

Knapsack

Exemple détaillé de programmation dynamique

0-1 Knapsack

(d'après les supports de S. Goddard)

- Soit S un ensemble de n items, chacun ayant un poids w_i et un « bénéfice » b_i
- Comment remplir un sac à dos ayant une capacité maximale de W en maximisant le bénéfice ?
- Dit autrement trouver un sous ensemble T de S tel que

$$\max \left(\sum_{i \in T} b_i \right) \text{ et } \sum_{i \in T} w_i \leq W$$

Wi pas bi

Remarque

- 0-1 Knapsack :
 - On prend ou non chaque item
 - Programmation dynamique
- Fractional Knapsack
 - On peut prendre une fraction de chaque item
 - Algorithme glouton

Exemple

N° (i)	w_i	b_i
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

$$W = 20$$

Première formulation (fausse !)

- Les items sont étiquetés $1, 2, \dots, n$
- Soit S_k la solution optimale avec les items $1, 2, \dots, k$
- Est il possible de définir la solution à partir de cela ?
 - Je trouver une relation entre S_k et S_{k+1} ?

Exemple

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

$$W = 20$$

Exemple

N°	wi	bi	S4
1	2	3	1
2	3	4	2
3	4	5	3
4	5	8	4
5	9	10	

$$W = 20$$

S4

$$W4=14, B4=20$$

Exemple

N°	wi	bi	S4	S5
1	2	3	1	1
2	3	4	2	
3	4	5	3	3
4	5	8	4	4
5	9	10		5

$$W = 20$$

S4

$$W4=14, B4=20$$

S5

$$W5=20, B5 = 26$$

Exemple

N°	wi	bi	S4	S5
1	2	3	1	1
2	3	4	2	
3	4	5	3	3
4	5	8	4	4
5	9	10		5

$$W = 20$$

$$S4 \quad W4=14, B4=20$$

$$S5 \quad W5=20, B5 = 26$$

S4 n'est pas sous solution de S5 !!!

Reformulons

- Il faut utiliser le poids d'une sous-solution dans la définition
- Soit $B_{k,w}$ la solution optimale avec les k premiers objets considérés (pas forcément pris) pour un poids donné w
- Récurrence
 - $B_{k,w} = B_{k-1,w}$ si mon objet k est trop lourd (dépasse ce qui est autorisé)
 - Sinon soit $B_{k,w} = B_{k-1,w}$ la solution sans l'objet k est meilleure, soit $B_{k-1,w-w_k} + b_k$ est meilleure

$$B[k, w] = \begin{cases} B[k-1, w] & \text{si } w_k > w \\ \max(B[k-1, w], B[k-1, w-w_k] + b_k) & \text{sinon} \end{cases}$$

Reformulons

➤ Cas triviaux

- $B_{i,0}=0$ pour tout i dans $1..n$
- $B_{0,w}=0$ pour tout w dans $0..W$

$$B[k, w] = \begin{cases} B[k-1, w] & \text{si } w_k > w \\ \max(B[k-1, w], B[k-1, w - w_k] + b_k) & \text{sinon} \end{cases}$$

Mise en oeuvre

- On utilise un tableau pour stocker les solutions intermédiaires
 - Deux indices ➔ deux dimensions k et w (à voir ensuite si réductible à une dimension)

Algorithme

Pour w de 0 à W

$B[0,w]=0$

Pour i de 1 à n

$B[i,0]=0$

Pour i de 1 à n

Pour w de 1 à W

Si $w_i > w$ alors $B[i,w]=B[i-1,w]$

Sinon

$B[i,w]= \max(B[i-1,w], B[i-1,w-w_i]+b_i)$

Fsi

Fp

Fp

Exécution

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

20	0					
19	.					
18						
17						
16						
15						
13						
11						
9						
7						
5						
3						
2						
1						
0	0	...				0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

Exécution

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

Valeurs possibles de w
de 0 à 20

20	0						16
19							
18							
17							
16							
15							
13							
11							
9							
7							
5							
3							
2							
1							
0	0	...					0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier

