CORPURI și σ-CORPURI

SPAȚII MĂSURABILE

FIE Ω O MULȚIME NEVIDĂ, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ O FAMILIE NEVIDĂ DE SUBMULȚIMI ALE LUI Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$ REPREZINTĂ MULȚIMEA SUBMULȚIMILOR LUI $A \subset \Omega$.

$$\mathcal{P}(\Omega)=\{A \mid A \subset \Omega\}$$

$\mathcal{F}$ SE NUMEȘTE σ-CORP DACĂ:

$\boxed{\sigma_1)}$ $A^c=\Omega \setminus A \in \mathcal{F},\ (\forall)\ A \in \mathcal{F}$

$\boxed{\sigma_2)}$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F},\ (\forall)\ \{A_n, n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathcal{F}$

PROPRIETĂȚILE σ-CORPULUI:

$\boxed{\sigma_3)}$ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F},\ (\forall)\ \{A_1,\dots,A_n\} \subset \mathcal{F},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$\boxed{\sigma_4)}$ $\Omega,\ \emptyset \in \mathcal{F}$

$\boxed{\sigma_5)}$ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F},\ (\forall)\ \{A_1,\dots,A_n\} \subset \mathcal{F},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)^c \underset{\text{DeMorgan}}{\overset{\text{REL}}{=}} \bigcap_{k=1}^{n} (A_k^c)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

$\boxed{\sigma_6)}$ $A \setminus B \in \mathcal{F},\ (\forall)\ A, B$ evenimente

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$$

$\boxed{\sigma_7)}$ $\limsup_{n\to\infty} A_n,\ \liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F},\ (\forall)\ (A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

→ PERECHEA $(\Omega, \mathcal{F})$ SE NUMEȘTE SPAȚIU MĂSURABIL SAU CÂMP DE EVENIMENTE.

→ INTERSECȚIA UNOR σ-CORPURI ALE UNEI MULȚIMI ESTE DE ASEMENEA UN σ-CORP AL MULȚIMII RESPECTIVE.

BORELIANUL

MULȚIMII NUMERELOR REALE

$D \subset \mathbb{R}$ SE NUMEȘTE <u>MULȚIME DESCHISĂ</u> DACĂ:

→ $D = \emptyset$

→ $(\forall)\, a \in D, \exists r > 0 : (a-r, a+r) \subset D$

$\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ - FAMILIA MULȚIMILOR DESCHISE DIN $\mathbb{R}$ = <u>TOPOLOGIA MULȚIMII $\mathbb{R}$</u>

$\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ CONȚINE:

→ $\emptyset$, MULȚIMEA VIDĂ

→ $\mathbb{R}$, MULȚIMEA NUMERELOR REALE

→ INTERVALELE DESCHISE (a,b); $(-\infty, a)$; (b, ∞), $(\forall)\, a, b \in \mathbb{R}$

→ REUNIUNILE CEL MULT NUMĂRABILE DE INTERVALE DESCHISE DISJUNCTE

MULȚIMEA $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{T}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ S.N. <u>BORELIANUL MULȚIMII</u> $\mathbb{R}$.

- CONȚINE TOATE TIPURILE DE INTERVALE REALE, REUNIUNI ȘI INTERSECȚII ALE ACESTORA, CEL MULT NUMĂRABILE
- ESTE σ-CORP GENERAT DE FAMILIA TUTUROR INTERVALELOR DE UN ANUMIT TIP

PENTRU ORICARE $a \in \mathbb{R}$ AVEM $\{a\} = (-\infty, a] \cap [a, \infty) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ CONȚINE MULȚIMI REALE, FINITE ȘI MULȚIMI REALE NUMĂRABILE. DEDUCEM $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. DE ASEMENEA, AVEM
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^c \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

<u>EXERCIȚIU</u>: FIE $\mathbb{Z}$, MULȚIEA NUMERELOR ÎNTREGI. ARĂTAȚI CĂ $\mathbb{Z} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

$\{k\} = (-\infty, k] \setminus (-\infty, k) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, (\forall)\, k \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ - NUMĂRABILĂ $\Rightarrow \mathbb{Z} = \{k_i, i \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \mathbb{Z} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \{k_i\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$