguin $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i $g: B \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dues funcions tals que $f(A) \subset B$. Si f és contínua en el punt $a \in A$ i g és contínua en el punt $b = f(a) \in B$, aleshores la composició $g \circ f$ és contínua en el punt a. Si f és contínua en A i g és contínua en B, aleshores la composició $g \circ f$ és contínua en A.

Demostració. Per ser g contínua en $b = f(a) \in B$, tenim que, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta_1 > 0$ tal que $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$ per a tot $y \in B$ amb $|y - f(a)| < \delta_1$. Per ser f contínua en $a \in A$, es té que, donat δ_1, existeix $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \delta_1$ per a tot $x \in A$ amb $|x - a| < \delta_2$. Per tant, com que $f(A) \subset B$, es té que $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ per a tot $x \in A$ amb $|x - a| < \delta_2$. En conseqüència, $g \circ f$ és contínua es a. ■

Observació 2.2.10 Si $f: A \subset \mathbf{R} \to B \subset \mathbf{R}$ és bijectiva i contínua en A, la funció inversa f^{-1} no és necessàriament contínua en B.

Demostració. Hem de presentar un contraexemple. Sigui $f: \{0\} \cup (1,2] \longrightarrow [1,2]$ definida per $f(0) = 1$ i $f(x) = x$ si $x \in (1,2]$. La funció f és bijectiva i contínua, en canvi f^{-1} no és contínua en $[1,2]$. ■

Definició 2.2.11 Sigui $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i sigui $a \in A$ un punt del domini que també és punt d'acumulació del domini. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbf{R}$ però $L \neq f(a)$, direm que f presenta una *discontinuïtat evitable* en el punt a.

Definició 2.2.12 Siguin $I \subset \mathbf{R}$ un interval obert, $f: I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció i $a \in I$ un punt del seu domini. Si existeixen els límits laterals $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1 \in \mathbf{R}$ i $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2 \in \mathbf{R}$, però $L_1 \neq L_2$, direm que f presenta una *discontinuïtat de salt* en el punt a.

Exercici 2.2.13 Siguin $I \subset \mathbf{R}$ un interval obert i $f: I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció monòtona. Proveu que, si f no és contínua en $a \in I$, aleshores f presenta una discontinuïtat de salt en a.

2.3 Teoremes sobre funcions contínues

2.3.1 Teorema de Bolzano

Teorema 2.3.1 (Teorema de Bolzano) Sigui $f: I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció contínua en un interval $I \subset \mathbf{R}$. Siguin $a, b \in I$ tals que $a < b$ i $f(a)f(b) < 0$. Aleshores existeix un punt $\alpha \in (a,b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Sigui $S = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\} \subset [a, b]$. Clarament, $a \in S$ i aquest conjunt està fitat superiorment per b. Per tant, existeix $\alpha \in [a, b]$ tal que $\alpha = \sup S$. Demostrarem a continuació que $f(\alpha) = 0$.

D'una banda, per a cada natural $n \geq 1$ existeix $a_n \in S$ tal que $\alpha - 1/n < a_n \leq \alpha$. Per tant, existeix una successió (a_n) amb $a_n \in S$ i $\lim a_n = \alpha$. Com que f és contínua, $\lim f(a_n) = f(\alpha)$. Això implica que $f(\alpha) \leq 0$ perquè $f(a_n) < 0$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. En particular, $\alpha < b$ perquè $f(b) > 0$. D'altra banda, per a tot natural $n \geq 1$, existeix $b_n \in [a, b]$ tal que $\alpha < b_n < \alpha + 1/n$. Com que $\lim b_n = \alpha$ i $f(b_n) \geq 0$, tenim que $f(\alpha) = \lim f(b_n) \geq 0$. ■

Corol·lari 2.3.2 Sigui $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció contínua en un interval $I \subset \mathbf{R}$. Siguin $a, b \in I$ tals que $a < b$ i $f(a) < f(b)$. Aleshores, per a tot $y \in (f(a), f(b))$, existeix un punt $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$.

Demostració. Donat $y \in (f(a), f(b))$, considerem la funció $g : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida per $g(x) = f(x) - y$. Es tracta d'una funció contínua en I, i tal que $g(a) = f(a) - y < 0$ i $g(b) = f(b) - y > 0$. Llavors, pel Teorema 2.3.1, existeix $x \in (a, b)$ tal que $g(x) = f(x) - y = 0$, això és, $f(x) = y$.

Corol·lari 2.3.3 Sigui $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció contínua en un interval $I \subset \mathbf{R}$. Aleshores el recorregut $f(I) = J$ és també un interval.

Demostració. Pel Corol·lari 2.3.2, el conjunt $f(I)$ satisfà la propietat següent: per a tot parell de punts $y_1, y_2 \in f(I)$ amb $y_1 < y_2$, l'interval $[y_1, y_2]$ està contingut en $f(I)$. Aquesta propietat caracteritza els intervals (Problema 1.1.20). ■

Proposició 2.3.4 Siguin $I, J \subset \mathbf{R}$ intervals i $f : I \subset \mathbf{R} \to J \subset \mathbf{R}$ una funció contínua i bijectiva. Aleshores f és estrictament monòtona.

Demostració. Prenem $a_0, b_0 \in I$ amb $a_0 < b_0$. Per ser f bijectiva, o bé $f(a_0) < f(b_0)$, o bé $f(a_0) > f(b_0)$. Demostrarem que, en el primer cas, la funció f és estrictament creixent. Es demostra anàlogament que f és estrictament decreixent si es dóna el segon cas. Suposem doncs que $f(a_0) < f(b_0)$ i procedim a provar que $f(a_1) < f(b_1)$ per a qualssevol $a_1, b_1 \in I$ amb $a_1 < b_1$. Considerem les funcions contínues $x, y : [0, 1] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definides per $x(t) = (1 - t)a_0 + ta_1$ i $y(t) = (1 - t)b_0 + tb_1$. Observem que $x(0) = a_0$, $x(1) = a_1$ i que $a_0 \leq x(t) \leq a_1$ o bé $a_1 \leq x(t) \leq a_0$ per a tot $t \in [0, 1]$. La funció y satisfà propietats anàlogues. Per tant, $x(t), y(t) \in I$ per a tot $t \in [0, 1]$. A més a més, $x(t) < y(t)$ per a tot $t \in [0, 1]$. Considerem ara la funció contínua $g : [0, 1] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donada per $g(t) = (f \circ y)(t) - (f \circ x)(t) = f(y(t)) - f(x(t))$. Veiem que $g(0) = f(b_0) - f(a_0) > 0$ i, com que f és bijectiva, tenim que $g(t) \neq 0$ per a tot $t \in [0, 1]$. Pel Teorema de Bolzano (Teorema 2.3.1), això implica que $g(t) > 0$ per a tot $t \in [0, 1]$. En conseqüència, $g(1) = f(b_1) - f(a_1) > 0$ i, per tant, $f(a_1) < f(b_1)$. ■

Proposició 2.3.5 Siguin $I, J \subset \mathbf{R}$ intervals i $f : I \subset \mathbf{R} \to J \subset \mathbf{R}$ una funció contínua i bijectiva. Aleshores la funció inversa $f^{-1} : J \subset \mathbf{R} \to I \subset \mathbf{R}$ és contínua.

Demostració. Com que f és una funció contínua i bijectiva, per la Proposició 2.3.4 sabem que és monòtona. Suposem que és creixent i llavors f^{-1} també n'és (Exercici 2.1.8). La demostració per a l'altre cas és anàloga. Volem demostrar que

- per a tot $y_0 \in J$ i per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$ per a tot $y \in J$ amb $|y - y_0| < \delta$.

Farem la prova només per al cas que $y_0 \in J$ no és ni el màxim ni el mínim de J. Es deixa com a exercici completar la demostració. Sigui $x_0 = f^{-1}(y_0)$, que no és un valor extrem de l'interval I. Per tant, donat $\varepsilon > 0$, existeix ε' amb $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ tal que $(x_0 - \varepsilon', x_0 + \varepsilon') \subset I$, i també existeix $\delta > 0$ tal que

$$f(x_0 - \varepsilon') < y_0 - \delta < y_0 + \delta < f(x_0 + \varepsilon').$$

Aleshores és clar que $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$ si $|y - y_0| < \delta$. ■

Exercici 2.3.6 Completeu la demostració de la Proposició 2.3.5.

Proposició 2.3.7 Per a tot nombre real positiu a i per a tot nombre enter positiu n, existeix un únic nombre real positiu α tal que $\alpha^n = a$. Aquest nombre s'anomena *l'arrel n-èsima* de a i s'escriu $a^{1/n}$.

Demostració. Considerem la funció $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida per $f(x) = x^n$ que, per l'Exercici 2.2.8, és contínua en el seu domini. A més a més, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Així doncs, existeix un nombre real $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) > a$. Com que $0 = f(0) < a < f(x_0)$, pel Corol·lari 2.3.2, existeix $\alpha \in (0, x_0) \subset (0, +\infty)$ tal que $f(\alpha) = \alpha^n = a$. Com que f és estrictament creixent, aquest és l'únic nombre real positiu amb aquesta propietat. ■

Observació 2.3.8 De fet, es demostra a la Proposició 2.3.7 que la funció $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida per $f(x) = x^n$ és bijectiva. La funció inversa és la funció *arrel n-èsima* $f^{-1}(x) = x^{1/n}$.

2.3.2 Teorema de Weierstrass

Definició 2.3.9 Sigui $f\colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció.

- Si existeix un punt $a \in A$ tal que $f(x) \leq f(a)$ per a tot $x \in A$, direm que $M = f(a)$ és el *valor màxim absolut* de la funció f. En aquest cas, direm que el màxim absolut de la funció f s'assoleix al punt a.
- Si existeix un punt $b \in A$ tal que $f(x) \geq f(b)$ per a tot $x \in A$, direm que $m = f(b)$ és el *valor mínim absolut* de la funció f. En aquest cas, direm que el mínim absolut de la funció f s'assoleix al punt b.

Proposició 2.3.10 Sigui $f\colon [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció contínua en l'interval tancat $[a, b]$. Aleshores el recorregut $f([a, b])$ és un interval fitat.

Demostració. Pel Corol·lari 2.3.3, $f([a, b]) = J$ és un interval. Suposem que no està fitat superiorment. Aleshores existeix una successió (y_n) amb $y_n \in J$ per a tot $n \in \mathbf{N}$ tal que $\lim y_n = +\infty$. Per a cada $n \in \mathbf{N}$, prenem un element $x_n \in [a, b]$ amb $f(x_n) = y_n$. Obtenim així una successió fitada (x_n) de nombres reals que, pel Teorema 1.2.37, admet una successió parcial (x_{n_k}) convergent. Sigui $\alpha \in [a, b]$ el límit d'aquesta successió parcial. Com que $\lim f(x_n) = +\infty$, aleshores $\lim f(x_{n_k}) = +\infty$. D'altra banda, com que f és contínua, $\lim f(x_{n_k}) = f(\alpha)$, una contradicció. Anàlogament es demostra que J està fitat inferiorment. ■

Teorema 2.3.11 (Teorema de Weierstrass) Sigui $f\colon [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció contínua en l'interval tancat $[a, b]$. Aleshores, existeixen $\alpha, \beta \in [a, b]$ tals que $m = f(\alpha)$ i $M = f(\beta)$ són, respectivament, el màxim absolut i el mínim absolut de la funció f.

Demostració. Per la Proposició 2.3.10, $f([a, b]) = J$ és un interval fitat. Sigui $M = \sup J$, hem de veure que existeix $\beta \in [a, b]$ tal que $f(\beta) = M$. Per ser M el suprem de J, per a tot $n \in \mathbf{N}$ existeix $y_n \in J$ amb $M - 1/n < y_n < M$. Observem que $\lim y_n = M$. Per a cada $n \in \mathbf{N}$, prenem

$x_n \in [a,b]$ amb $f(x_n) = y_n$. Com abans, la successió (x_n) és fitada i, pel Teorema 1.2.37, admet una successió parcial (x_{n_k}) convergent. Sigui $\lim x_{n_k} = \beta \in [a,b]$. Per ser f contínua en $[a,b]$, es té que $\lim f(x_{n_k}) = f(\beta)$. Ara bé, $(f(x_{n_k}))$ és una successió parcial de $(f(x_n)) = (y_n)$, que també és convergent. Llavors aquestes dues successions han de tenir el mateix límit, això és, $f(\beta) = M$ com volíem demostrar. Anàlogament es demostra que existeix $\alpha \in [a,b]$ tal que $f(\alpha) = m = \inf J$. ■

Corol·lari 2.3.12 Sigui $f\colon [a,b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció contínua en l'interval tancat $[a,b]$. Aleshores el recorregut de la funció f és també un interval tancat. És a dir, existeixen dos reals $m, M \in \mathbf{R}$ tals que $f([a,b]) = [m,M]$.

Demostració. És conseqüència directa del Corol·lari 2.3.3 i del teorema anterior. ■

Exercici 2.3.13 Doneu exemples de funcions contínues en un interval obert I tals que els seus recorreguts són (m,M), $[m,M)$, $[m,M]$, $(m,+\infty)$, $[m,+\infty)$, $\mathbf{R}$.

2.4 Continuïtat uniforme

Definició 2.4.1 Direm que una funció $f\colon A \to \mathbf{R}$ és *uniformement contínua* si

- per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per a tot $x, y \in A$ amb $|x - y| < \delta$.

Observació 2.4.2 Recordeu que $f\colon A \to \mathbf{R}$ és contínua en A si i només si

- per a tot $\varepsilon > 0$ i per a tot $x \in A$ existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per a tot $y \in A$ amb $|x - y| < \delta$.

Tot i la semblança de les definicions, l'ordre dels quantificadors és molt important. Observeu que, en la definició de continuïtat uniforme, el valor de δ és el mateix per a tot $x \in A$, mentre que per a la continuïtat δ pot dependre de x. És fàcil comprovar que tota funció uniformement contínua és contínua. En canvi, com veurem en l'exemple següent, algunes funcions contínues no són uniformement contínues.

Exemple 2.4.3 La funció $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ definida per $f(x) = 1/x$ és contínua però no és uniformement contínua.

Demostració. Per a cada $\delta \in (0,1)$, prenem $x = \delta$ i $y = \delta/2$. Clarament, $|x - y| < \delta$ mentre $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{\delta} > 1$. Per tant, si $\varepsilon < 1$, no existeix cap $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ impliqui $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. ■

Teorema 2.4.4 Tota funció contínua en un interval tancat és uniformement contínua.

Demostració. Sigui $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ una funció contínua. Suposem que no és uniformement contínua. Aleshores, existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que, per a tot $n \in \mathbf{N}$ existeixen $x_n, y_n \in [a,b]$ amb $|x_n - y_n| < 1/n$ però $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$. Pel Teorema 1.2.37, la successió (x_n) admet una subsuccessió (x_{n_k}) convergent, és a dir, existeix $\lim x_{n_k} = L \in [a,b]$. Com que $\lim(x_{n_k} - y_{n_k}) = 0$, tenim que la subsuccessió (y_{n_k}) també és convergent i $\lim y_{n_k} = L$. De la continuïtat de la funció f en deduïm que $\lim f(x_{n_k}) = \lim f(y_{n_k}) = f(L)$, però això és contradictori amb el fet que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \varepsilon_0$ per a tot $k \in \mathbf{N}$. ■

2.5 Exponencials i logaritmes

Donat un nombre real positiu $a > 0$, en podem calcular les potències enteres. En efecte, nomes cal recordar que $a^0 = 1$ i que $a^{-n} = 1/a^n$ si n és un enter positiu. Encara més, en podem calcular les potències racionals. En efecte, si p, q són nombres enters amb $q > 0$, aleshores $y = a^{p/q}$ és l'únic nombre real positiu tal que $y^q = a^p$ (Proposició 2.3.7).

Aquest apartat tracta sobre l'extensió de les potències de base un real positiu i exponent racional a potències de base un real positiu i exponent *real*. Aquesta extensió està basada en el següent teorema, que donem aquí sense demostració. L'existència es demostra a l'apartat 4.4, i podeu trobar una demostració per a la unicitat a [J. Ortega, *Introducció a l'anàlisi matemàtica*].

Teorema 2.5.1 Per a tot nombre real positiu $a > 0$, existeix una única funció f contínua en $\mathbf{R}$ tal que

- $f(x + y) = f(x)f(y)$ per a qualssevol $x, y \in \mathbf{R}$,
- $f(1) = a$.

Definició 2.5.2 La funció f que queda determinada pel Teorema 2.5.1 s'anomena *funció exponencial de base a*. És fàcil comprovar que $f(x) = a^x$ per a tot nombre racional x. Per això, és natural fer servir la notació $a^x = f(x)$ per a tot $x \in \mathbf{R}$ És a dir, aquesta funció ens permet considerar potències de base un nombre real positiu i exponent un nombre real qualsevol.

Proposició 2.5.3 Donem algunes propietats de les funcions exponencials amb base un nombre real positiu. Per a qualssevol a, b nombres reals positius i x, y nombres reals, se satisfan les propietats següents.

1. $a^0 = 1$, $a^1 = a$
2. $a^{x+y} = a^x a^y$.
3. $a^x > 0$.
4. $(ab)^x = a^x b^x$
5. $(a^x)^y = a^{xy}$
6. $1^x = 1$, és a dir, la funció exponencial de base 1 és constant i, per tant, no gaire interessant.
7. Si $a > 1$ (respectivament, $a < 1$), la funció exponencial de base a és estrictament creixent (respectivament, estrictament decreixent).
8. Si $a > 1$ (respectivament, $a < 1$), aleshores $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ i $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ (respectivament, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ i $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$).
9. La funció exponencial amb base $a \neq 1$ és una funció bijectiva amb domini $\mathbf{R}$ i recorregut $(0, +\infty)$.

Definició 2.5.4 En conseqüència, per a tot nombre real positiu $a \neq 1$, podem considerar la funció inversa de la funció exponencial de base a, que s'anomena *logaritme en base a* i s'escriu $\log_a$. Així doncs, per a tot $x > 0$, el valor $y = \log_a x$ és l'únic nombre real y tal que $a^y = x$. El logaritme en base a és una funció contínua i bijectiva amb domini $(0, +\infty)$ i recorregut $\mathbf{R}$.

Proposició 2.5.5 Es mostren aquí algunes propietats del logaritme en base un nombre real positiu. Per a qualssevol a, b, x, y nombres reals positius amb $a, b \neq 1$, se satisfan les propietats següents.

1. $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$
2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
3. $\log_a x^y = y \log_a x$.
4. $\log_a x = \log_a b \log_b x$. Aquesta és la *fórmula del canvi de base dels logaritmes.*
5. Si $a > 1$ (respectivament, $a < 1$), el logaritme en base a és estrictament creixent (respectivament, estrictament decreixent).
6. Si $a > 1$ (respectivament, $a < 1$), aleshores $\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty$ i $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ (respectivament, $\lim_{x\to 0} \log_a x = +\infty$ i $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$).

Observació 2.5.6 Per motius que s'aniran fent palesos, començant amb els límits de les Proposicions 2.5.7 i 2.5.9, els matemàtics usem quasi exclusivament el nombre e com a base de les funcions exponencial i logarítmica. Per això, la funció exponencial de base e s'anomena simplement *funció exponencial* i el logaritme en base e s'anomena *logaritme natural*, i s'escriu log, sense especificar-ne la base. En realitat, això no és una restricció important, ja que la funció exponencial de base a s'expressa en termes de la funció exponencial:

$$a^x = e^{x \log a}$$

Per tant, qualsevol funció exponencial de base un nombre real positiu és de la forma e^{kx} per a alguna constant $k \in \mathbf{R}$. Anàlogament, per la fórmula del canvi de base dels logaritmes, qualsevol funció logarítmica és de la forma $k \log x$ per a alguna constant $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Proposició 2.5.7 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Demostració. Siguin $x \in \mathbf{R}$ un nombre real positiu i n un nombre natural amb $n \leq x < n + 1$. D'una banda,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

i d'altra banda,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n .$$

La determinació del primer límit es conclou comprovant que

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$$

a partir del Teorema 1.2.29. L'altre límit es calcula anàlogament. ■

Exercici 2.5.8 Siguin $M > 0$ i f una funció definida als intervals $(-\infty, -M]$ i $[M, +\infty)$. Proveu les afirmacions següents.

- Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, aleshores $\lim_{y\to 0^+} f(1/y) = L$.
- Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, aleshores $\lim_{y\to 0^-} f(1/y) = L$.

Proposició 2.5.9 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Demostració. Considerem la funció $h\colon(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$ definida per $h(0)=1$ i $h(y)=y/\log(1+y)$ si $y\neq 0$. Per la Proposició 2.5.7, l'Exercici 2.5.8 i la continuïtat del logaritme,

$$\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=\lim_{y\to 0}\log{(1+y)}^{1/y}=\log e=1.$$

i, per tant, la funció h és contínua al seu domini. Si ara prenem $f(x)=e^x-1$, la composició $(h\circ f)(x)=(e^x-1)/x$ és contínua en $\mathbf{R}$ i, per tant, $\lim_{x\to 0}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(0)=1$. ■

Definició 2.5.10 A partir de la funció exponencial es defineixen les anomenades *funcions hiperbòliques*. Les funcions *cosinus i sinus hiperbòlic* es defineixen, respectivament, per

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\qquad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Proposició 2.5.11 Propietats de les funcions hiperbòliques.

1. $\cosh x+\sinh x=e^x$, $\cosh x-\sinh x=e^{-x}$.
2. $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$.
3. $\cosh(-x)=\cosh x$, $\sinh(-x)=-\sinh x$. És a dir, la funció cosinus hiperbòlic és *parella* i la funció sinus hiperbòlic és *imparella*.
4. $\cosh x\geq 1$, $\lim_{x\to-\infty}\cosh x=\lim_{x\to+\infty}\cosh x=+\infty$.
5. $\lim_{x\to-\infty}\sinh x=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\sinh x=+\infty$.

2.6 Funcions trigonomètriques

Exercici 2.6.1 En aquest apartat farem servir dos fets bàsics de la geometria, a saber, la suma dels angles de qualsevol triangle és un angle pla i el teorema de Pitàgores. Cerqueu-ne les demostracions.

Donat un dels angles no rectes d'un triangle rectangle, el *sinus* (respectivament, *cosinus*) d'aquest angle és la raó entre la longitud del catet oposat (respectivament, adjacent) i la longitud de la hipotenusa, mentre la raó entre la longitud del catet oposat i la del catet adjacent és la *tangent* d'aquest angle. L'objectiu d'aquest apartat és introduir les funcions *sinus*, *cosinus* i *tangent* (que s'escriuen, respectivament, sin, cos i tan) relacionades amb aquests conceptes i estudiar-ne les principals propietats.

Primer de tot, hem de determinar com mesurem els angles. La mesura dels angles en *graus*, per la que un angle recte és un angle de 90°, és força arbitrària, ja que es basa en la divisió de la circumferència en un nombre arbitrari de parts. Per tant, no podem esperar obtenir objectes matemàtics interessants si usem aquesta mesura per definir aquelles funcions. Una opció més natural es mesurar els angles en *radians*. Un angle dirigit està determinat per un parell ordenat (ℓ_1,ℓ_2) de semirectes amb el mateix punt inicial. Si posem el punt inicial a l'origen de coordenades i ℓ_1 a la part positiva de l'eix horitzontal, aleshores un angle dirigit estarà determinat per l'altra semirecta, que talla en un únic punt la circumferència de radi 1 centrada a l'origen. Per tant, podem identificar els angles dirigits amb els punts d'aquesta circumferència.

Definició 2.6.2 La longitud de l'arc de circumferència des del punt $(1,0)$ a un punt P en sentit antihorari és la mesura en radians del corresponent angle dirigit, que també es pot definir com el doble de l'àrea del sector circular determinat per aquest arc.

Hem de fer notar aquí que hem emprat en aquesta definició conceptes que no hem definit abans. Concretament, la longitud d'un arc de corba i l'àrea d'una regió plana. Les funcions trigonomètriques s'introdueixem més formalment al Capítol 15 de [M. Spivak, *Calculus*].

El que aquí necessitem saber sobre aquests conceptes és que el *nombre* π és la raó entre la meitat de la longitud d'una circumferència i la longitud del seu radi, i és també la raó entre l'àrea d'un cercle i el quadrat del seu radi. Com que la llargada de la circumferència de radi 1 és 2π, un angle de π radians és un angle pla i un angle de $\pi/2$ radians és un angle recte. La mesura en radians de qualsevol angle dirigit és un nombre real a l'interval $[0, 2\pi)$.

Definició 2.6.3 Com a conseqüència del que hem argumentat fins ara, cada nombre real $x \in [0, 2\pi)$ és la mesura en radians de l'angle dirigit que correspon a un únic punt $P(x)$ de la circumferència de radi 1 centrada a l'origen. Per definició, els valors $\cos x, \sin x$ de les funcions *cosinus* i *sinus* en el punt x són les coordenades del punt $P(x)$, és a dir, $P(x) = (\cos x, \sin x)$. Aquestes funcions s'estenen a tota la recta real amb $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ i $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ per a tot $x \in [0, 2\pi)$ i $k \in \mathbf{Z}$.

Proposició 2.6.4 Les funcions cos, sin són contínues en $\mathbf{R}$.

Demostració. Donat $\varepsilon > 0$ arbitrari, prenem $x, y \in [0, 2\pi)$ amb $|y - x| < \varepsilon$. La distància al pla entre els punts $P(x), P(y)$ és menor que la llargada de l'arc de circumferència que els uneix. Per tant,

$$d(P(x), P(y)) = \sqrt{(\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2} \leq |y - x| < \varepsilon$$

i això implica que $|\cos y - \cos x| < \varepsilon$ i $|\sin y - \sin x| < \varepsilon$. Tenim doncs que les funcions cosinus i sinus són contínues en $[0, 2\pi)$. Amb un argument semblant es pot provar que $\lim_{x \to 2\pi_-} \cos x = 1 = \cos 0$ i $\lim_{x \to 2\pi_-} \sin x = 0 = \sin 0$, el que demostra que les funcions són contínues en $\mathbf{R}$. ∎

Proposició 2.6.5 Algunes propietats de les funcions cosinus i sinus. Per a tot $x \in \mathbf{R}$ se satisfan les propietats següents.

1. Per definició, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Per tant, aquestes funcions són *periòdiques*.
2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ i, per tant, $-1 \leq \cos x, \sin x \leq 1$.
3. $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$. És a dir, la funció cosinus és parella i la funció sinus és imparella.
4. $\cos x = 0$ si i només si $x = \pi/2 + k\pi$ amb $k \in \mathbf{Z}$, mentre que $\sin x = 0$ si i només si $x = k\pi$ amb $k \in \mathbf{Z}$.
5. $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$.
6. $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$, $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$
7. $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(\pi/3) = 1/2$.

Definició 2.6.6 La funció *tangent* es defineix per

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Aquesta funció és contínua en el seu domini, que és $\mathbf{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \ : \ k \in \mathbf{Z}\}$. És una funció imparella.

Proposició 2.6.7 Per a qualssevol $x, y \in \mathbf{R}$,

- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
- $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x$.

Demostració. Usarem els fets següents.

1. Els girs amb centre l'origen són endomorfismes de l'espai vectorial $\mathbf{R}^2$.
2. La matriu en la base canònica del gir d'angle x radians és $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$
3. La composició de dos girs d'angles x, y és un gir d'angle $x+y$.
4. La matriu associada a la composició de dos endomorfismes es el producte de les corresponents matrius.

Amb tot això, la demostració es conclou amb

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & -(\sin x \cos y + \cos y \sin x) \\ \sin x \cos y + \cos y \sin x & \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

∎

La *fórmula d'Euler*, que es justificarà més endavant, és extremadament útil per deduir identitats trigonomètriques. Tracta de l'extensió als nombres complexos de la funció exponencial. Concretament, la fórmula d'Euler afirma que

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

per a tot $x \in \mathbf{R}$, on $i = \sqrt{-1}$ és la unitat imaginària. Per exemple, les identitats a la Proposició 2.6.7 es poden deduir de la fórmula d'Euler. En efecte,

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)} \\ &= e^{ix}e^{iy} \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos y \sin x). \end{aligned}$$

Proposició 2.6.8 La funció tangent $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$ és estrictament creixent i bijectiva.

Demostració. Donats $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$ amb $x < y$,

$$\tan y - \tan x = \frac{\sin y}{\cos y} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \sin y - \cos y \sin x}{\cos y \cos x} = \frac{\sin(y-x)}{\cos y \cos x} > 0$$

perquè $0 < y - x < \pi$. Això demostra que la funció tangent és esrictament creixent en $(-\pi/2, \pi/2)$. Finalment, com que

$$\lim_{x \to -\pi/2_+} \tan x = -\infty, \qquad \lim_{x \to \pi/2_-} \tan x = +\infty,$$

la funció és bijectiva. ∎

Definició 2.6.9 La funció inversa de la tangent, que s'anomena *arc tangent*, és una funció

$$\arctan\colon \mathbf{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

bijectiva i creixent.

També podem considerar les funcions inverses de les funcions cosinus i sinus, però hem de seleccionar intervals on aquestes funcions siguin injectives. Per al sinus, podem agafar l'interval $[-\pi/2, \pi/2]$ i per al cosinus l'interval $[0, \pi]$. A partir de la definició d'aquestes funcions, es pot comprovar que

$$\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$$

és una funció estrictament creixent i bijectiva i que

$$\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$$

és una funció estrictament decreixent i bijectiva.

Definició 2.6.10 Les funcions inverses del sinus i el cosinus s'anomenen respectivament *arc sinus* i *arc cosinus*. Són funcions bijectives

$$\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2], \qquad \arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$$

Proposició 2.6.11 Acabem aquest apartat amb dos límits que seran fonamentals en el tema següent.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

Demostració. Per a $x \in \mathbf{R}$ amb $0 < x < \pi/2$, prenem el punt $P = (\cos x, \sin x)$ sobre la circumferència de radi 1 centrada a l'origen de coordenades O, el punt $Q = (1, 0)$, la recta ℓ tangent a la circumferència al punt Q i el punt de tall T de les rectes ℓ i OP. Comparant les àrees del triangle OPQ, del sector circular OPQ i del triangle OQT,

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$$

Per tant

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

i, en conseqüència,

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

si $0 < x < \pi/2$. Òbviament, aquestes desigualtats també són vàlides si $-\pi/2 < x < 0$. Amb això es demostra el primer límit. Com que $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$, tenim que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin(x/2) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} = 0 \cdot 1 = 0.$$

$\blacksquare$

Capítol 3

Derivació

3.1 Derivada d'una funció

3.1.1 Definició de derivada. Funcions derivables

Definició 3.1.1 Siguin $I \subset \mathbf{R}$ un interval obert, $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció definida en aquest interval i $a \in I$. Direm que la funció f és *derivable en el punt* a si existeix el límit

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

El valor d'aquest límit s'anomena la *derivada* de la funció f en el punt a i s'escriu $f'(a)$. En aquesta situació, la recta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ s'anomena la *recta tangent a la gràfica de* f *al punt* a. Observem que la derivada $f'(a)$ és el pendent d'aquesta recta tangent.

Proposició 3.1.2 Si f és derivable en a, aleshores f és contínua en a.

Demostració. Suposem que f és derivable en a. Aleshores

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(f(a) + (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = f(a) + 0 \cdot f'(a) = f(a).$$

Així doncs, f és contínua en a. ■

Observació 3.1.3 El recíproc de la proposició anterior és fals en general.

Demostració. La funció $f(x) = |x|$ és clarament contínua en 0 i, en canvi, no és derivable en aquest punt. En efecte,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1,$$

mentre que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Per tant, f no és derivable en 0. ■

Exercici 3.1.4 Proveu que qualsevol funció constant $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és derivable en tot punt $a \in \mathbf{R}$ i proveu que $f'(a) = 0$.

Exercici 3.1.5 Proveu que, per a tot $n \in \mathbf{N}$, la funció $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida per $f(x) = x^n$ és derivable en tot punt $a \in \mathbf{R}$ i proveu que $f'(a) = na^{n-1}$.

Definició 3.1.6 Sigui $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció definida en un interval obert de $\mathbf{R}$. Direm que f és *derivable en* I si és derivable en tots els punts de I. En aquest cas, la derivada en cada punt determina una funció f' amb domini I, que s'anomena la *funció derivada* de f.

Exemple 3.1.7 Per a tot $n \in \mathbf{N}$, la funció derivada de $f(x) = x^n$ és la funció $f'(x) = nx^{n-1}$.

Definició 3.1.8 Si $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és derivable en I i la funció derivada f' és derivable en $a \in I$, podem considerar la *segona derivada* de la funció f en el punt a:

$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a + h) - f'(a)}{h}.$$

Si f' és derivable en I, podem considerar la *funció derivada segona* de f, $f'' : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Anàlogament es defineixen les derivades tercera, quarta i, en general, la derivada n-èsima $f^{(n)}$ de la funció f. Si existeix la derivada n-èsima de f, direm que f és *n vegades derivable* Si, per a tot $n \in \mathbf{N}$, existeix la funció derivada n-èsima $f^{(n)} : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, direm que f és *indefinidament derivable* en I.

Exercici 3.1.9 Proveu que, per a tot $n \in \mathbf{N}$, la funció $f(x) = x^n$ és indefinidament derivable. Determineu-ne la funció derivada k-èsima per a tot k.

Definició 3.1.10 Sigui $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció definida en un interval obert.

- Si f és contínua en I, direm que f és de *classe* $\mathcal{C}^0$ en I i escriurem $f \in \mathcal{C}^0(I)$.
- Si f és derivable en I i f' és contínua en I, direm que f és *derivable amb continuïtat* en I o de *classe* $\mathcal{C}^1$ en I i escriurem $f \in \mathcal{C}^1(I)$.
- En general, si existeix la funció derivada n-èsima $f^{(n)} : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i és contínua en I, direm que f és *n vegades derivable amb continuïtat* en I o de *classe* $\mathcal{C}^n$ en I i escriurem $f \in \mathcal{C}^n(I)$.
- Si f és indefinidament derivable en I, direm que f és *classe* $\mathcal{C}^\infty$ en I, i escriurem $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

3.1.2 Propietats de la derivada

Proposició 3.1.11 Siguin $I \subset \mathbf{R}$ un interval obert i $f, g : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dues funcions derivables en $a \in I$. Aleshores

1. Per a tot $\lambda \in \mathbf{R}$, la funció λf és derivable en a i $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
2. La funció $f + g$ és derivable en a i $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
3. La funció fg és derivable en a i $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
4. Si $g(x) \neq 0$ per a tot $x \in I$, la funció $1/g$ és derivable en a i
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$
5. Si $g(x) \neq 0$ per a tot $x \in I$, la funció f/g és derivable en a i
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Demostració. La primera i la segona propietats són evidents a partir de la definició de derivada i les propietats dels límits. La propietat relativa a la derivada del producte es dedueix de:

$$\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

Hem fet us del fet que la funció g, per ser derivable en a, és contínua en a. Per demostrar la quarta propietat, utilitzem que $g(x)\neq 0$ per a tot $x\in I$ i fem:

$$\lim_{x\to a}\frac{(\frac{1}{g})(x)-(\frac{1}{g})(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}-\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\frac{1}{g(x)g(a)}=-\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Finalment, la cinquena propietat es prova combinant les dues anteriors:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\left(f\frac{1}{g}\right)'(a)=f'(a)\left(\frac{1}{g}\right)(a)+f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=$$

$$=\frac{f'(a)}{g(a)}-f(a)\frac{g'(a)}{(g(a))^2}=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

■

Exercici 3.1.12 Raoneu que qualsevol funció racional (quocient de polinomis) és indefinidament derivable al seu domini. Proveu que la funció $f(x)=x^n$ amb $n\in\mathbf{Z}$ (n pot ser negatiu) és derivable en $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ i $f'(x)=nx^{n-1}$.

Proposició 3.1.13 (Regla de la cadena) Siguin $I,J\subset\mathbf{R}$ intervals oberts i dues funcions $f:I\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g:J\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tals que $f(I)\subset J$. Suposem que f és derivable en $a\in I$ i que g és derivable en $b=f(a)\in J$. Aleshores la composició $g\circ f$ és derivable en a i

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a).$$

Demostració. Introduïm la funció auxiliar $G\colon J\to\mathbf{R}$ donada per

$$G(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} & \text{si } y\neq b\\[2ex] g'(b) & \text{si } y=b\end{cases}$$

Clarament, $\lim_{y\to b}G(y)=G(b)$ i, per tant, G és contínua en b. Per la Proposició 2.2.9, la funció $G\circ f$ és contínua en a. Així doncs, $\lim_{x\to a}G(f(x))=G(f(a))=g'(b)$. A més a més, per a tot $x\in I$,

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=G(f(x))\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

En efecte, la igualtat es comprova fàcilment si $f(x)\neq f(a)$, mentre que tots dos termes s'anul·len si $f(x)=f(a)$. Amb tot això,

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\lim_{x\to a}G(f(x))\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=g'(b)f'(a),$$

que conclou la demostració. ■

Proposició 3.1.14 Siguin $I, J \subset \mathbf{R}$ intervals oberts i $f\colon I \subset \mathbf{R} \to J \subset \mathbf{R}$ una funció contínua i bijectiva. Suposem que f és derivable en $a \in I$ i que $f'(a) \neq 0$. Aleshores, la funció inversa $f^{-1}\colon J \subset \mathbf{R} \to I \subset \mathbf{R}$ és derivable en $b = f(a) \in J$ i

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Demostració. Considerem la funció $F\colon I \to \mathbf{R}$ definida per

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Aquesta funció és contínua en $a \in I$ i la funció $f^{-1}\colon J \to I$ és contínua en J per la Proposició 2.3.5. Per tant, per la Proposició 2.2.9, la funció $F \circ f^{-1}$ és contínua en $b \in J$. Així doncs,

$$f'(a) = (F \circ f^{-1})(b) = \lim_{y \to b} (F \circ f^{-1})(y) = \lim_{y \to b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = \lim_{y \to b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}.$$

Finalment, com que $f'(a) \neq 0$,

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

■

3.1.3 Derivades d'algunes funcions

Exercici 3.1.15 Proveu que, per a tot $m \in \mathbf{Z}$, la funció $f(x) = x^{1/m}$ és derivable en $(0, +\infty)$ i determineu $f'(x)$. Proveu que, per a tot $q \in \mathbf{Q}$, la funció $g(x) = x^q$ és derivable en $(0, +\infty)$ i la seva derivada és $g'(x) = qx^{q-1}$.

Comentàvem a l'Observació 2.5.6 que la funció exponencial de base el nombre e és l'opció preferida. El motiu principal és que la derivada d'aquesta funció és ella mateixa, tal com es mostra en la proposició següent.

Proposició 3.1.16 La funció exponencial $f(x) = e^x$ és derivable en $\mathbf{R}$ i $f'(x) = e^x$ per a tot $x \in \mathbf{R}$. Així doncs, la funció exponencial és indefinidament derivable en $\mathbf{R}$.

Demostració. Calculem la derivada de f en un punt arbitrari $x \in \mathbf{R}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Hem aplicat la Proposició 2.5.9. ■

Exercici 3.1.17 Proveu que la funció exponencial de base $a > 0$ és indefinidament derivable en $\mathbf{R}$ i trobeu-ne la funció derivada.

Proposició 3.1.18 La funció logarítmica $\log x$ és indefinidament derivable en $(0, +\infty)$. La derivada és $\log' x = 1/x$.

Demostració. Com que el logaritme és la inversa de la funció exponencial $f(y) = e^y$, per la Proposició 3.1.14, el logaritme és derivable al seu domini. Donat $x \in (0, +\infty)$ prenem $y = \log x$. Aleshores

$$\log' x = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

En particular, això implica que el logaritme és indefinidament derivable al seu domini. ∎

Exercici 3.1.19 Raoneu que la funció logarítmica en base $a > 0$, $a \neq 1$ és indefinidament derivable en $(0, +\infty)$ i determineu-ne la derivada.

