

向量代数与空间解析几何

Didnelpsun

目录

1	向量代数	1
1.1	向量及其表达形式	1
1.2	向量运算	1
1.2.1	数量积	1
1.2.2	向量积	1
1.2.3	混合积	2
1.3	向量方向角与方向余项	2
2	空间解析几何	2
2.1	平面方程	2
2.2	直线方程	3
2.3	位置关系	3
2.3.1	直线关系	3
2.3.2	平面关系	4
2.3.3	直线与平面关系	4
2.3.4	距离	4
2.4	空间曲线	5
2.4.1	表达式	5
2.4.2	空间曲线在坐标面投影	5
2.5	空间曲面	5
2.5.1	曲面方程	5
2.5.2	二次曲面	5
2.5.3	柱面	6
2.5.4	旋转曲面	6

3 场论初步	7
3.1 方向导数	7
3.2 梯度	8
3.3 方向导数与梯度关系	8
3.4 散度与旋度	8

该部分的内容服务于后面的多元函数积分学。

1 向量代数

1.1 向量及其表达形式

定义：既有方向又有大小的向量称为**向量**。

向量的相等性体现在大小和方向，与空间位置无关。

向量表达形式为 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ 。

1.2 向量运算

设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均不是零向量。

1.2.1 数量积

称为内积或点积。

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ 。
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$, 则 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$, 其中 θ 为 \vec{a}, \vec{b} 夹角。
- $a \perp b \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a \cdot b = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ 。
- $Prj_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$ 称 a 在 b 上的**投影**。

1.2.2 向量积

也称为外积、叉积。

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$, 其中 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$, 用右手规则确定方向（转向角不超过 π ），其中 θ 为 \vec{a}, \vec{b} 夹角。
- $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$ 或 $\pi \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ 。
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ 。

向量积的计算也可以如此理解，将两个向量上下摆在一起，然后右边再复制一份：

$$\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

，向量积的第一个值就是 2、3 列的行列式值，第二个值就是 3、4 列的行列式值，第三个值就是 4、5 列行列式值，第 1 和第 6 列不用。

1.2.3 混合积

- $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ 。
- 交换两行不改变值： $a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$ 。
- 交换一行改变符号： $a \cdot (b \times c) = -a \cdot (c \times b) = -b \cdot (a \times c) = -c \cdot (b \times a)$ 。
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ 三向量共面。

1.3 向量方向角与方向余项

- \vec{a} 与 x 轴、 y 轴、 z 轴正向的夹角 α 、 β 、 γ 为 \vec{a} 的方向角。
- $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为 \vec{a} 的方向余弦，且 $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$ 。
- $a^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 称为向量 \vec{a} 的单位向量（表示方向的向量）。
- 任意向量 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma) = r(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ， $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为 \vec{r} 的方向余弦， r 为 \vec{r} 的模， $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ， $\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ， $\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ， $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

2 空间解析几何

2.1 平面方程

假设平面的法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$ 。

- 一般式: $Ax + By + Cz + D = 0$ 。
- 点法式: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 。
- 三点式:
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$$
 (平面过不共线的三点)。
- 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (平面过 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ 三点)。

2.2 直线方程

假设直线的方向向量 $\vec{\tau} = (l, m, n)$ 。

- 一般式:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{cases}$$
, 其中 \vec{n}_1 不平行于 \vec{n}_2 。(两个平面的交线, 该直线方向向量 $\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$)
- 点向式 (标准式、对称式): $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ 。(直线上一点与方向向量成比例)
- 参数式:
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$
, $M(x_0, y_0, z_0)$ 为直线上已知点, t 为参数。
- 两点式: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ 。(直线过不同的两点)

2.3 位置关系

2.3.1 直线关系

设 $\vec{\tau}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\vec{\tau}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ 分别为直线 L_1 , L_2 的方向向量。

- $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{\tau}_1 \perp \vec{\tau}_2 \Leftrightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ 。
- $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \vec{\tau}_1 // \vec{\tau}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ 。

2.3.2 平面关系

设平面 π_1 , π_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 。

- $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ 。
- $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ 。

