Curs 5

20.03.2024

II Schema multinomială (polinomială)

Descriere prin modelul urnei:

O urnă conține câte $a_i \in \mathbb{N}^*$ bile de culoarea i, unde culorile sunt numite i a.î. $i \in \{1, \dots, s\}$. Se extrage o bilă, i se reține culoarea și se repune bila în urnă. Experiența se repetă de n ori. $s \geq 2$

Fie $\overline{k}$ ← vector $= (k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^s$ a.î. $\sum_{i=1}^{s} k_i = n$.

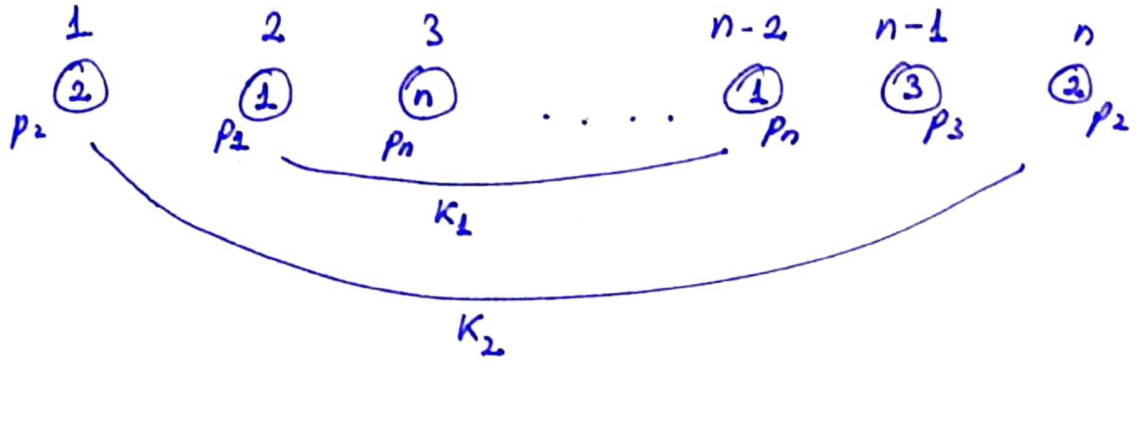
Notăm: $E_{\overline{k}|n} \overset{not}{=}$ evenimentul obținerii a n bile cu structura $\overline{k}$ (extragerea a k_i bile din culoarea i, $i=\overline{1,s}$, $s \geq 2$)

$P_{\overline{k}|n} = \mathbb{P}(E_{\overline{k}|n})$

$\boxed{p_i = \frac{a_i}{\sum_{k=1}^{s} a_k}} \in (0,1)$ - probabilitatea extragerii unei bile de culoarea i, $i \in \{1, \dots, s\}$

$$\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$$

Probabilitatea unei secvențe de extrageri favorabile lui $E_{\overline{k}|n}$



Număr secvențe favorabile: ev. $E_{\bar{k}|n}$:

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdot \ldots \cdot C_{\underbrace{n-k_1-k_2-\ldots-k_{n-1}}_{k_s}}^{k_n} =$$

$$= \frac{n}{k_1!\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{\cancel{k_2!(n-k_1-k_2)!}} \cdot \ldots \cdot \frac{\overbrace{\cancel{n-k_1-k_2-\ldots-k_{s-1}}}^{k_s}}{k_s! \cdot 0!} =$$

$$= \frac{n!}{k_s!} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_s!}$$

Definiție: $n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}^s$ a.î. $\sum_{i=1}^{s} k_i = n$

$(k_1, k_2, \ldots, k_s) \stackrel{def.}{=} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}$ se numesc combinări multinomiale de n luate a câte $k_1, k_2, \ldots, k_s$

Obs!:

combinări binomiale

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!} = \frac{n!}{k_1!(n-k)!} = C_n^{k_1} = \binom{n}{k_1} = C_n^{k_2} = \binom{n}{k_2}$$

Prob. secvenței: este prod. prob.

$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cancel{p_3} \cdots p_s^{k_s}$

Nr. secvențe favorabile ev. $E_{\bar{k}}|n$:

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdot \ldots \cdot C^{k_s}_{\underbrace{n-k_1-k_2-\ldots-k_{s-1}}_{k_s}} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\cancel{(n-k_1-k_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1-k_2)!}}{k_3!\cancel{(n-k_1-k_2-k_3)!}} \cdots \frac{(\overbrace{n-k_1-k_2-\ldots k_{s-1}}^{k_s})!}{k_s! \cdot 0!} =$$

$$= \frac{n!}{k_s!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}$$

Definiție: $n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}^s$ a.î. $\sum_{i=1}^{s} k_i = n$

$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_s} \overset{def}{=} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}$ s.n. combinări multinomiale de n luate a câte $k_1, k_2, \ldots, k_s$

Obs! $s=2$

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!} = \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!} = C_n^{k_1} = C_n^{k_2}$$

combinări binomiale

$C_n^{k_1}$ s.n. not. $\binom{n}{k_1}$, $C_n^{k_2} = \binom{n}{k_2}$

Curs 5

Rezultă:

$$p_{\overline{k}|n} = \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}, \ (\forall)\ \overline{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^s$$

$$\text{a.î. } \sum_{i=1}^{s} k_i = n$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ E_{\overline{k}|n} \ \middle|\ \overline{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^s, \sum_{i=1}^{s} k_i = n \right\}}$$

$\to$ SISTEM COMPLET DE EVENIMENTE

Verificare:

$$\sum_{\substack{\overline{k} \in \mathbb{N}^s \\ \overline{k} = (k_1, \dots, k_s) \\ \sum_{i=1}^{s} k_i = n}} \overbrace{\mathbb{P}(E_{\overline{k}|n})}^{p_{\overline{k}|n}} = \sum_{\substack{\overline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^s \\ \sum_{i=1}^{s} k_i = n}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s} =$$

