{Curs 4} ✓ 13.03.2025

Evenimente Condiționate

Definiție: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spațiu de probabilitate fixat

a) $A \in \mathcal{F}$, eveniment neneglijabil dacă $\mathbb{P}(A) > 0$

(neglijabil înseamnă că $\mathbb{P}(A) = 0$)

b) $A \in \mathcal{F}$, neneglijabil

$X \in \mathcal{F}$, ev. oarecare

$$\mathbb{P}(X/A) = \frac{\mathbb{P}(X \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$ s.n. probabilitatea evenimentului X condiționat de evenimentul A.

Proprietăți:

1) $\left.\begin{array}{l} A, B \text{ - independente} \\ A \text{, neglijabil} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)}$

Demonstrație:

$$\mathbb{P}(B/A) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \overset{\text{indep.}}{=} \frac{\mathbb{P}(B) \cdot \cancel{\mathbb{P}(A)}}{\cancel{\mathbb{P}(A)}} = \mathbb{P}(B)$$

2) A, B - ev. neneglijabile $\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(B/A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B) \cdot \mathbb{P}(B)}$

Demonstrație:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{P}(B|A)\cdot\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cap B)\\ \mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cap B)\end{array}\right| \Rightarrow \underline{\mathbb{P}(B|A)\cdot\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)}$$

3) $A\in\mathcal{F}$, ev. neneglijabil

Definim ~~$\mathbb{P}_A$~~ $\boxed{\mathbb{P}_A:\mathcal{F}\to\mathbb{R},\ \mathbb{P}_A(X)=\mathbb{P}(X|A),\ (\forall)X\in\mathcal{F}}$

Demonstrație:

$\mathbb{P}_A$ - funcție de probabilitate pe $(\Omega,\mathcal{F})$

Verificăm axiomele probabilității:

$P_1)$ $\mathbb{P}_A(X)\overset{def}{=}\mathbb{P}(X|A)=\dfrac{\mathbb{P}(X\cap A)}{\mathbb{P}(A)}\geq 0,\ (\forall)X\in\mathcal{F}$

$P_2)$ $\mathbb{P}_A(\Omega)=\dfrac{\mathbb{P}(\Omega\cap A)}{\mathbb{P}(A)}=\dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)}=1$

$P_3)$ Fie $(X_n)_{n\geq 1}$ șir de evenimente, cu $X_i\cap X_j=\emptyset$, $(\forall)\ i,j\in\mathbb{N}^*$, $i\neq j$

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n\right)=\frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n\right)\cap A\right)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n\cap A)\right)}{\mathbb{P}(A)}\overset{P_3\text{ pt }\mathbb{P}}{=}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_n\cap A)}{\mathbb{P}(A)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbb{P}(X_n\cap A)}{\mathbb{P}(A)}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}_A(X_n)$$

Deci P_A - probabilitate

Formule pentru probabilități condiționate

Definiție: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - sp. prob. fixat

O familie $\mathcal{S} = \{A_i, i \in I\} \subset \mathcal{F}$, unde I - finită, nevidă [considerată ca o fam. de ev.] sau I - numărabilă; o astfel de familie se numește SISTEM COMPLET DE EVENIMENTE dacă:

1) disjuncte 2 câte 2:

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \ (\forall)\, i,j \in I,\ i \neq j$$

2) $$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$$

3) $$\mathbb{P}(A_i) > 0, \ (\forall)\, i \in I$$

Consecință:

$$\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \overset{P_3}{=} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Deci: $$\boxed{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1}$$

I Formula Probabilității Totale (FPT)

Fie $\mathcal{S} = \{A_i, i \in I\}$ - sistem complet de ev.

Atunci:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i), (\forall) A \in \mathcal{F}}$$

Demonstrație:

Fie $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A \cap (\bigcup_{i\in I} A_i)) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} (A \cap A_i)\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$$

II Formula lui Bayes

Fie $\mathcal{S}$ - sistem complet de evenimente, $\mathcal{S} = \{A_i, i \in I\}$

$A \in \mathcal{F}$, eveniment neneglijabil

$$\boxed{\mathbb{P}(A_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k\in I} \mathbb{P}(A|A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k)}, (\forall) i \in I}$$

Demonstrație: Fie $i \in I$

$$\mathbb{P}(A_i|A) \overset{def}{=} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \underset{FPT}{=} \frac{\mathbb{P}(A|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k\in I} \mathbb{P}(A|A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k)}$$

$\boxed{III}$ Formula intersecției finite

Pp. că avem ev. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ a.î.

