Curs 4

13.03.2024

Evenimente Condiționate.

Definiție: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un spațiu de probabilitate. Considerăm $A \in \mathcal{F}$, cu $\mathbb{P}(A) > 0$ (A se numește eveniment neneglijabil). Pentru un eveniment $B \in \mathcal{F}$ numim probabilitatea lui B condiționată de (realizarea evenimentului) A mărimea:

$$\boxed{\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}}$$

Obs! $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}_A(B)$

Proprietăți:

1) A, B - independente, A, neglijabil $\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)}$

$$\mathbb{P}(B|A) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \overset{\text{indep.}}{=} \frac{\mathbb{P}(B) \cdot \cancel{\mathbb{P}(A)}}{\cancel{\mathbb{P}(A)}} = \mathbb{P}(B)$$

2) A, B - ev. neneglijabile $\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) \\ \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) \end{array}\right| \Rightarrow \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

3) Fie $A \in \mathcal{F}$, ev. neneglijabil

Definim $\boxed{\mathbb{P}_A : \mathcal{F} \to \mathbb{R},\ \mathbb{P}_A(X) = \mathbb{P}(X|A),\ (\forall) X \in \mathcal{F}}$

Fie $\mathbb{P}_A$ - funcție de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$

Verificăm axiomele probabilității:

$P_1)$ $\mathbb{P}_A(X) \overset{def.}{=} \mathbb{P}(X|A) = \dfrac{\mathbb{P}(X \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \geq 0,\ (\forall) X \in \mathcal{F}$

$P_2)$ $\mathbb{P}_A(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$

$P_3)$ Fie $(X_n)_{n \geq 1}$, șir de evenimente, $X_i \cap X_j = \emptyset,\ (\forall) i,j \in \mathbb{N}^*,\ i \neq j$

$$\mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap A)\right)}{\mathbb{P}(A)} \overset{P_3 \text{ pt. } \mathbb{P}}{=}$$

$$\overset{P_3 \text{ pt. } \mathbb{P}}{=} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(X_n \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_A(X_n)$$

Deci $\mathbb{P}_A$ - probabilitate

Curs 4 13.03.2024

Formule pentru probabilități condiționate

Definiție:

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - spațiu de probabilitate fixat

O familie $\mathcal{S} = \{A_i, i \in I\} \subset \mathcal{F}$, unde I - finită, nevidă sau I-numărabilă; o astfel de familie de evenimente se numește SISTEM COMPLET DE EVENIMENTE dacă:

1) disjuncte 2 câte 2

$$\boxed{A_i \cap A_j = \emptyset, (\forall) i,j \in I, i \neq j}$$

$$\boxed{2) \bigcup_{i \in I} A_i = \Omega}$$

$$\boxed{3) \mathbb{P}(A_i) > 0, (\forall) i \in I}$$

Consecință:

$$\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \overset{P_3}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Deci: $$\boxed{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1}$$

I Formula Probabilității Totale (FTP)

Fie $\mathcal{S} = \{A_i, i \in I\}$ - sistem complet de evenimente

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i), (\forall) A \in \mathcal{F}}$$

Fie $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A \cap (\bigcup_{i \in I} A_i)) = \mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)) =$$
$$= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A | A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$$

$\boxed{\text{II}}$ Formula lui Bayes:

Fie $\mathcal{S}$-sistem complet de evenimente, $\mathcal{S} = \{A_i, i \in I\}$

$A \in \mathcal{F}$, eveniment neneglijabil

$$\boxed{\mathbb{P}(A_i | A) = \frac{\mathbb{P}(A | A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k \in I} \mathbb{P}(A | A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k)}, \ (\forall)\ i \in I}$$

Fie $i \in I$

$$\mathbb{P}(A_i | A) \overset{def.}{=} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \underset{FPT}{=} \frac{\mathbb{P}(A | A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k \in I} \mathbb{P}(A | A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k)}$$

$\boxed{\text{III}}$ Formula Intersecției Finite

Pp că avem ev. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ a.î.

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}$, neneglijabil $\Rightarrow p$ este ≥ 0

$$\boxed{\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}$$

Curs 4 13.03.2024

$$A_1 \supset A_1 \cap A_2 \supset \ldots \supset A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \xRightarrow{\mathbb{P}\uparrow}$$

$$\xRightarrow{\mathbb{P}\uparrow} \mathbb{P}(A_1) \geq \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \geq \ldots \geq \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \overset{\text{prin ipoteză}}{>} 0$$

$$\mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) =$$

$$= \cancel{\mathbb{P}(A_1)} \cdot \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{\mathbb{P}(A_1)}} \cdot \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}}{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{\cancel{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})}} =$$

$$= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Modele Elementare de Spații de Probabilitate

$\boxed{I}$ Spațiul Laplace

Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$, mulțime finită.

