

# 标题

Didnelpsun

## 目录

<b>1</b>	<b>总体与样本</b>	<b>1</b>
1.1	总体定义 . . . . .	1
1.2	样本 . . . . .	1
1.2.1	定义 . . . . .	1
1.2.2	分布 . . . . .	1
<b>2</b>	<b>统计量与分布</b>	<b>1</b>
2.1	统计量 . . . . .	1
2.2	常用统计量 . . . . .	2
2.3	顺序统计量 . . . . .	2
2.3.1	概念 . . . . .	2
2.3.2	性质 . . . . .	2
2.4	三大分布 . . . . .	3
2.4.1	$\chi^2$ 分布 . . . . .	3
2.4.1.1	概念 . . . . .	3
2.4.1.2	性质 . . . . .	3
2.4.2	$t$ 分布 . . . . .	4
2.4.2.1	概念 . . . . .	4
2.4.2.2	性质 . . . . .	4
2.4.3	$F$ 分布 . . . . .	4
2.4.3.1	概念 . . . . .	4
2.4.3.2	性质 . . . . .	5
2.5	正态总体下结论 . . . . .	5

<b>3</b>	<b>参数点估计</b>	<b>6</b>
3.1	概念 . . . . .	6
3.2	方法 . . . . .	6
3.2.1	矩估计法 . . . . .	6
3.2.2	最大似然估计 . . . . .	7
3.2.2.1	定义 . . . . .	7
3.2.2.2	步骤 . . . . .	8
3.3	估计量平均标准 . . . . .	9
3.3.1	无偏性 . . . . .	9
3.3.2	有效性 . . . . .	9
3.3.3	一致性 . . . . .	9
<b>4</b>	<b>参数区间估计与假设检验</b>	<b>10</b>
4.1	区间估计 . . . . .	10
4.1.1	概念 . . . . .	10
4.1.2	正态总体均值的置信空间 . . . . .	10
4.1.2.1	估计 $\mu$ 而 $\sigma$ 已知 . . . . .	10
4.1.2.2	估计 $\mu$ 而 $\sigma$ 未知 . . . . .	11
4.1.2.3	估计 $\sigma^2$ 而 $\mu$ 已知 . . . . .	11
4.1.2.4	估计 $\sigma^2$ 而 $\mu$ 未知 . . . . .	11
4.2	假设检验 . . . . .	12
4.2.1	思想 . . . . .	12
4.2.2	正态总体下的六大检验与拒绝域 . . . . .	13
4.3	两类错误 . . . . .	13

# 1 总体与样本

## 1.1 总体定义

**定义：**研究对象的全体称为总体，组成总体的每一个元素称为个体。

## 1.2 样本

### 1.2.1 定义

**定义：** $n$  个相互独立且域总体  $X$  有相同概率分布的随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  所组成的整体  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  称为来自总体  $X$ ，容量为  $n$  的一个简单随机样本，简称样本。一次抽样结果的  $n$  个具体值  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  称为来自样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的一个观测值或样本值。

在概率论中称为独立同分布，而在数理统计就称为简单随机样本。

### 1.2.2 分布

对于容量为  $n$  的样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  有如下定理：假设总体  $X$  的分布函数为  $F(x)$ （概率密度为  $f(x)$ ，或概率分布为  $p_i = P\{X = x_i\}$ ），则  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的分布函数为  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i)$ 。

对于离散型随机变量联合分布： $F(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\}$ 。

对于连续型随机变量联合概率密度： $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$ 。

# 2 统计量与分布

## 2.1 统计量

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  来自总体  $X$  的一个样本， $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为  $n$  元函数，若  $g$  中不含有任何未知参数，则称  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的一个统计量。若  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为样本值，则称  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的观测值。

## 2.2 常用统计量

- 样本均值:  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 。
- 样本方差:  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 。
- 样本标准差:  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ 。
- 样本  $k$  阶 (原点) 矩:  $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ )。
- 样本  $k$  中心矩:  $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ )。

## 2.3 顺序统计量

### 2.3.1 概念

将样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的  $n$  个观测量按其值从小到大的顺序排列, 得到  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ 。

随机变量  $X_{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 称为第  $k$  顺序统计量, 其中  $X_{(1)}$  是最小顺序统计量, 而  $X_{(n)}$  是最大顺序统计量。

