$\boxed{\text{Curs 6}}$ 27.03.2024

! Săpt. următoare nu facem cursul, trebuie reprogramat!

Variabile Aleatoare

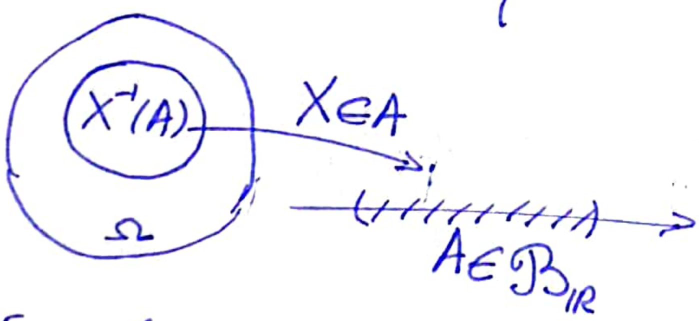
Definiție: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate. O variabilă aleatoare este o funcție definită pe $X : \Omega \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

sigma, cu valori în $\mathbb{R}$

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \ (\forall)\ A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

$\omega \overset{not}{=}$ omega
$\Omega \overset{not}{=}$ omega mare

unde $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \overset{not}{=} \{X \in A\} \in \mathcal{F}$, este un eveniment



Exemplu:

$A = (-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$

$A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $X^{-1}(A) = \{X \in A\} = \{X \le a\} \in \mathcal{F}$

TEOREMA:

Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ~~atunci~~

Atunci X, variabilă aleatoare (v.a.) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, (\forall) A \in \mathcal{J}$ unde $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ a.î.

familie

$\mathcal{F}(\mathcal{J}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Obs!:
$\in \mathcal{F} \stackrel{not}{=}$ este un eveniment

Exemplu:

$\mathcal{J} = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{J}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$X^{-1}(A) = \{X \le a\} \in \mathcal{F}, (\forall) a \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow X$ este o v.a.

Proprietăți:

Propoziție: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - sp. de probab.

$X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ - va²

Atunci:

a) $\{X < Y\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < Y(\omega)\} \in \mathcal{F}$

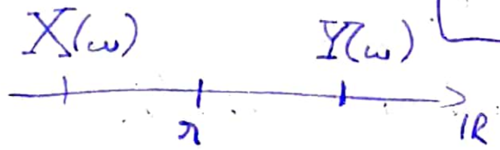
b) $\{X \le Y\} \in \mathcal{F}$

c) $\{X = Y\} \in \mathcal{F}$

{Curs 6}

Demonstrație:

a) Avem $\{X<Y\} = \boxed{\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \left(\boxed{\{X<r\}\cap\{Y>r\}}\right)}$ (*)



X - v.a. $\Rightarrow \{X<r\} = \{X\in(-\infty, r)\}\in\mathcal{F}$

Y - v.a. $\Rightarrow \{Y>r\} = \{Y\in(r,\infty)\}\in\mathcal{F}$

$\mathbb{Q}$ - mulțime numărabilă

$\Rightarrow \{X<Y\}\in\mathcal{F}$

~~$\Rightarrow$ Rezultă $\{X<Y\}$.~~

Obs. (*) Poate fi mulțimea vidă, și nu deranjează pt. că și $\emptyset$ este un eveniment.

b) Conf. a) $\Rightarrow \{Y<X\}\in\mathcal{F} \Rightarrow \{Y<X\}^c\in\mathcal{F}\Rightarrow$
$\Rightarrow \{X\le Y\}\in\mathcal{F}$

c) $\{X\le Y\}, \{Y\le X\}\in\mathcal{F}$, conf b) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \{X=Y\} = \{X\le Y\}\cap\{Y\le X\}$

Curs 6

Operații cu V.A.

TEOREMĂ: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sp. de prob.

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, repr. v.a.

