

# Knapsack



# Exemple détaillé de programmation dynamique

#### 0-1 Knapsack

(d'après les supports de S. Goddard)

- ➤ Soit S un ensemble de n items, chacun ayant un poids w<sub>i</sub> et un « bénéfice » b<sub>i</sub>
- > Comment remplir un sac à dos ayant une capacité maximale de W en maximisant le bénéfice ?
- > Dit autrement trouver un sous ensemble T de S tel que

$$\max\left(\sum_{i\in T}b_i\right)et\sum_{i\in T}b_i\leqslant W$$

Wi pas bi



#### Remarque

- > 0-1 Knapsack:
  - On prend ou non chaque item
  - Programmation dynamique
- > Fractional Knapsack
  - On peut prendre une fraction de chaque item
  - Algorithme glouton



N° (i)	Wi	b <sub>i</sub>
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

$$W = 20$$



#### Première formulation (fausse!)

- Les items sont étiquetés 1,2,..., n
- $\triangleright$  Soit S<sub>k</sub> la solution optimale avec les items 1,2,..,k
- > Est il possible de définir la solution à partir de cela ?
  - Ie trouver une relation entre  $S_k$  et  $S_{k+1}$ ?



N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

W = 20



N°	wi	bi	<b>S4</b>
1	2	3	1
2	3	4	2
3	4	5	3
4	5	8	4
5	9	10	

$$W = 20$$



N°	wi	bi	<b>S4</b>	S5
1	2	3	1	1
2	3	4	2	
3	4	5	3	3
4	5	8	4	4
5	9	10		5

$$W = 20$$

$$W5=20, B5=26$$



N°	wi	bi	<b>S4</b>	S5
1	2	3	1	1
2	3	4	2	
3	4	5	3	3
4	5	8	4	4
5	9	10		5

$$W = 20$$

$$W5=20, B5=26$$

S4 n'est pas sous solution de S5!!!



#### Reformulons

- > Il faut utiliser le poids d'une sous-solution dans la définition
- > Soit B<sub>k,w</sub> la solution optimale avec les k premiers objets considérés (pas forcément pris) pour un poids donné w
- > Récurrence
  - $B_{k,w} = B_{k-1,w}$  si mon objet k est trop lourd (dépasse ce qui est autorisé)
  - Sinon soit  $B_{k,w} = B_{k-1,w}$  la solution sans l'objet k est meilleure, soit  $B_{k-1,w-wk} + b_k$  est meilleure

$$B[k,w] = \begin{cases} B[k-1,w] \sin w_k > w \\ \max (B[k-1,w],B[k-1,w-w_k] + b_k) \end{cases}$$



#### Reformulons

- > Cas triviaux
  - $B_{i,0}=0$  pour tout i dans 1..n
  - $B_{0,w}=0$  pour tout w dans 0..W

$$B[k,w] = \begin{cases} B[k-1,w] \sin w_k > w \\ \max (B[k-1,w],B[k-1,w-w_k] + b_k) \end{cases}$$



#### Mise en oeuvre

- On utilise un tableau pour stocker les solutions intermédiaires
  - Deux indices  $\rightarrow$  deux dimensions k et w (à voir ensuite si réductible à une dimension)



#### Algorithme

```
Pour w de 0 à W
   B[0,w]=0
Pour i de 1 à n
   B[i,0]=0
Pour i de 1 à n
    Pour w de 1 à W
        Si w_i > w alors B[i,w]=B[i-1,w]
            Sinon
                B[i,w] = max(B[i-1,w], B[i-1,w-w_i] + b_i)
        Fsi
   Fp
Fp
```



#### Exécution

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

							115
20	0						'
19							
18							
17							
16							
15							
13							
11							
9	•						
7							
5							
3							
2							
1							
0	0			• • •		0	] .
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	iε

ier



#### Exécution

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

Valeurs possibles de w de 0 à 20

4								116
	20	0						
	19							
	18							
۱	17							
	16							
	15							
	13							
	11							
	9							
	7							
	5							
	3							
	2							
	1							
	0	0					0	
	W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier



#### Exécution

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

N° des items que l'on peut prendre éventuellement

							17
20	0						• •
19							
18							
17							
16							
15							
13							
11							
	] :						
9	•						
7							
5							
3							
2							
1							
0	0					0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ler.