Exécution

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

N° des items que l'on peut prendre éventuellement

20	0						17
19	.						
18							
17							
16							
15							
13							
11							
9							
7							
5							
3							
2							
1							
0	0					0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	er

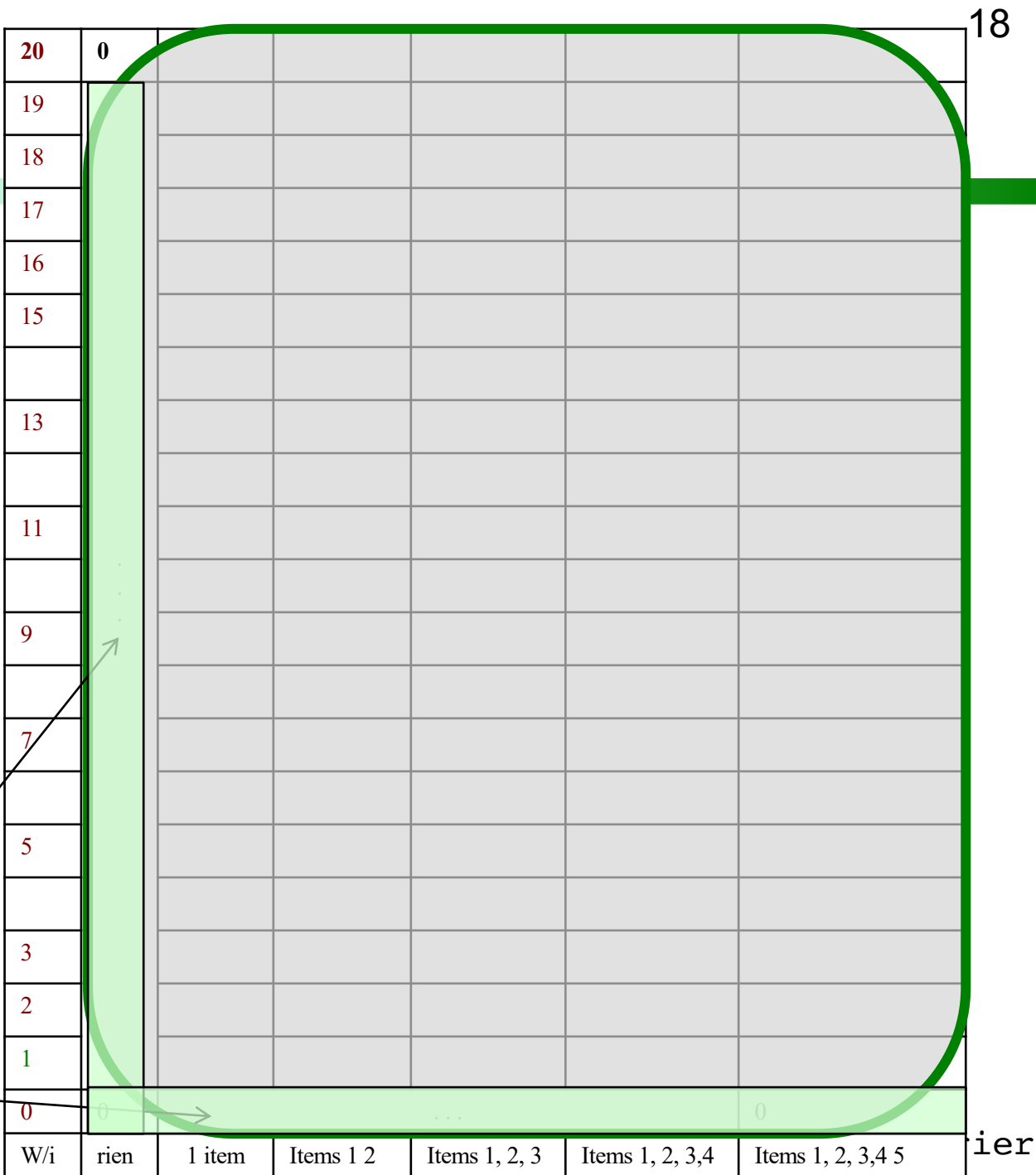
Exécution

$W = 20$

N°	w _i	b _i
