Curs 1 21.02.2024

Scurt Istoric

- sec. $\overline{VIII}$ – $\overline{XIII}$: Matematica arabă, ce se ocupa mai ales de criptografie
- 1564, „Liber de Ludo Aleae" de Girolamo Cardano
- 1654, corespondenta lui Blaise Pascal cu Chevalier de Mére
- 1674, „De Ratiociniis in Ludo Aleae" de Christiaan Huygens
- 1713, „Ars Conjectandi" de Jacob Bernoulli
- 1718, „The Doctrine of Chances" de Abraham de Moivre
- 1812, „Théorie Analytique des Probabilités" de Pierre-Simon Laplace
- 1956, „Foundations of the Theory of Probability" de Andrey Kolmogorov

Spatii de Probabilitate

Modelul universal pentru experiente cu rezultate aleatoare se numeste spatiu de probabilitate.

Definitie: Un spatiu de probabilitate este un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, unde:

1) Ω (eveniment sigur): multime nevidă $\Omega \neq \emptyset$
2) $\mathcal{F}$ (multimea evenimentelor): $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{F} = \sigma$-corp peste Ω

   $\mathcal{P}(\Omega) = \{x \mid x \subset \Omega\}$
3) $\mathbb{P}$ (functia de probabilitate): $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

σ-corpuri peste o mulțime

Definiție: Fie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$, unde $\Omega \neq \emptyset$ este un σ-corp peste Ω dacă:

$\boxed{\sigma_1)\ A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F},\ (\forall) A \in \mathcal{F}}$

$\boxed{\sigma_2)\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F},\ (\forall) \{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}}$

Proprietăți:

$\boxed{\sigma_3)\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F},\ (\forall) A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F},\ n \geq 2}$

Demonstrație:

Completăm secvența $A_1, \dots, A_n$ prin:

Fie $A_k = A_1$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$, $k > n$

$\underbrace{A_1, A_2, \dots, A_n}, A_1, A_1$

$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$, conform $\sigma_2)$

În particular: $A \cup B \in \mathcal{F}$, $(\forall) A, B \in \mathcal{F}$

$\boxed{\sigma_4)\ i)\ \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F},\ (\forall) A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F},\ n \geq 2}$

Demonstrație:

Fie $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 2 \xRightarrow{\sigma_1} A_1^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{F} \xRightarrow{\sigma_3}$

$\xRightarrow{\sigma_3} \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c \in \mathcal{F} \xRightarrow{\sigma_1} \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)^c \in \mathcal{F} \xrightarrow[\text{De Morgan}]{\text{relația lui}}$

$\Rightarrow \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k^c)^c \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$

$\boxed{\sigma_4)\ ii)\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F},\ (\forall)\ \{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}}$

Demonstrație:

analog cu $\sigma_4)\, i)$

În particular $A \cap B \in \mathcal{F}, (\forall)\, A, B \in \mathcal{F}$

$\boxed{\sigma_5)\ \emptyset, \Omega \in \mathcal{F}}$

Demonstrație:

$\mathcal{F} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists) A \in \mathcal{F}\ ;\ A \subset \Omega \overset{\sigma_1}{\Rightarrow} A^c \in \mathcal{F}$

$\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{F}$, conform $\sigma_4)\, i)$

$\Omega = A \cup A^c \in \mathcal{F}$, conform $\sigma_3)$

$\boxed{\sigma_6)\ A \setminus B \in \mathcal{F}, (\forall)\, A, B \in \mathcal{F}}$

Demonstrație:

$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$, conform $\sigma_1)$ și $\sigma_4)$

TEOREMĂ: O intersecție arbitrară de σ-corpuri peste o mulțime nevidă Ω este un σ-corp peste Ω.

Demonstrație:

Presupunem că $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ este o familie de σ-corpuri peste Ω

Notăm $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$

Arătăm că $\mathcal{F}$ este σ-corp peste Ω

$\mathcal{F}_i \subset \mathcal{P}(\Omega), (\forall)\, i \in I \Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{F} \neq \emptyset$ deoarece $\Omega \in \mathcal{F}_i, (\forall)\, i \in I$, conform $\sigma_5) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Omega \in \mathcal{F}$

Analog $\emptyset$

Verificăm σ_1):

Fie $A \in \mathcal{F}$, atunci $A \in \mathcal{F}_i$, $(\forall) i \in I \xRightarrow{\sigma_1} A^c \in \mathcal{F}_i, (\forall) i \in I \Rightarrow$
$\Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overset{not}{=}$ reuniunea de n de la 1 până la ∞

Verificăm σ_2):

Fie $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$

Atunci $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}_i, (\forall) i \in I \xRightarrow{\sigma_2} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_i, (\forall) i \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Definiție:

Fie $\Omega \neq 0$ și $\mathcal{M}$; o submulțime de părți a.î. $\mathcal{M} \subset \mathbb{P}(\Omega)$ și $\mathcal{M} \neq 0$.