#### Exécution

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

Valeurs maximales de w

Des zéros ....

							118
20	0						
19							
18							
17							
16							
15							
13							
11							
9	1						
7/							
5							
3							
2							
1							
0	0	$\rightarrow$				0	1
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier



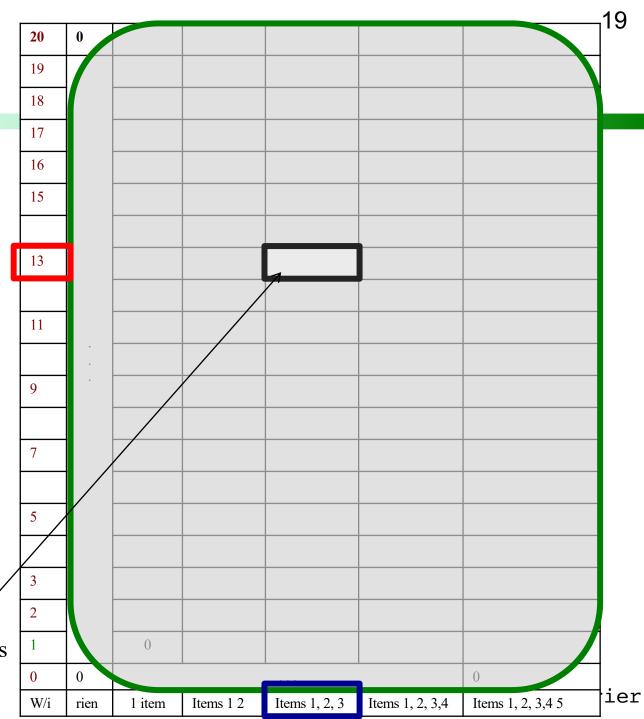
#### Exécution

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

Valeurs maximales de w

Si la limite est 13 alors le poids maximal avec 3 objets au plus est de ....





#### Exemple

$$W = 20$$

Wl	bı
2	3
3	4
4	5
5	8
9	10
	2 3 4 5

w=1

 $w_i=2$  $w_i > w$  alors B[i,w]=B[i-1,w]

							20
20	0						
19							1
18							
17							
16							]
15							]
							]
13							
							]
11							
9	·						
7							
5							
3							
2							
1		<b>→</b> 0					
0	0					0	] .
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier



W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

 $B[i-1,w-w_i]+b_i$ 

ı		-		<u> </u>				21
	20	0						
	19							
	18							
	17							
	16							
	15							
	13							
	11							
	9							
	7							
	5							
	3							
	2		<b>1</b> <sup>3</sup>					
	1		0					
	0	0					0	
	W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier



W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

 $B[i-1,w-w_i]+b_i$ 

							22
20	0						
19							
18							
17							
16							
15							
13							
13							
11							
9							
7							
,							
5							
3		1 <sup>3</sup>					
2	/	3					
1		0					
0	0					0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier



W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

 $B[i-1,w-2]+b_i$ 

Pour tout w

20     0     3       19     3       18     3       17     3	23
18	
17	
	1
16	I
15	
13	
11 .	
9	! 
7	
5	
3	
3 3	
2 3	
1 0	
0 0 0	
W/i rien 1 item Items 1 2 Items 1, 2, 3 Items 1, 2, 3,4 Items 1, 2, 3,4 5	ier



W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

							24
20	0	3					
19		3					
18	1	3					
17	1						
16	1						]
15	1						]
	1						]
13	1						]
	1						]
11							
	] :	•					
9	] .						
7							
5							
		3					
3		3					
2		3					
1		0					
0	0					0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier



$$W = 20$$

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=1

 $w_i=3$   $w_i > w \text{ alors } B[i,w]=B[i-1,w]$ 

20	0
19	
18	
17	
16	
15	
13	
11	
9	•
7	
5	
3	
2	
1	
0	0
W/i	rien

	3	
	3	
	3	
	•	
•		
	3 3 3	
	3	
	0 —	

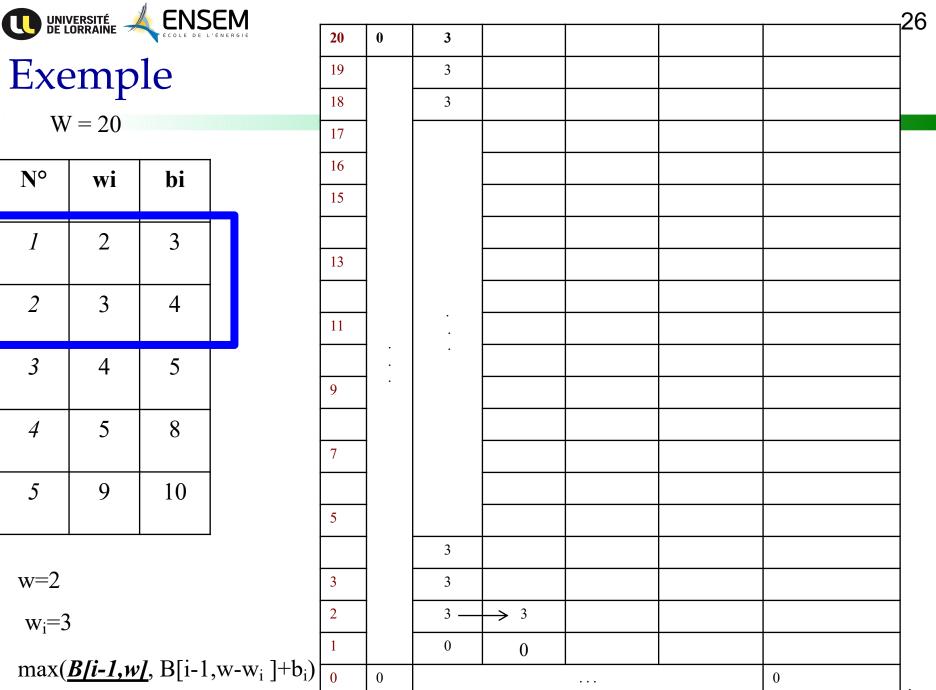
1 item

Items 1 2

Items 1, 2, 3

<b>→</b> 0	

		25
		20
	0	
Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier



W/i

rien

1 item

Items 1 2

Items 1, 2, 3

Items 1, 2, 3,4

ier

Items 1, 2, 3,45



$$W = 20$$

N°	Wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=3

 $w_i=3$  $\max(B[i-1,w], \underline{B[i-1,w-w_i]+b_i})$ 

20	0	3	
19		3	
18		3	
17			
16			
15			
13			
11			
		•	
9	·		
7			
5			
		3	
3		3	1 <sup>4</sup>
2		3	3
1		0	0
0	0		
W/i	rien	1 item	Items 1 2

	3 3 3				
	3				
	·				
•					
	3				
	3	<b>1</b> 4			
	3	3			
	0	0			
					0
en	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

ier



$$W = 20$$

N°	wi	bi
1	2	3
2	3 4	
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=4	
$w_i=3$	
max(B[i-1,w], <b>B[i-1,w-w</b> <sub>i</sub> ]+b	<u>i</u>

0	

W/i

rien

1 item

Items 1 2

Items 1, 2, 3

3	
3	
•	
3	
3	$\angle$
3	
0 /	

<b>1</b> 4	
4	
3	
0	

		0	
	Items 1, 2, 3,4		ier
_			



W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=5,6, etc w<sub>i</sub>=3

 $\max(B[i-1,w], \underline{B[i-1,w-w_i]+b_i})$ 

ı					1	1	i	<b>–29</b>
	20	0	3	$1^{7}$				
	19		3					
İ	18		3					7
	17							
ŀ	16		·					1
	15							$\dashv$
								$\dashv$
	13							$\dashv$
	13							_
								_
	11							
			·					
	9	٠						
İ	7							7
Ì				7				7
ŀ	5			7 7				-
			3 ,	1 4				$\dashv$
ŀ	3		3 /	4				-
	2		3	3				-
			/					-
	1		0	0				_
)	0	0	4.	T. 45			0	4
	W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	Jier