Proposició 3.1.20 Les funcions cosinus i sinus són derivables en $\mathbf{R}$. Les seves funcions derivades són:

- $\sin' x = \cos x$,
- $\cos' x = -\sin x$.

Per tant, aquestes funcions són indefinidament derivables en $\mathbf{R}$.

Demostració. Calculem la derivada de la funció sinus en un punt arbitrari $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \sin h + \cos h \sin x - \sin x}{h} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

A la darrera igualtat hem aplicat la Proposició 2.6.11. La derivada de la funció cosinus es determina amb un càlcul semblant. ∎

Exercici 3.1.21 Proveu que la funció tangent és indefinidament derivable al seu domini i que $\tan' x = 1/\cos^2 x$.

Per acabar aquest apartat, determinem les derivades de les funcions trigonomètriques inverses.

Proposició 3.1.22 La funcions arc sinus, $f(x) = \arcsin x$, i arc cosinus, $g(x) = \arccos x$, són derivables en $(-1, 1)$ i les seves derivades són

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demostració. Donat $x \in (-1, 1)$, prenem $y = \arcsin x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Aleshores

$$f'(x) = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La derivada de l'arc cosinus es troba de manera semblant. ∎

Proposició 3.1.23 La funció arc tangent, $f(x) = \arctan x$, és derivable en $\mathbf{R}$ i la seva derivada és

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Demostració. Donat $x \in \mathbf{R}$, prenem $y = \arctan x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Aleshores

$$f'(x) = \frac{1}{\tan' y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

∎

3.2 Teoremes sobre funcions derivables

3.2.1 Teoremes de Rolle, de Cauchy i del Valor Mig

Definició 3.2.1 Sigui $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció definida en un interval obert.

- Direm que f té un *màxim local o relatiu* al punt $a \in I$ si existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$ per a tot $x \in (a-\delta, a+\delta)$.
- Direm que f té un *mínim local o relatiu* al punt $a \in I$ si existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(a)$ per a tot $x \in (a-\delta, a+\delta)$.
- Direm que f té un *extrem local o relatiu* al punt $a \in I$ si té un màxim local o un mínim local en aquest punt.

Proposició 3.2.2 Sigui $I \subset \mathbf{R}$ un interval obert i $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció derivable en $a \in I$. Si f presenta un extrem relatiu al punt a, aleshores $f'(a) = 0$.

Demostració. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que f presenta un màxim relatiu al punt a. Aleshores, existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) - f(a) \leq 0$ per a tot $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Així doncs, $(f(x) - f(a))/(x-a) \geq 0$ si $a - \delta < x < a$ mentre que $(f(x) - f(a))/(x-a) \leq 0$ si $a < x < a + \delta$. D'aquí es dedueix fàcilment que $f'(a) = 0$. ∎

Teorema 3.2.3 (Teorema de Rolle) Sigui $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció tal que:

- f és contínua en $[a, b]$,
- f és derivable en (a, b),
- $f(a) = f(b)$.

Aleshores existeix $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

Demostració. Pel Teorema de Weirstrass (Teorema 2.3.11), existeixen $\alpha, \beta \in [a, b]$ tals que $f(\alpha) = m$ i $f(\beta) = M$ amb $m \leq f(x) \leq M$ per a tot $x \in [a, b]$. Si $\alpha, \beta \in \{a, b\}$, aleshores la funció f és constant i, per tant, $f'(\xi) = 0$ per a tot $\xi \in (a, b)$. Si, per exemple, $\beta \in (a, b)$, aleshores f presenta un màxim local en β i, per la Proposició 3.2.2, $f'(\beta) = 0$. ∎

Teorema 3.2.4 (Teorema de Cauchy) Siguin $f, g : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dues funcions tals que:

- f i g són contínues en $[a, b]$,
- f i g són derivables en (a, b),
- $g(a) \neq g(b)$,
- per a tot $x \in (a, b)$, $f'(x) \neq 0$ o bé $g'(x) \neq 0$.

Aleshores existeix $\xi \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Demostració. Considerem la funció $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. Clarament, h és contínua en $[a, b]$, derivable en (a, b) i també $h(a) = h(b)$. És a dir, la funció h compleix les hipòtesis del Teorema de Rolle. Per tant, existeix $\xi \in (a, b)$ tal que

$$h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0.$$

Observem que $g'(\xi) \neq 0$, ja que si $g'(\xi) = 0$, aleshores tindríem que $(g(b) - g(a))f'(\xi) = 0$ i, per tant, o bé $g(b) - g(a) = 0$ o bé $f'(\xi) = 0$, el que contradiu les hipòtesis. ∎

Teorema 3.2.5 (Teorema del Valor Mig) Sigui $f : [a,b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció tal que:

- f és contínua en $[a,b]$,
- f és derivable en (a,b).

Aleshores existeix $\xi \in (a,b)$ tal que $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostració. Es dedueix del Teorema de Cauchy prenent $g(x) = x$. ■

Veiem ara una aplicació elemental del Teorema del Valor Mig que ens permetrà provar una caracterització de la funció exponencial.

Exercici 3.2.6 Siguin $I \subset \mathbf{R}$ un interval obert i $f\colon I \to \mathbf{R}$ una funció derivable en I tal que $f'(x) = 0$ per a tot $x \in I$. Proveu que f és una funció constant.

Proposició 3.2.7 Sigui f una funció derivable en $\mathbf{R}$ tal que $f' = f$. Aleshores $f(x) = ce^x$ per a alguna constant $c \in \mathbf{R}$. En particular, la funció exponencial és l'única que satisfà $f' = f$, $f(0) = 1$.

Demostració. Considerem la funció $g(x) = f(x)e^{-x}$. Aleshores, $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0$ i, per tant, $g(x) = f(x)e^{-x} = c$ per a alguna constant $c \in \mathbf{R}$. ■

3.2.2 Regla de l'Hôpital

La Regla de l'Hôpital, que es basa en el Teorema de Cauchy (Teorema 3.2.4), s'utilitza per resoldre indeterminacions que apareixen en calcular el límit del quocient de dues funcions.

Proposició 3.2.8 Siguin a, r nombres reals amb $r > 0$ i considerem l'interval $I = (a-r, a)$. Siguin f, g funcions derivables en I tals que

1. $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ per a tot $x \in I$,
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$,
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Aleshores, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Demostració. Suposem primer que $L \in \mathbf{R}$. Aleshores, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix δ amb $0 < \delta < r$ tal que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon$$

per a tot $x \in (a-\delta, a)$. Prenem dos punts x, y amb $a - \delta < x < y < a$. Com que g' no s'anul·la en $(a-r, a)$, pel Teorema de Rolle tenim que $g(x) \neq g(y)$. Pel Teorema de Cauchy, existeix $\xi \in (x,y)$ tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Així doncs,

$$\left| \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - L \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| < \varepsilon$$

per a tot parell de punts x, y amb $a-\delta < x < y < a$. Si ara fixem $x \in (a-\delta, a)$ i tenim en compte que $\lim_{y\to a} f(y) = \lim_{y\to a} g(y) = 0$, obtenim

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \le \varepsilon$$

per a tot $x \in (a-\delta, a)$, i això conclou la demostració per al cas $L \in \mathbf{R}$.

Suposem ara que

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty.$$

Aleshores, per a tot $K > 0$, existeix δ amb $0 < \delta < r$ tal que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| > K$$

per a tot $x \in (a-\delta, a)$. Com abans, prenem dos punts x, y amb $a-\delta < x < y < a$. Pel Teorema de Cauchy, existeix $\xi \in (x, y)$ tal que

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| > K.$$

Arribats en aquest punt, podem raonar com en el cas anterior i provar que

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \ge K$$

per tot $x \in (a-\delta, a)$. ■

Observació 3.2.9 La proposició anterior tracta amb límits per l'esquerra. Clarament, el resultat anàleg per a intervals de la forma $(a, a+r)$ es demostra de la mateixa manera. Així doncs, podem aplicar la Regla de l'Hôpital a límits en un punt i a límits laterals. Veiem a continuació que també s'aplica als límits a l'infinit

Proposició 3.2.10 Considerem un nombre real M i l'interval $I = (M, +\infty)$. Siguin f, g funcions derivables en I tals que

1. $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ per a tot $x \in I$,
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$,
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Aleshores, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Demostració. Semblant a la de la Proposició 3.2.8. ■

Observació 3.2.11 La proposició anterior s'adapta de forma immediata a límits quan x tendeix a $-\infty$. Així doncs, les Proposicions 3.2.8 i 3.2.10 ens mostren com aplicar la Regla de l'Hôpital per resoldre indeterminacions del tipus $0/0$. A continuació veiem que també ens permet resoldre indeterminacions del tipus ∞/∞.

Proposició 3.2.12 Siguin a, r nombres reals amb $r > 0$ i considerem l'interval $I = (a - r, a)$. Siguin f, g funcions derivables en I tals que

1. $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ per a tot $x \in I$,
2. $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ o bé $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$,
3. $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Aleshores, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Demostració. Suposem que $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ i que $L \in \mathbf{R}$. Com que $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x) = L$, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix δ amb $0 < \delta < r$ tal que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

per a tot $x \in (a - \delta, a)$. Prenem dos punts x, y amb $a - \delta < x < y < a$. Com a la demostració de la Proposició 3.2.8, pel Teorema de Cauchy existeix $\xi \in (x, y)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Així doncs,

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - L \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

per a tot parell de punts x, y amb $a - \delta < x < y < a$. Fixem $x \in (a - \delta, a)$. Com que $\lim_{y \to a} g(y) = +\infty$, existeix $\delta_1 > 0$ tal que $x < a - \delta_1$ i $g(y) > \max\{g(x), 0\}$ per a tot $y \in (a - \delta_1, a)$. Multiplicant les desigualtats

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

per $(g(y) - g(x))/g(y)$, que és positiu, obtenim

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{g(y) - g(x)}{g(y)} < \frac{f(y) - f(x)}{g(y)} < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{g(y) - g(x)}{g(y)}$$

i per tant,

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)} < \frac{f(y)}{g(y)} < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)}$$

sempre que $a - \delta_1 < y < a$. Donat que $\lim_{y \to a} g(y) = +\infty$, existeix $\delta_2 \in \mathbf{R}$ amb $0 < \delta_2 < \delta_1$ tal que, per a tot $y \in (a - \delta_2, a)$,

$$\left| -\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i també} \quad \left| -\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

i, per tant,

$$L - \varepsilon < \frac{f(y)}{g(y)} < L + \varepsilon.$$

Amb això hem demostrat que

$$\lim_{y\to a}\frac{f(y)}{g(y)} = L.$$

Suposem ara que $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ i que $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = +\infty$. Així doncs, per a tot $K > 0$, existeix δ amb $0 < \delta < r$ tal que

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > 2K$$

per a tot $x \in (a-\delta, a)$. Prenem dos punts x, y amb $a - \delta < x < y < a$. Pel Teorema de Cauchy, existeix $\xi \in (x.y)$ tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Així doncs,

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 2K$$

per a tot parell de punts x, y amb $a-\delta < x < y < a$. Fixem $x \in (a-\delta, a)$. Com al cas anterior, existeix δ_1 amb $x < a - \delta_1$ tal que $(g(y)-g(x))/g(y) > 0$ per a tot $y \in (a-\delta_1, a)$. Multiplicant la desigualtat anterior per aquesta quantitat,

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)} > 2K\,\frac{g(y)-g(x)}{g(y)}$$

i per tant,

$$\frac{f(y)}{g(y)} > 2K - 2K\,\frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)}$$

sempre que $y \in (a-\delta_1, a)$. Donat que $\lim_{y\to a} g(y) = +\infty$, existeix $\delta_2 \in \mathbf{R}$ amb $0 < \delta_2 < \delta_1$ tal que, per a tot $y \in (a-\delta_2, a)$,

$$\left|-2K\,\frac{g(x)}{g(y)} + \frac{f(x)}{g(y)}\right| < K$$

i, per tant,

$$\frac{f(y)}{g(y)} > K,$$

que conclou la demostració. ■

Observació 3.2.13 Amb algunes variacións a la proposició anterior, es pot demostrar que la Regla de l'Hôpital es pot utilitzar per a resoldre indeterminacions del tipus ∞/∞ en límits en un punt, límits laterals, i límits quan $x \to +\infty$ o bé $x \to -\infty$

3.3 Aplicacions

3.3.1 Optimització

Definició 3.3.1 Sigui f una funció derivable en un interval obert $I \subset \mathbf{R}$. Els *punts singulars* de la funció f són els punts $x \in I$ amb $f'(x) = 0$.

Per la Proposició 3.2.2, els punts on una funció derivable presenta un extrem local són punts singulars. El recíproc, però, no és cert, com es pot veure amb la funció $f(x) = x^3$ i el punt $x = 0$. La següent proposició ens dóna una eina per a analitzar el caràcter dels punts singulars d'una funció.

Proposició 3.3.2 Sigui $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció derivable en l'interval obert I tal que $f'(x) > 0$ per a tot $x \in I$. Aleshores f és estrictament creixent en I. Si $f'(x) < 0$ per a tot $x \in I$, aleshores f és estrictament decreixent en I.

Demostració. Suposem per exemple que $f'(x) > 0$ per a tot $x \in I$. Donats $x_1, x_2 \in I$ amb $x_1 < x_2$, pel Teorema del Valor Mig existeix $\xi \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$. ■

Així doncs, podem determinar els intervals de creixement i de decreixement d'una funció derivable analitzant el signe de la funció derivada. Això ens permet determinar si en un punt singular hi ha un màxim o un mínim local o no hi ha cap extrem local.

Exercici 3.3.3 Determineu els extrems locals de les funcions $f(x) = x^3 - x$ i $g(x) = x^4 - 2x^2$.

Pel Teorema de Weierstrass, tota funció contínua en un interval tancat té un valor màxim absolut i un valor mínim absolut. Els problemes d'optimització, que són de gran importància en molts camps del coneixement, consisteixen bàsicament en trobar extrems absoluts de funcions. El resultat següent és útil si la funció que hem d'optimizar és derivable.

Proposició 3.3.4 Sigui $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció contínua. Els extrems absoluts de f s'assoliran

- als extrems de l'interval, o bé
- als punts de l'interval obert (a, b) on la funció no sigui derivable, o bé
- als punts de l'interval obert (a, b) on s'anul·la la derivada.

Exercici 3.3.5 Demostreu la Proposició 3.3.4

3.3.2 Infinitèsims i infinits

L'aproximació i, més generalment, la comparació de funcions són, com l'optimització, fonamentals per a moltes aplicacions de les matemàtiques. Introduim a continuació conceptes que ens permeten comparar funcions localment, és a dir, al voltant d'un punt.

Definició 3.3.6 Siguin $f\colon A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció i $a \in \mathbf{R}$ un punt d'acumulació del seu domini. Direm que f és un *infinitèsim* en a si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Direm que f és un *infinit* en a si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Definició 3.3.7 Siguin f i g dos infinitèsims (o infinits) en a. Direm que $f = o(g)$ com a infinitèsims (o infinits) en a si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Direm que f i g són infinitèsims (o infinits) equivalents en a si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Observació 3.3.8 Amb la notació $f = o(g)$ s'indica que els valors de f al voltant del punt indicat són, en valor absolut, molt més petits que els de g. Aquesta notació, i també el concepte d'infinitèsims (o infinits) equivalents, fan referència al comportament *asimptòtic* (és a dir, en el límit) de les funcions.

Observació 3.3.9 La notació $f = o(g)$ s'ha d'usar amb precaució. Primer de tot, no hem d'oblidar indicar en quin punt estem fent la comparació. Això és, si no és obvi pel context, és necessari especificar-ho escrivint "$f = o(g)$ al voltant del punt a" o bé "$f(x) = o(g(x))$ quan x tendeix a a" o alguna altra expressió similar. En segon lloc, hem de recordar en tot moment que $o(g)$ no és una funció, sinó una *família de funcions*, formada per *totes* les funcions h amb $\lim_{x\to a}(h(x)/g(x)) = 0$. Per exemple, si escrivim "$\sin x = x+o(x)$ al voltant de $x = 0$" estem indicant que la funció $\sin x-x$ és un membre de la família $o(x)$.

Exemple 3.3.10 Pels límits de la Proposició 2.6.11, tenim que $\sin x$ i x són infinitèsims equivalents i $1-\cos x = o(x)$ quan x tendeix a 0.

L'*ordre de contacte* és un altre concepte relacionat amb la comparació local de funcions.

Definició 3.3.11 Dues funcions f, g tenen *ordre de contacte superior a* n al punt a si

$$f(x) - g(x) = o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

Les funcions polinòmiques de grau 1 són de la forma $r(x) = a_0 + a_1 x$. Les gràfiques d'aquestes funcions són rectes. Si f és derivable al punt a, la gràfica de la funció $r(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ és la recta tangent a la gràfica de la funció f.

Proposició 3.3.12 Sigui f una funció derivable al punt a. L'única funció polinòmica de grau com a molt 1 que té amb f ordre de contacte superior a 1 al punt a és $r(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Demostració. Qualsevol funció polinòmica de grau 1 es pot expressar de la forma $r(x) = b_0 + b_1(x-a)$ per a certs coeficients $b_0, b_1 \in \mathbf{R}$. La funcions r i f tenen ordre de contacte superior a 1 al punt a si i només si

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-r(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-b_0-b_1(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-b_0}{x-a} - b_1$$

i això és equivalent a $b_0 = f(a)$ i $b_1 = f'(a)$. ∎

Observació 3.3.13 Siguin f una funció derivable en a amb $f'(a) \neq 0$. Aleshores $f(x) - f(a)$ i $f'(a)(x-a)$ són infinitèsims equivalents en a.

3.3.3 Convexitat i concavitat

La *convexitat* és, com la monotonia, una característica fonamental a tenir en compte en l'anàlisi de funcions. Aquesta propietat està relacionada amb el comportament de les derivades primera i segona.

Definició 3.3.14 Un funció f és *convexa* a l'interval I si, per a tot $a, b \in I$ amb $a < b$ es té que

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) > f(x)$$

o, equivalentment,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{3.1}$$

per a tot $x \in (a, b)$. És a dir, si, per a tot $a, b \in I$ amb $a < b$, el segment que uneix els punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ està per sobre de la gràfica de f. Si es compleix la desigualtat (3.1) en sentit oposat, és a dir, si els segments estan per sota de la gràfica, direm que f és *còncava* en I.

Proposició 3.3.15 Sigui f una funció convexa a l'interval I. Si f és derivable en $a \in I$, aleshores

$$f(a) + f'(a)(x-a) < f(x) \tag{3.2}$$

per a tot $x \in I \setminus \{a\}$. És a dir, la recta tangent a la gràfica de f al punt a està per sota de la gràfica de f, excepte al punt de contacte $(a, f(a))$. Si f és derivable als punts $a, b \in I$ amb $a < b$, aleshores $f'(a) < f'(b)$.

Demostració. Com que f es convexa, satisfà la desigualtat (3.1). Per tant, per a tot $x, y \in I$ amb $a < y < x$,

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Veiem doncs que $f'(a)$ és l'ínfim dels valors $(f(z) - f(a))/(z - a)$ amb $z > a$. Per tant,

$$f'(a) \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

i, en conseqüència, $f(a) + f'(a)(x - a) < f(x)$ per a tot $x \in I$ amb $x > a$. El cas $x < a$ es resol anàlogament i amb això hem demostrat la desigualtat (3.2), i la podem aplicar per demostrar el segon enunciat. En efecte, per (3.2),

$$f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

i, com que $a - b < 0$,

$$f'(b) > \frac{f(a) - f(b)}{a - b},$$

d'on es dedueix que $f'(a) < f'(b)$. ■

El següent pas és provar els recíprocs dels dos enunciats de la Proposició 3.3.15. Obtindrem així una caracterització de la convexitat de les funcions derivables en termes del comportament de la funció derivada.

Lema 3.3.16 Sigui f una funció derivable en un interval I tal que la funció derivada f' és estrictament creixent en I. Si $a, b \in I$ són tals que $a < b$ i $f(a) = f(b)$, aleshores $f(x) < f(a) = f(b)$ per a tot $x \in (a, b)$.

