

Probabilități condiționate

$$1) P_B(A) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

2)

* Vei poză

3)

4)

5) (FORMULA PROBABILITĂȚII TOTALE)

6

5) (FORMULA BAYES)

Exerciții:

① Se dau p. condiționate:

$$\begin{aligned} P_B(A) &= p \\ P_A(B) &= q \\ P_B(\bar{A}) &= r \end{aligned}$$

$$P_B(A) = p$$

$$P_A(B) = q$$

$$P_B(\bar{A}) = r$$

Margari

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = p \Rightarrow \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = q \Rightarrow \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)}$$

$$P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \stackrel{\text{Morgan}}{=} \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{B})} =$$

$$\Rightarrow P(B) \cdot p = P(A) \cdot q$$

$$\Rightarrow \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{B})} = 1 - P(A) - P(B) +$$

$$\frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{P(\bar{B})} =$$

$$= \frac{1 - P(A) - P(B) + p \cdot P(B)}{1 - P(B)} = q$$

① Se consid. ev. A, B, C mutual independente. Să se verifice dacă ev. A și $B \cup C$ sunt independente.

Verificăm:

$$P(A \cap (B \cup C)) = P(A) \cdot P(B \cup C)$$

$$\begin{cases} \xi_i = 1 \\ \text{sau} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{I } P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \cancel{P(A \cap B)} + \cancel{P(A \cap C)} \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - \cancel{P(A \cap B \cap C)} \text{ dependenți } \\ &= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II } P(A) \cdot P(B \cup C) &= P(A) \cdot (P(B) + P(C) - P(B \cap C)) = \\ &= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{aligned}$$

Ev. cerute sunt independente.

③ O sumă de calculatoare distribuite între o și 10 calculatoare astfel:

3 unei agenții imobiliare

5 unei școli generale

2 unei biblioteci

Calculatoarele sunt supuse mării de livrare, iar rezultatul este următorul:

agenției: trec testul ~~75%~~ 95%

școli generale: 90%

bibliotecă: ~~80%~~ proporție de 85%

Se alege la întâmplare un calculator.
 a) Care e p. ca acesta să treacă testul?
~~F.P.T.~~ (F.P.T.)

b) Știind că a trecut cu ce prob. e
 destinat bibliotecii? (F. BAYES)

Rezolvare:

a) Fie ev. A , cal. ales trece testul de verif.

A_1 , este al ag.

A_2 , este al școlii

A_3 , este destinat bibliotecii

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot P_{A_k}(A) \quad (\text{F.P.T.})$$

$$n=3$$

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(A) + P(A_3) \cdot P_{A_3}(A)$$

$$\frac{3}{10} = \frac{3}{10} \cdot \frac{95}{100} + \frac{5}{10} \cdot \frac{90}{100} + \frac{2}{10} \cdot \frac{85}{100}$$

$$\begin{aligned} b) P_A(A_3) &= \frac{P(A_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_3) \cdot P_{A_3}(A)}{P(A)} = \\ &= \frac{\frac{2}{10} \cdot \frac{85}{100}}{\frac{3}{10}} \end{aligned}$$

⑤ Se anunță un zar de 14 ori. Să se calculeze prob. ca lăta 1 să apară de 3 ori, lăta 2 să apară 1 dată, f_3 de 4 ori, f_4 de 2 ori, f_5 de 3 ori și f_6 de 1 ori

$$n = 14$$

$$P_1 = \frac{1}{6}$$

$$P_2 = \frac{1}{6}$$

⋮

(sch. multinomială)

$f_1 \rightarrow 3 \text{ ori}$
 $f_2 \rightarrow 1 \text{ dată}$
 $f_3 \rightarrow 4 \text{ ori}$
 $f_4 \rightarrow 2 \text{ ori}$
 $f_5 \rightarrow 3 \text{ ori}$
 $f_6 \rightarrow 1 \text{ dată}$

~~$P_{3,1,4,2,3,1}$~~

$$P_{3,1,4,2,3,1} = \frac{14!}{3! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1$$

⑥ Prob. ca un ag. comercial să vândă un anumit produs este ~~este~~ 0,3. Dacă acest oraș produsul spre vânzare pe rând la 4 magazine, care e probabilitatea ca el să vândă produsul la cel mult al 4-lea magazin?

$$p = 0,3 \quad (\text{schemă geometrică})$$

$$q = 0,7$$

$$P_n = p \cdot q^{n-1} \Rightarrow P_4 = p \cdot q^3 = 0,3 \cdot (0,7)^3$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = p + p \cdot q + p \cdot q^2 + p \cdot q^3 = \quad (\text{înlocuim})$$

≈ 0,3

⑦ La o bancă s-au depus 7 cereri pt. credite de locuință și 10 cereri pt. credite de mașini. Se analizează la întâmplare 5 cereri. Cu ce probabilitate cel puțin 4 cereri sunt pt. mașini? (schemă hipergeometrică)

$$P_{5/17} = \frac{C_7^5 \cdot C_{10}^0}{C_{17}^5} \quad n = 5 \quad a = 7 \quad b = 10$$

$$P_4 = \frac{C_7^4 \cdot C_{10}^1}{C_{17}^5}$$

$$P = P_4 + P_5 = \frac{C_7^4 \cdot C_{10}^1}{C_{17}^5} + \frac{C_7^5 \cdot C_{10}^0}{C_{17}^5}$$

⑧ Se aruncă 2 zaruri de 10 ori. Cu ce prob se obține de exact 3 ori suma 8?
(sch. Bernoulli)

$$n = 10$$

$$K = 3$$

$$p = \frac{15}{36}$$

$$q = \frac{21}{36}$$

$$P = C_{10}^3 \cdot p^3 \cdot q^7$$

⑨ 3 urne identice conțin:

U_1 : 3 a, 3 neagră

U_2 : 2 a, 1 n

U_3 : 4 a, 5 n

Se alege la întâmplare o urnă și se extrage o bilă.
(FPT)

Din fiecare urnă se extrage câte o bilă.
Care e prob. ca să obținem 2 bile albe și una neagră?
(sch. Poisson)

$$K = 2$$

$$n = 3$$

$$Q(x) = \prod_{i=1}^n (p_i x + q_i)$$

Obs! Cand prob. sunt egale este Bernoulli.
Dar cum bilele din urne diferite, este Poisson.

Obs! Sch. hipergeometrică poate fi scrisă
similară cu sch. multinomială.

$n=3$ nr. bilelor extrase

$K=2$ albe

$u_1: 3a, 3n$

$u_2: 2a, 1n$

$u_3: 1a, 5n$

$$\prod_{i=1}^n = \text{produs}$$

$$Q(x) = (p_1 x + q_1) \cdot (p_2 x + q_2) \cdot (p_3 x + q_3)$$

$$p_{2/3} = p_1 p_2 q_3 + p_1 p_3 q_2 + p_2 p_3 q_1$$

$$p_1 = \frac{1}{5}$$

p_1 , alb
 q_1 , negru

$$q_3 = \frac{2}{5}$$