W = 20

N°	wi	bi	
1	2	3	
2	3	4	
3	4	5	
4	5	8	
5	9	10	

w=1,2,3 w<sub>i</sub>=4

 $Si w_i > w alors B[i,w] = B[i-1,w]$ 

20	0	3	7				
19		3					
18	1	3					
17							
16	1						
15							
13							
		•					
11							
		·					
9							
7	_						
	1		7				
5			7				
		3	4				
3		3	4	→ <sup>4</sup>			
2		3	3 —	<b>→</b> 3			
1		0	0 -	<b>→</b> 0			
0	0				1	0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	



W = 20

N°	wi	bi	
1	2	3	
2	3	4	
3	4	5	
4	5	8	
5	9	10	

w=4 w<sub>i</sub>=4

 $B[i,w] = \max(B[i-1,w], \underline{\textbf{\textit{B[i-1,w-w}_i]+b_i}})$ 

					_		3
20	0	3	7				
19		3					
18		3					
17							
16	1						
15	1						
13							
11		•					
		·					
9							
7							
			7				
5			7				
		3	4	1 5			
3		3	4	4			
2		3	3	3			
1		0	0	0			
0	0					0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	J₁



W = 20

N°	wi	bi	
1	2	3	
2	3	4	
3	4	5	
4	5	8	
5	9	10	

w=5 w<sub>i</sub>=4

 $B[i,w] = max(\underline{\textit{B[i-1,w]}}, B[i-1,w-w_i] + b_i)$ 

20	0	3	7				
19		3	,				
18	1	3					
17	1						
16	1						
15	1						
13	1						
	1						
13	_						
11							
	] :	•					
9	1						
	1						
7	1						
	1		7				
5	1		7	→ <sup>7</sup>			
	1	3	4	5			
3	1	3	4	4			
2	1	3	3	3			
1	1	0	0	0			
0	0				l	0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	



W = 20

N°	wi	bi	
1	2	3	
2	3	4	
3	4	5	
4	5	8	
5	9	10	

w=6

 $w_i = 4$ 

 $B[i,w] = \max(B[i-1,w], \underline{\textbf{\textit{B[i-1,w-w}}_{\underline{i}} \textbf{\textit{J+b}}_{\underline{i}}})$ 

20					Ī	Ī	<b>⊸</b> 33
20	0	3	7				
19		3					
18	]	3					
17	1						
16	1						
15	1						
	1						
13	1						
	1		·				
11	1						
	† :   :						
9	· ·						
	1						
7	1						
	1		7	1 8			
5	1		7	7			
	1	3	4 /	5			
3	1	3	4	4			
2	1	3	3	3			
1	1	0	0	0			
0	0				<u>I</u>	0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	Jier



W = 20

N°	wi	bi	
1	2	3	
2	3	4	
3	4	5	
4	5	8	
5	9	10	

w=7

 $w_i=4$ 

 $B[i,w] = \max(B[i-1,w], \underline{\textit{B[i-1,w-w}_{\underline{i}}\textit{J+b}_{\underline{i}}})$ 

				_			<b>_</b> 3
20	0	3	7				
19		3					
18	1	3					
17							
16	1						
15							
13							
11							
	] :	•					
9							
7				19			
			7	8			
5			7	7			
		3	4	5			
3		3	4	4			
2		3	3	3			
1		0	0	0			
0	0					0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	i



W = 20

N°	wi	bi	
1	2	3	
2	3	4	
3	4	5	
4	5	8	
5	9	10	

w=8  $w_i=4$ 

 $B[i,w] = \max(B[i-1,w], \underline{\textbf{\textit{B[i-1,w-w}}_{\underline{i}}\textbf{\textit{J+b}}_{\underline{i}}})$ 

							<b>-35</b>
20	0	3	7				
19		3					
18		3					
17							
16	•						
15							
13							
11							
9							
	l			. 9			
7				9			
	l		7	8			
5			7	7			
		3	4	5			
3		3	4	4			
2		3	3	3			$\dashv$
1		0					
0	0	U	0	0		0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	$\exists_{\mathtt{i}\epsilon}$



W = 20

N°	wi	bi	
1	2	3	
2	3	4	
3	4	5	
4	5	8	
5	9	10	

w=9, ...