Binom. Newton

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_s)^n = \underbrace{(p_1 + p_2 + \dots + p_s)(p_1 + p_2 + \dots + p_s) \dots (p_1 + p_2 + \dots + p_s)}_{n \text{ paranteze}} =$$

$$= 1^n = \cancel{1}$$

Obs! $s = 2 \to$ Schema lui Bernoulli

III. Schema lui Poisson

Se efectuează n experiențe independente. În experiența i, evenimentul A_i se realizează cu probabilitatea $p_i = \mathbb{P}(A_i) \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$

$E_{k|n} \overset{not}{=}$ ev. realizării a exact k evenimente dintre $A_1, A_2, \dots, A_n$ în cele n experiențe

Fie $q_i = 1 - p_i = \mathbb{P}(A_i^c)$

$$P_{k|n} = \mathbb{P}(E_{k|n}) = \overbrace{\sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I| = k}}}^{C_n^k\text{-termeni}} \prod_{i \in I} p_i \cdot \prod_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus I} q_j, \quad k = \overline{0,n}$$

Caz particular:

$$\begin{cases} p_i = p \in (0,1), & i = \overline{1,n} \\ q_i = 1 - p \in (0,1) \end{cases}$$

$$P_{k|n} = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}$$

Obținem schema lui Bernoulli.

Observație:

interpretarea a prob. $P_{k|n}$, $k = \overline{0,n}$

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, polinom multinomial

$$f(X) = (p_1 X + q_1)(p_2 X + q_2) \dots (p_n X + q_n)$$

$\text{grad}(f) = n$

$\boxed{\text{Curs 5}}$

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

$a_k \overset{not}{=}$ coeficientul lui X^k

$$\boxed{a_k = P_{k|n}, \; k = \overline{0,n}}$$

$P_{k|n}$ - coeficientul lui X^k din forma canonică a lui f

$\mathcal{S} = \{E_{k|n}, k = \overline{0,n}\}$ - sistem complet de evenimente

<u>Verificarea</u>:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(E_{k|n}) = \sum_{k=0}^{n} P_{k|n} = \sum_{k=0}^{n} a_k = f(1) =$$

$$= \underbrace{(p_1 + q_1)}_{=1} \underbrace{(p_2 + q_2)}_{=1} \ldots \underbrace{(p_n + q_n)}_{=1} = 1$$

<u>IV Schema hipergeometrică (schema bilei nerevenite)</u>

<u>Descriere cu modelul urnei:</u>

O urnă conține a bile albe, b bile negre, $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Se extrag n bile <u>fără repunere</u>.

$E_{k|n} \overset{not}{=}$ ev. obținerii a k bile albe printre cele n bile extrase

~~$E_{k|n} \neq \emptyset \iff$~~

$$E_{k|n} \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N}^*, n \leq a+b \\ k \in \mathbb{N}, k \leq n, k \leq a \\ n-k \leq b \end{cases} \stackrel{not}{=} (1)$$

În condițiile 1 avem:

$$P_{k|n} = \mathbb{P}(E_{k|n}) \stackrel{Laplace}{=} \frac{\text{nr. cazurilor favorab.}}{\text{nr. cazurilor posibile}} = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

V Schema hipergeometrică generalizată

Modelul urnei:

O urnă conține câte a_i bile de culoarea $i \in \{1, \dots, s\}$, $s \geq 2$. Se extrag n bile fără repunere.

Fie $\bar{k} = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^s$ a.î. $\sum_{i=1}^{s} k_i = n$

$E_{\bar{k}|n} \stackrel{not}{=}$ ev. obținerii a n bile cu compoziția $\bar{k}$

$$E_{\bar{k}|n} \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} k_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1,s}, \sum_{i=1}^{s} k_i = n \in \mathbb{N}^* \\ k_i \leq a_i, i = \overline{1,s} \end{cases} \stackrel{not}{=} (1)$$

Curs 5

În condițiile (1):

$$P_{\bar{k}|n} = \mathbb{P}(E_{\bar{k}|n}) = \frac{C_{a_1}^{k_1} \cdot C_{a_2}^{k_2} \dots C_{a_s}^{k_s}}{C_{a_1+a_2+\dots+a_s}^{n}}$$

Dacă $s=2 \Rightarrow$ obținem schema hipergeometrică

VI Schema geometrică

Definiția: În cadrul unei experiențe, un ev. A se produce cu prob. $p = \mathbb{P}(A) \in (0,1)$. Exp. se repetă până la realizarea pt. prima dată a evenimentului A.

$$\underbrace{\overset{1}{\cancel{O}}\ \overset{2}{\cancel{O}}\ \overset{3}{\cancel{O}}\ \dots\ \overset{n-1}{\cancel{O}}}_{\substack{q\ q\ q\ \dots\ q \\ \text{de } n-1 \text{ ori}}}\ \overset{n}{O}$$

$E_n \overset{not}{=}$ ev. realizării lui A pt. prima dată în experiența „n"

$q = \mathbb{P}(A^c) = 1-p$

$$\boxed{p_n = \mathbb{P}(E_n) = p \cdot q^{n-1},\ (\forall) n \in \mathbb{N}^*}$$

$\mathcal{S} = \{E_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ - sistem complet

Verificare:

serie geometrică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} p q^{n-1} = p \sum_{k=0}^{\infty} q^{k} =$$

$$= p \frac{1}{1-q} = \cancel{p} \frac{1}{\cancel{p}} = 1$$