Demostració. Suposem que $f(x) \geq f(a) = f(b)$ per a algun $x \in (a, b)$. Aleshores existeix $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0)$ és el valor màxim absolut de f a l'interval $[a, b]$ i, per tant, $f'(x_0) = 0$. D'altra banda, pel Teorema del Valor Mig, existeix $x_1 \in (a, x_0)$ tal que

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \geq 0 = f'(x_0),$$

una contradicció amb la hipòtesi que f' és estrictament creixent. ■

Proposició 3.3.17 Sigui f una funció derivable en un interval I tal que la funció derivada f' és estrictament creixent en I. Aleshores f és convexa en I.

Demostració. Prenem $a, b \in I$ amb $a < b$ i la funció

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Clarament, g' és també estrictament creixent i es compleix $g(a) = g(b) = f(a)$. Pel Lema 3.3.16, per a tot $x \in (a, b)$,

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) < g(a) = f(a),$$

d'on es dedueix que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

i, per tant, f és convexa. ■

Proposició 3.3.18 Sigui f una funció derivable en un interval I tal que, en cada punt, la recta tangent a la gràfica de f al punt a està per sota de la gràfica de f, és a dir, se satisfà la desigualtat (3.2). Aleshores f és convexa en I.

Demostració. Per la Proposició 3.3.17, només cal provar que la derivada f' és estrictament creixent. Prenem $a, b \in I$ amb $a < b$. Com que el punt $(b, f(b))$ està per sobre de la recta tangent a la gràfica al punt a,

$$f(a) + f'(a)(b - a) < f(b).$$

Intercanviant els papers de a i b,

$$f(b) + f'(b)(a - b) < f(a).$$

A partir d'aquestes dues desigualtats, $f'(a) < f'(b)$. ■

Observació 3.3.19 Les tres proposicions anteriors es poden adaptar per obtenir propietats anàlogues de les funcions còncaves. En particular, una funció derivable és còncava si i només si la seva derivada és estrictament decreixent.

Observació 3.3.20 Si f és dues vegades derivable en I i $f''(x) > 0$ per a tot $x \in I$, aleshores f és convexa en I.

Definició 3.3.21 Sigui f una funció derivable en un interval I i sigui $a \in I$ tal que la recta tangent a la gràfica de f al punt a travessa la gràfica de f. Aleshores direm que a és un *punt d'inflexió* de f.

Exemple 3.3.22 Considerem la funció $f(x) = x^3$. Com que $f''(x) = 6x$, tenim que f és còncava en $(-\infty, 0)$ i convexa en $(0, +\infty)$. La recta tangent a la gràfica de f al punt 0 és la recta $y = 0$, que travessa la gràfica de f. Per tant, 0 és un punt d'inflexió de la funció f.

La convexitat o concavitat d'una funció ens permet determinar el caràcter dels seus punts singulars.

Proposició 3.3.23 Sigui f una funció convexa (respectivament, còncava) en un interval obert I i sigui $a \in I$ tal que f és derivable en a amb $f'(a) = 0$. Aleshores f presenta un mínim (respectivament, màxim) local en a

Demostració. Suposem que f és convexa. Aleshores la gràfica de f està per sobre de la recta tangent a la gràfica de f en a, que és la recta $y = f(a)$. ■

Proposició 3.3.24 Sigui f una funció derivable dues vegades en un interval obert I i sigui $a \in I$ un punt singualr de f. Si $f''(a) > 0$ (respectivament, $f''(a) < 0$), aleshores f presenta un mínim (respectivament, màxim) local en a.

Exercici 3.3.25 Trobeu els intervals de convexitat i concavitat i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = 1/(1 + x^2)$.

Capítol 4

Integració

4.1 La integral de Riemann

4.1.1 Definició. Funcions integrables

En molts problemes de la física i l'enginyeria, no és tan important conèixer el comportament d'una funció en un punt (o instant) concret com conèixer-ne el comportament global en un cert període. Aquesta és la utilitat de la *integral* que, informalment, és el valor acumulat de la funció en un interval o l'àrea (amb signe) de la regió compresa entre la gràfica de la funció i l'eix horitzontal. Hi ha diferents maneres de definir formalment el concepte d'integral. Aquí ho farem amb la *integral de Riemann*.

Definició 4.1.1 Sigui $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ un interval tancat i fitat. Una *partició* de l'interval I és qualsevol subconjunt finit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ amb $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Amb això tenim que $I = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$.

Definició 4.1.2 Siguin $f : I = [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció fitada i $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ una partició de l'interval I. Per a cada $k = 1, \ldots, n$, considerem

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Definim la *suma inferior de la funció f respecte de la partició P* com

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Definim també la *suma superior de la funció f respecte de la partició P* com

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Lema 4.1.3 Sigui $f : I = [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció fitada i considerem $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ i $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Aleshores, per a tota partició P de l'interval I,

$$m(b - a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b - a).$$

Demostració. Donat que $b-a=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$,

$$m(b-a)\leq\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})\leq\sum_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1})\leq M(b-a).$$

∎

Definició 4.1.4 Siguin P i Q dues particions d'un interval tancat $I=[a,b]$. Direm que Q és un *refinament* de P si $P\subset Q$.

Lema 4.1.5 Siguin $f:I=[a,b]\to\mathbf{R}$ una funció fitada i P i Q dues particions de I tals que Q és un refinament de P. Aleshores $L(Q,f)\geq L(P,f)$ i $U(Q,f)\leq U(P,f)$.

Demostració. Demostrarem que $L(Q,f)\geq L(P,f)$, essent la prova de l'altra desigualtat anàloga. Posem $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ i $Q=\{y_0,y_1,\ldots,y_m\}$. Per a cada $i=1,\ldots,n$, El subinterval $[x_{i-1},x_i]$ corresponent a la partició P és la unió de diversos subintervals corresponents a la partició Q, és a dir,

$$[x_{i-1},x_i]=\bigcup_{j=k_{i-1}}^{k_i}[y_{j-1},y_j].$$

Per a cada $i=1,\ldots,n$, posem $m_i=\inf\{f(x)\,:\,x\in[x_{i-1},x_i]\}$ i posem $m'_j=\inf\{f(x)\,:\,x\in[y_{j-1},y_j]\}$ per a cada $j=1,\ldots,m$. Clarament, $m'_j\geq m_i$ si $[y_{j-1},y_j]\subset[x_{i-1},x_i]$. Aleshores

$$\sum_{j=k_{i-1}}^{k_i}m'_j(y_j-y_{j-1})\geq m_i\sum_{j=k_{i-1}}^{k_i}(y_j-y_{j-1})=m_i(x_i-x_{i-1}).$$

I, per tant,

$$L(Q,f)=\sum_{j=1}^{m}m'_j(y_j-y_{j-1})\geq\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=L(P,f).$$

∎

Lema 4.1.6 Siguin $f:I=[a,b]\to\mathbf{R}$ una funció fitada i P_1 i P_2 dues particions qualssevol de I. Aleshores $L(P_1,f)\leq U(P_2,f)$.

Demostració. La partició $Q=P_1\cup P_2$ és un refinament tant de P_1 com de P_2. Podem aplicar doncs el Lemes 4.1.3 i 4.1.5 i tenim $L(P_1,f)\leq L(Q,f)\leq U(Q,f)\leq U(P_2,f)$. ∎

Observació 4.1.7 Observem que el conjunt $\{L(P,f)\,:\,P \text{ és una partició de } I\}\subset\mathbf{R}$ de tots els possibles valors de les sumes inferiors d'una funció fitada f en un interval $[a,b]$ és no buit i fitat superiorment. En efecte, pel Lema 4.1.3, el valor $M(b-a)$ n'és una fita superior. Per tant, existeix un nombre real que és el suprem d'aquest conjunt. Anàlogament, el conjunt de tots els possibles valors de les sumes superiors és no buit i fitat inferiorment i, en conseqüència, admet ínfim.

Definició 4.1.8 Sigui $f:I=[a,b]\to\mathbf{R}$ una funció fitada. La *integral inferior de la funció f en l'interval* $[a,b]$ es defineix com

$$\underline{\int_a^b} f=\sup\{L(P,f)\,:\,P \text{ és una partició de } I\}.$$

Definim també la *integral superior de la funció f en l'interval* $[a,b]$:

$$\overline{\int_a^b} f=\inf\{U(P,f)\,:\,P \text{ és una partició de } I\}.$$

Observació 4.1.9 Sigui $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció fitada. Pel Lema 4.1.6, $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Definició 4.1.10 Sigui $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció fitada. Direm que f és *integrable segons Riemann en l'interval* $[a, b]$ si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

En aquest cas, aquest valor s'anomena la *integral de Riemann de* f *en l'interval* $[a, b]$:

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Observació 4.1.11 Sigui $f : I = [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció integrable. Sigui $A \in \mathbf{R}$ tal que $L(P, f) \leq A \leq U(P, f)$ per a tota partició P de l'interval $[a, b]$. Aleshores, $A = \int_a^b f$.

Proposició 4.1.12 Sigui $f : I = [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció fitada. Aleshores f és integrable en I si i només si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix una de partició P de I tal que $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$.

Demostració. Suposem que f és integrable. Com que

$$\int_a^b f = \sup\{L(P, f) \,:\, P \text{ és una partició de } I\} = \inf\{U(P, f) \,:\, P \text{ és una partició de } I\},$$

per a tot $\varepsilon > 0$ existeixen particions Q, Q' de I tals que $\int_a^b f - L(Q, f) < \varepsilon/2$ i $U(Q', f) - \int_a^b f < \varepsilon/2$. Si prenem $P = Q \cup Q'$, que és un refinament comú a aquestes dues particions, tindrem

$$U(P, f) - L(P, f) \leq U(Q', f) - L(Q, f) = U(Q', f) - \int_a^b f + \int_a^b f - L(Q, f) < \varepsilon.$$

Provem ara el recíproc. Donat $\varepsilon > 0$ qualsevol, prenem una partició P de $[a, b]$ amb $U(P, f) - L(P, f)) < \varepsilon$. Aleshores,

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq U(P, f) - L(P, f)) < \varepsilon.$$

Com que la desigualtat és vàlida per a tot $\varepsilon > 0$, tenim que $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ i, per tant, la funció f és integrable en I. ■

Exercici 4.1.13 Sigui $f : I = [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció fitada. Proveu que f és integrable en I si i només si existeix una successió (P_n) de particions de l'interval I tal que $\lim U(P_n, f) = \lim L(P_n, f)$. Proveu que, en aquest cas, la integral $\int_a^b f$ coincideix amb aquest límit.

Teorema 4.1.14 Sigui $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció monòtona (i, per tant, fitada). Aleshores f és integrable.

Demostració. Suposem que f és creixent. Per a cada natural $n \geq 1$, considerem la partició $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ amb $x_k - x_{k-1} = (b - a)/n$ per a $k = 1, \ldots, n$. Aleshores $m_k = \inf\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1})$ i també $M_k = \sup\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_k)$. Així doncs,

$$U(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b - a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

A més a més,

$$L(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}).$$

Clarament,

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

Això implica, per l'Exercici 4.1.13, que la funció f és integrable en $[a, b]$. ■

Exercici 4.1.15 Per a la funció $f(x) = x$, calculeu $\int_0^1 f$ a partir de la definició de integral.

Teorema 4.1.16 Sigui $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció contínua (i, per tant, fitada). Aleshores f és integrable.

Demostració. Prenem $\varepsilon > 0$ arbitrari. Pel Teorema 2.4.4, la funció f és uniformement contínua. Per tant, existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b - a)$ sempre que $|x - y| < \delta$. Sigui $n \in \mathbf{N}$ amb $n > (b-a)/\delta$ i considerem la partició $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ amb $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n$ per a tot $k = 1, \ldots, n$. Aleshores qualsevol subinterval $[x_{k-1}, x_k]$ de la partició P té llargada menor que δ. A més a més, com que f és contínua, per a cada $k = 1, \ldots n$, existeixen $\alpha_k, \beta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tals que $m_k = f(\alpha_k)$ i $M_k = f(\beta_k)$ són, respectivament, els valors mínim i màxim absoluts de f en aquest subinterval. Per tant, com que $|\beta_k - \alpha_k| < \delta$, tenim que $M_k - m_k = |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon/(b - a)$. Amb tot això

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} = \varepsilon.$$

■

4.1.2 Propietats de la integral

Proposició 4.1.17 Siguin $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ dues funcions integrables i $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Aleshores la funció $\lambda f + \mu g$ és integrable i

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

Demostració. Com que f i g són integrables, existeixen successions (Q_n), (Q'_n) de particions de l'interval $[a, b]$ tals que

$$\int_a^b f = \lim U(Q_n, f) = \lim L(Q_n, f), \qquad \int_a^b g = \lim U(Q'_n, g) = \lim L(Q'_n, g).$$

Per a cada $n \in \mathbf{N}$, prenem $P_n = Q_n \cup Q'_n$, un refinament comú de Q_n i Q'_n. Com que

$$L(Q_n, f) \le L(P_n, f) \le U(P_n, f) \le U(Q_n, f), \qquad L(Q'_n, g) \le L(P_n, g) \le U(P_n, g) \le U(Q'_n, g),$$

tenim que

$$\int_a^b f = \lim U(P_n, f) = \lim L(P_n, f), \qquad \int_a^b g = \lim U(P_n, g) = \lim L(P_n, g).$$

Demostrarem primer que λf és integrable i que $\int_a^b(\lambda f) = \lambda \int_a^b f$. Això és clarament cert per a $\lambda = 0$. Ho provem a continuació per a $\lambda > 0$. Per a qualsevol partició $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de l'interval $[a,b]$,

$$\inf\{\lambda f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = \lambda \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

i també

$$\sup\{\lambda f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = \lambda \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Així doncs, $L(P, \lambda f) = \lambda L(P, f)$ i $U(P, \lambda f) = \lambda U(P, f)$. Per tant,

$$\lim U(P_n, \lambda f) = \lambda \lim U(P_n, f) = \lambda \lim L(P_n, f) = \lim L(P_n, \lambda f).$$

Així doncs, λf és integrable i $\int_a^b(\lambda f) = \lambda \int_a^b f$. Per provar el cas $\lambda < 0$, n'hi ha prou provant que $-f$ és integrable i que $\int_a^b(-f) = -\int_a^b f$. En primer lloc,

$$\inf\{-f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = -\sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

i

$$\sup\{-f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = -\inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

D'aquí, $L(P, -f) = -U(P, f)$ i $U(P, -f) = -L(P, f)$. En conseqüència,

$$\lim U(P_n, -f) = -\lim L(P_n, f) = -\int_a^b f, \qquad \lim L(P_n, -f) = -\lim U(P_n, f) = -\int_a^b f.$$

Hem de demostrar ara que $f+g$ és integrable i que $\int_a^b(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. Per a cada partició $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de l'interval $[a,b]$, tenim

$$\inf\{(f+g)(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \geq \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} + \inf\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

i també

$$\sup\{(f+g)(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} + \sup\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Amb tot això,

$$L(P_n, f) + L(P_n, g) \leq L(P_n, f+g) \leq U(P_n, f+g) \leq U(P_n, f) + U(P_n, g)$$

per a tot natural n i, per tant,

$$\lim L(P_n, f+g) = \lim U(P_n, f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

■

Proposició 4.1.18 Sigui $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funció integrable i siguin $m, M \in \mathbf{R}$ tals que $m \leq f(x) \leq M$ per a tot $x \in [a,b]$. Aleshores $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f \leq M(b-a)$.

Demostració. Conseqüència immediata del Lema 4.1.3. ■

Proposició 4.1.19 Siguin $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ funcions integrables tals que $f(x) \leq g(x)$ per a tot $x \in [a,b]$. Aleshores $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Demostració. Per la Proposició 4.1.17, la funció $g-f$ és integrable en $[a,b]$ i $\int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f$. Com que $g(x) - f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [a,b]$, per la Proposició 4.1.18, $\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$. ■

Proposició 4.1.20 Siguin $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funció fitada i $c \in (a,b)$. Aleshores f és integrable en $[a,b]$ si i només si f és integrable en els intervals $[a,c]$ i $[c,b]$. A més a més, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Demostració. Donades $Q = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, partició de l'interval $[a,c]$, i $R = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$, partició de l'interval $[c,b]$, obtenim una partició

$$P = Q \sqcup R = \{x_0, x_1, \ldots, x_n = y_0, y_1, \ldots, y_m\}$$

de l'interval $[a,b]$. És obvi que $L(P,f) = L(Q,f) + L(R,f)$ i també $U(P,f) = U(Q,f) + U(R,f)$.

Suposem que f és integrable en els intervals $[a,c]$ i $[c,b]$. Prenem $\varepsilon > 0$ arbitrari i considerem particions Q, de l'interval $[a,c]$ i R de l'interval $[c,b]$ tals que $U(Q,f) - L(Q,f) < \varepsilon/2$ i $U(R,f) - L(R,f) < \varepsilon/2$. Aleshores, és clar que $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ si prenem $P = Q \sqcup R$. Així doncs, f és integrable en $[a,b]$.

Recíprocament, si f és integrable en $[a,b]$, per a cada $\varepsilon > 0$ podem trobar una partició P' de $[a,b]$ tal que $U(P',f) - L(P',f) < \varepsilon$. Si refinem la partició P' afegint el punt c, obtindrem una partició P de $[a,b]$ que també compleix $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$. A més a més, la partició P és de la forma $P = Q \sqcup R$, on Q i R són particions dels intervals $[a,c]$ i $[c,b]$, respectivament. Aleshores, $U(Q,f) - L(Q,f) \leq U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ i, per tant, f és integrable en $[a,c]$. Anàlogament, f és integrable en $[c,b]$.

Finalment, provem que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. En efecte, donada una partició P qualsevol de l'interval $[a,b]$, existeix un refinament $P' = Q \sqcup R$, on Q i R són particions dels intervals $[a,c]$ $[c,b]$, respectivament. Amb això,

$$L(P,f) \leq L(P',f) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq U(P',f) \leq U(P,f)$$

i podem aplicar l'Observació 4.1.11. ■

Definició 4.1.21 Si f és integrable en l'interval $[a,b]$, es defineix

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Observeu que aquest conveni és congruent amb la propietat d'additivitat de les integrals respecte dels intervals d'integració que hem vist en la Proposició 4.1.20.

Proposició 4.1.22 Siguin $I, J \subset \mathbf{R}$ dos intervals tancats i fitats i siguin $f : I \to J$ una funció integrable i $g : J \to \mathbf{R}$ una funció contínua. Aleshores la funció $g \circ f : I \to \mathbf{R}$ és integrable en I.

Demostració. Pel Teorema 2.3.11, existeixen $m, M \in \mathbf{R}$ tals que $m \leq g(y) \leq M$ per a tot $y \in J$. Posem $I = [a,b]$, i també $K = M - m$, i prenem $\varepsilon > 0$ arbitrari. Donat que, pel Teorema 2.4.4, g és uniformement contínua, existeix $\delta > 0$ tal que $|g(y) - g(y')| < \varepsilon/(b-a+K)$ sempre que $|y - y'| < \delta$. A més a més, podem suposar que $\delta < \varepsilon/(b-a+K)$. Com que f és integrable en $I = [a,b]$, existeix una partició $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ d'aquest interval tal que $U(P,f) - L(P,f) < \delta^2$. Per a cada $k = 1, \ldots, n$, considerem

$$m_k = \inf\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad M_k = \sup\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Considerem $\mathcal{P}, \mathcal{G} \subset \{1, \ldots, n\}$ definits per $\mathcal{P} = \{k : M_k - m_k < \delta\}$ i $\mathcal{G} = \{k : M_k - m_k \geq \delta\}$. Aleshores,

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k \in \mathcal{P}} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in \mathcal{G}} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \delta^2.$$

Observem que

$$\delta \sum_{k \in \mathcal{G}} (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k \in \mathcal{G}} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \delta^2$$

i, per tant, $\sum_{k \in \mathcal{G}} (x_k - x_{k-1}) < \delta$. Per a cada $k = 1, \ldots, n$, prenem

$$m'_k = \inf\{(g \circ f)(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \qquad M'_k = \sup\{(g \circ f)(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Com que

$$m'_k \geq \inf\{g(y) : y \in [m_k, M_k]\}, \qquad M'_k \leq \sup\{g(y) : y \in [m_k, M_k]\},$$

tenim que $M'_k - m'_k \leq \sup\{|g(y) - g(y')| : y, y' \in [M_k, m_k]\}$, i per tant $M'_k - m'_k \leq \varepsilon/(b - a + K)$ sempre que $k \in \mathcal{P}$. Amb tot això,

$$U(P, g \circ f) - L(P, g \circ f) = \sum_{k=1}^{n} (M'_k - m'_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k \in \mathcal{P}} (M'_k - m'_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in \mathcal{G}} (M'_k - m'_k)(x_k - x_{k-1}) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b - a + K} \sum_{k \in \mathcal{P}} (x_k - x_{k-1}) + K \sum_{k \in \mathcal{G}} (x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b - a + K}(b - a) + K \frac{\varepsilon}{b - a + K} = \varepsilon.$$

En conseqüència, la funció $g \circ f$ és integrable. ■

Proposició 4.1.23 Siguin $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ dues funcions integrables. Aleshores la funció fg és integrable.