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

Valeurs maximales de w

Des zéros



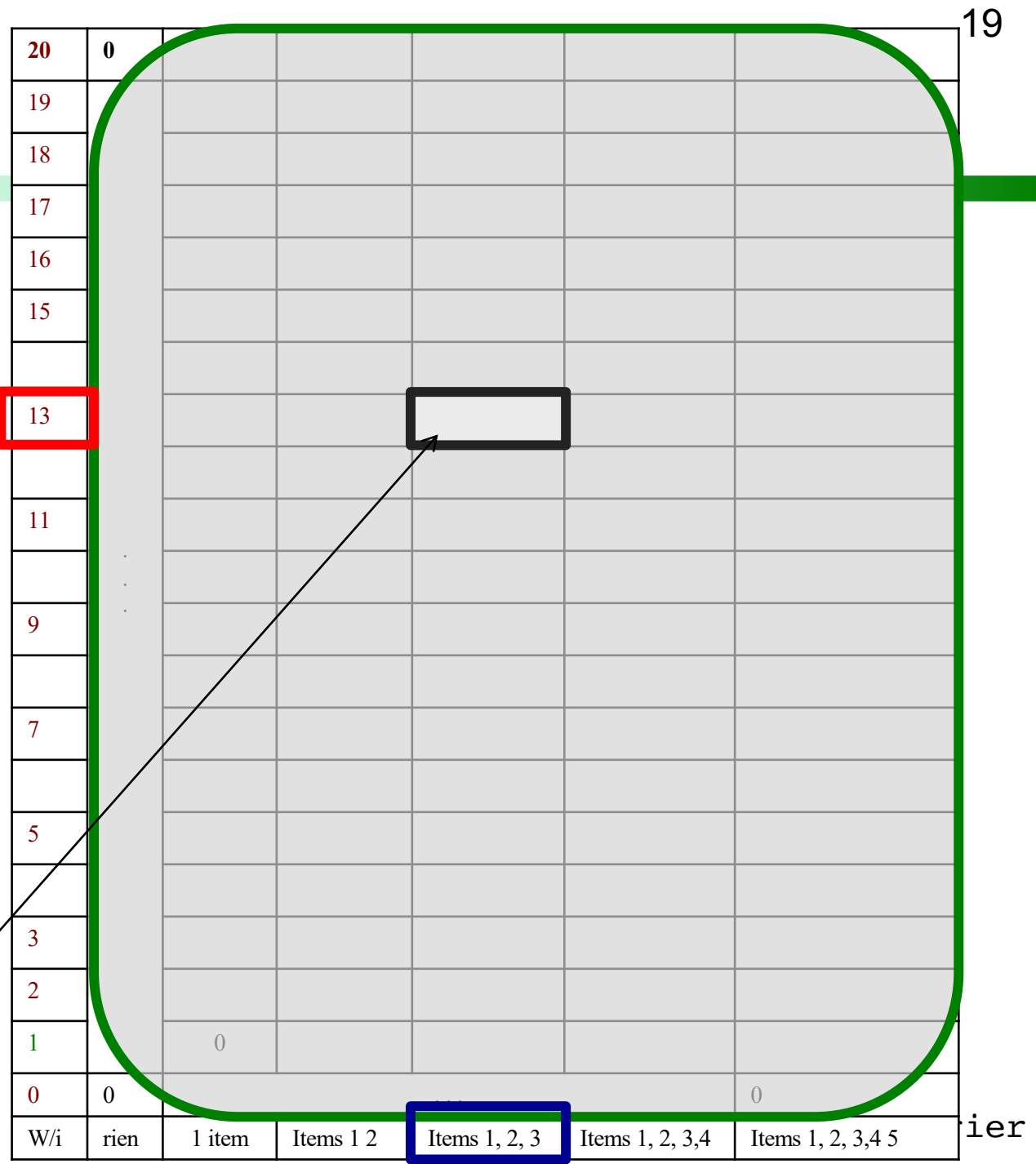
Exécution

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

Valeurs maximales de w

Si la limite est 13 alors le poids maximal avec 3 objets au plus est de



Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=1

w_i=2

w_i > w alors B[i,w]=B[i-1,w]

