$\boxed{S1}$ [redacted] 19.02.2024

CALCULUL PROBABILITĂȚILOR

① O BARĂ RIGIDĂ SE RUPE ALEATOR ÎN 2 LOCURI. CARE ESTE PROBABILITATEA CA DIN CELE TREI BUCĂȚI

SĂ SE POATĂ FORMA UN TRIUNGHI.

NOTĂM LUNGIMILE CELOR 3 BUC cu $X, Y, 1 - X - Y$, a.î. a 3a să fie cea mai lungă

Pp. că bara are 1

Dp (Domeniul cazurilor posibile)

$$X, Y, Z \in (0, 1)$$

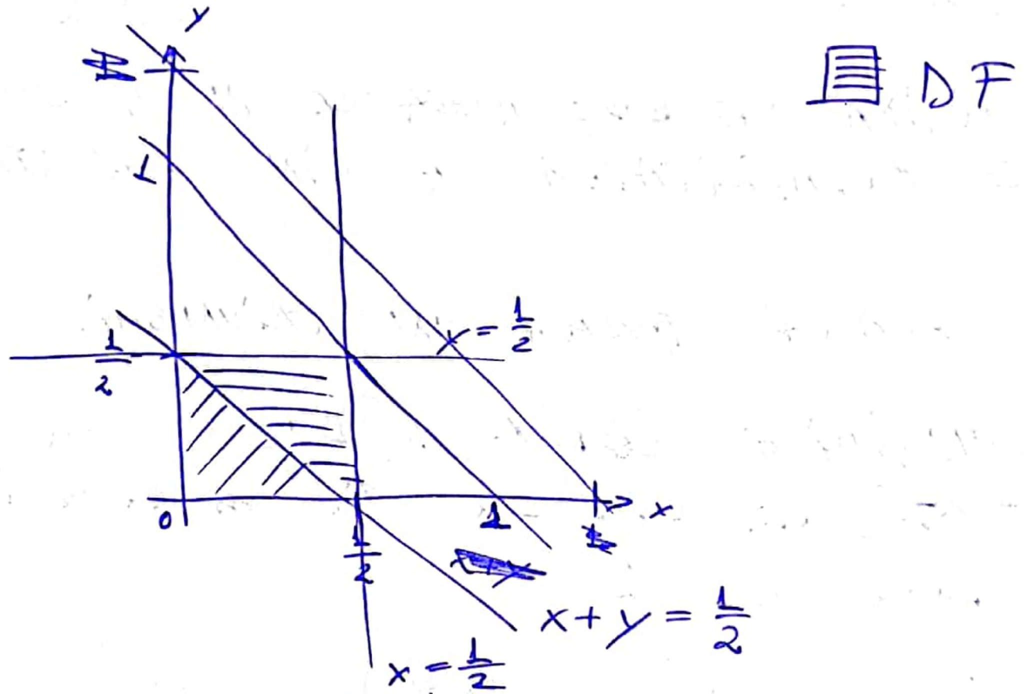
$$Z = 1 - X - Y$$

$$DF \begin{cases} X + Y > Z \\ Y + Z > X \\ X + Z > Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y > 1 - X - Y \\ Y + 1 - X - Y > X \\ \cancel{2(X+Y) > 1} \\ X + 1 - X - Y > Y \\ \cancel{X+Y} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y) > 1 \\ 1 > x + x \\ 1 > \cancel{2}y + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} > \cancel{2}x \\ \frac{1}{2} > y \end{cases}$$

$$DF = \begin{cases} x + y > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} > x \\ \frac{1}{2} > y \end{cases}$$

$$DP = \begin{cases} x, y > 0 \\ 1 - x - y > 0 \end{cases}$$



$$p = \frac{A_{DF}}{A_{DP}} = \frac{\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2}}{\frac{1 \cdot 1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$\boxed{p = 0.25}$

② 4 COPII ALEG ~~RANDOM~~ LA ÎNTÂMPLARE CÂTE UN NR. DIN MULȚIMEA $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. CARE ESTE p. SĂ ($\exists$) 2 COPII CE AU ALES ACELAȘI NR.? (CEL PUȚIN 2 COPII)

CAZURI POSIBILE $= 10^4$

CAZURI NEFAVORABILE $= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = A_{10}^{4}$

$$p = 1 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = 0.504$$

③ SE DAU ~~?~~ n-URNE $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ CE CONȚIN BILE ALBE ȘI BILE NEGRE. URNA u_i CONȚINE a_i BILE ALBE ȘI b_i BILE NEGRE, i ia valorile $\{1, 2, \dots, n\}$. CONȚINUTUL CELOR ~~n~~ n URNE SE DEPUNE ÎNTR-O UNICĂ URNĂ u. Se extrage o ~~..~~ bilă din urna u. Det. p. ca:

a) bila extrasă să provină ~~?~~ din urna u_i

b) bila — „ — să fie albă.