Demostració. Per la Proposició 4.1.17, la funció $f+g$ és integrable. Considerem la funció $h(y) = y^2$. Per la Proposició 4.1.22, les funcions $f^2 = h \circ f$, $g^2 = h \circ g$ i $(f + g)^2 = h \circ (f + g)$ també són integrables en $[a, b]$. Finalment, apliquem la Proposició 4.1.17 una altra vegada i veiem que la funció $fg = ((f + g)^2 - f^2 - g^2)/2$ és integrable en $[a, b]$. ■

Proposició 4.1.24 Sigui $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció integrable. Aleshores la funció $|f|$ és integrable i

$$\int_a^b |f| \geq \left| \int_a^b f \right|.$$

Demostració. La funció $|f|$ és integrable per la Proposició 4.1.22. Com que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ per a tot $x \in [a, b]$, tenim per la Proposició 4.1.19 que $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. ■

4.2 Teorema Fonamental del Càlcul

Definició 4.2.1 Sigui $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Direm que una funció $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ és una *primitiva* de f si

- F és contínua en $[a, b]$,
- F és derivable en (a, b) i
- $F'(x) = f(x)$ per a tot $x \in (a, b)$.

Observació 4.2.2 Per l'Exercici 3.2.6, $F_1 - F_2$ és una funció constant si F_1 i F_2 són dues primitives de f.

Teorema 4.2.3 (Teorema Fonamental del Càlcul, versió 1: Regla de Barrow) Sigui $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció integrable i sigui $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ una primitiva de f. Aleshores

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demostració. Sigui $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partició de $[a, b]$. Pel Teorema del Valor Mig (Teorema 3.2.5), per a cada $k = 1, \ldots, n$ existeix $z_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(z_k)(x_k - x_{k-1}) = f(z_k)(x_k - x_{k-1})$. Per tant, de

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = U(P, f)$$

en deduïm que

$$L(P, f) \leq \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(b) - F(a) \leq U(P, f)$$

per a tota partició P de l'interval $[a, b]$. Així doncs, per l'Observació 4.1.11, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. ∎

Observació 4.2.4 Observeu que, usant el conveni de la Definició 4.1.21, la Regla de Barrow es pot aplicar també si $b < a$ ja que, en aquest cas, $\int_a^b f = -\int_b^a f = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a)$.

Teorema 4.2.5 (Teorema Fonamental del Càlcul, versió 2) Sigui $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funció integrable i considerem la funció $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ definida per $F(x) = \int_a^x f$ per a tot $x \in [a, b]$. Aleshores

- F és contínua en $[a, b]$ i,
- si f és contínua en $c \in (a, b)$, aleshores F és derivable en c i $F'(c) = f(c)$.

Demostració. Demostrem primer que F és contínua en qualsevol punt $c \in [a, b]$. Com que f és fitada, existeix $K > 0$ tal que $K \geq |f(x)|$ per a tot $x \in [a, b]$. Per a cada $\varepsilon > 0$, prenem $\delta = \varepsilon/K$. Aleshores, si $|x - c| < \delta$, tenim que

$$|F(x) - F(c)| = \left| \int_a^x f - \int_a^c f \right| = \left| \int_c^x f \right| \leq \left| \int_c^x |f| \right| \leq K|x - c| < K\delta = \varepsilon.$$

Observeu que, si tenim en compte el conveni en la Definició 4.1.21, aquesta fitació és vàlida tant si $x \geq c$ com si $x \leq c$.

Provem a continuació que, si f és contínua en el punt $c \in (a,b)$, aleshores F és derivable en c i $F'(c) = f(c)$. Prenem $\varepsilon > 0$ arbitrari. Com que f és contínua en c, existeix $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ si $|x - c| < \delta$. Així doncs, si $0 < |x - c| < \delta$,

$$\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c)\right| = \left|\frac{\int_c^x f - f(c)(x-c)}{x-c}\right| = \left|\frac{\int_c^x (f-f(c))}{x-c}\right| \leq \frac{\left|\int_c^x |f-f(c)|\right|}{|x-c|} \leq \frac{|\varepsilon(x-c)|}{|x-c|} = \varepsilon.$$

Això demostra que $\lim_{x\to c} \dfrac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c)$. ■

Corol·lari 4.2.6 Siguin $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funció contínua i $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ la funció definida per $F(x) = \int_a^x f$. Aleshores F és una primitiva de f

Corol·lari 4.2.7 Siguin $F, f : [a,b] \to \mathbf{R}$ dues funcions contínues i suposem a més que F és derivable en (a,b). Són equivalents

1. $F'(x) = f(x)$ per a tot $x \in (a,b)$ i $F(a) = 0$.
2. $F(x) = \int_a^x f$ per a tot $x \in [a,b]$.

Exercici 4.2.8 Sigui $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ una funció contínua amb $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [a,b]$. Proveu que, si existeix $c \in [a,b]$ amb $f(c) > 0$, aleshores $\int_a^b f > 0$.

Teorema 4.2.9 (Teorema del Valor Mig per a Integrals) Sigui $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funció contínua. Aleshores existeix $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.

Demostració. El resultat és obvi si la funció f és constant. Suposem que f no és constant. Pel Teorema de Weirstrass (Teorema 2.3.11), existeixen $\alpha, \beta \in [a,b]$ tals que $m = f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) = M$, per a tot $x \in [a,b]$. Com que f no és constant, $m < M$ i, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $\alpha < \beta$. Per la Proposició 4.1.19 i l'Exercici 4.2.8, $m(b-a) < \int_a^b f < M(b-a)$, i per tant

$$f(\alpha) < \frac{\int_a^b f}{b-a} < f(\beta).$$

Així doncs, pel Corol·lari 2.3.2, existeix $c \in (\alpha,\beta) \subset (a,b)$ tal que $f(c) = \dfrac{\int_a^b f}{b-a}$. ■

Exercici 4.2.10 Doneu una prova alternativa del Teorema 4.2.9 utilitzant el Teorema del Valor Mig (Teorema 3.2.5) i el Teorema Fonamental del Càlcul (Teorema 4.2.5).

4.3 Càlcul de primitives

Per la Regla de Barrow (Teorema 4.2.3), podem determinar el valor de la integral $\int_a^b f$ si coneixem una primitiva $F\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ de la funció f. Es donen en aquest apartat alguns mètodes per trobar primitives d'algunes funcions.

Notació 4.3.1 Siguin $F, f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$. Si F és una primitiva de f, escriurem

$$\int f = F + C.$$

Així, el símbol $\int$ sense indicar l'interval d'integració denotarà la primitiva d'una funció. Amb aquesta notació indiquem que les funcions $F + C$, on $C \in \mathbf{R}$ és una constant arbitrària, són totes les primitives de la funció f. Usualment, s'utilitza l'expressió *integral definida* per a $\int_a^b f$, és a dir, la integral d'una funció en un interval, mentre que s'usa *integral indefinida* per a $\int f$, les primitives de f.

4.3.1 Integració per parts

Proposició 4.3.2 (Mètode d'integració per parts) Siguin $f, g\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ dues funcions integrables amb primitives $F, G\colon [a,b] \to \mathbf{R}$, respectivament. Aleshores

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG.$$

Demostració. És conseqüència directa del fet que la funció FG és una primitiva de la funció $Fg + fG$.

Observació 4.3.3 El mètode d'integració per parts ens permet també calcular algunes integrals indefinides, és a dir, determinar les primitives d'algunes funcions. En aquest cas escriurem

$$\int Fg = FG - \int fG.$$

Observació 4.3.4 El mètode d'integració per parts s'aplica per a trobar primitives de funcions dels tipus $p(x)e^x$, $p(x)\sin x$, $p(x)\cos x$, on $p(x)$ és un polinomi. També ens permet trobar les primitives de $e^x \sin x$, $e^x \cos x$. A part, hi ha moltes altres funcions que es poden integrar amb aquest mètode.

Exemple 4.3.5 Calculem, amb el mètode d'integració per parts, una primitiva de la funció $h(x) = x^2e^{3x}$. Si posem $F(x) = x^2$ i $g(x) = e^{3x}$, aleshores $f(x) = 2x$ i $G(x) = e^{3x}/3$. Per tant,

$$\int x^2e^{3x} = \frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}.$$

En aquest punt tornem a aplicar el mètode prenent $F(x) = x$ i $g(x) = e^{3x}$:

$$\int x^2e^{3x} = \frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\right) = \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + C.$$

4.3.2 Canvi de variable

Proposició 4.3.6 (Canvi de variable) Siguin $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ una funció contínua i $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ una funció contínua que és derivable amb continuïtat en l'interval obert (c,d) i tal que $\phi(c) = a$ i $\phi(d) = b$. Aleshores,

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \phi)\phi'.$$

Demostració. Sigui $F\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ una primitiva de f. La funció $(f \circ \phi) \cdot \phi'\colon [c,d] \to \mathbf{R}$ és contínua i $F \circ \phi\colon [c,d] \to \mathbf{R}$ n'és una primitiva. Per tant, per la Regla de Barrow, $\int_c^d (f \circ \phi) \cdot \phi' = (F \circ \phi)(d) - (F \circ \phi)(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f$. ∎

Observació 4.3.7 El canvi de variable també funciona si $\phi(c) = b$ i $\phi(d) = a$. En aquest cas,

$$\int_a^b f = \int_d^c (f \circ \phi)\phi' = -\int_c^d (f \circ \phi)\phi'.$$

Notació 4.3.8 A vegades és convenient escriure $\int_a^b f(x)\,dx$ en lloc de $\int_a^b f$. Amb aquesta notació es fa palès quina és la variable de la funció que estem integrant en el cas que puguin aparèixer altres variables indicant paràmetres o constants. A més a més, aquesta notació és congruent amb el mètode del canvi de variable que hem introduït en la Proposició 4.3.6. Així, quan fem un canvi de variable, canviem x per $\phi(t)$ i canviem dx per $\phi'(t)\,dt$. És a dir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

Exemple 4.3.9 Si volem calcular

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx,$$

podem considerar el canvi de variable $\phi : [0,2] \to [0,4]$ amb $\phi(t) = t^2$. Aleshores

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^2 \frac{2t}{1+t}\,dt = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 4 - 2(\log 3 - \log 1) = 4 - 2\log 3.$$

També podem usar canvis de variables per trobar primitives.

Exemple 4.3.10 Fem el canvi $x = \phi(t) = \sinh t$ per a trobar una primitiva de $\sqrt{1+x^2}$.

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\,dt = \int \cosh^2 t\,dt = \int \frac{\cosh 2t + 1}{2}\,dt =$$

$$= \frac{\sinh 2t}{4} + \frac{t}{2} + C = \frac{\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t}}{2} + \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})\right) + C.$$

Al darrer pas hem desfet el canvi de variable.

4.3.3 Primitives de funcions racionals

En aquest apartat veurem com trobar primitives per a les funcions racionals, és a dir, per a les funcions de la forma P/Q amb P, Q polinomis. El primer pas és reduir-nos al cas en què el grau de P és més petit que el grau de Q. En efecte, en cas contrari, existeixen polinomis C, R tals que $P = CQ + R$ i $\deg R < \deg Q$ i, per tant,

$$\int \frac{P}{Q} = \int C + \int \frac{R}{Q}.$$

El segon pas consisteix en descomposar la funció racional R/Q en fraccions simples.

Definició 4.3.11 Una *fracció simple* és una funció racional d'una de les formes següents.

1. $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ per a alguns $A, \alpha \in \mathbf{R}$ i algun enter $k \geq 1$.

2. $\dfrac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k}$ per a alguns $B, C, p, q \in \mathbf{R}$ amb $p^2 - 4q < 0$ i algun enter $k \geq 1$.

Proposició 4.3.12 Siguin P, Q polinomis amb $\deg P < \deg Q$. Aleshores la funció racional P/Q descomposa de manera única en una suma de fraccions simples. El tipus de fraccions simples que apareixen a la descomposició depèn de la descomposició en factors irreduïbles del polinomi Q.

La demostració d'aquest resultat és laboriosa i no la veurem aquí. La podeu trobar a [J. Ortega, *Introducció a l'anàlisi matemàtica*]. En canvi, la justificarem amb alguns exemples. Al primer, el polinomi Q al denominador descomposa en factors lineals simples.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x-2}{x^3-x} = \frac{3x-2}{(x+1)x(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}.$$

Determinem A posant $x = -1$ a la igualtat:

$$\frac{3x-2}{x(x-1)} = A + (x+1)\left(\frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}\right).$$

Tenim doncs $A = -5/2$. Anàlogament trobem $B = 2$ i $C = 1/2$ i, per tant,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x-2}{x^3-x} = \frac{3x-2}{(x+1)x(x-1)} = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{C}{x-1}.$$

Al segon exemple, tenim arrels múltiples al denominador.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3-2x}{x^4-2x^3+2x-1} = \frac{x^3-2x}{(x+1)(x-1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}.$$

Com abans, determinem $A = -1/8$ a partir de

$$\frac{x^3-2x}{(x-1)^3} = A + (x+1)\left(\frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}\right).$$

El valor $D = -1/2$ es dedueix de

$$\frac{x^3-2x}{x+1} = \frac{A(x-1)^3}{x+1} + B(x-1)^2 + C(x-1) + D.$$

Si derivem els dos termes de la igualtat anterior,

$$\frac{3x^2-2}{x+1} - \frac{x^3-2x}{(x+1)^2} = (x-1)^2F(x) + 2(x-1)B + C$$

per a alguna funció racional F, i obtenim $C = 3/4$. Tornem a derivar

$$\frac{6x}{x+1} - 2\frac{3x^2-2}{(x+1)^2} + 2\frac{x^3-2x}{(x+1)^3} = (x-1)G(x) + 2B$$

per a alguna funció racional G, amb el que s'obté $B = 9/4$. En conclusió

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3-2x}{x^4-2x^3+2x-1} =$$

$$= \frac{x^3-2x}{(x+1)(x-1)^3} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Per al tercer exemple, considerem el cas en què el denominador té un factor irreduïble de grau dos.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2}{x^3+2x^2+2x+1} = \frac{x^2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Podem determinar els valors dels coeficients A, B, C a partir de

$$\frac{x^2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2+(A+B+C)x+(A+C)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

igualant els coenficients del polinomi al numerador. Obtenim $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$. Finalment, el quart exemple és una funció racional el denominador de la qual té un factor irreduïble de grau dos amb multiplicitat més gran que un.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2+x+3}{x^4+2x^2+1} = \frac{2x^2+x+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}.$$

Podem procedir com a l'exemple anterior i obtenim $A = 0$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 1$.

Per tant, per trobar la primitiva de qualsevol funció racional, només cal trobar primitives de fraccions simples. Els casos més senzills són els següents.

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \log|x-\alpha| + C$ per a tot $a \in \mathbf{R}$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = -\frac{1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + C$ per a tot $a \in \mathbf{R}$ i per a tot natural $k \geq 2$.

Vegem ara com trobar primitives per a les altres fraccions simples. Siguin $A, B, p, q \in \mathbf{R}$ amb $p^2 - 4q < 0$ i sigui k un enter positiu. Aleshores

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A}{2}\cdot\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} + \frac{K}{(x^2+px+q)^k}$$

on $K = B - Ap/2$. D'una banda,

- $\displaystyle\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx = \log(x^2+px+q) + C,$
- $\displaystyle\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx = -\frac{1}{(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + C$ si $k \geq 2$.

D'altra banda, existeixen $a, b \in \mathbf{R}$ tals que $x^2+px+q = (x-a)^2+b^2$. Amb el canvi $t = (x-a)/b$,

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot b\,dt = \frac{1}{b}\arctan t + C = \frac{1}{b}\arctan\frac{x-a}{b} + C.$$

Finalment, trobar la primitiva

$$I_k = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}$$

quan $k \geq 2$ es pot reduir al càlcul de $I_{k/1}$. En efecte prenem $a, b \in \mathbf{R}$ tals que $x^2+px+q = (x-a)^2+b^2$ i fem el canvi $t = x-a$. Aleshores,

$$I_k = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{1}{(t^2+b^2)^k}\,dt.$$

A continuació, fem integració per parts amb $F(t) = 1/(t^2+b^2)^{k-1}$ i $g(t) = 1$.

$$I_{k-1} = \int \frac{1}{(t^2+b^2)^{k-1}}\,dt = \frac{t}{(t^2+b^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{t^2}{(t^2+b^2)^k} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+b^2)^{k-1}} + 2(k-1)I_{k-1} - 2(k-1)b^2 I_k.$$

Finalment,

$$I_k = \frac{t}{2(k-1)b^2(t^2+b^2)^{k-1}} + \frac{2(k-3)}{2(k-1)b^2}\, I_{k-1}.$$

Exercici 4.3.13 Determineu les primitives dels quatre exemples de funcions racionals en aquest apartat.

4.3.4 Primitives de funcions racionals trigonomètriques

Veiem en aquest aparatat com trobar primitives per a les funcions de la forma $f(x) = R(\cos x, \sin x)$, on $R(y, z)$ és una funció racional en dues variables, és a dir, el quocient de dos polinomis en les variables y, z. Concretament, veurem que mitjançant un canvi de variable es pot reduir el problema al càlcul de primitives per a funcions racionals. En efecte, amb el canvi $u = \tan(x/2)$ tenim:

- $\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = 2\cos^2(x/2) - 1 = \dfrac{2}{1+u^2} - 1 = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$,
- $\sin x = 2\cos(x/2)\sin(x/2) = 2\cos^2(x/2)\tan(x/2) = \dfrac{2u}{1+u^2}$,
- $dx = \dfrac{2}{1+u^2}\, du$.

Per exemple, apliquem el canvi anterior per trobar les primitives de $f(x) = 1/(\sin x + \cos x)$:

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{1+u^2}{2u+1-u^2} \cdot \frac{2}{1+u^2}\, du = -2\int \frac{1}{u^2-2u-1}\, du =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \left(\frac{1}{u-(1-\sqrt{2})} - \frac{1}{u-(1+\sqrt{2})}\right) du =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\log|u-(1-\sqrt{2})| - \log|u-(1+\sqrt{2})|) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\log|\tan(x/2)-(1-\sqrt{2})| - \log|\tan(x/2)-(1+\sqrt{2})|) + C$$

4.4 Logaritmes i exponencials

Ja hem tractat sobre les funcions exponencials i logarítmiques a l'Apartat 2.5. En aquest apartat presentem una manera diferent d'introduir aquestes funcions i, en particular, demostrarem parcialment el Teorema 2.5.1. Concretament, demostrarem la part de l'existència, però no la unicitat.

El nostre objectiu és trobar una funció f contínua en $\mathbf{R}$ tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$ i $f(1) = a > 0$ (recordem que encara no hem demostrat que existeixi una funció com aquesta si $a \neq 1$!) Hem vist als Apartats 2.5 i 3.1.3 que, si posem $a = e$, la inversa d'aquesta funció f és una primitiva de la funció $1/x$. Això ens condueix a la següent definició.