 $w_i=4$ 

 $B[i,w] = \max(B[i-1,w], \underline{\textbf{\textit{B[i-1,w-w}}_{\underline{i}}\textbf{\textit{J}+b}_{\underline{i}}})$ 

							<b>⊸</b> 36
20	0	3	7	1 12			
19		3	,	/			
18		3	/				
17					_		
16			/				
15							
13							
11							
	i :						
9				<b>1</b> <sup>12</sup>			
				9			
7			,	9			
			7	8			
5			7	7			
		3	4	5			
3		3	4	4			
2		3	3	3			
1	1	0	0	0			
0	0		I			0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	$\beth_{ie}$



W = 20

N°	wi	bi	
1	2	3	
2	3	4	
3	4	5	
4	5	8	
5	9	10	

w=1..4

 $w_i = 5$ 

 $Si w_i > w alors B[i,w] = B[i-1,w]$ 

								<b>⊸37</b>
	20	0	3	7	12			
	19		3					
	18		3					
	17							
	16							
	15							7
	13							
				·				
	11		•					
			٠					
	9	·			12			
					9			
	7				9			
				7	8			
	5			7	7			
			3	4	5	<b>→</b> 5		
	3		3	4	4 —	<b>→</b> 4		$\exists$
	2		3	3	3 —	<b>→</b> 3		
	1		0	0	0 —	<b>→</b> 0		$\exists$
W	0	0					0	
	W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	lier



W = 20

N°	wi	bi	
1	2	3	
2	3	4	
3	4	5	
4	5	8	
5	9	10	

w=7

 $w_i=5$ 

 $B[i,w] = max(\underline{\textit{B[i-1,w]}}, B[i-1,w-w_i] + b_i)$ 

							_38
20	0	3	7	12			
19		3					
18		3					
17							
16							
15							
13							
11		•					
	† :   :						
9	•			12			
				9			
7				9 —	<b>&gt;</b> 9		
			7	8	8		
5			7	7	8		
		3	4	5	5		
3		3	4	4	4		
2	1	3	3	3	3		
1	1	0	0	0	0		
0	0		l			0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	$\exists_{\mathtt{i}}$



W = 20

N°	wi	bi	
1	2	3	
2	3	4	
3	4	5	
4	5	8	
5	9	10	

w=8  $w_i=5$ 

 $B[i,w] = \max(B[i-1,w], \underline{\textbf{\textit{B[i-1,w-w}}_{\underline{i}}\textbf{\textit{J}} + \textbf{\textit{b}}_{\underline{i}}})$ 

20	0	3	7	12			
19		3					
18		3					
17							
16							
15							
13	1						
	1						
11	-						
	† :   :						
9	•			12			
				9	12		
7	1			9	9		
			7	8	8		
5			7	7 /	8		
		3	4	5	5		
3		3	4	4	4		
2	1	3	3	3	3		
1	1	0	0	0	0		
0	0				<u> </u>	0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	



W = 20

N°	wi	bi	
1	2	3	
2	3	4	
3	4	5	
4	5	8	
5	9	10	

W=9,10, etc w<sub>i</sub>=5

 $B[i,w] = \max(B[i\text{-}1,w], \underline{\textit{B[i-1,w-w}_{\underline{i}}\textit{J+b}_{\underline{i}}})$ 

	20	0	3	7	12	20		4
	19		3					
	18		3					
	17							
	16							
	15							
						120		
	13					17		
						17 17		
	11		·			16		
		] :			//	15		
	9	·			12///	13		
					9///	12		
	7				9///	9		
				7	8///	8		
	5			7	7//	8		
			3	4	5	5		
Ī	3		3	4	4	4		
Ī	2		3	3	3	3		
ļ	1		0	0	0	0		
	0	0		!			0	
	W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	$ ightharpoonup_{ exttt{i}}$



W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=1..8 w<sub>i</sub>=9

Si  $w_i > w$  alors B[i,w]=B[i-1,w]