20	0						20
19							
18							
17							
16							
15							
13							
11							
	⋮						
9							
7							
5							
3							
2							
1	→ 0						
0	0	...					0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

$B[i-1, w-w_i] + b_i$

20	0						21
19							
18							
17							
16							
15							
13							
11							
9							
7							
5							
3							
2							
1							
0	0						
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier

Exemple

W = 20

N°	w _i	b _i
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

$B[i-1, w-w_i] + b_i$

20	0						22
19							
18							
17							
16							
15							
13							
11							
	⋮						
9							
7							
5							
3		3					
2		3					
1		0					
0	0	...				0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

$B[i-1,w-2]+b_i$

Pour tout w

20	0	3					23
19		3					
18		3					
17							
16							
15							
13							
11		...					
		...					
9							
7							
5							
		3					
3		3					
2		3					
1		0					
0	0	...				0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

20	0	3					24
19		3					
18		3					
17							
16							
15							
13							
11		.					
		.					
		.					
9							
7							
5							
3		3					
2		3					
1		0					
0	0	...				0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=1
wi=3
wi > w alors B[i,w]=B[i-1,w]

20	0	3					25
19		3					
18		3					
17							
16							
15							
13							
11		.					
		.					
		.					
9							
7							
5							
3		3					
2		3					
1		0	→0				
0	0	...				0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

$w=2$

$w_i=3$

$\max(\underline{B[i-1,w]}, B[i-1,w-w_i]+b_i)$

20	0	3					26
19		3					
18		3					
17							
16							
15							
13							
11		.					
		.					
		.					
9							
7							
5							
		3					
3		3					
2		3 → 3					
1		0	0				
0	0	...				0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=3

w_i=3

max(B[i-1,w], B[i-1,w-w_i]+b_i)

20	0	3				
19		3				
18		3				
17						
16						
15						
13						
11		.				
		.				
		.				
9						
7						
5						
		3				
3		3	4			
2		3	3			
1		0	0			
0	0	...				0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=4

w_i=3

max(B[i-1,w], B[i-1,w-w_i]+b_i)

20	0	3					28
19		3					
18		3					
17							
16							
15							
13							
11		.					
		.					
		.					
9							
7							
5							
		3	4				
3		3	4				
2		3	3				
1		0	0				
0	0	...				0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=5,6, etc

w_i=3

max(B[i-1,w], B[i-1,w-w_i]+b_i)

20	0	3	7			
19		3				
18		3				
17						
16						
15						
13			⋮			
11		⋮				
	⋮					
9						
7						
5			7			
			7			
		3	4			
3		3	4			
2		3	3			
1		0	0			
0	0	...				0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=1,2,3
wi=4

Si $w_i > w$ alors $B[i,w]=B[i-1,w]$

20	0	3	7				30	
19	⋮	3	⋮					
18		3						
17		⋮						
16								
15								
13								
11								
9								
7								
					7			
5					7			
			3	4				
3			3	4 → 4				
2			3	3 → 3				
1			0	0 → 0				
0	0	...				0		
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier	

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=4
wi=4

$B[i,w]= \max(B[i-1,w], \underline{B[i-1,w-w_i]}+b_i)$

20	0	3	7			
19		3				
18		3				
17						
16						
15						
13			⋮			
11		⋮				
	⋮	⋮				
9						
7						
			7			
5			7			
		3	4	5		
3		3	4	4		
2		3	3	3		
1		0	0	0		
0	0	...				0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=5