Definició 4.4.1 La *funció logarítmica (natural)* és la funció $\log\colon (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ definida per

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Pel Teorema Fonamental del Càlcul, aquesta funció és derivable en $(0, +\infty)$ i la seva derivada és $\log' x = 1/x$. Per tant, la funció logarítmica és indefinidament derivable en $(0, +\infty)$.

Sobre la base d'aquesta definició tornarem a demostrar les propietats de les funcions logarítmica i exponencial. És convenient doncs que, a partir d'aquest moment i pel que resta d'aquest apartat, oblidem el que s'ha dit sobre exponencials i logaritmes als apartats anteriors.

Proposició 4.4.2 $\log 1 = 0$.

Proposició 4.4.3 $\log(xy) = \log x + \log y$ per a qualssevol $x, y > 0$.

Demostració. Fixem $y > 0$ i considerem la funció $g(x) = \log(xy) - \log x$. Aleshores

$$g'(x) = \frac{1}{xy}y - \frac{1}{x} = 0$$

i, per tant, g és constant. Com que $g(1) = \log y$, tenim que $g(x) = \log(xy) - \log x = \log y$ per a tot $x > 0$. ■

Proposició 4.4.4 $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$ per a tot $x > 0$.

Demostració. $0 = \log 1 = \log\left(\frac{1}{x}x\right) = \log\left(\frac{1}{x}\right) + \log x$. ■

Proposició 4.4.5 $\log x^n = n \log x$ per a tot natural n i per a tot $x > 0$.

Demostració. Es demostra fàcilment per inducció. ■

Proposició 4.4.6 La funció logarítmica és estrictament creixent. A més a més, $\lim_{x\to 0} \log x = -\infty$ i $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$. En conseqüència, la funció $\log\colon (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ és bijectiva.

Demostració. Com que $\log' x = 1/x > 0$, la funció és estrictament creixent, i no està fitada superiorment ni inferior perquè $\log 2^n = n \log 2$ i $\log 2^{-n} = -n \log 2$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. ■

Proposició 4.4.7 $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1$.

Demostració. Aplicació directa de la Regla de l'Hôpital.

La següent proposició ens hauria de convèncer, si no n'estem ja convençuts, que l'elecció del nombre e com a base de l'exponencial i el logaritme és l'opció més natural i matemàticament més elegant.

Proposició 4.4.8 $\log e = 1$.

Demostració. Considerem la successió $(t_n)_{n\geq 1}$ amb terme general

$$t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Recordem que, per definició, $e = \lim t_n$. Per la continuïtat del logaritme i la Proposició 4.4.7,

$$\log e = \lim \log t_n = \lim \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

■

Finalment, estem ja en condicions de definir la funció exponencial.

Definició 4.4.9 Definim la *funció exponencial* $\exp\colon \mathbf{R} \to (0,+\infty)$ com la inversa de la funció logarítmica $\log\colon (0,+\infty) \to \mathbf{R}$.

Proposició 4.4.10 La funció exponencial $\exp\colon \mathbf{R} \to (0,+\infty)$ és bijectiva, estrictament creixent i satisfà $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ i $\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$.

Demostració. Immediata a partir de la definició. ∎

Proposició 4.4.11 $\exp(x+y) = \exp x \exp y$ per a tot $x, y \in \mathbf{R}$ i $\exp 1 = e$.

Demostració. La segona afirmació és òbvia. Per a la primera, donats $x, y \in \mathbf{R}$, prenem $u, v > 0$ amb $\log u = x$, $\log v = y$. Aleshores, $x + y = \log u + \log v = \log uv$ i, per tant, $\exp(x+y) = \exp(\log uv) = uv = \exp x \exp y$. ∎

Per tant, $\exp x = e^x$ per a tot $x \in \mathbf{Q}$ i és doncs natural escriure $\exp x = e^x$ per a tot $x \in \mathbf{R}$. Per a tot $a > 0$, la funció contínua $f(x) = e^{x \log a}$ satisfà $f(x+y) = f(x)f(y)$ i $f(1) = a$. Amb això es demostra parcialment, car manca provar la unicitat, el Teorema 2.5.1.

Proposició 4.4.12 La funció exponencial és indefinidament derivable en $\mathbf{R}$ i $\exp' x = \exp x$.

Demostració. Com que l'exponencial és la inversa del logaritme, podem determinar-ne la derivada amb la Proposició 3.1.14. En efecte, si $x \in \mathbf{R}$ i $y = \exp(x)$,

$$\exp' x = \frac{1}{\log' y} = y = \exp x.$$

∎

A partir d'aquí, la discussió sobre les propietats de les funcions exponencials i logarítmiques ja pot ser la mateixa que als Apartats 2.5 i 3.1.3.

4.5 Integració impròpia

4.5.1 Classificació de les integrals impròpies

Hem definit la integral de Riemann per a funcions *fitades* definides en un interval *tancat* i *fitat*. Les *integrals impròpies* ens permeten estendre el concepte d'integral a funcions amb domini *no fitat* (*integrals impròpies de primera espècie*) i a funcions *no fitades* (*integrals impròpies de segona espècie*).

Definició 4.5.1 Sigui $f : [a,+\infty) \to \mathbf{R}$ una funció tal que f és integrable en $[a, M]$ per a tot $M > a$. Direm que la *integral impròpia de primera espècie* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ és *convergent* si existeix el límit $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f \in \mathbf{R}$. En aquest cas, el valor de la integral impròpia és, per definició, el valor d'aquest límit.

Definició 4.5.2 Sigui $f : (a,b] \to \mathbf{R}$ una funció tal que f és integrable en $[\delta, b]$ per a tot δ amb $a < \delta \le b$. Direm que la *integral impròpia de segona espècie* $\displaystyle\int_a^b f$ és *convergent* si existeix el límit $\displaystyle\lim_{\delta\to a^+} \int_\delta^b f \in \mathbf{R}$. En aquest cas, el valor de la integral impròpia és, per definició, el valor d'aquest límit.

Observació 4.5.3 Es defineix anàlogament la convergència de les integrals impròpies del tipus $\int_{-\infty}^{a} f$ (primera espècie) i també les del tipus $\int_a^b f$ quan el domini de f és l'interval $[a,b)$ (segona espècie).

Proposició 4.5.4 La integral impròpia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ és convergent si i només si $\alpha > 1$.

Demostració. Si $\alpha \neq 1$, la funció $F(x) = x^{-\alpha+1}/(-\alpha+1)$ és una primitiva de $f(x) = x^{-\alpha}$. Per tant, si $\alpha \neq 1$,

$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(M^{1-\alpha} - 1\right).$$

Aquest límit existeix si i només si $\alpha > 1$. D'altra banda, si $\alpha = 1$,

$$\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \log M$$

i aquest límit és infinit. ■

Proposició 4.5.5 La integral impròpia $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$ és convergent si i només si $\alpha < 1$.

Demostració. Si $\alpha \neq 1$,

$$\lim_{\delta\to a_+} \int_\delta^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx = \lim_{\delta\to a_+} \frac{1}{1-\alpha}\left((b-a)^{1-\alpha} - (\delta-a)^{1-\alpha}\right).$$

Aquest límit existeix si i només si $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$, tenim

$$\lim_{\delta\to a_+} \int_\delta^b \frac{1}{x-a}\,dx = \lim_{\delta\to a_+} (\log(b-a) - \log(\delta-a))$$

i aquest límit és infinit. ■

4.5.2 Convergència absoluta

Teorema 4.5.6 (Criteri de Cauchy) La integral impròpia de primera espècie $\int_a^{+\infty} f$ és convergent si i només si

- Per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $M > a$ tal que $\left|\int_x^y f\right| < \varepsilon$ per a tot $x, y > M$.

La integral impròpia de segona espècie $\int_a^b f$ és convergent si i només si

- Per a tot $\varepsilon > 0$ existeix x_0 amb $a < x_0 \leq b$ tal que $\left|\int_x^y f\right| < \varepsilon$ per a tot $x, y \in (a, x_0)$.

Demostració. Suposem que la integral impròpia $\int_a^{+\infty} f$ és convergent i posem $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f = I \in \mathbf{R}$. Aleshores, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $M > a$ tal que $|I - \int_a^x f| < \varepsilon/2$ per a tot $x \geq M$. Per tant, si $x, y \geq M$,

$$\left|\int_x^y f\right| = \left|\int_a^y f - \int_a^x f\right| \leq \left|\int_a^y f - I\right| + \left|I - \int_a^x f\right| < \varepsilon.$$

Per demostrar el recíproc, provarem que, si es compleix la condició donada, aleshores per a tota successió (x_n) amb $x_n > a$ per a tot $n \in \mathbf{N}$ i amb $\lim x_n = +\infty$ es té que la sucessió (I_n) donada per $I_n = \int_a^{x_n} f$ és convergent. Això implica que la integral impròpia $\int_a^{+\infty} f$ és convergent. Sigui doncs (x_n) una tal successió i prenem $\varepsilon > 0$ arbitrari. Per tant, existeix $M > a$ tal que $\left|\int_x^y f\right| < \varepsilon$ si $x, y \geq M$. Com que $\lim x_n = +\infty$, existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $x_n \geq M$ per a tot $n \geq n_0$. Per tant, per a tot $m, n \geq n_0$,

$$|I_m - I_n| = \left|\int_a^{x_m} f - \int_a^{x_n} f\right| = \left|\int_{x_n}^{x_m} f\right| < \varepsilon.$$

Així doncs, la successió (I_n) és una successió de Cauchy i, per tant, convergent.

La segona part del teorema es demostra anàlogament. ■

Definició 4.5.7 Direm que la integral impròpia de primera espècie $\int_a^{+\infty} f$ és *absolutament convergent* si la integral impròpia $\int_a^{+\infty} |f|$ és convergent. Direm que la integral impròpia de segona espècie $\int_a^b f$ és *absolutament convergent* si la integral impròpia $\int_a^b |f|$ és convergent.

Proposició 4.5.8 Si una integral impròpia és absolutament convergent, aleshores és convergent. La implicació recíproca no és certa en general.

Demostració. Suposem que la integral impròpia de primera espècie $\int_a^{+\infty} f$ és absolutament convergent, és a dir, que la integral impròpia $\int_a^{+\infty} |f|$ és convergent. Aleshores, pel Criteri de Cauchy, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $M > a$ tal que $\left|\int_x^y |f|\right| < \varepsilon$ per a tot $x, y > M$. Per tant, $\left|\int_x^y f\right| \leq \left|\int_x^y |f|\right| < \varepsilon$ per a tot $x, y > M$. Això vol dir que la integral impròpia $\int_a^{+\infty} f$ és convergent. El mateix raonamet s'aplica a les integrals impròpies de segona espècie.

Es pot demostrar que la integral impròpia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ és convergent però no absolutament convergent. ■

Proposició 4.5.9 Siguin $\int_a^{+\infty} f$ i $\int_a^{+\infty} g$ dues integrals impròpies de primera espècie (absolutament) convergents i siguin $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Aleshores la integral impròpia $\int_a^{+\infty}(\lambda f + \mu g)$ és (absolutament) convergent. El mateix resultat és cert per a integrals impròpies de segona espècie.

Demostració. Si les integrals impròpies $\int_a^{+\infty} f$ i $\int_a^{+\infty} g$ són convergents, aleshores també és convergent la integral impròpia $\int_a^{+\infty}(\lambda f + \mu g)$ ja que

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M (\lambda f + \mu g) = \lambda \lim_{M\to\infty} \int_a^M f + \mu \lim_{M\to\infty} \int_a^M g.$$

Sigui $K = 1 + \max\{|\lambda|, |\mu|\} > 0$. Si $\int_a^{+\infty} f$ i $\int_a^{+\infty} g$ són absolutament convergents, aleshores per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $M > a$ tal que, per a tot $x, y \geq M$,

$$\left|\int_x^y |f|\right| < \frac{\varepsilon}{2K}, \qquad \left|\int_x^y |g|\right| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Així doncs, per a tot $x, y \geq M$,

$$\left|\int_x^y |\lambda f + \mu g|\right| \leq \left||\lambda| \int_x^y |f| + |\mu| \int_x^y |g|\right| \leq |\lambda| \left|\int_x^y |f|\right| + |\mu| \left|\int_x^y |g|\right| < \varepsilon$$

i, per tant, la integral impròpia $\int_a^{+\infty}(\lambda f + \mu g)$ també és absolutament convergent. La demostració és anàloga per a integrals impròpies de segona espècie. ■

4.5.3 Integrals impròpies de funcions amb valors no negatius

Proposició 4.5.10 Sigui $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funció tal que f és integrable en $[a, M]$ per a tot $M > a$ i $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [a, +\infty)$. Aleshores, o bé la integral impròpia $\int_a^{+\infty} f$ és convergent o bé $\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f = +\infty$. El mateix passa per a integrals impròpies de segona espècie de funcions $f \geq 0$.

Proposició 4.5.11 (Criteri de comparació) Siguin $f, g : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ funcions integrables en $[a, M]$ per a tot $M > a$. Suposem que existeix $M_0 > a$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per a tot $x > M_0$. Aleshores $\int_a^{+\infty} f$ és convergent si $\int_a^{+\infty} g$ és convergent. Siguin $f, g : (a, b] \to \mathbf{R}$ funcions integrables en $[\delta, b]$ per a tot $\delta \in (a, b]$. Suposem que existeix $\delta_0 \in (a, b]$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per a tot $x \in (a, \delta_0]$. Aleshores $\int_a^b f$ és convergent si $\int_a^b g$ és convergent.

Demostració. Si la integral impròpia $\int_a^{+\infty} g$ és convergent, tenim que, per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $M > a$ tal que $\left|\int_x^y g\right| < \varepsilon$ per a tot $x, y > M$. Evidentment, podem suposar que $M > M_0$ i, com que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per a tot $x > M_0$, $\left|\int_x^y f\right| \leq \left|\int_x^y g\right| < \varepsilon$ per a tot $x, y > M$, i per tant la integral impròpia $\int_a^{+\infty} f$ és convergent. El mateix raonament demostra el resultat per a les integrals impròpies de segona espècie. ∎

Proposició 4.5.12 (Variant del criteri de comparació) Siguin $f, g : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ funcions integrables en $[a, M]$ per a tot $M > a$ tals que $f(x) \geq 0$ i $g(x) > 0$ per a tot $x \in [a, +\infty)$. Aleshores es compleixen les propietats següents.

- Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ i la integral impròpia $\int_a^{+\infty} g$ és convergent, aleshores la integral impròpia $\int_a^{+\infty} f$ és convergent.
- Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, aleshores $\int_a^{+\infty} g$ és convergent si i només si $\int_a^{+\infty} f$ és convergent.

Demostració. Es dedueix fàcilment de la Proposició 4.5.11. Només cal observar els fets següents.

- Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, aleshores existeix $M_0 > a$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per a tot $x > M_0$.
- Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, aleshores $L > 0$ i, donat $\varepsilon > 0$ tal que $L - \varepsilon > 0$, existeix $M_0 > a$ tal que $0 \leq (L - \varepsilon)g(x) \leq f(x) \leq (L + \varepsilon)g(x)$ per a tot $x > M_0$. ∎

Proposició 4.5.13 (Variant del criteri de comparació) Siguin $f, g : (a, b] \to \mathbf{R}$ funcions integrables en $[\delta, b]$ per a tot si $\delta \in (a, b]$ tals que $f(x) \geq 0$ i $g(x) > 0$ per a tot $x \in (a, b]$. Aleshores es compleixen les propietats següents.

- Si $\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ i la integral impròpia $\int_a^b g$ és convergent, aleshores la integral impròpia $\int_a^b f$ és convergent.
- Si $\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, aleshores $\int_a^b g$ és convergent si i només si $\int_a^b f$ és convergent.

Demostració. Totalment anàloga a la de la proposició anterior. ∎

Capítol 5

Polinomis de Taylor i sèries de potències

5.1 Polinomis de Taylor

5.1.1 Sobre polinomis

En general, s'ha de distingir entre els conceptes "*polinomi*" i "*funció polinòmica*". Això és especialment important si considerem polinomis sobre cossos finits, per exemple. En canvi, per a polinomis amb coeficients reals, aquesta distinció no és tan important. En efecte, dos polinomis p, q amb coeficients reals són iguals si i només defineixen funcions iguals, és a dir, si i només si $p(x) = q(x)$ per a tot $x \in \mathbf{R}$.

Proposició 5.1.1 Donats un polinomi p de grau més petit o igual que n i un nombre real $a \in \mathbf{R}$, existeix una $(n+1)$-pla $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ de nombres reals tal que

$$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n.$$

Demostració. Sigui $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polinomi de grau com a molt n. Donat $a \in \mathbf{R}$, considerem el polinomi $q(x) = p(x+a)$, que té el mateix grau que p. Tenim

$$q(x) = p(x+a) = a_0 + a_1(x+a) + \cdots + a_n(x+a)^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

i, per tant, $p(x) = q(x-a) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n$. ∎

Proposició 5.1.2 Si dos polinomis de grau com a molt n tenen ordre de contacte superior a n en un punt $a \in \mathbf{R}$, aleshores són iguals.

Demostració. Clarament, només cal provar que, si p és un polinomi amb $\deg p \leq n$ tal que $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{(x-a)^n} = 0$ per a algun $a \in \mathbf{R}$, aleshores $p = 0$. Sigui $p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n$ un polinomi en aquesta situació. Aleshores $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{(x-a)^k} = 0$ per a tot $k = 0, 1, \ldots, n$. En particular, $p(a) = b_0 = 0$ i, en conseqüència, $\lim_{x\to a} p(x)/(x-a) = b_1 = 0$ i, successivament, $\lim_{x\to a} p(x)/(x-a)^k = b_k = 0$ per a tot $k = 0, 1, \ldots, n$. ∎

Veiem a continuació que els coeficients de l'expressió d'un polinomi en potències de $(x-a)$ que es dóna a la Proposició 5.1.1 es poden determinar a partir de les derivades successives del polinomi al punt a.

Proposició 5.1.3 Per a qualssevol polinomi p de grau menor o igual que n i $a \in \mathbf{R}$,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Demostració. Si $p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n$, és obvi que $p^{(k)}(a) = k!\, b_k$ per a cada $k = 0, 1, \ldots, n$. ■

Observació 5.1.4 Podem prescindir del grau a l'expressió per als polinomis que hem vist a la Proposició 5.1.1. En efecte, per a qualsevol polinomi p i per a tot $a \in \mathbf{R}$,

$$p(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Aquest sumatori té sentit perquè només un nombre finit de termes és diferent de 0.

Corol·lari 5.1.5 Siguin p, q polinomis i $a \in \mathbf{R}$. Si $p^{(k)}(a) = q^{(k)}(a)$ per a tot $k \in \mathbf{N}$, aleshores $p = q$.

És a dir, un polinomi està determinat pels valors de les seves derivades de qualsevol ordre en un punt qualsevol. En aquest capítol veurem que això es compleix també per a moltes altres funcions.

5.1.2 Teorema de Taylor

En aquest apartat, analitzarem com aproximar *localment* amb polinomis una funció donada. Tindrem així una eina molt potent per trobar valors aproximats de funcions elementals com l'exponencial, el logaritme, el sinus, etc.

Si volem aproximar una funció f al voltant del punt $a \in \mathbf{R}$ per una funció constant, la millor opció és prendre $p_0(x) = f(a)$. Les funcions f i p_0 tenen ordre de contacte superior a 0 al punt a. Per la Proposició 3.3.12, l'únic polinomi de grau com a molt 1 amb ordre de contacte superior a 1 amb f al voltant del punt a és $p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Observem que $p_1(a) = f(a)$ i $p_1'(a) = f'(a)$.

