{ Seminar 6 }

25.03.2024

Repartiții statistice

0) INEGALITATEA CEBÎȘEV:

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}(x)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}, (\forall)\varepsilon > 0$$

1) ~~REPREZENTAREA~~ REPARTIȚIA UNIFORMĂ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \end{cases}$$

2) ~~REPREZENTAREA~~ REPARTIȚIA GAMMA:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad a > 0$$

3) ~~REPREZENTAREA~~ REP. NORMALĂ:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, (\forall) x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

4) ~~REPREZENTAREA~~ POISSON (DISCRETĂ)

$$X: \left(\frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \lambda > 0$$

Scanat cu CamScanner

Seminar 6 | 25.03.2024

0)

① X, v.a. continuă

$X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{R}}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!} \cdot e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

nu n, este $-x$

Să se det. val. min. a probabil.

$\min(\mathbb{P}(0 < X < 2(n+1)), ~~n \in \mathbb{R}~~) = ?$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx =$

Verif:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot e^{-n} dx =$

$= \int_{-\infty}^{0} \cancel{\frac{x^n}{n!} \cdot e^{-n}}\, 0\, dx + \frac{e^{-n}}{n!} \int_{0}^{+\infty} x^n\, dx =$

$\neq 1$, deci nu e funcția corectă

$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \frac{1}{n!} \int_{0}^{+\infty} x^n \cdot e^{-x} dx = \Gamma(n) + 1 = 1$

$\Gamma(a) = \int_{0}^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$

Seminar 6 25.03.2024

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^{n+1} \cdot e^{-x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{n!}\Gamma(n+2) = \frac{1}{n!}(n+1)! = n+1$$

$$E(x) = n+1$$

$$E(x^2) = \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^2 \cdot x^n \cdot e^{-x}\, dx = \quad (n+2) - (n+3) = (n-1)$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} x^{(2+n)} \cdot e^{-x}\, dx = \frac{1}{n!}\cdot\Gamma(n+3) =$$

$$= \frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2)$$

$$V(x) = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = (n+1)(n+2-n+1)$$

$$= (n+1)(1) = n+1 = E(x)$$

Aplicăm inegalitatea Cebîşer:

$$P(\underbrace{-(n+1)}_{} < x - E(x) < n+1) =$$

$$P(|x - E(x)| < \underset{\varepsilon}{n+1})$$

$$P\{|x - E(x)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

1)

(2) Calitatea unui produs este rezultanta acțiunii a două grupări de factori U și W,

$U = 2\cancel{X} + 3\cancel{y}Y$, $W = 4\cancel{X} - \cancel{3}Y$, cu X, Y factori independenți, X este o variabilă a. continuă repartizată normal cu parametrii 3 și 2

și Y e v. a discretă binomială de parametri 10 și 0,9. Să se determine:

a) Coeficientul de corelație dintre U și W

b) ~~...~~ ($\mathbb{P}$(Y să ia valori în intervalul $(5, 13)$))

cov $\stackrel{not}{=}$ corelație
r $\stackrel{not}{=}$ coef. de corelație

Rezolvare:

$U = 2X + 3Y$
$W = 4X - Y$
X, Y, independente
$X \sim N(\overset{m}{3}; \overset{\sigma}{2}) \Rightarrow E(X) = m \cancel{p} \sigma$, $V(X) = n \cdot \sigma (1-\sigma)$ $\frac{9}{10}$
$Y \sim Bi(\overset{n}{10}; \overset{p}{0,9}) \Rightarrow E(Y) = n \overset{9}{p}$, $V(Y) = n \cdot p \cdot (1-p)$

coef. de corelație: $r(U, W) = \frac{cov(U, W)}{\sqrt{V(U) \cdot V(W)}} =$

$$= \frac{E(U \cdot W) - E(U) \cdot E(W)}{\sqrt{V(U) \cdot V(W)}}$$

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(2X+3Y) = 2\,\mathbb{E}(X) + 3\,\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(4X-Y) = 4\,\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)$$

Deci 3 este media $\mathbb{E}$ pt X și ~~pt a~~ 2 este ~~radical~~ rădăcină pătrată din dispersia $\mathbb{V}$

$$\mathbb{E}(U) = 2\cdot 3 + 3\cdot 9 = 6+27 = \boxed{33 = \mathbb{E}(U)}$$

$$\mathbb{E}(W) = 4\cdot 3 - 9 = \boxed{3 = \mathbb{E}(W)}$$

la dispersie coef² ies la puterea a 2a

$$\mathbb{V}(U) = \mathbb{V}(2X+3Y) \overset{X,Y \text{ ind.}}{=} 4\,\mathbb{V}(X) + 9\,\mathbb{V}(Y) =$$

$$= 4\cdot 4 + 9\cdot 0{,}9 = 16 + 8{,}1 = \boxed{24{,}1 = \mathbb{V}(U)}$$

$$\mathbb{V}(W) = \mathbb{V}(4X-Y) \overset{X,Y \text{ ind.}}{=} 16\,\mathbb{V}(X) + 1\,\mathbb{V}(Y) =$$

$$= 16\cdot 4 + 0{,}9 = \boxed{64{,}9 = \mathbb{V}(W)}$$

$$\mathbb{E}(U\cdot W) = \mathbb{E}((2X+3Y)(4X-Y)) =$$

$$= \mathbb{E}(8X^2 - 2XY + 12XY - 3Y^2) =$$

$$= \mathbb{E}(8X^2 + 10XY - 3Y^2) =$$

$$= 8\,\mathbb{E}(X^2) + 10\,\mathbb{E}(X\cdot Y) - 3(Y^2) = ⊛$$

$$\cancel{= 8\cdot 9 + 10\cdot 27 - 3\cdot 81 =}$$

$$\cancel{= 72 + 270 - 243 = 99}$$

Seminar 6

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 =$

$= 4 - 9 = \boxed{13 = \mathbb{E}(X^2)}$

$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 \Rightarrow \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{V}(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2 =$

$= 0,9 + 81 = \boxed{81,9 = E(Y^2)}$

X, Y indep $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = 27$

$\circledast = 8 \cdot 13 + 10 \cdot 27 - 3 \cdot 81,9 = (-1,1)$

$= 104 + 270 - 245,7 = 128,3$?

b) $\mathbb{P}\{5 < Y < 13\} = ?$ / $-9 = \mathbb{E}(Y)$

$\mathbb{P}(-4 < X - E(Y) < 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}\{|Y - E(Y)| < 4\} \geq 1 - \frac{0,9}{16}$

⋮