w_i=4

$B[i,w]=\max(\underline{B[i-1,w]}, B[i-1,w-w_i]+b_i)$

20	0	3	7			
19		3				
18		3				
17						
16						
15						
13			·			
			·			
11		·				
	·	·				
9	·					
7						
			7			
5			7	→ 7		
		3	4	5		
3		3	4	4		
2		3	3	3		
1		0	0	0		
0	0	...				0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=6

w_i=4

$B[i,w]=\max(B[i-1,w], \underline{B[i-1,w-w_i]}+b_i)$

20	0	3	7			
19		3				
18		3				
17						
16						
15						
13			⋮			
11		⋮				
	⋮	⋮				
9						
7						
			7	8		
5			7	7		
		3	4	5		
3		3	4	4		
2		3	3	3		
1		0	0	0		
0	0	...				0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=7

w_i=4

$B[i,w]=\max(B[i-1,w], \underline{B[i-1,w-w_i]}+b_i)$

20	0	3	7			
19		3				
18		3				
17						
16						
15						
13			⋮			
11		⋮				
	⋮	⋮				
9						
7						
5			7	8		
			7	7		
		3	4	5		
3		3	4	4		
2		3	3	3		
1		0	0	0		
0	0	...				0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=8

w_i=4

$B[i,w] = \max(B[i-1,w], \underline{B[i-1,w-w_i]} + b_i)$

20	0	3	7			
19	<div>...</div>	3	<div>...</div>			
18		3				
17						
16						
15						
13						
11						
9						
7						
5						
3						
2						
1						
0	0	...				0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=9, ...

w_i=4

$$B[i,w]=\max(B[i-1,w], \underline{B[i-1,w-w_i]}+b_i)$$

20	0	3	7	12		
19		3				
18		3				
17						
16						
15				...		
			...			
13			...			
11		...				
		...				
9				12		
				9		
7				9		
			7	8		
5			7	7		
		3	4	5		
3		3	4	4		
2		3	3	3		
1		0	0	0		
0	0	...				0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=1..4

w_i=5

Si w_i > w alors B[i,w]=B[i-1,w]

20	0	3	7	12		
19		3				
18		3				
17						
16						
15				⋮		
				⋮		
13			⋮			
			⋮			
11		⋮				
	⋮	⋮				
9				12		
				9		
7				9		
			7	8		
5			7	7		
		3	4	5 → 5		
3		3	4	4 → 4		
2		3	3	3 → 3		
1		0	0	0 → 0		
0	0	...				0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=7

w_i=5

B[i,w]= max(B[i-1,w], B[i-1,w-w_i]+b_i)

20	0	3	7	12			
19	...	3			
18		3					
17							
16							
15							
13							
11							
9				12			
				9			
7				9 → 9			
			7	8	8		
5			7	7	8		
			3	4	5	5	
3			3	4	4	4	
2			3	3	3	3	
1			0	0	0	0	
0	0	...				0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=8

w_i=5

$B[i,w]=\max(B[i-1,w], \underline{B[i-1,w-w_i]}+b_i)$

20	0	3	7	12		
19		3				
18		3				
17						
16						
15				⋮		
				⋮		
13			⋮			
			⋮			
11		⋮				
	⋮	⋮				
9				12		
				9	12	
7				9	9	
			7	8	8	
5			7	7	8	
		3	4	5	5	
3		3	4	4	4	
2		3	3	3	3	
1		0	0	0	0	
0	0	...				0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

W=9,10, etc

w_i=5

$B[i,w]=\max(B[i-1,w], \underline{B[i-1,w-w_i]}+b_i)$

20	0	3	7	12	20		40
19		3					
18		3					
17					⋮		
16					⋮		
15				⋮			
				⋮			
13			⋮			20	
						17	
						17	
11		⋮				16	
	⋮	⋮				15	
9					12	13	
					9	12	
					9	9	
7			7	8		8	
			7	7		8	
5		3	4	5		5	
		3	4	4		4	
3		3	3	3		3	
2		0	0	0		0	
1							
0	0	...				0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=1..8

w_i=9

Si w_i > w alors B[i,w]=B[i-1,w]

