Baptiste Villeneuve Spé maths | 5/05/20

DM n°3 du confinement : Synthèse.

Exercice 1

ABCD est un carré donc $AD \perp DC$ et $AD = DC$

Par définition, $\widehat{AHM} = 90°$
et $\widehat{BHM} = 90°$

et $\widehat{DKM} = 90°$
et $\widehat{AKM} = 90°$

car H est le projeté orthogonal de M sur AB
et K, le projeté de M sur AD.

$K(x_A, y_M) = (0, y_M)$
et $H(x_M, y_A) = (x_M, 0)$

donc $AH = DK$

Aussi, $DA = DC$ car ABCD est un carré

D'après le théorème de Pythagore :

$$DH^2 = AH^2 + DA^2$$
$$= DK^2 + DC^2$$

et $CK^2 = DK^2 + DC^2$

donc $\boxed{DH = CK}$

On, $DC \perp AD$, donc $\boxed{DH \perp CK}$

Exercice 2

1) $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$$\frac{2(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{2\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)}{bc}$$

$$= \frac{2\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{bc}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+bc-)}{2bc}$$

$$= \frac{a^2-b^2-c^2+2cb}{2bc}$$

$$= \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc} + 1$$

D'après la formule d'Al-Kashi,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(B\hat{A}C)$$

$$\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc} = -\cos(B\hat{A}c)$$

$$\frac{2(p-b)(p-c)}{bc} - 1 = -\cos(B\hat{A}c)$$

$$\boxed{1 - \cos(B\hat{A}C) = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\frac{2p(p-a)}{bc} = \frac{2 \times \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)}{bc}$$

$$= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$$

$$= \frac{-a^2+b^2+c^2+2bc}{2bc}$$

$$= \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} + 1$$

D'après la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos(\widehat{BAC})$$

$$a^2-b^2-c^2 = -2bc\cos(\widehat{BAC})$$

$$-a^2+b^2+c^2 = 2bc\cos(\widehat{BAC})$$

$$\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \cos(\widehat{BAC})$$

$$\frac{2p(p-a)}{bc} - 1 = \cos(\widehat{BAC})$$

$$\boxed{1+\cos(\widehat{BAC}) = \frac{2p(p-a)}{bc}}$$

2) $(1+\cos(\widehat{BAC}))(1-\cos(\widehat{BAC})) = 1^2 - \cos^2(\widehat{BAC})$

$$\cos^2(\widehat{BAC}) = 1 - \frac{2p(p-a)}{bc} \times \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$$

Or, $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$

$$\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$$

$$\sin^2(\widehat{BAC}) = 1-\left(1-\frac{2p(p-a)}{bc} \times \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}\right)$$

$$= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}$$

$$\sin(\widehat{BAC}) = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\boxed{= \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

3) Soit L le projeté orthogonale du point B sur le côté AC.

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BL}{c}$$

$$BL = \sin(\widehat{BAC}) \times c$$

$$S = \frac{BL \times b}{2}$$

$$\boxed{= \frac{\sin(\widehat{BAC}) \times c \times b}{2}}$$

4) La formule de Héron permet de déterminer l'aire d'un triangle quelconque :

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ avec a, b et c les longueurs du triangle et p le demi-périmètre

Elle figure dans "Métrique", le traité de Héron.

Elle utilise les propriété d'un cercle dans un triangle, et exploite les rapports de longueur dans les triangles semblables.

Héron était un ingénieur, mécanicien et mathématicien grec du 1er siècle.

Il a effectué des recherches en mathématique (formule de Héron), et en physique en travaillant sur l'optique notamment.

5) On sait que :

$$\sin(B\hat{A}C) = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

et $$S = \frac{\sin(B\hat{A}C) \times c \times b}{2}$$

donc $$S = \frac{\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \times c \times b}{2}$$

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

6) Soit un triangle ABC avec $AB = 20$ et $AC = BC = 11$

Soit un triangle A'B'C' avec $AB = BC = CB = 10$

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{42}{2} \times \left(\frac{42}{2} - 20\right)\left(\frac{42}{2} - 11\right)\left(\frac{42}{2} - 11\right)}$$

$$\simeq 45{,}8$$

$$S_{A'B'C'} = \sqrt{\frac{30}{2} \times \left(\frac{30}{2} - 10\right) \times \left(\frac{30}{2} - 10\right) \times \left(\frac{30}{2} - 10\right)}$$

$$= 1870$$

les longueurs des côtés du triangle A'B'C' sont inférieurs à ceux du triangle ABC, mais son aire est supérieur, Cette affirmation est donc fausse.