Atunci următoarele funcții reprezintă variabile aleatoare:

1) $X + c$, $(\forall) c \in \mathbb{R}$ (constantă reală)
2) $c * X$, $(\forall) c \in \mathbb{R}$
3) $X + Y$
4) X^2
5) $|X|$
6) XY
7) $\varphi(X)$, unde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, φ - ~~conti.~~ funcție continuă

Demonstrație:

1) $c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\left.\begin{array}{l}\{X + c \leq a\} = \{X \leq a - c\} \\ X, \text{ v.a}\end{array}\right| \Rightarrow \in \mathcal{F} \atop a, \text{arbitrar}\right| \Rightarrow X + c - \text{v.a.}$$

Curs 6

2) $c \in \mathbb{R}$

$$\{cX = a\} = \begin{cases} \{X \le \frac{a}{c}\}, & c>0 \\ \{X \ge \frac{a}{c}\}, & c<0 \\ \Omega, & c=0, a\ge 0 \\ \emptyset, & c=0, a<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \in \mathcal{F}$

clar ev. din op. și σ-corpurilor

X - v.a.

Deci cX, v.a.

3) $\{X+Y \le a\} = \{X \le a - Y\}$

conf. 1), 2) $\Rightarrow$ $a - Y$, v.a.

cf. propoziției b) $\Rightarrow \{X+Y \le a\} \in \mathcal{F}, (\forall) a \in \mathbb{R}$

Deci $X+Y$, v.a.

4) $\{X^2 \le a\} = \begin{cases} \{X \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]\}, & a \ge 0 \\ \emptyset, & a<0 \end{cases}$ $\in \mathcal{F}, (\forall) a \in \mathbb{R}$

X - v.a

Deci X^2 - v.a.

5) $\{|X| \le a\} = \begin{cases} \{X \in [-a, a]\}, & a \ge 0 \\ \emptyset, & a<0 \end{cases}$ $\in \mathcal{F}, (\forall) a \in \mathbb{R}$

X - v.a

6) $X \cdot Y = \frac{1}{4}\left[(X+Y)^2 - (X-Y)^2\right]$ - v.a cf. 2), 3) și 5)

7) Comentariu:

$\varphi(X) : \Omega \to \mathbb{R}$, $\varphi(X)(\omega) = \varphi(X(\omega)) \in \mathbb{R}$

Exemple:

X - v.a. $\Rightarrow X^n$, $\sin X$, e^X, ... v.a

Funcția de Repartiție (de Distribuție) a unei V.A.

Definiție: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - sp. de probab.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ - v.a.

Funcția $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F(t) = \mathbb{P}\{X \le t\}$, $t \in \mathbb{R}$, se numește FUNCȚ. DE REPAR. a v.a. X.

TEOREMĂ: (prop. funct. de repart (F.R.))

1) F - monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$

2) F - continuă la dreapta în $(\forall) t \in \mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{t \to \infty} F(t) = 1$; $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$

4) $\mathbb{P}\{X < t\} = \lim\limits_{\substack{x \to t \\ x < t}} F(x)$

5) $\mathbb{P}\{X > t\} = 1 - F(t)$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$

Curs 6

6) $\mathbb{P}\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$, $(\forall)\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

Dem:

1) Arătăm că $(\forall)\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2 \Rightarrow F(t_1) \le F(t_2)$

Fie $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$

$$\{X \le t_1\} \subset \{X \le t_2\} \xrightarrow{\mathbb{P}\uparrow} \mathbb{P}\{X \le t_1\} \le \mathbb{P}\{X \le t_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(t_1) \le F(t_2)$$

Consecință:

a) F are limite laterale finite în $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$:

$$F(t-0) = \lim_{\substack{x \to t \\ x < t}} F(x) = \sup\{F(x) \mid x < t\}$$

$$F(t+0) = \lim_{\substack{x \to t \\ x > t}} F(x) = \inf\{F(x) \mid x > t\}$$

Avem $\boxed{F(t-0) \le F(t) \le (F(t+0)),\ (\forall)\ t \in \mathbb{R}}$

b) $(\exists) \lim_{t \to \infty} F(t) = \sup\{F(x) \mid x \in \mathbb{R}\} \le 1$