2.3.3 直线与平面关系

设直线 L 的方向向量为 $\tau = (l, m, n)$, 平面 τ 的法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$ 。

- $L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{\tau} // \vec{n} \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ 。
- $L // \pi \Leftrightarrow \vec{\tau} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0$ 。

2.3.4 距离

距离公式:

- 二维点到直线距离: 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离为 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 。
- 三维点到平面距离: 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 。
- 二维平行直线到直线距离: 直线 $Ax + By + C_1 = 0$ 到直线 $Ax + By + C_2 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 。
- 二维非平行直线到直线夹角: 直线 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 到直线 $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 的夹角为 $\cos \theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$)。
- 三维平行平面到平面距离: 平面 $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ 到平面 $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 。(在另一个面上任取一点计算该点到平面距离)

三维点到直线距离: (已知直线 L 一般式方程和点 M_1)

1. 根据 L 一般式方程依次求一阶导得出两个面的法向量 $\vec{\xi}_1$ 、 $\vec{\xi}_2$ 。
2. 使用向量积得出 L 方向向量 $\vec{S} = \vec{\xi}_1 \times \vec{\xi}_2$ 。

3. 在 L 上任意找到一点 M_0 , 计算向量 $\overrightarrow{M_0M_1}$, 计算向量积 $\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}$, 取其模 $|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}|$, 这个模即为三点所成三角形面积的两倍 $2S_{\triangle M_0M_1S}$ 。
4. 求出方向向量 \vec{S} 的模, 所以 $\vec{M_1}$ 到 \vec{S} 的距离 d 可以化为两倍三角形面积 $2S_{\triangle M_0M_1S} = d \cdot |\vec{S}|$ 。
5. 所以 $|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}| = d \cdot |\vec{S}|$, 解得 $d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|}$ 。

2.4 空间曲线

空间曲线某点的切线向量等于该点代入各自导数。

2.4.1 表达式

- 一般式: $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 表示两个曲面的交线。
- 参数方程: $\Gamma: \begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$ 。

2.4.2 空间曲线在坐标面投影

如求曲线 Ω 在 xOy 平面上的投影曲线, 讲 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 中的 z 消去, 得到 $\varphi(x, y) = 0$, 则曲线 Ω 在 xOy 面上的投影曲线包含于 $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 。

2.5 空间曲面

2.5.1 曲面方程

隐式表达式: $F(x, y, z) = 0$, 显式表达式: $z = z(x, y)$ 。

2.5.2 二次曲面

- 球面: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 。
- 椭球面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 。

- 单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 。
- 双叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 。
- 椭圆抛物面: $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ ($p, q > 0$)。(常考旋转抛物面 $x^2 + y^2 = z$)
- 椭圆锥面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 。(常考旋转锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$)
- 双曲抛物面 (马鞍面): $-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ ($p, q > 0$)。(可能考 $z = xy$)

2.5.3 柱面

空间解析几何中一般认为缺少变量的方程为柱面。

是动直线沿定曲线平行移动所形成的曲面。

- 椭圆柱面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (当 $a = b$ 为圆柱面)。
- 双曲柱面: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。
- 抛物柱面: $y = ax^2$ 。

2.5.4 旋转曲面

绕某轴转, 其就不变, 把另外一个字母写成另外两个字母的平方和的开方。

如 $f(x, y) = 0$ 对 x 旋转, 则改为 $f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2})$ 。

是曲线 Γ 绕一条定直线旋转一周所形成的曲面。

给定一条直线 $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$, 其方向向量为 $\vec{\tau}(l, m, n)$, 上有一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 。

现在给定一条曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 。

在 Γ 上找一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 然后再讲 P_1 绕 L 旋转一周得到一个纬圆, 去纬圆上一点 $P(x, y, z)$, 则 P 为旋转曲面上任意一点。

因为 P_1 在曲线 Γ 上, 所以 $F(x_1, y_1, z_1) = 0$, $G(x_1, y_1, z_1) = 0$ 。

同一个纬圆到 L 上的 P_0 距离相等, 既 $|\overrightarrow{P_1P_0}| = |\overrightarrow{PP_0}|$, 即 $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ 。