Exercice 3 :

1) $\vec{OB}\begin{pmatrix} x_B - x_0 \\ y_B - y_0 \end{pmatrix}$

$\vec{OB}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\vec{OM} = t\,\vec{OB}$

$\vec{OM} = t\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\vec{OM} = \begin{pmatrix} 5t \\ 10t \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 5t \\ 10t \end{pmatrix}$

$\vec{BN} = t\,\vec{BA}$

$\vec{BN} = t\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$

$\vec{BN} = t\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix} 5t + x_B \\ -10t + y_B \end{pmatrix}$

$N = \begin{pmatrix} 5t + 5 \\ -10t + 10 \end{pmatrix}$

$\vec{MP} = t\,\vec{MN}$

$\vec{MP} = t\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$

$\vec{MP} = t\begin{pmatrix} 5t + 5 - 5t \\ -10t + 10 - 10t \end{pmatrix}$

$\vec{MP} = t\begin{pmatrix} 5 \\ -20t + 10 \end{pmatrix}$

$\vec{MP} = \begin{pmatrix} 5t \\ -20t^2 + 10t \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 5t + x_M \\ -20t^2 + 10t + y_M \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 10t \\ -20t^2 + 20t \end{pmatrix}$$

2) Voir le fichier geogebra en pièce-jointe.

3) On peut conjecturer que P appartient toujours à la droite MN

4) Soit $f(x)$ la fonction définissant L.

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$
$$f(x) = a(x-5)^2 + 5$$

Or, $f(0) = 0$

donc $a(0-5)^2 + 5 = 0$

$$25a = -5$$
$$a = -\frac{5}{25}$$
$$= -\frac{1}{5}$$

donc $\boxed{f(x) = -\frac{1}{5}(x-5)^2 + 5}$

5) $f(x_p) = f(10t)$

$$= -\frac{1}{5}(10t-5)^2 + 5$$

$= -\frac{1}{5}(100t^2 + 25 - 100t) + 5$

$= -20t^2 - 5 + 20t + 5$

$= -20t^2 + 20t$

$= y_P$

Pour tout réel t de $[0;1]$, le point P appartient donc bien à (L)

6) L'équation de la tangeante à la courbe L en O est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Or, $(x^n)' = nx^{n-1}$

donc $f'(x) = \left(-\frac{1}{5}(x-5)^2 + 5\right)'$

$= \cancel{-\frac{1}{5}x + \frac{5}{5}}$

$= \left(-\frac{1}{5}(x^2 + 25 - 10x) + 5\right)'$

$= \left(-\frac{x^2}{5} - 5 + 2x + 5\right)'$

$= -\frac{2x}{5} + 2.$

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$= \left(-\frac{2\times 0}{5} + 2\right) \times x + \left(-\frac{1}{5}(0-5)^2 + 5\right)$

$= 2x$

L'équation de la tangeante à la courbe L en O

est donc :

$$y = 2x$$

L'équation de la droite OB est :

$$y = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} x + 0$$

$$= \frac{10}{5} x + 0$$

$$= 2x$$

L'équation de la tangeante au point O est égale à l'équation de la droite (OB)

La droite OB est donc tangeante à L au point O.

L'équation de la tangeante à la courbe L en A est :

$$y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$$

$$= \left(-\frac{2x_A}{5} + 2\right)(x - 10) + \left(-\frac{1}{5}(x_A - 5)^2 + 5\right)$$

$$= -2\ (x - 10) + \left(-\frac{1}{5}(100 + 25 - 100) + 5\right)$$

$$= -2x + 20 - 5 + 5$$

$$= -2x + 20$$

L'équation de la droite AB est :

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + b$$

$$y = \frac{10 - 0}{5 - 10} x + b$$

$$y = -2x + b$$

$$y_B = -2x_B + b$$
$$10 = -2 \times 5 + b$$
$$b = 20$$

Donc l'équation de la droite (AB) ~~mont~~ est :

$$y = 2x + 20$$

Elle est égale à l'équation de la tangente à la courbe L en A

La droite (AB) est donc tangente à L en A.

7) le coefficient directeur de (MN) est :

$$\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{-10t + 10 - 10t}{5t + 5 - 5}$$

$$\boxed{= -4t + 2}.$$

Exercice 4 :

La colline peut être représenté par une fonction poly-nomiale de degré 2 :

$$y = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

L'ordonné du maximum est 500 donc $\beta = 500$ m. et l'abscisse de ce maximum est : $700 + \frac{1000}{2} = 1200$ m