Rez.:

a) $U_i \;?\; a_i + b_i$

$i = \overline{1,n}$

$$p_i = \frac{a_i + b_i}{\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)}, \quad i = \overline{1,n}$$

b) $$p_{alb} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)}, \quad i = \overline{1,n}$$

(4) DIN MULȚIMEA NR. NAT $\{1, 2, \ldots, n\}$ SE EXTR. PE RÂND k NR., $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. CARE E PROB. CA NR. EXTRASE SĂ APARĂ ÎN ORDINE CRESCĂTOARE?

cazuri pos $= A_n^k$ (nu se pun la loc nr extrase)

n^k (dacă se pot repeta nr.)

caz. favorabile $= C_n^k$

$$p = \frac{C_n^k}{A_n^k} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{1}{k!}$$ (fără repunere)

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P = \frac{C_n^k}{n^k} = \text{?}$$ (cu repunere)

(5) SE ARUNCĂ 3 ZARURI CLASICE. SĂ SE DET. P. CA:

a) OBȚINERII COMBINAȚIEI 1,2,3.

b) DACĂ PROB. OBȚINERII 1,2,3 PT PRIMA DATĂ ABIA LA A 10-A ARUNCARE.

cazuri posibile: 6^3

a) cazuri favorabile: $P_3 = 6$

$$p = \frac{1}{36}$$

b)

$$\frac{\left(\frac{1}{36}\right)^{9}}{6^3}$$

⑤ Tenismenii A și B dispută un meci după regula următoare:

- învinge jucătorul ce câștigă 2 game-uri la rând.

Știind că p. ca jucătorul A să câștige un game împotriva lui B este $p \in (0,1)$ (deci prob. să piardă un game este $q = 1-p$)

Determinați prob. ca A să câștige meciul.

$$\cancel{P = \sum_{i=0}^{\infty} w + \sum_{i=0}^{\infty} l}$$

$\boxed{\text{sumă geometrică}}$

w, win

l, lose

caz I, q (p. să piardă)

$$(q \cdot p)^n \cdot p \quad , n \geq 1$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}, r \in (-1,1)}$$

caz II: $(p \cdot q)^n \cdot p^2 \quad , n \geq 0$

$r = p \cdot q > 0$

$p(1-p) < 1$

$p^2 - p + 1 > 0$

$$P = \sum_{n\geq 1} \left[(q \cdot p)^n \cdot p\right] + \sum_{n\geq 0} \left[(p \cdot q)^n \cdot p^2\right] \Leftrightarrow$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = -3 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Adevărat

$$\Leftrightarrow \cancel{P = p \sum_{n\geq 1} \frac{(q \cdot p)^n}{p} +}$$

$$P = p \sum_{n\geq 1} (q \cdot p)^n + p^2 \sum_{n\geq 0} (p \cdot q)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = p \cdot (q \cdot p) \cdot \frac{1}{1-(p \cdot q)} + p^2 \cdot (p \cdot q) \frac{1}{1-(q \cdot p)}$$

Prob. abstracte

⑥ EVENIMENTELE A, B, C SUNT MUTUAL INDEP. SĂ SE ARATE CĂ URMĂTOARELE PERECHI DE EV. SUNT INDEPENDENTE.

a) $\bar{A} \cdot B$ SUNT INDEPENDENTE

$$P_{(\bar{A} \cap B)} = P_{(\bar{A})} \cdot P_{(B)}$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B \setminus A) = P_{(B)} - P_{(A \cap B)} = P_{(B)} - P_{(A)} \cdot P_{(B)} =$$

$$= P_{(B)} (\underbrace{1 - P_{(A)}}_{P_{(\bar{A})}}) = P_{(B)} \cdot P_{(\bar{A})}$$

b) $(A \cup B) \cdot C$ SUNT INDEPENDENTE

$$P((A \cup B) \cap C) = P_{(A \cup B)} \cdot P_{(C)} = P_{(C)} \cdot P_{(A \cup B)} =$$

$$= P_{(C)} \cdot (P_{(A)} + P_{(B)} - P_{(A \cap B)}) =$$

$$= P_{(A)} P_{(C)} + P_{(B)} P_{(C)} - P_{(A \cap B)} \cdot P_{(C)} -$$

$$= P_{(A)} P_{(C)} + P_{(B)} P_{(C)} - P_{(C)} P_{(A)} P_{(B)}$$

o

$$P(C \cap (A \cup B)) = P((C \cap A) \cup (C \cap B))$$

$$= P(C \cap A) + P(C \cap B) - P_{(A \cap B \cap C)}$$

$$= P \text{———} + \text{———} - P(A) P(B) P(C)$$

$$= P(C) P(A) + P(C) P(B) - P(A) P(B) P(C)$$