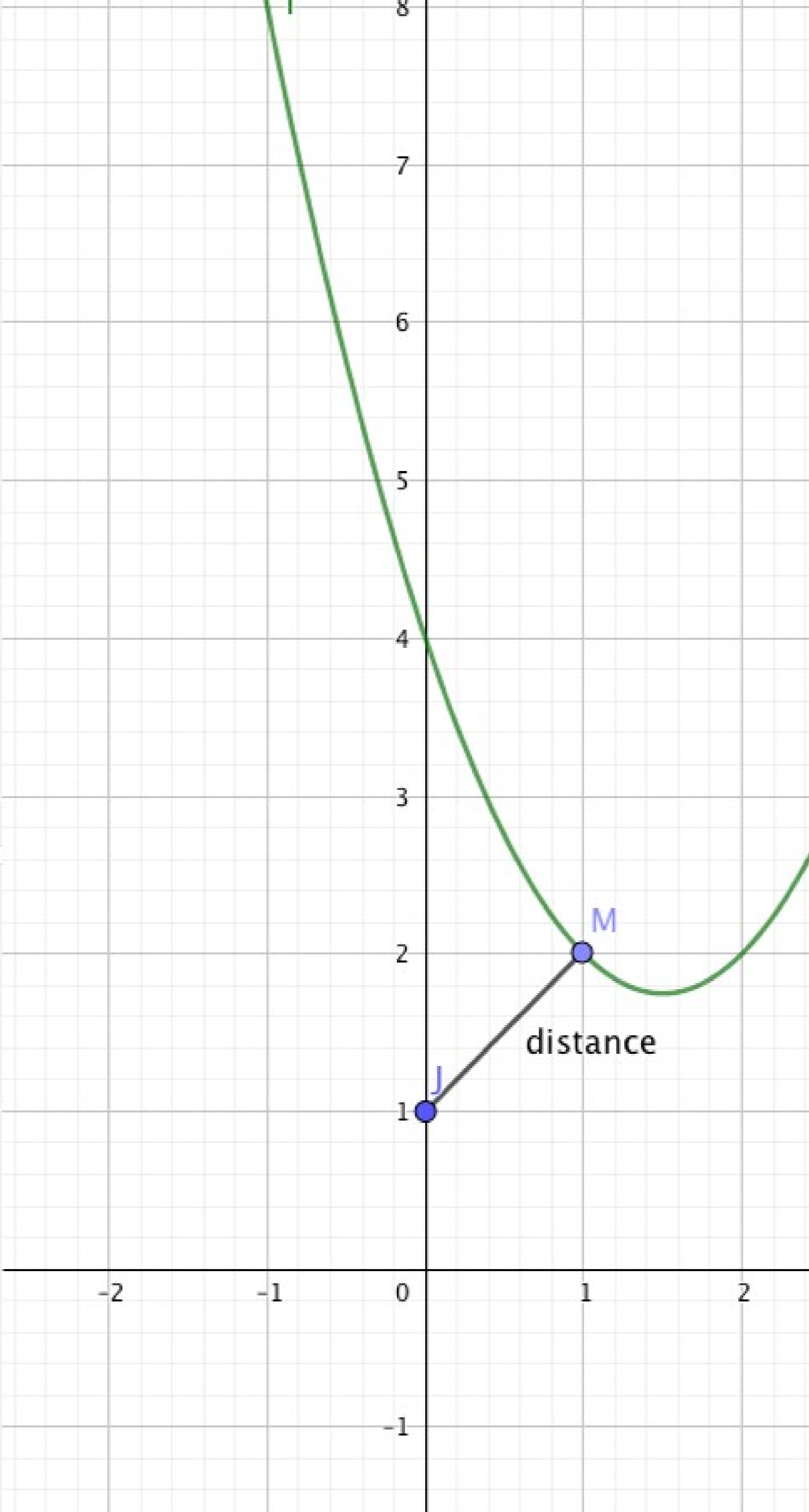
on
= x x − 3 x +

(0, 1)
(0.99, 2.01)
nt
ance = 1.41



Baptiste Villeneuve	23/04/20
Feuille 1 DM n°2 du confinement.	