Atunci $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \overset{def.}{=} \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{F}, \sigma\text{-corp} \\ \text{peste } \Omega \\ \mathcal{M} \subset \mathcal{F}}} \mathcal{F}$ se numește σ-corpul generat de mulțimea $\mathcal{M}$.

Comentarii:

1) Definiția este corectă pentru că $(\exists)$ $\mathcal{F}$, σ-corp peste Ω a.î. $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$. (de exemplu: $\mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega)$)
2) $\begin{cases} \mathcal{F}_{(\mathcal{M})} \subset \mathbb{P}(\Omega) \\ \mathcal{F}(\mathcal{M}), \sigma\text{-corp peste } \Omega \text{, conform Teoremei} \end{cases}$
3) $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$
4) $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, cel mai mic σ-corp care include $\mathcal{M}$

Obs! $(\forall)$ $\mathcal{F}$, σ-corp peste Ω a.î. $\mathcal{M} \subset \mathcal{F} \xRightarrow{def} \mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}$

Borelianul Mulțimii Numerelor Reale

Definiție:

Fie $(\Omega, \mathcal{T})$, un spațiu topologic, unde $\mathcal{T}$ reprezintă topologia lui Ω (familia mulțimilor deschise). Atunci σ-corpul generat de mulțimea $\mathcal{T}$ se numește borelianul spațiului topologic $(\Omega, \mathcal{T})$ și se notează $\mathcal{B}_{\Omega}$.

Definiție:

Borelianul $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ al spațiului topologic $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ conține toate tipurile de intervale și reuniunile cel mult numărabile ale acestora.

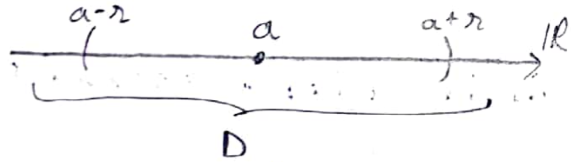
În plus, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ este σ-corpul generat de mulțimea tuturor intervalelor reale de un anumit tip.

Fie $D \subset \mathbb{R}$, mulțime deschisă dacă:

1) $D = \emptyset$

2) $D \neq \emptyset$ și $(\forall)\, a \in D, (\exists)\, r > 0 : (a-r, a+r) \subset D$,

$a \in D$, punct interior



Mulțimile deschise din $\mathbb{R}$ sunt intervalele deschise (mărginite, nemărginite) și reuniunile lor cel mult numărabile (finită, indexată după numerele naturale = șir).

Definiție:

Orice mulțime nevidă și deschisă de numere reale este un interval deschis (mărginit sau nemărginit; de orice fel).

(a,b), $(-\infty,a)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ sau o reuniune numărabilă cel mult de intervale deschise disjuncte.

exemplu: $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(k,k+1)$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{F}(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\subset\mathcal{P}(\mathbb{R})$$

TEOREMĂ:

1) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, conține toate tipurile de intervale și reuniunile lor cel mult numărabile

2) Dacă $\mathcal{M}$ este mulțimea intervalelor de un anumit tip, atunci $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{F}(\mathcal{M})$

Demonstrație exemplificativă pt. 2):

Fie $\mathcal{M}=\{(-\infty,a]\mid a\in\mathbb{R}\}$

Demonstrăm că $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{F}(\mathcal{M})$ prin incluziunea termenilor

I. Presupunem că $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{F}(\mathcal{M})$

$$(-\infty,a)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{(-\infty,a-\tfrac{1}{n}]}_{\in\mathcal{M}}\in\mathcal{F}(\mathcal{M}),\ (\forall)\,a\in\mathbb{R}$$

$$(a,\infty)=\underbrace{(-\infty,a]}_{\in\mathcal{M}}{}^{c}\in\mathcal{F}(\mathcal{M}),\ (\forall)\,a\in\mathbb{R}$$

$$(a,b)=\underbrace{(-\infty,b)}_{\in\mathcal{F}(\mathcal{M})}\cap\underbrace{(a,\infty)}_{\in\mathcal{F}(\mathcal{M})}\in\mathcal{F}(\mathcal{M}),\ (\forall)\,a,b\in\mathbb{R},\ a<b$$

Deducem $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}\subset\mathcal{F}(\mathcal{M})\Rightarrow\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\subset\mathcal{F}(\mathcal{M})$

II. Presupunem că $\mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$(-\infty, a] = \underbrace{(a, \infty)^c}_{\in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $(\forall)\, a \in \mathbb{R}$

Deci $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Deci $\left.\begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathcal{M})}$