Fie $\mathcal{F} = \mathbb{P}(\Omega) = \{A \mid A \subset \Omega\}$

Notăm: M, mulțime finită $\Rightarrow |M| \overset{not}{=}$ cardinalul lui M

$|M| = card(M)$, nr. de elemente ale lui M

Avem: $|\Omega| = n$

$|\mathcal{F}| = 2^n$

Definim: $\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ prin $\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{|A|}{n}$, $(\forall)\ A \in \mathcal{F}$

$|A| > |\Omega| \Rightarrow$ se verifică că $\mathbb{P}$ este o funcție de probabilitate

Observație: $E_i = \{\omega_i\}$, $i = \overline{1,n}$ - evenimente elementare

$\mathbb{P}(E_i) = \dfrac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$ (E_i, $i = \overline{1,n}$, $\underset{=\text{probabilități egale}}{\text{echiprobabile}}$)

Observație 2:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Curs 4

13.03.2024

II Spațiul Discret

$\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$, $I = \{1, \dots, n\}$ sau $I = \mathbb{N}^*$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\{\omega_j, j \in J\}, J \subset I\}$

$\overline{P} = (p_i)_{i \in I}$, $p_i > 0$, $(\forall) i \in I$ a.î. $\sum_{i \in I} p_i = 1$

$\mathbb{P}(\{\omega_j, j \in J\}) \overset{def.}{=} \sum_{j \in J} p_j$, $(\forall)\ J \subset I$

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to \mathbb{R} \overset{not}{=}$ funcția de probabilitate

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \overset{not}{=}$ spațiu de probabilitate discret

Scheme de Probabilitate

I. Schema lui Bernoulli (schema binomială, bilei revenite)

Descrierea prin modelul urnei:

O urnă conține a bile albe și b bile negre $(a, b \in \mathbb{N}^*)$. Se extrage o bilă și i se reține culoarea. Se repune bila în urnă. Extragerea se repetă de n ori.

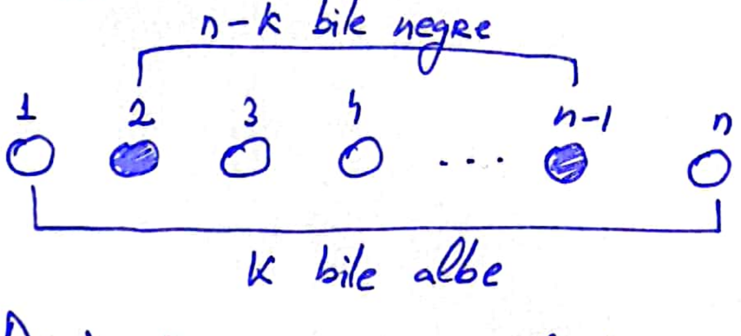
Notăm: $E_{k|n} \overset{not}{=}$ evenimentul ca în cele n extrageri să obținem k bile albe ($n-k$ bile negre)

$$P_{k|n} \overset{not}{=} \mathbb{P}(E_{k|n}),\ k = 0, 1, \dots, n$$

Fie $p = \frac{a}{a+b}$, probabilitatea extragerii unei bile albe

Atunci $q = \frac{b}{a+b} = 1 - p$, probabilitatea extragerii unei bile negre

$p, q \in (0,1)$



Deci: $p^k \cdot q^{n-k}$, probabilitatea unui caz favorabil

$N_f = C_n^k$, numărul cazurilor favorabile

Curs 4

13.03.2024

$P_{k|n} = N_f \cdot p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow \boxed{P_{k|n} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n}$

$\mathcal{J} = \{E_{k|n}, k = \overline{0,n}\} \stackrel{not}{=}$ sistem complet de evenimente

Observație: Evenimente mutuale incompatibile, disjuncte

Observație 2: Reuniunea lor este Ω, eveniment sigur

Verificare:

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(E_{k|n}) = \sum_{k=0}^{n} P_{k|n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \underline{\underline{\text{formula binomului lui Newton}}}$$

$$= (p+q)^n = 1^n = 1$$

Formulare generală:

Probabilitatea de realizare a unui eveniment A în cadrul unei experiențe este $p = \mathbb{P}(A) \in (0,1)$. Repetăm experiența de n ori în condiții identice și independente. Atunci probabilitatea realizării lui A de exact k ori în cele n experiențe este $P_{k|n} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = \overline{0,n}$, unde $q = 1 - p$.

Deci: $P_{k|n} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $p = P(A) \in (0,1)$, $q = 1 - p = P(A^c) \in (0,1)$