							_4
20	0	3	7	12	20		'
19		3					
18		3	1				
17			1				
16					·		
15							
					20		
13					17		
					17		
11					16		
	<b>-</b>				15		
9	- ·			12	13		
				9	12	12	
7				9	9	9	
			7	8	8	8	
5			7	7	8	8	
		3	4	5	5	5	
3		3	4	4	4	4	
2		3	3	3	3	3	
1	7	0	0	0	0	0	
0	0					0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	$\beth_\mathtt{i}$



$$W = 20$$

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=9 w<sub>i</sub>=9

 $B[i,w] = max(B[i-1,w], B[i-1,w-w_i]+b_i)$ 

		1	T	Ι	ı		<del>4</del> 2
20	0	3	7	12	20		
19		3					
18		3					
17							
16	]				·		
15	<u> </u>						
	1				20		
13	1				17		
	1		·		17		
11	†				16		
	· .				15		
9	·			12	13	13	
	†			9	12	12	
7	†			9	9	9	
	†		7	8	8	+10 8	
5	†		7	7	8	8	
	†	3	4	5	5 .	5	
3	†	3	4	4	4	4	
2	†	3	3	3	3	3	
1	†	0	0	0	0	0	1
0	0				:	0	$\exists$
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	$\exists_{i\epsilon}$



W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

W=10, w<sub>i</sub>=9

 $B[i,w] = max(B[i-1,w], B[i-1,w-w_i]+b_i)$ 

20	0	3	7	12	20		<del>- </del> 43
19		3					
18	-	3					
17					·		
16							$\dashv$
15	_						-
	-				20		-
13	1				17		
	-				17		-
11	_				16		+
	·				15 —	<u>→</u> 15	$\dashv$
9	:			12	13	13	-
	_			9	12	: 12	$\dashv$
7	_			9	9	+:10 9	1
	-		7	8	8	8	-
5	-		7	7	8 .	8	
	1	3	4	5	5 :	5	1
3	1	3	4	4	4	4	
2	1	3	3	3	3	3	-
1	1	0	0	0	0	0	1
0	0		l			0	$\dashv$
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	] ji



W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=11  $w_i=9$ 

 $B[i,w] = max(B[i-1,w], B[i-1,w-w_i]+b_i)$ 

20	0	3	7	12	20		1
19		3					1
18		3					
17							
16					·		
15							1
					20		
13					17		
			·		17		1
11					16	<del></del>	
	] :	٠			15	. 15	
)	·			12	13	. 13	
				9	12	+10 12	
7				9	9	9	
			7	8	8 .	8	
5			7	7	8	8	
		3	4	5	5	5	
3		3	4	4	4	4	
2		3	3	3	3.	3	
		0	0	0	0	0	
)	0					0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	]i



W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=12,13, .. 16 w<sub>i</sub>=9

 $B[i,w] = max(\underline{B[i-1,w]}, B[i-1,w-w_i] + b_i)$ 

			<u> </u>	Γ	1	<u> </u>	45
20	0	3	7	12	20	26	
19		3					
18		3					
17	1						
16	1				·	> 20	
15	1					> 20	
	1				20 —	> 20	
13	1				17	> 17	
	1		·		17 —	> 17	
11					16	16	
	1 :				15	15	
9	1 .			12	13	13	
	1			9	12	12	
7	1			9	9	9	
	1		7	8	8	8	
5	1		7	7	8	8	
	1	3	4	5	5	5	
3	1	3	4	4	4	4	
2	1	3	3	3	3	3	
1	1	0	0	0	0	0	
0	0					0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	$ brace_{ exttt{i}}$



$$W = 20$$

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=17..20 w<sub>i</sub>=9

 $B[i,w] = max(B[i-1,w], \underline{B[i-1,w-w_i]+b_i})$ 

				<u> </u>	•	•		46
2	0	0	3	7	12	20	1 <sup>26</sup>	
1	9		3				/ <sub>1</sub> 25	
1	8		3				23	
1	7						///^22	
1	6					·	/// 20	]
1	5				·	/		1
						20	20	]
1	3					17	17	1
				·		17 ///	17	]
1	1					16////	16	]
						15	15	
9	١				12	13//	13	1
					9	12	12	
7					9	9	9	1
				7	8	8	8	
5				7	7	8	8	1
			3	4	5	5	5	]
3			3	4	4	4	4	
2	,		3	3	3	3	3	
1			0	0	0	0	0	1
0	)	0					0	]
V	V/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	lier



#### Remarques

- ➤ Un tableau 2 D est inutile ici puisqu'on ne se réfère qu'à i-1à chaque fois.
- > Complexité
  - Spatiale
  - Temporelle
- > Comment sauvegarder la solution ?