1)

2) On peut calculer la distance entre 2 points dans un repère grâce à Pythagore.

$$d(x) = \sqrt{(x - x_J)^2 + (y_M - y_J)^2}$$

$$= \sqrt{(x-0)^2 + ((x^2 - 3x + 4) - 1)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x^3 + 9x^2 - 9x + 3x^2 - 9x + 9}$$

$$= \sqrt{x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9}.$$

3) Pour que la distance soit minimale, il faut que la dérivée au point en question soie égale à 0

Ce n'est cependant pas suffisant car il peut exister des maximums et d'autres minimum, pour lesquelles la dérivée vaut aussi 0

4) $A(x) = 4x^3 - 18x^2 + 32x - 18$

$A(1) = 4 \times 1^3 - 18 \times 1^2 + 32 \times 1 - 18$

$A(1) = 0$

1 est bien racine de ce polynome

5) $A(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$

$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

Or, $A(x) = 4x^3 - 18x^2 + 32x - 18$

donc $\boxed{\begin{array}{l} a = 4 \\ c = 18 \end{array}}$

$b - a = -18$

$b = -18 + a$

$b = -18 + 4$

$\boxed{b = -14}$

6)

$(x-1)(4x^2 - 14x + 18) = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 14x + 18 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-14)^2 - 4 \times 4 \times 18$

$= -92$

$\Delta < 0$

Pas de racine

2/14

$x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$4x^2-14x+18$		$+$		$+$	
$(x-1)(4x^2-14x+18)$		$-$	0	$+$	

Donc $A(x) > 0$ lorsque $x \in]1 ; +\infty[$

$A(x) < 0$ lorsque $x \in]-\infty ; 1[$

et $A(x) = 0$ lorsque $x = 1$

1) $d(x) = \sqrt{x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9}$

Plus $d(x)$ est petit, plus la distance entre J et M est courte : il faut donc trouver le minimum de $d(x)$

Or, la valeur de x lorsque

$\sqrt{x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9}$ est minimal

est la même lorsque

$x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9$ est minimal

Il faut calculer la dérivée donc de $d(x)^2$

$$d(x)^2 = \left(\sqrt{x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9}\right)^2$$
$$= x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x - 9$$

Sachant que la dérivée de x^n est nx^{n-1}
On peut en déduire que :

$$d(x)^{2\,\prime} = 4x^3 - 3\times 6x^2 + 2\times 16x^1 - 1\times 18x^0 - 0$$
$$= 4x^3 - 18x^2 + 32x - 18$$

$$d(x)^{2\,\prime} = A(x)$$

Or $A(x) = 0$ lorsque $x = 1$

Donc au point d'abscisse 1, $d(x)^{2\,\prime} = 0$

D'après le tableau de signe de $A(x)$
de la question 6) :

On peut en déduire le tableau de variation de $d(x)^2$:

x	$\cancel{\emptyset}$ $-\infty$	1	$+\infty$
$d(x)^2$	$+\infty$ ↘	$d(1)^2$	↗ $+\infty$

Donc la fonction $d(x)^2$ est minimum au point d'abscisse 1

4/14

Baptiste
Villeneuve
Feuille 2

M a donc 1 pour abscice.

et $y_M = x_M^2 - 3x_M + 4$

$= 1^2 - 3 \times 1 + 4$

$= 2$

$\boxed{\text{Donc } M(1;2)}$

8) Soit f la fonction qui défini la courbe de la parabole $\mathcal{P}$

$(T): y = f'(x_M)(x - x_M) + f(x_M)$

$y = f'(1)(x-1) + (1^2 - 3\times 1 + 4)$

Or, $f(x) = x^2 - 3x + 4$ donc $f(x)' = 2x - 3$

$f(1)' = 2 \times 1 - 3$

$= -1$

Donc l'équation de la tangente T en M est:

$y = -1(x-1) + 2$

$\boxed{y = -x + 3}$

9) (JM) et (T) sont perpendiculaires
En effet, (JM) a pour coefficient directeur:
$\frac{y_J - y_M}{x_J - x_M} = 1$. Le produit du coefficient directeur de (T) par celui de (JM) est -1.

5/14

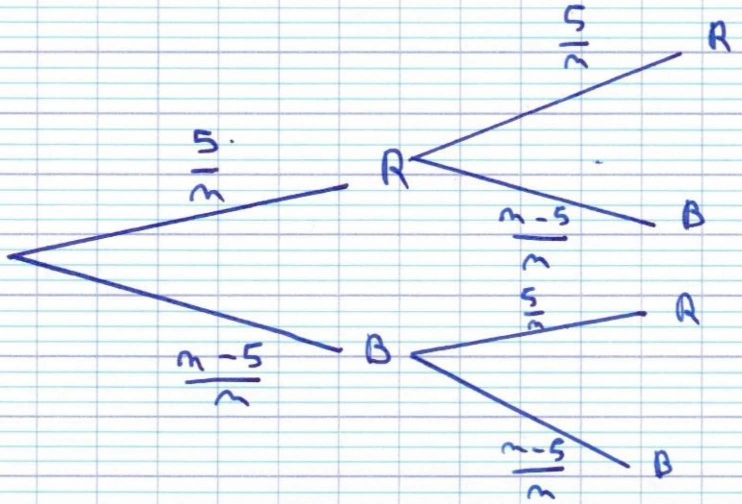
②

A)