20	0	3	7	12	20		41	
19	.	3	
18		3						
17						.		
16								
15								
					20			
13					17			
		17						
11		16						
		15						
9		12	13					
		9	12	12				
7		9	9	9				
		7	8	8	8			
5		7	7	8	8			
		3	4	5	5	5		
3		3	4	4	4	4		
2	3	3	3	3	3			
1	0	0	0	0	0			
0	0	...				0		
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier	

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=9

w_i=9

$B[i,w] = \max(B[i-1,w], B[i-1,w-w_i] + b_i)$

20	0	3	7	12	20	
19		3				
18		3				
17					⋮	
16					⋮	
15				⋮		
				⋮	20	
13			⋮		17	
					17	
11		⋮			16	
	⋮	⋮			15	
9				12	13	13
				9	12	12
7				9	9	9
			7	8	8	8
5			7	7	8	8
		3	4	5	5	5
3		3	4	4	4	4
2		3	3	3	3	3
1		0	0	0	0	0
0	0	...				0
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

W=10,
wi=9

$B[i,w]= \max(B[i-1,w], \underline{B[i-1,w-w_i]}+b_i)$

20	0	3	7	12	20		43
19		3					
18		3			⋮		
17					⋮		
16							
15				⋮			
				⋮	20		
13			⋮		17		
					17		
11		⋮			16		
	⋮	⋮			15	→ 15	
9				12	13	13	
				9	12	12	
7				9	9	+10 9	
			7	8	8	8	
5			7	7	8	8	
		3	4	5	5	5	
3		3	4	4	4	4	
2		3	3	3	3	3	
1		0	0	0	0	0	
0	0	...				0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=11

w_i=9

$B[i,w] = \max(B[i-1,w], B[i-1,w-w_i] + b_i)$

20	0	3	7	12	20		44
19		3					
18		3			⋮		
17					⋮		
16							
15				⋮			
				⋮	20		
13			⋮		17		
					17		
11		⋮			16	→ 16	
	⋮	⋮			15		15
9				12	13		13
				9	12	+10	12
7				9	9		9
			7	8	8		8
5			7	7	8		8
		3	4	5	5		5
3		3	4	4	4		4
2		3	3	3	3		3
1		0	0	0	0		0
0	0	...				0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=12,13, .. 16

w_i=9

$B[i,w]= \max(\underline{B[i-1,w]}, B[i-1,w-w_i]+b_i)$

20	0	3	7	12	20	26	45							
19	<div></div>	3	<div></div>	<div></div>	<div></div>									
18		3												
17		<div></div>				<div></div>		<div></div>	<div></div>					
16										→ 20				
15										→ 20				
										20 → 20				
13										17 → 17				
										17 → 17				
11										16	16			
										15	15			
9										12	13	13		
										9	12	12		
7										9	9	9		
										7	8	8	8	
5										7	7	8	8	
										3	4	5	5	5
3										3	4	4	4	4
2		3				3		3	3	3				
1	0	0	0	0	0									
0	0	...				0								
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	ier							

Exemple

W = 20

N°	wi	bi
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	8
5	9	10

w=17..20

w_i=9

$B[i,w]= \max(B[i-1,w], \underline{B[i-1,w-w_i]}+b_i)$

20	0	3	7	12	20	26	
19	.	3	.	.	.	25	
18		3				23	
17		.				22	
16						20	
15							
					20	20	
13					17	17	
					17	17	
11		.			16	16	
		.			15	15	
9		.		12	13	13	
				9	12	12	
7				9	9	9	
			7	8	8	8	
5			7	7	8	8	
			3	4	5	5	5
3			3	4	4	4	4
2			3	3	3	3	3
1			0	0	0	0	0
0	0	...				0	
W/i	rien	1 item	Items 1 2	Items 1, 2, 3	Items 1, 2, 3,4	Items 1, 2, 3,4 5	

46

Remarques

- Un tableau 2 D est inutile ici puisqu'on ne se réfère qu'à $i-1$ à chaque fois.
- Complexité
 - Spatiale
 - Temporelle
- Comment sauvegarder la solution ?