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}$, neneglijabil $\Rightarrow$ p. este ≥ 0

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) =$$

=

<u>Demonstrație</u>:

$$A_1 \supset A_1 \cap A_2 \supset \dots \supset A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \xRightarrow{\mathbb{P}4}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1) \geq \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \geq \dots \geq \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \overset{\text{prin ipoteză}}{>} 0$$

$$\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) =$$

$$= \cancel{\mathbb{P}(A_1)} \cdot \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{\mathbb{P}(A_1)}} \cdot \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}}{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}} \cdot \dots \cdot \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})}}$$

$$= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

[Curs 4]

~~Seh~~

Modele elementare de Spații de Probabilitate

I Spațiul Laplace:

$\Omega = \{\underbrace{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n}_{\text{distincte}}\}$, mulțime finită

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\}$

<u>Notăm</u>: M, mulțime finită $\Rightarrow |M| \overset{not}{=}$ cardinalul lui M

$|M| = card(M)$, nr. de elemente ale lui M

<u>Avem</u>: $|\Omega| = n$

$|\mathcal{F}| = 2^n$

<u>Definim</u>: $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ prin $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{|A|}{n}$, $(\forall) A \in \mathcal{F}$

$|A| > |\Omega| \Rightarrow$ se verifică că $\mathbb{P}$ este o funcție de probabilitate

<u>Observație</u>: $E_i = \{\omega_i\}$, $i = \overline{1,n}$ - ev. elementare

$\mathbb{P}(E_i) = \dfrac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$ (E_i, $i = \overline{1,n}$, echiprobabile)

"probabilități egale"

Curs 4

Observație 2:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nr. cazurilor favorabile}}{\text{nr. cazurilor posibile}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - sp. de probab. de tip Laplace

II Spațiul Discret

$\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$, $I = \{1, \dots, n\}$ sau $I = \mathbb{N}^*$

$\mathcal{F} = \underbrace{\mathbb{P}(\Omega)}_{\text{fam. submulțimilor}} = \{\{\omega_j, j \in J\}, J \subset I\}$

$\overline{P} = (p_i)_{i \in I}$, $p_i > 0$, $(\forall) i \in I$ a.î. $\sum_{i \in I} p_i = 1$

$\mathbb{P}(\{\omega_j, j \in J\}) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{j \in J} p_j$, $(\forall)$ $J \subset I$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ - funcție de probabilitate

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - sp. de probab. discret

III

Curs 4

Scheme de Probabilitate

I. Schema lui Bernoulli (schema binomială, bilei revenite)

Descrierea prin modelul urnei:

O urnă conține a bile albe și b bile negre. $(a, b \in \mathbb{N}^*)$. Se extrage o bilă și i se reține culoarea și se repune bila în urnă. Extragerea se repetă de n ori.

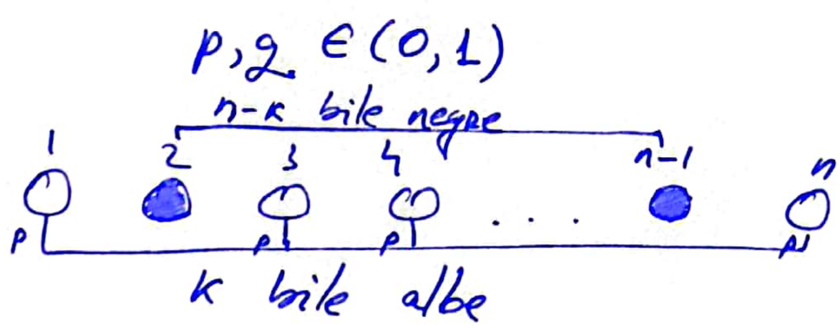
Notăm: $E_{k|n}$, evenimentul ca în cele n extrageri să obținem k bile albe ($n-k$ bile negre).

$$P_{k|n} = \mathbb{P}(E_{k|n}),\ k = 0, 1, \dots, n$$

Fie $p = \frac{a}{a+b}$, probab. extragerii unei bile albe

Atunci: $q = \frac{b}{a+b} = 1 - p$, probab. extragerii unei bile negre

$$p, q \in (0,1)$$



prob. unui caz favorabil : $p^k \cdot q^{n-k}$

Nr. cazurilor favorabile: C_n^k
($\stackrel{not}{=} N_f$)

$$P_{k|n} = N_f \cdot p^k q^{n-k}$$

$$\boxed{P_{k|n} = C_n^k \, p^k q^{n-k} \quad , k=0,1,\dots,n}$$

$\mathcal{S} = \{ E_{k|n}, k=\overline{0,n} \}$ este un sistem complet de evenimente

Obs! Ev. mutuale incompatibile, disjuncte

Obs! Reuniunea lor este Ω, ev. sigur

Verificare:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(E_{k|n}) = \sum_{k=0}^{n} P_{k|n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k \cdot q^{n-k}$$

Formula binomului lui Newton

$$(p+q)^n = 1^n = 1$$

~~Obs.~~

Formulare generală:

Probab. de realizare a unui ev. A în cadrul unei experiențe este $p = \mathbb{P}(A) \in (0,1)$. Repetăm experiența de n ori în condiții identice și idependente. Atunci probab. realizării lui A de exact k ori în cele n experiențe este $P_{k|n} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k=\overline{0,n}$, unde $q = 1-p$.