1) Soit $P(R)$ la probabilité de tirer une boule rouge et $P(B)$ la probabilité de tirer une boule blanche

$P(R) = \frac{5}{n}$

$P(B) = \frac{n-5}{n}$



$$P_n(A) = \left(P(R) \cap P_R(B)\right) \cup \left(P(B) \cap P_B(R)\right)$$

$$= \frac{5}{n} \times \frac{n-5}{n} + \frac{n-5}{n} \times \frac{5}{n}$$

$$= 2 \times \frac{5n-25}{n^2}$$

$$= \frac{10n-50}{n^2}$$

or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

donc $\left(\frac{10n-50}{n^2}\right)' = \frac{(10n-50)' \times n^2 - (10n-50)(n^2)'}{(n^2)^2}$

$= \frac{10n^2 - (10n-50) \times 2n}{n^4}$

$= \frac{10n^2 - 20n^2 + 100n}{n^4}$

$= \frac{-10n^2 + 100n}{n^4}$

$\left(\frac{10n-50}{n^2}\right)' = 0 \iff -10n^2 + 100n = 0$

$100 = 10n$

$n = 10$

$-10n^2 + 100m = n(-10n + 100)$

n	$-\infty$		0		10		$+\infty$
$-10n^2+100n$		$-$	0	$+$	0	$-$	
n^4		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{-10n^2+100n}{n^4}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
n		$-$	0	$+$		$+$	
$-10n+100$		$+$		$+$	0	$-$	

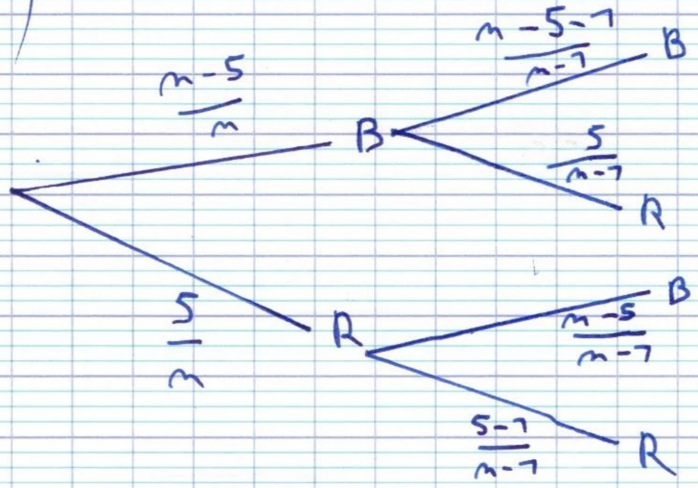
La dérivé de $\frac{10n-50}{n^2}$ vaut 0 en 10

10 est donc un extremum, on déduit du tableau de variation que c'est un maximum le joueur a le plus de chance de réaliser A lorsque n il y a 10 couleurs

7/14

B)

3)



$$P'_n(A) = \left(P(B) \cap P_B(R)\right) \cup \left(P(R) \cap P_R(B)\right)$$

$$P'_n(A) = \left(\frac{n-5}{n} \times \frac{5}{n-1}\right) + \left(\frac{5}{n} \times \frac{n-5}{n-1}\right)$$

$$P'_n(A) = 2 \times \frac{5n-25}{n(n-1)}$$

$$\boxed{P'_n(A) = \frac{10n-50}{n(n-1)}}$$

4) • $P(X=2) = P'_n(A)$

$$= \frac{10n-50}{n(n-1)}$$

• $P(x=-1) = 1 - P'_n(A)$

$$= \frac{n(n-1)}{n(n-1)} - \frac{10n-50}{n(n-1)}$$

$$= \frac{n^2-n-10n+50}{n(n-1)}$$

$$= \frac{n^2-11n+50}{n(n-1)}$$

8/14

Baptiste Villeneuve	23/04/20
Feuille 3 DM n°2 du confinement	

5) Pour que le jeu soit équitable, il faut que $P(X=-1) = 2 \times P(X=2)$ car $2 + (2 \times (-1)) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2 - 11n + 50}{n(n-1)} = 2 \times \frac{10n - 50}{n(n-1)}$$

$$n^2 - 11n + 50 = 20n - 100$$

$$n^2 - 31n + 150 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-31)^2 - 4 \times 1 \times 150$$
$$= 361.$$

donc $n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$= \frac{31 - \sqrt{361}}{2}$$

$$= 6$$

et $n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}$

$$= \frac{31 + \sqrt{361}}{2}$$

$$= 25$$

Pour que le jeu soit équitable, il faut donc qu'il y ai 6 ou 25 boules.