Lorsque $x = 700$, $y = 0$ donc

$$0 = a(700 - 1200)^2 + 500$$

donc $a = -\frac{1}{500}$

donc $y = -\frac{1}{500}(x - 1200)^2 + 500$

$$y = -\frac{1}{500}\left(x^2 - 2400x + 1200^2\right) + 500$$

$$\boxed{y = -\frac{x^2}{500} + \frac{24x}{5} - 2380}$$

L'équation de la droite représentant la lumière du phare est :

$$y = ax + b \quad \text{avec } b = 20$$

Le faisceau lumineux coupe donc la colline lorsque :

$$-\frac{x^2}{500} + \frac{24x}{5} - 2380 = ax + 20$$

$$\frac{x^2}{500} + \left(a - \frac{24}{5}\right)x + 2400 = 0 \quad (1)$$

Les racines de l'équation (1) correspondent aux abscisses pour lesquels les fonctions sont sécantes
On cherche 1 seul point donc $\Delta = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow b^2 = 4ac$

$\Leftrightarrow \left(a - \frac{24}{5}\right)^2 = 4 \times 2400 \times \frac{1}{500}$

$\Leftrightarrow a - \frac{24}{5} = \sqrt{19,2}$ ou $a - \frac{24}{5} = -\sqrt{19,2}$

$\Leftrightarrow a \approx 9,18$ ou $a \approx 0,42$

Donc la racine de (1) est $x_1 = \frac{-b}{2a}$

$= \frac{-\left(a - \frac{24}{5}\right)}{2 \times \frac{1}{500}}$

donc $x_1 = -1095\,m$
ou $x_1 = 1095\,m$ $\quad$ x doit être positif donc $\boxed{x_1 = 1095\,m}$

L'altitude du point de la colline le plus élevé que peut éclairer le phare est donc :

$y_1 = -\frac{1}{500}(1095 - 1200)^2 + 500$

$\boxed{y_1 \approx 478\,m.}$

Exercice 5

1) a_1 et b_1 valent 0,5 car la probabilité qu'un joueur joue au jeu A ou B lors de sa première partie est de 0,5.

2) Soit a^- la probabilité que la plateforme propose de rejouer une partie de type A

Soit b^- la probabilité que la plateforme propose de rejouer une partie de type B.

$$a_2 = (a_1 \cap a^-) \cup (b_1 \cap \overline{b^-})$$

$$a_2 = 0,5 \times 0,8 + 0,5 \times 0,3.$$

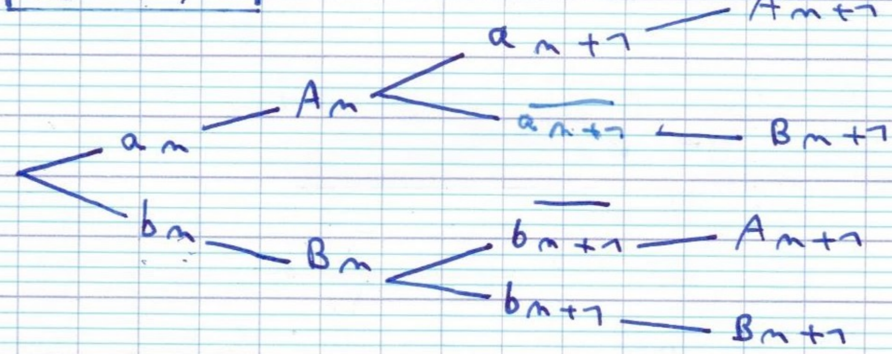
$$\boxed{a_2 = 0,55}$$

$$b_2 = \bar{a}_2$$

$$b_2 = 1 - 0,55$$

$$\boxed{b_2 = 0,45}$$

3)



4) $a_{n+1} = (a_n \cap a^-) \cup (b_1 \cap \overline{b^-})$

$= a_n \times 0,8 + (1 - a_n) \times 0,3$

$= 0,5 a_n + 0,3$

5) $a_{n+1} - a_n = 0,5 a_n + 0,3 - a_n$
$= -0,5 a_n + 0,3$

$-0,5 a_n + 0,3 = 0$
$a_n = 0,6$

donc $-0,5 a_n + 0,3 \geq 0$ car $0 \leq a_n \leq 0,6$.

6) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1} - 0,6}{a_n - 0,6}$
$= \frac{0,5 a_n + 0,3 - 0,6}{a_n - 0,6}$
$= \frac{0,5 a_n - 0,3}{2(0,5 a_n - 0,3)}$
$\boxed{= 0,5}$ Le quotient est constant, la suite est géométrique.

la raison est donc 0,5
Le terme initiale est : $u_1 = a_1 - 0,6$
$= -0,1$

7) $u_n = a_n - 0,6$
$a_n = u_n + 0,6$
$= -0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,6$

8) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,6) = 0,6$

d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6.}$

9) La publicité qui sera la plus vue est celle des parties de type A car a_n est constamment supérieur à 0,5 et tend vers 0,6 ; tandis que b_n est constamment inférieur à 0,5 et tend vers 0,4. Les parties ont plus de chance d'être de type A.