Definició 5.1.6 Siguin $I \subset \mathbf{R}$ un interval obert, $a \in I$, i $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ tal que existeix $f^{(n)}(a)$. El *polinomi de Taylor de grau n de la funció f al punt a* és l'únic polinomi $P_{n,a,f}(x)$ de grau menor o igual que n tal que $P_{n,a,f}(a) = f(a)$ i $P_{n,a,f}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ per a tot $k = 1, \ldots, n$. És a dir, el polinomi

$$P_{n,a,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Teorema 5.1.7 (Teorema de Taylor, versió bàsica) Siguin $I \subset \mathbf{R}$ un interval obert, $a \in I$, i $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ tal que existeix $f^{(n)}(a)$. Aleshores el polinomi de Taylor $P_{n,a,f}$ és l'únic polinomi de grau menor o igual que n tal que $f(x) - P_{n,a,f}(x) = o((x-a)^n)$ quan x tendeix a a.

Demostració. Posem $p(x) = P_{n,a,f}(x)$ i $q(x) = P_{n-1,a,f}(x)$. Hem de provar que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - q(x)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$

Ho farem aplicant repetidament la Regla de l'Hôpital. Posem $F(x) = f(x) - q(x)$ i $G(x) = (x-a)^n$. Observem que, $F(a) = 0$ i que, per a tot $k = 1, \ldots, n-1$, la funció $F^{(k)}(x)$ és contínua en un entorn de a i

$$F^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - q^{(k)}(a) = 0.$$

Tenim també que G i les seves derivades de qualsevol ordre també són funcions contínues. Observem que $G(a) = 0$ i que

$$G^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$$

i, per tant, $G^{(k)}(a) = 0$ si $1 \leq k \leq n-1$ mentre $G^{(n)}(a) = n!$. A més a més, $q^{(k-1)}(x)$ és una funció constant perquè q és un polinomi de grau com a molt $n-1$. Així doncs, com que

$$\lim_{x \to a} \frac{F^{(n-1)}(x)}{G^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - q^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

podem aplicar la Regla de l'Hôpital $n-1$ vegades i obtenim

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a} \frac{F^{(n-1)}(x)}{G^{(n-1)}(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

com volíem demostrar. La unicitat és una conseqüència immediata de la Proposició 5.1.2. ∎

Per tant, en les condicions del Teorema 5.1.7,

$$f(x) = P_{n,a,f}(x) + R_{n,a,f}(x)$$

amb $R_{n,a,f}(x) = o((x-a)^n)$ quan x tendeix a a. A continuació, veurem diferents expressions per al *residu* $R_{n,a,f}(x)$.

Teorema 5.1.8 (Teorema de Taylor, forma integral del residu) Sigui $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ a l'interval obert I. Considerem $P_{n,a,f}$, el polinomi de Taylor de grau n de la funció f al punt $a \in I$. Aleshores, per a tot $x \in I$,

$$R_{n,a,f}(x) = f(x) - P_{n,a,f}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt.$$

Demostració. Farem inducció sobre n. Pel Teorema Fonamental del Càlcul,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$

per a tot $x \in I$, i això resol el cas $n = 0$. Prenem ara $n > 0$. Per la hipòtesi d'inducció,

$$f(x) = P_{n-1,a,f}(x) + \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \, dt$$

per a tot $x \in I$. Integrant per parts,

$$\int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \, dt = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt.$$

∎

En les condicions del Teorema 5.1.8, per a $x > a$ prenem els valors mínim m i màxim M de la funció $f^{(n+1)}(t)/n!$ a l'interval $[a, x]$. Aleshores,

$$m \int_a^x (x-t)^n \, dt \leq \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt \leq M \int_a^x (x-t)^n \, dt$$

i, per tant, $R_{n,a,f}(x) = \alpha(x-a)^{n+1}/(n+1)$ per a algun $\alpha \in [m, M]$. Com que $f^{(n+1)}$ és contínua, existeix $\xi \in (a, x)$ tal que $f^{(n+1)}(\xi)/n! = \alpha$, i obtenim

$$R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

per a algun $\xi \in (a, x)$. Obtenim un resultat anàleg si $x < a$. Aquesta és la forma de Lagrange del residu. Demostrem a continuació que aquesta expressió per al residu es pot obtenir en unes condicions lleugerament més febles que les del Teorema 5.1.8. Concretament, no és necessari suposar que $f^{(n+1)}$ és contínua.

Teorema 5.1.9 (Teorema de Taylor, forma de Lagrange del residu) Sigui f una funció derivable $n+1$ vegades en un interval obert $I \subset \mathbf{R}$ i considerem $P_{n,a,f}$, el polinomi de Taylor de grau n de la funció f al punt $a \in I$. Aleshores, per a tot $x \in I$,

$$R_{n,a,f}(x) = f(x) - P_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

per a cert valor ξ de l'interval (x, a) o de l'interval (a, x), segons el cas.

Demostració. Ho provarem per al cas $x > a$, essent la prova de l'altre cas anàloga, Prenem les funcions $R(x) = f(x) - P_{n,a,f}(x)$ i $G(x) = (x-a)^{n+1}$. Clarament podem aplicar el Teorema de Cauchy a aquestes funcions a l'interval $[a, x]$. Tenim doncs que existeix un valor $\xi_1 \in (a, x)$ tal que

$$\frac{R(x)}{G(x)} = \frac{R(x) - R(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{R'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

Si apliquem ara una altra vegada el mateix resultat a l'interval $[a, \xi_1]$, veiem que ha d'existir $\xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, x)$ tal que

$$\frac{R(x)}{G(x)} = \frac{R'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{R'(\xi_1) - R'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{R''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

Si repetim el procés, obtenim que

$$\frac{R(x)}{G(x)} = \frac{R^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)}$$

per a algún $\xi \in (a, x)$. Donat que la derivada $(n+1)$-èsima del polinomi $P_{n,a,f}$ és nul·la, $R^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi)$. A més a més, $G^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$. Per tant

$$\frac{R(x)}{G(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

d'on es dedueix que

$$R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

com volíem demostrar. ■

5.1.3 Polinomis de Taylor d'algunes funcions

Proposició 5.1.10 Si p és un polinomi de grau menor o igual que n, aleshores $p = P_{n,a,p}$ per a tot $a \in \mathbf{R}$.

Demostració. Conseqüència immediata de la Proposició 5.1.3. ∎

Proposició 5.1.11 Siguin $f, g\colon I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dues funcions de classe $\mathcal{C}^n$ en un interval obert I. Considerem els polinomis de Taylor $p = P_{n,a,f}$ i $q = P_{n,a,g}$, on $a \in I$. Aleshores,

1. $P_{n,a,\lambda f+\mu g} = \lambda p + \mu q$ per a tot $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

2. $P_{n-1,a,f'} = p'$.

3. Si F és una funció tal que $F' = f$ en I, i P és l'únic polinomi amb $P' = p$ i $P(a) = 0$, aleshores $P_{n+1,a,F} = F(a) + P$.

4. $P_{n,a,fg} = (pq)_{|n-\text{truncat}}$, és a dir, el polinomi format pels termes del polinomi pq amb potències de $(x-a)$ de grau menor o igual que n.

5. $P_{n,0,f\circ r} = (p\circ r)_{|n-\text{truncat}}$, on r és un polinomi sense terme independent.

Demostració. Les tres primeres propietats, i també la cinquena, es dedueixen de la definició del polinomi de Taylor, que està determinat pel fet que les seves derivades i les de la funció coincideixen fins a l'ordre que correspongui. La quarta propietat es dedueix del resultat d'unicitat del Teorema 5.1.7. ∎

Les demostracions de les dues proposicions següents són elementals a partir del comportament de les derivades successives d'aquestes funcions.

Proposició 5.1.12 Es donen a continuació els polinomis de Taylor d'algunes funcions en $a = 0$.

- $P_{n,0,\exp}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

- $P_{2n,0,\cosh}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

- $P_{2n+1,0,\sinh}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- $P_{2n,0,\cos}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

- $P_{2n+1,0,\sin}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Proposició 5.1.13 Aquest resultat es pot considerar com una generalització de la Fórmula del Binomi de Newton. Per a tot $r \in \mathbf{R}$, el polinomi de Taylor de grau n de la funció $f(x) = (1+x)^r$ al punt $a = 0$ és

$$P_{n,0,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} x^k = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots + \binom{r}{n} x^n,$$

on $\displaystyle\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}$.

La proposicio següent es demostra a partir de les Proposicions 5.1.11 i 5.1.13.

Proposició 5.1.14 Es donen els polinomis de Taylor en $a = 0$ d'algunes funcions.

- Si $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, aleshores $P_{n,0,f}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$.
- Si $f(x) = \log(1+x)$, aleshores $P_{n,0,f}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$.
- $P_{2n+1,0,\arctan}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
- $P_{2n+1,0,\arcsin}(x) = x + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k+1} \cdot \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k+1} =$
  $= x + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} x^3 + \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^5 + \cdots + \dfrac{1}{2n+1} \cdot \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} x^{2n+1}$.

5.1.4 Aplicacions

L'aplicació més evident del Teorema de Taylor és el càlcul aproximat del valor de funcions. Com a exemple, veurem com trobar aproximacions a valors de la funció exponencial. Suposem que volem calcular $e^{1/2}$ amb un error més petit que 10^{-6}. Per a cada n, prenem $p_n = P_{n,0,\exp}$, el polinomi de Taylor de grau n de la funció exponencial al punt $a = 0$. Pel Teorema 5.1.9 i la Proposició 5.1.12, per a tot natural n existeix $\xi \in (0, 1/2)$ tal que

$$e^{1/2} = p_n(1/2) + R_{n,0,\exp}(1/2) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

Com que $e < 3$, tenim que $e^\xi < e^{1/2} < \sqrt{3} < 2$. Per tant, l'error que comès en aproximar el valor de $e^{1/2}$ per $p_n(1/2)$ és menor que

$$\frac{1}{2^n(n+1)!}.$$

El menor natural que fa aquesta fita menor que 10^{-6} és $n = 7$. Per tant

$$p_7(1/2) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{7!} \cdot \frac{1}{2^7} = 1,648721\ldots$$

aproxima $e^{1/2}$ amb l'error demanat.

Una altra aplicació del Teorema de Taylor és l'estudi local de funcions. En particular, ens permet determinar el caràcter dels punts singulars d'una funció sempre que alguna derivada d'ordre superior sigui no nul·la en aquell punt.

Proposició 5.1.15 Siguin $I \subset \mathbf{R}$ un interval obert, $a \in I$, i una funció $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$ tal que $f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ i existeix $f^{(n)}(a) \neq 0$. Sigui $r(x) = P_{1,a,f}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Aleshores es compleixen les propietats següents.

- Si n és parell i $f^{(n)}(a) > 0$ (respectivament, $f^{(n)}(a) < 0$), aleshores existeix $\delta > 0$ tal que $f(x) > r(x)$ (respectivament, $f(x) < r(x)$) per a tot $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$.
- Si n és senar, aleshores a és un punt d'inflexió de f.

Demostració. Pel Teorema 5.1.7,

$$f(x) = r(x) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

on $R_n(x) = o((x-a)^n)$ quan x tendeix a a. Per tant, existeix $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}\right| < \left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right|$$

si $0 < |x-a| < \delta$. Per tant

$$|R_n(x)| < \left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|$$

per a tot $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$. Suposem que n és parell i, per tant, $(x-a)^n \geq 0$. Si $f^{(n)}(a) > 0$, aleshores

$$f(x) - r(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) > 0$$

per a tot $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$. Igualment, $f(x) - r(x) < 0$ per a tot $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ si $f^{(n)}(a) < 0$. Si n és senar, aleshores $(x-a)^n < 0$ si $x < a$ i $(x-a)^n > 0$ si $x > a$ i tenim que $f(x) - r(x)$ canvia de signe al punt a. ■

Proposició 5.1.16 Siguin $I \subset \mathbf{R}$ un interval obert, $a \in I$, i $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ tal que $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ i existeix $f^{(n)}(a) \neq 0$. Aleshores es compleixen les propietats següents.

- f té un mínim relatiu al punt a si n és parell i $f^{(n)}(a) > 0$,
- f té un màxim relatiu al punt a si n és parell i $f^{(n)}(a) < 0$,
- f no té cap extrem relatiu al punt a si n és senar.

Demostració. Immediata a partir de la Proposició 5.1.15. ■

Observació 5.1.17 Hi ha algunes situacions en què el polinomi de Taylor no és de gran utilitat. Aquest és el cas de la funció definida per $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Aquesta funció és idefinidament derivable i les derivades de qualsevol ordre s'anul·len en $a = 0$. Per tant, el polinomi de Taylor de qualsevol grau en aquest punt és nul.

5.2 Sèries numèriques

5.2.1 Generalitats

Definició 5.2.1 Sigui (a_n) una successió de nombres reals. Considerem (s_n) la successió definida per $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ per a tot $n \geq 0$. Escriurem $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ per denotar la successió (s_n) i i direm que és la *sèrie numèrica* amb *successió de termes* (a_n). En aquesta situació direm que (s_n) és la *successió de sumes parcials* de la sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$

Observació 5.2.2 Qualsevol successió (b_n) de nombres reals es pot expressar com una sèrie: només cal prendre $\sum_{n\geq 0} a_n$ amb $a_n = b_n - b_{n-1}$.

Definició 5.2.3 Direm que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és *convergent* si la successió (s_n) de sumes parcials és convergent. En aquest cas, el límit d'aquesta successió, $S = \lim s_n$, s'anomena *suma* de la sèrie i s'escriu $S = \sum_{n\geq 0} a_n$.

Observació 5.2.4 Si la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent, aleshores $\lim a_n = 0$. La implicació recíproca és falsa en general.

Demostració. Sigui (s_n) la successió de sumes parcials de la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$. Si la sèrie és convergent, aleshores la successió (s_n) és convergent. Com que $a_n = s_n - s_{n-1}$ per a tot $n \geq 1$, tenim que $\lim a_n = 0$.

Mostrem a continuació un exemple d'una sèrie $\sum_{n\geq 1} a_n$ no convergent amb $\lim a_n = 0$. Concretament, prenem la sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ i considerem (s_n) la seva successió de sumes parcials. Aleshores, si $n = 2^k$,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + 8\frac{1}{16} + \cdots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} \geq \frac{k+1}{2}.$$

Per tant, la successió (s_n) té una subsuccessió (s_{n_k}) amb $\lim_k s_{n_k} = +\infty$. Com que la successió (s_n) és monòtona creixent, això implica que $\lim s_n = +\infty$. ■

Proposició 5.2.5 Siguin $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$ dues sèries convergents amb suma S i T respectivament. Aleshores, per a qualssevol constants $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, la sèrie $\sum_{n\geq 0}(\lambda a_n + \mu b_n)$ és convergent amb suma $\lambda S + \mu T$.

Demostració. Si (s_n) i (t_n) són les successions de sumes parcials de les sèries $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$, aleshores $(\lambda s_n + \mu t_n)$ és la successió de sumes parcials de la sèrie $\sum_{n\geq 0}(\lambda a_n + \mu b_n)$. ■

Proposició 5.2.6 La sèrie $\sum_{n\geq 0} r^n$, que s'anomena *sèrie geomètrica de raó* r, és convergent si i només si $|r| < 1$. En aquest cas, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}$.

Demostració. Sigui (s_n) la successió de sumes parcials de la sèrie $\sum_{n\geq 0} r^n$. Si $r = 1$, aleshores $s_n = n + 1$ i la sèrie no és convergent. Si $r \neq 1$, tenim que

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Per tant, si $|r| < 1$, la successió (s_n) és convergent amb límit $1/(1-r)$. Si $r = -1$ o bé $|r| > 1$, la successió (s_n) no és convergent. ■

Proposició 5.2.7 La sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent si i només si la successió de sumes parcials (s_n) és de Cauchy, és a dir, si i només si

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall\, n \geq n_0 \text{ i } \forall\, m > 0,\ |s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \epsilon.$$

Demostració. La successió (s_n) és convergent si i només si és una successió de Cauchy. ■

Definició 5.2.8 Direm que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és *absolutament convergent* si la sèrie $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ és convergent.

Proposició 5.2.9 Tota sèrie absolutament convergent és convergent. El recíproc d'aquesta afirmació és fals en general.

Demostració. Si $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ és convergent, per la Proposició 5.2.7,

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall\, n \geq n_0 \text{ i } \forall\, m > 0,\ |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}| < \epsilon.$$

Com que $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}|$, tenim que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent.

Demostrarem més endavant (Proposició 5.2.22) que la sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ és convergent, i hem vist a l'Observació 5.2.4 que la sèrie $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ no és convergent. ■

5.2.2 Sèries de termes positius i sèries alternades

Observació 5.2.10 Si $\sum_{n\geq 0} a_n$ és una sèrie de termes positius, és a dir, si $a_n \geq 0$ per a tot $n \geq 0$, aleshores la successió de sumes parcials (s_n) és monòtona creixent. Per tant, o bé $\lim s_n = S \in \mathbf{R}$ (la sèrie és convergent), o bé $\lim s_n = +\infty$ (la sèrie és *divergent*).

Observació 5.2.11 Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie de termes positius. Aleshores, com que la successió (s_n) de sumes parcials és monòtona creixent, tenim que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent si i només si la successió de les seves sumes parcials és fitada superiorment.

Proposició 5.2.12 (Criteri de comparació) Siguin $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$ dues sèries de termes positius tals que existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ amb $0 \leq a_n \leq b_n$ per a tot $n \geq n_0$. Aleshores

$$\sum_{n\geq 0} b_n \text{ és convergent } \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \text{ és convergent.}$$

Demostració. Siguin (s_n) i (t_n) les successions de sumes parcials de les sèries $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$, respectivament. Suposem que la sèrie $\sum_{n\geq 0} b_n$ és convergent, és a dir, que la successió (t_n) és fitada superiorment. Aleshores, per a tot $n \geq n_0$,

$$s_n = s_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{n} a_k \leq s_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{n} b_k = t_n - t_{n_0-1} + s_{n_0-1}.$$

Així doncs, la successió (s_n) també és fitada superiorment i, per tant, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent. ■

Proposició 5.2.13 (Variant del criteri de comparació) Siguin $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$ dues sèries de termes positius.

- Si $\displaystyle\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, aleshores $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n$ convergent $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ convergent.
- Si $\displaystyle\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, aleshores $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ convergent $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n$ convergent.
- Si $\displaystyle\lim \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, aleshores $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n$ convergent $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ convergent.

Demostració. Podem aplicar en tots els casos la Proposició 5.2.12. En efecte, si $\lim a_n/b_n = 0$, aleshores existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $0 \leq a_n \leq b_n$ per a tot $n \geq n_0$. En canvi, si $\lim a_n/b_n = \infty$, tenim que $0 \leq b_n \leq a_n$ a partir de cert lloc. Finalment, si $\lim a_n/b_n = L \in \mathbf{R} - \{0\}$, prenem $\epsilon > 0$ amb $L - \epsilon > 0$ i tenim que existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $(L-\epsilon)b_n \leq a_n \leq (L+\epsilon)b_n$ per a tot $n \geq n_0$. ■

Proposició 5.2.14 (Criteri de la integral) Sigui $f\colon [n_0, +\infty) \to \mathbf{R}$, on $n_0 \in \mathbf{N}$, una funció monòtona decreixent tal que $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in [n_0, +\infty)$. Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie tal que $a_n = f(n)$ per a tot $n \geq n_0$. Aleshores, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent si i només si la integral impròpia $\int_{n_0}^{+\infty} f$ és convergent.

Demostració. Per a cada $n \geq n_0$, considerem $I_n = \int_{n_0}^{n} f$. La integral impròpia $\int_{n_0}^{+\infty} f$ és convergent si i només si la successió (I_n) és convergent. Això és conseqüència del fet que $I_n \leq \int_{n_0}^{x} f \leq I_{n+1}$ per a tot $n \geq n_0$ i per a tot $x \in [n, n+1]$. Com que (I_n) és monòtona creixent, aquesta successió és convergent si i només si és fitada superiorment. Per ser f monòtona decreixent, tenim que $a_{n+1} = f(n+1) \leq \int_{n}^{n+1} f \leq f(n) = a_n$ per a tot $n \geq n_0$. Així doncs, per a tot $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1} \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_{k}^{k+1} f = \int_{n_0}^{n} f = I_n \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k.$$

Per tant, si (s_n) és la successió de sumes parcials de la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$,

$$s_n - s_{n_0} \leq I_n \leq s_{n-1} - s_{n_0-1}$$

per a tot $n \geq n_0$. En conseqüència, la successió (s_n) és fitada superiorment si i només si la successió (I_n) és fitada superiorment. ■

Proposició 5.2.15 La sèrie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ és convergent si i només si $\alpha > 1$. Les sèries d'aquest tipus s'anomenen *sèries harmòniques*.