③

Soit $h = AB$

D'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = OC^2 - OB^2$
$BC^2 = 4^2 - (AB - OA)^2$
$BC^2 = 16 - (h-4)^2$
$BC^2 = 16 - h^2 - 16^2 + 8h$
$BC = \sqrt{-h^2 + 8h}$
$BC = \sqrt{h(8-h)}$

$$V_{cone} = \frac{Base \times h}{3}$$

$$Base = \pi r^2$$
$$= \pi \times \left(\sqrt{h(8-h)}\right)^2$$
$$= \pi h (8-h)$$

$$V_{cone} = \frac{\pi h (8-h) \times h}{3}$$

$$V_{cone} = \frac{\pi h^2 (8-h)}{3}$$

V_{cone} est maximale lorsque $h^2(8-h)$ est maximale

Or, $(x^n)' = n x^{n-1}$

donc $h^2(8-h) = 8h^2 - h^3$

$$V(h)' = (8h^2 - h^3)'$$
$$= 16h - 3h^2$$
$$= h(16 - 3h)$$

$V(h)' = 0 \iff \begin{cases} h = 0 \\ \text{ou } 16 - 3h = 0 \\ \quad h = \frac{16}{3} \end{cases}$

h	0		$\frac{16}{3}$		8
h	0	$+$		$+$	
$16-3h$		$+$	0	$-$	
$V(h)'$	0	$+$	0	$-$	

Les extremum sont atteint lorsque $h = 0$ et $h = \frac{16}{3}$
D'après le tableau de signe :
lorsque $h = 0$ c'est un minimum
et lorsque $h = \frac{16}{3}$ c'est un maximum.

donc $h = \frac{16}{3}$

et $BC = \sqrt{h(8-h)}$
$= \sqrt{\frac{16}{3}\left(8 - \frac{16}{3}\right)}$
$= \frac{8\sqrt{2}}{3}$

Les dimensions du cône pour que son volume soit maximal sont donc :

$AB = h$

$\boxed{AB = \frac{16}{3}}$ et $\boxed{BC = \frac{8\sqrt{2}}{3}}$

4

Soit H le milieu de AC et H' le milieu de MN, et O le sommet du cône

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AC}{MN} = \frac{OH}{OH'}$$

$$\frac{AC}{1} = \frac{25-L}{25}$$

Selon le théorème de Pythagore, $2c^2 = AC^2$

$$c^2 = \frac{AC^2}{2}$$

$$V_{poutre} = c^2 \times L$$
$$= \frac{AC^2}{2} \times L$$

$$V_{poutre} = \left(\frac{25-L}{25}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times L$$

$$V_{poutre} = \frac{625 + L^2 - 50L}{625} \times \frac{1}{2} \times L$$

$$V_{poutre} = \frac{L^3 - 50L^2 + 625L}{1250}$$

$V_{poutre}(L)$ est maximum lorsque $L^3 - 50L^2 + 625L$ est maximum.

Baptiste Villeneuve	23/04/20
Feuille 4 DM du confinement n° 2	

Soit $f(L) = L^3 - 50L^2 + 625L$

$f'(L) = 3L^2 - 100L + 625$

$f'(L) = 0 \iff 3L^2 - 100L + 625 = 0$

Or, $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-100)^2 - 4 \times 3 \times 625$

$= 2500$

donc $L_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{100 - \sqrt{2500}}{6}$

$= \frac{25}{3}$

et $L_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{100 + \sqrt{2500}}{6}$

$= 25$

$f(L)$ a donc 2 extrémum, en $\frac{25}{3}$ et en 25.

$f'(L) = a(L - L_1)(L - L_2)$

L	0		$\frac{25}{3}$		25
$L - L_1$		$-$	0	$+$	
$L - L_2$		$-$		$-$	0
$f'(L)$		$+$	0	$-$	0

$V(L)$ atteind donc son maximum lorsque $\boxed{L = \frac{25}{3}}$

La gouttière aura alors atteint son volume maximale.

14/14.