每一个纬圆的平面与旋转中心 L 的方向向量 $\vec{\tau}$ 垂直, 而 P_1P 在平面上, 所以该连线向量 $\overrightarrow{P_1P} \perp \vec{\tau}$, 即 $l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0$ 。

为了得到旋转曲面面积, 需要消去 x_1, y_1, z_1 , 得到 $H(x, y, z) = 0$ 。

例题: 求曲线 $L: \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面方程。

解: 令 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 在曲线上, 所以 $x_1 - y_1 + 2z_1 - 1 = 0, x_1 - 3y_1 - 2z_1 + 1 = 0$ 。

然后任意一点 $P(x, y, z)$ 到 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的距离与 P_1 到 P_0 距离相同, 取 $P_0(0, 0, 0)$, 则 $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。

两条连线垂直 y 轴, 即 $\overrightarrow{P_1 P} \perp (0, 1, 0)$, 即 $y = y_1$ 。

消去 x_1, y_1, z_1 , 根据 $y = y_1$, 所以 $x_1^2 + z_1^2 = x^2 + z^2$ 。

根据交线方程解得 $x_1 = 2y, z_1 = \frac{1}{2}(1 - y)$ 。

再代入得到 $x^2 + z^2 = (2y)^2 + \frac{1}{4}(1 - y)^2$, 解得 $x^2 - \frac{17}{4}y^2 + z^2 + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} = 0$ 。

3 场论初步

3.1 方向导数

偏导数就是一个函数在坐标轴方向上的变化率, 而方向导数就是函数在某点沿其他特定方向上的变化率。

定义: 设三元函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某空间领域 $U \in R^3$ 内有定义, l 从点 P_0 出发的射线, $P(x, y, z)$ 为 l 上切在 U 内的任一点, 则

$$\begin{cases} x - x_0 = \Delta x = t \cos \alpha \\ y - y_0 = \Delta y = t \cos \beta \\ z - z_0 = \Delta z = t \cos \gamma \end{cases} \quad \text{进行在坐标轴上投影。}$$

以 $t = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ 表示 P 与 P_0 之间的距离。若极限 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(P) - u(P_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{t}$ 存在,

则称此极限为函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 P_0 沿方向 l 的**方向导数**, 记为 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0}$ 。

方向导数计算公式**定理:** 设三元函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微分, 则 $u = u(x, y, z)$ 在点 P_0 处沿任一方向 l 的方向导数都存在, 且 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0} = u'_x(P_0) \cos \alpha + u'_y(P_0) \cos \beta + u'_z(P_0) \cos \gamma$, 其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为方向 l 的方向余弦。

例题: 求函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1, 0)$ 处沿点 $P(1, 0)$ 指向 $Q(2, -1)$ 方向的方向导数。

解：这是一个隐式的三元函数，所以基本上解决方法类似。不过需要将 z 对 xy 求偏导。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{2y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xe^{2y}, \quad \text{代入 } P(1,0), \text{ 得到 } \{1, 2\}。$$

然后求方向余弦，对于 $\overrightarrow{PQ} = (1, -1)$ 方向余弦就是除它的模 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ 。

$$\text{方向导数就是点乘：} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

3.2 梯度

在一个数量场中，函数在给定点处沿不同的方向，其方向导数一般是不相同的。为研究哪个方向的方向导数最大，最大值为多少，增加速度最快，就引入了梯度。

定义：设三元函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处具有一阶偏导数，定义 $\text{grad } u|_{P_0} = (u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0))$ 为函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 P_0 处的**梯度**。

3.3 方向导数与梯度关系

方向导数为梯度 \times 梯度方向余弦。

函数在某点的梯度是一个向量，其方向与取得最大方向导数的方向是一致的，其模就是方向导数最大值。

3.4 散度与旋度

定义：设向量场 $\vec{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ ，则**散度** $\text{div } \vec{A} =$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \text{旋度 } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}。$$