$(\exists) \lim_{t \to -\infty} F(t) = \inf\{F(x) \mid x \in \mathbb{R}\} \ge 0$

Curs 6

2) Arătăm că $F(t) = F(t+0)$ pt $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$

Fie $t \in \mathbb{R}$

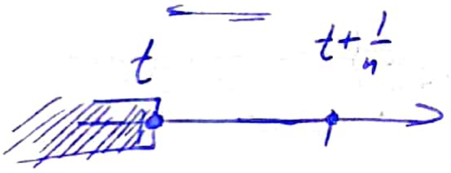
$$F(t+0) = \lim_{\substack{x \to t \\ x > t}} F(x) = \lim_{n \to \infty} F\left(t + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} P\{\underbrace{X \le t + \tfrac{1}{n}}_{\stackrel{not}{=} A_n}\}; \quad A_n \supset A_{n+1},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$$

$\Downarrow$ şir monoton descresc.

$\Rightarrow A_n \searrow A$, A repr. lim. şirului $= \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \stackrel{\supseteq}{\subseteq} \{X \le t\}$

$\left(A = \lim_{n \to \infty} A_n\right)$;



Atunci: $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n \to \infty} A_n\right) = P\{X \le t\} = F(t)$

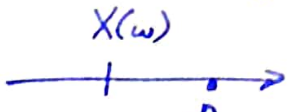
Rezultă $\underline{F(t+0) = F(t)}$

3) $\lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{n \to \infty} F(n) = \lim_{n \to \infty} P\{\underbrace{X \le n}_{B_n}\}$

$B_n \subset B_{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

B_n ↑ şir monoton crescător către B $\quad B_n \nearrow B$,

$$B = \lim_{n \to \infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \stackrel{\subseteq}{\supseteq} \Omega$$



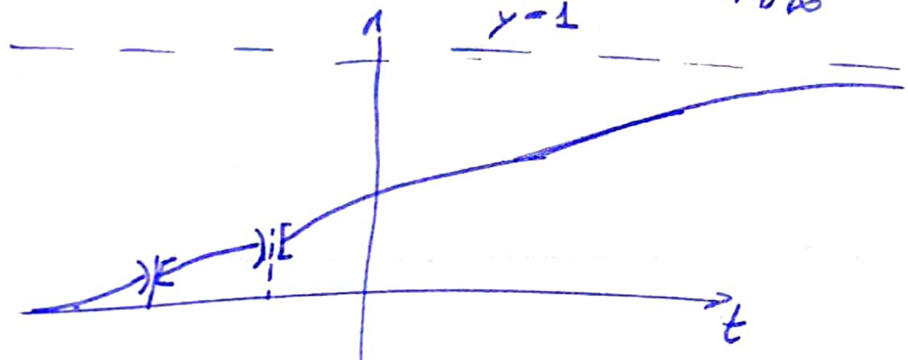
$\omega \in \{X \le n\} = B_n$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} B_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Deci: $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \lim_{n\to\infty} F(-n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\underbrace{\{X \le -n\}}_{C_n} =$$

$$\boxed{C_n \downarrow \emptyset \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset} = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} C_n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$



4) $\mathbb{P}\{X < t\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X \le t - \frac{1}{n}\} = F(t-0)$

Consecința:

$$\mathbb{P}\{X = t\} = \mathbb{P}(\{X \le t\} - \{X < t\}) =$$

$$= \mathbb{P}\{X \le t\} - \mathbb{P}\{X < t\} = F(t) - F(t-0)$$

Consecința consecinței:

Dacă $t \in \mathbb{R}$ este un punct de continuitate pt F, atunci $\mathbb{P}\{X=t\}=0$.