Demostració. Apliquem el Criteri de la Integral (Proposició 5.2.14) i el fet que la integral impròpia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ és convergent si i només si $\alpha > 1$ (Proposició 4.5.4). ■

Proposició 5.2.16 (Criteri de Prinsheim) Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie de termes positius.

- Si existeixen $\alpha > 1$, $K \in \mathbf{R}$ i $n_0 \in \mathbf{N}$ tals que $n^\alpha a_n \leq K$ per a tot $n \geq n_0$, aleshores la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent. En particular, la sèrie és convergent si existeix $\alpha > 1$ tal que $\lim n^\alpha a_n = L \in \mathbf{R}$

- Si existeixen $\alpha \leq 1$, $K > 0$ i $n_0 \in \mathbf{N}$ tals que $n^\alpha a_n \geq K$ per a tot $n \geq n_0$, aleshores la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent. En particular, la sèrie és convergent si existeix $\alpha \geq 1$ tal que $\lim n^\alpha a_n = L > 0$ o bé $\lim n^\alpha a_n = \infty$.

Demostració. En els dos casos, s'apliquen les Proposicions 5.2.12 i 5.2.15. Concretament, comparem la sèrie donada amb sèries del tipus $\sum_{n\geq 1}(K/n^\alpha)$. ■

Proposició 5.2.17 (Criteri de Cauchy o de l'arrel) Siguin $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie de termes positius i $L = \limsup \sqrt[n]{a_n} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Aleshores,

- si $L < 1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent, i

- si $L > 1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent.

Demostració. Suposem que $L < 1$ i sigui $r \in \mathbf{R}$ amb $L < r < 1$. Aleshores existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ per a tot $n \geq n_0$. Per tant, $a_n \leq r^n$ per a tot $n \geq n_0$. Com que la sèrie $\sum_{n\geq 0} r^n$ és convergent, tenim per la Proposició 5.2.12 que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent.

Si, en canvi, $L > 1$, podem prendre $r \in \mathbf{R}$ amb $1 < r < L$ i tenim que $\sqrt[n]{a_n} > r$, i per tant $a_n > r^n > 1$, per a infinits valors de n. Per tant, la successió (a_n) no tendeix a 0 i, en conseqüència, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent. ■

Proposició 5.2.18 (Criteri d'Alembert o del quocient) Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie de termes positius. Considerem $L_1 = \limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ i també $L_2 = \liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Aleshores,

- si $L_1 < 1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent, i
- si $L_2 > 1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent.

Demostració. Si $L_1 < 1$, prenem $r \in \mathbf{R}$ amb $L_1 < r < 1$ i tenim que existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $a_{n+1}/a_n < r$ per a tot $n \geq n_0$. Així doncs,

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} < \frac{a_n}{r^n}$$

per a tot $n \geq n_0$. Això implica que

$$\frac{a_n}{r^n} < \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} = K$$

per a tot $n > n_0$. Com que la sèrie $\sum_{n\geq 0}(K/r^n)$ és convergent, tenim per la Proposició 5.2.12 que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent.

En el cas que $L_2 > 1$, podem prendre $r \in \mathbf{R}$ amb $1 < r < L_2$ i tindrem que existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $a_{n+1}/a_n > r$ per a tot $n \geq n_0$. En particular, $a_{n+1} > a_n$ per a tot $n \geq n_0$ i això implica que la successió (a_n) no pot tenir límit 0 i, per tant, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent. ■

Observació 5.2.19 En particular, podem aplicar els criteris anteriors si existeix (i podem calcular-lo) algun dels límits $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ o $\lim \sqrt[n]{a_n}$. Si algun d'aquests límits és igual a 1, el criteri corresponent no decideix. Recordeu que, si existeix $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, aleshores també existeix $\lim \sqrt[n]{a_n}$ i té el mateix valor. Per tant, si el criteri del quocient no decideix, tampoc decidirà el criteri de l'arrel.

Proposició 5.2.20 (Criteri de Raabe) Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie de termes positius tal que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ i existeix el límit $\lim n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$. Aleshores

- Si $L > 1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és convergent.
- Si $L < 1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent.

Demostració. Suposem que $L > 1$ i prenem $r > 0$ tal que $1 < 1+r < L$. Aleshores existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1 + r$$

i, per tant, $(n-1)a_n - na_{n+1} > ra_n$ per a tot $n \geq n_0$. En conseqüència, si (s_n) és la successió de sumes parcials de $\sum_{n\geq 0} a_n$,

$$rs_n = rs_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{n} ra_k < rs_{n_0-1} + \sum_{k=n_0}^{n} ((k-1)a_k - ka_{k+1}) = rs_{n_0-1} + (n_0-1)a_{n_0} - na_{n+1}$$

i obtenim que la successió (s_n) és fitada superiorment.

Suposem ara que $L < 1$. En aquest cas existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $n(1 - a_{n+1}/a_n) < 1$ per a tot $n \geq n_0$. Per a cada $n \geq 2$, prenem $b_n = 1/(n-1)$. Tenim doncs que $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \dfrac{a_n}{b_n}$ per a tot $n \geq n_0$. Això implica que existeix $K > 0$ tal que $a_n > Kb_n$ sempre que $n > n_0$. Com que la sèrie $\sum_{n\geq 2} b_n$ és divergent, tenim que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n$ és divergent. ■

Definició 5.2.21 Una *sèrie alternada* és una sèrie de la forma $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$, on $a_n \geq 0$ per a tot $n \in \mathbf{N}$.

Proposició 5.2.22 (Criteri de Leibniz per a sèries alternades) Sigui $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ una sèrie alternada tal que la successió (a_n) és monòtona decreixent i $\lim a_n = 0$. Aleshores la sèrie alternada $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ és convergent.

Demostració. De la successió (s_n) de sumes parcials en prenem dues subsuccessions: (s_{2n}), formada pels termes amb índex parell, i (s_{2n+1}), la que formen els termes amb índex senar. Observem que $s_{2(n+1)} = s_{2n} - a_{2n-1} + a_{2n+2}$ Com que la successió (a_n) és monòtona decreixent, tenim que $s_{2(n+1)} \leq s_{2n}$ per a tot $n \in \mathbf{N}$, és a dir, la subsuccessió (s_{2n}) és monòtona decreixent. També, $s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq s_{2n+1}$, i per tant la subsuccessió (s_{2n+1}) és monòtona creixent. A més a més, $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n}$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. Així doncs, $s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq s_1$, i per tant la subsuccessió (s_{2n}) és fitada inferiorment. Com hem vist abans que és decreixent, existeix $\lim s_{2n} = S_0$. Anàlogament, la subsuccessió (s_{2n+1}) és creixent i fitada superiorment i existeix doncs $\lim s_{2n+1} = S_1$. Finalment, com que $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1}$ i $\lim a_n = 0$, tenim que $S_0 = \lim s_{2n} = \lim s_{2n+1} = S_1$. Això implica que la successió (s_n) de sumes parcials és convergent amb $\lim s_n = S = S_0 = S_1$. ■

Observació 5.2.23 Sigui $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ una sèrie alternada tal que la successió (a_n) és monòtona decreixent i $\lim a_n = 0$. Per la Proposició 5.2.22, sabem que aquesta sèria és convergent. A més a més, si (s_n) és la successió de sumes parcials i $S = \lim s_n$ és la suma de la sèrie, es compleix que $|S - s_n| \leq a_{n+1}$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. És a dir, l'error que es comet en aproximar la suma per la suma parcial n-èsima és menor o igual que el valor absolut del primer terme menyspreat.

Demostració. Suposem que n és parell, és a dir, $n = 2k$. A partir de la demostració de la Proposició 5.2.22, tenim que $s_{2k+1} \leq S \leq s_{2k}$. Així doncs, $|S - s_n| = |S - s_{2k}| \leq |s_{2k} - s_{2k+1}| = a_{2k+1} = a_{n+1}$. Si n és senar, el resultat es demostra anàlogament. ■

5.3 Sèries de potències

5.3.1 Radi de convergència

Definició 5.3.1 Una *sèrie de potències* és una expressió del tipus $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, on (a_n) és una successió de nombres reals.

Observació 5.3.2 Observem que, per a cada valor de $x \in \mathbf{R}$, obtenim una sèrie numèrica. Si $D \subset \mathbf{R}$ és el conjunt dels valors $x \in \mathbf{R}$ tals que la sèrie numèrica $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és convergent, podem definir una funció $f : D \to \mathbf{R}$, on $f(x)$ és la suma de la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Teorema 5.3.3 Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències i prenem $\gamma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cup \{+\infty\}$. Aleshores

1. Si $\gamma = 0$, la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és absolutament convergent per a tot $x \in \mathbf{R}$.

2. Si $0 < \gamma < +\infty$, la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és absolutament convergent si $|x| < 1/\gamma$ i no és convergent si $|x| > 1/\gamma$.

3. Si $\gamma = +\infty$, aleshores la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ no és convergent per a tot $x \neq 0$.

Demostració. Per a cada valor fixat de x, aplicarem el Criteri de Cauchy (Proposició 5.2.17) a la sèrie de termes positius $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$. Per fer-ho, hem de considerar

$$L(x) = \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\,\gamma.$$

Amb això podem discutir el comportament de la sèrie $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ en funció dels valors de γ.

1. Si $\gamma = 0$, tenim que $L(x) = 0 < 1$ per a tot $x \in \mathbf{R}$. Per tant, la sèrie $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ és convergent per a tot $x \in \mathbf{R}$.

2. Si $0 < \gamma < +\infty$, aleshores la sèrie $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ és convergent si $|x| < 1/\gamma$, mentre és divergent si $|x| > 1/\gamma$. Hem vist doncs que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és absolutament convergent si $|x| < 1/\gamma$ i no és absolutament convergent si $|x| > 1/\gamma$. Ens falta veure que, si $|x| > 1/\gamma$, la sèrie no és convergent. Prenem $r \in \mathbf{R}$ amb $1/\gamma < r < |x|$. com que $1/r < \gamma$, tenim que $\sqrt[n]{|a_n|} > 1/r$ per a infinits valors de n i, per tant,

$$|a_n x^n| > \left(\frac{|x|}{r}\right)^n > 1$$

per a infinits valors de n. En conseqüència, $\lim a_n x^n \neq 0$ i la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ no és convergent.

3. Si $\gamma = +\infty$, aleshores $L(x) = +\infty$ per a tot $x \neq 0$. Per tant, la sèrie $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ és divergent per a tot $x \neq 0$. Amb un raonament semblant al del cas anterior, veiem que la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ no és convergent si $x \neq 0$.

Observació 5.3.4 Si existeix $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$, clarament el seu valor és γ. A més a més, si existeix $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$, aleshores també existeix $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ i té el mateix valor. Per tant, en aquest cas, $\gamma = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Definició 5.3.5 Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències i sigui $\gamma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Definim el *radi de convergència* ρ de la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ com:

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma = +\infty \\ 1/\gamma & \text{si } 0 < \gamma < +\infty \\ +\infty & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

Observeu que $\rho \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Observació 5.3.6 Si ρ és el radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, la funció $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ està definida per a tot $x \in (-\rho, \rho)$.

5.3.2 Funcions definides per sèries de potències

Definició 5.3.7 Siguin $I \subset \mathbf{R}$ un interval i $f\colon I \to \mathbf{R}$ una funció. Per a cada $n \in \mathbf{N}$, prenem una funció $f_n\colon I \to \mathbf{R}$, és a dir, prenem la *successió de funcions* (f_n) en I. Direm que la successió de funcions (f_n) és *uniformement convergent* en l'interval I amb *límit* la funció f si

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \text{ tal que } |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \forall\, n \geq n_0,\ \forall\, x \in I.$$

Observació 5.3.8 Si la la successió de funcions (f_n) convergeix uniformement cap a la funció f en l'interval I, tenim en particular que, per a tot $x_0 \in I$, la successió de nombres reals $(f_n(x_0))$ és convergent amb límit $f(x_0)$. És a dir, $\lim f_n(x_0) = f(x_0)$ per a tot $x_0 \in I$.

Proposició 5.3.9 Sigui (f_n) una successió de funcions en l'interval I. Aleshores la successió (f_n) convergeix uniformement en I cap a alguna funció $f\colon I \to \mathbf{R}$ si i només si

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \text{ tal que } |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \forall\, m, n \geq n_0,\ \forall\, x \in I.$$

Demostració: Suposem (f_n) és uniformement convergent amb límit f. Aleshores, per a cada $\epsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/2$ per a tot $n \geq n_0$ i per a tot $x \in I$. Per tant, per a tot $m, n \geq n_0$ i per a tot $x \in I$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Provem ara la implicació recíproca. Per a cada $x \in I$, la successió de nombres reals $(f_n(x))$ és de Cauchy i, per tant, convergent. Així doncs, podem prendre $f(x) = \lim_n f_n(x) \in \mathbf{R}$ i hem definit així una funció $f\colon I \to \mathbf{R}$. Per a cada $\epsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ per a tot $x \in I$ sempre que $n \geq m \geq n_0$. Per tant, per a cada $x \in I$,

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_n |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

si $m \geq n_0$. Això implica que la successió (f_n) convergeix uniformement cap a f en l'interval I. ■

Teorema 5.3.10 Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència $\rho > 0$. Considerem la funció $f\colon (-\rho, \rho) \to \mathbf{R}$ definida per $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ i, per a cada $n \in \mathbf{N}$, la funció $f_n\colon (-\rho, \rho) \to \mathbf{R}$ definida per $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Aleshores, per a tot $r \in \mathbf{R}$ amb $0 \leq r < \rho$, la successió de funcions (f_n) és uniformement convergent en l'interval $[-r, r]$ amb límit f.

Demostració. Prenem $r_1 \in \mathbf{R}$ amb $r < r_1 < \rho$. Aleshores existeix $n_1 \in \mathbf{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/r_1$ per a tot $n \geq n_1$ i tenim doncs que $|a_n||x^n| < (r/r_1)^n$ per a tot $n \geq n_1$ i per a tot $x \in [-r, r]$. Com que $r < r_1$, la sèrie $\sum_{n\geq 0}(r/r_1)^n$ és convergent. Per la Proposició 5.2.7, per a tot $\epsilon > 0$ existeix $n_0 \in \mathbf{N}$, del que podem suposar que $n_0 \geq n_1$, tal que per a tot $n \geq n_0$ i per a tot $m \geq 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \left(\frac{r}{r_1}\right)^k < \epsilon.$$

Per tant, per a tot $x \in [-r, r]$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k x^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_k x^k| < \sum_{k=n+1}^{n+m} \left(\frac{r}{r_1}\right)^k < \epsilon$$

i, en conseqüència,

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_m \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k x^k\right| \leq \epsilon$$

per a tot $n \geq n_0$. ■

Teorema 5.3.11 Sigui (f_n) una successió de funcions que convergeix uniformement cap a una funció f en l'interval $I \subset \mathbf{R}$. Aleshores, si les funcions f_n són contínues en I, també és contínua en I la funció f.

Demostració. Sigui $a \in I$. Per a tot $\epsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/3$ per a tot $n \geq n_0$ i per a tot $x \in I$. Com que f_{n_0} és contínua, existeix $\delta > 0$ tal que $|f_{n_0}(a) - f_{n_0}(x)| < \epsilon/3$ sempre que $|a - x| < \delta$. Per tant, si $|a - x| < \delta$,

$$|f(a) - f(x)| \leq |f(a) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Tenim doncs que f és contínua en a per a tot $a \in I$. ∎

Teorema 5.3.12 Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència $\rho > 0$. Aleshores, la funció $f\colon (-\rho, \rho) \to \mathbf{R}$ definida per $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és contínua en $(-\rho, \rho)$.

Demostració. Posem $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. Sigui $a \in (-\rho, \rho)$ i sigui $r \in \mathbf{R}$ amb $|a| < r < \rho$. Pel Teorema 5.3.10, la successió de funcions (f_n) convergeix uniformement cap a la funció f en l'interval $[-r, r]$. Com que les funcions f_n són contínues, tenim pel Teorema 5.3.11 que la funció f és contínua en $[-r, r]$. Així doncs, f és contínua en a per a tot $a \in (-\rho, \rho)$. ∎

Lema 5.3.13 Les sèries de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ i $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ tenen el mateix radi de convergència.

Demostració. Sigui $\gamma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ Com que $\lim \sqrt[n-1]{n} = 1$, tenim que $\limsup \sqrt[n-1]{|n a_n|} = \gamma$ i, per tant, el radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ és el mateix que el de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. ∎

Teorema 5.3.14 Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència $\rho > 0$. Aleshores, la funció $f : (-\rho, \rho) \to \mathbf{R}$ definida per $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ és derivable en $(-\rho, \rho)$ i $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$.

Demostració. Posem com abans $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ per a tot $n \in \mathbf{N}$. Pel Lema 5.3.13, podem considerar la funció $h\colon (-\rho, \rho) \to \mathbf{R}$ definida per $h(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$. Si per a cada $n \in \mathbf{N}$ prenem $h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$, tenim clarament que $h_n = f_n'$. Considerem $a \in (-\rho, \rho)$ i prenem $r \in \mathbf{R}$ amb $|a| < r < \rho$. Per a cada $n \in \mathbf{N}$, definim la funció

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ f_n'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Prenem també la funció

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ h(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Per l'Observació 5.3.8, per a cada punt $x \in [-r, r]$ amb $x \neq a$, tenim que

$$\lim_n g_n(x) = \lim_n \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g(x).$$

A més a més, $\lim_n g_n(a) = \lim_n f_n'(a) = \lim_n h_n(a) = h(a) = g(a)$. Pel Teorema 5.3.10, la successió (h_n) és uniformement convergent cap a h en l'interval $[-r, r]$. Per tant, per la Proposició 5.3.9, per a cada $\epsilon > 0$, existeix $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|h_m(x) - h_n(x)| < \epsilon$ per a tot $m, n \geq n_0$ i per a tot

$x \in [-r, r]$. Per a tot $x \in [-r, r] \setminus \{a\}$ i per a qualssevol $m, n \geq n_0$, pel Teorema del Valor Mig (Teorema 3.2.5) aplicat a la funció $f_n - f_m$, existeix un punt ξ entre x i a tal que

$$(g_n - g_m)(x) = \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)}{x - a} = (f_n' - f_m')(\xi) = h_n(\xi) - h_m(\xi)$$

i, per tant,

$$|g_n(x) - g_m(x)| = |h_n(\xi) - h_m(\xi)| < \epsilon.$$

Igualment,

$$|g_n(a) - g_m(a)| = |h_n(a) - h_m(a)| < \epsilon.$$

Així doncs, per la Proposició 5.3.9, la successió de funcions (g_n) és uniformement convergent en $[-r, r]$. Com que hem vist que $\lim_n g_n(x) = g(x)$ per a tot $x \in [-r, r]$, la funció g és el límit uniforme de la successió de funcions (g_n). Com que les funcions g_n són contínues, tenim pel Teorema 5.3.11 que la funció g és contínua. En conseqüència,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} g(x) = g(a) = h(a),$$

i per tant f és derivable en l'interval $(-\rho, \rho)$ i $f' = h$. ■

Corol·lari 5.3.15 Sigui $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència $\rho > 0$. Aleshores, la funció $f : (-\rho, \rho) \to \mathbf{R}$ definida per $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ és indefinidament derivable en $(-\rho, \rho)$ i

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Observació 5.3.16 Sigui $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència $\rho > 0$. Aleshores la sèrie $\sum_{n \geq 0} a_n (x - c)^n$ és absolutament convergent per a tot $x \in (c - \rho, c + \rho)$. Per tant, tenim una funció $f : (c - \rho, c + \rho) \to \mathbf{R}$ definida per $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - c)^n$. Les propietats que hem vist en aquest apartat per a les funcions del tipus $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ són vàlides també per a les funcions de la forma $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - c)^n$.