$X_{(n)}$  的分布函数为  $F_{(n)}(x) = [F(x)]^n$ , 概率密度为  $f_{(n)}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x)$ 。

证明:  $F_{(n)}(x) = P\{X_{(n)} \leq x\} = P\{\max\{x_1, \dots, x_n\} \leq x\} = P\{x_1 \leq x, \dots, x_n \leq x\} = P\{x_1 \leq x\} \cdots P\{x_n \leq x\} = F_{(1)}(x) \cdots F_{(n)}(x) = [F(x)]^n$ 。

$X_{(1)}$  的分布函数为  $F_{(1)}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$ , 概率密度为  $f_{(1)}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1}f(x)$ 。

证明:  $F_{(1)}(x) = P\{X_{(1)} \leq x\} = P\{\min\{x_1, \dots, x_n\} \leq x\} = 1 - P\{\min\{x_1, \dots, x_n\} > x\} = 1 - P\{x_1 > x, \dots, x_n > x\} = 1 - P\{x_1 > x\} \cdots P\{x_n > x\} = 1 - [1 - P\{x_1 \leq x\}] \cdots [1 - P\{x_n \leq x\}] = 1 - [1 - F_{(1)}(x)] \cdots [1 - F_{(n)}(x)] = 1 - [1 - F(x)]^n$ 。

### 2.3.2 性质

设总体  $X$  的期望  $EX = \mu$ , 方差  $DX = \sigma^2$ , 样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  取自  $X$ ,  $\bar{X}$  和  $S^2$  分别为样本的均值和方差, 则:

- $EX_i = \mu$ 。
- $DX_i = \sigma^2$ 。

- $E\bar{X} = EX = \mu$ 。
- $D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{1}{n} DX = \frac{\sigma^2}{n}$ 。
- $E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)\right) =$   
 $E\left(\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2\right)\right) = E\left(\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\right) =$   
 $\frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n EX_i^2 - nE\bar{x}^2\right) = \frac{n}{n-1} [(EX_i)^2 + DX_i -$   
 $(E\bar{x})^2 - D\bar{x}] = \frac{n}{n-1} \left(\mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) = DX = \sigma^2$ 。

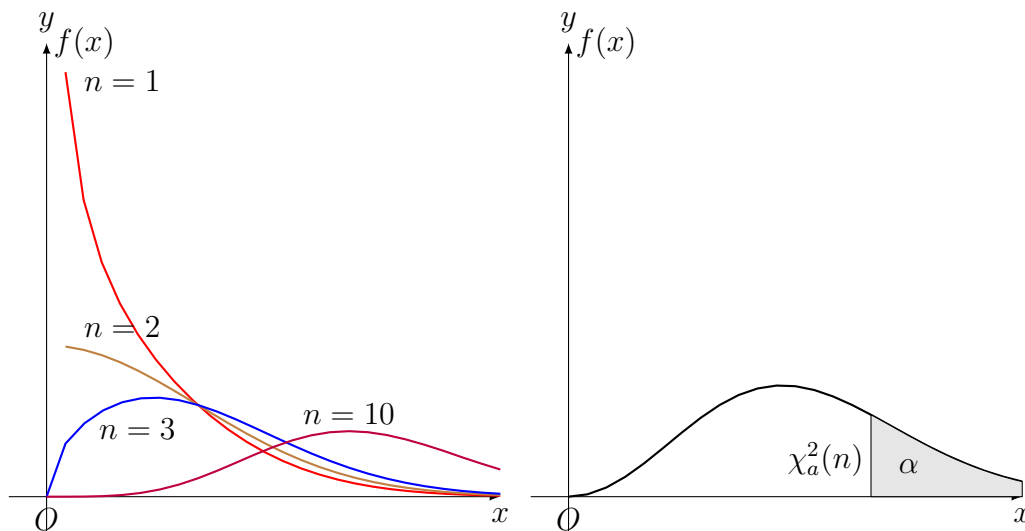
## 2.4 三大分布

### 2.4.1 $\chi^2$ 分布

#### 2.4.1.1 概念

**定义：**若随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立，且都服从标准正态分布，则随机变量  $X = \sum_{i=1}^n X_i^2$  服从自由度为  $n$  的  $\chi^2$  分布，记为  $X \sim \chi^2(n)$ ，特别地  $X_i^2 \sim \chi^2(1)$ 。

对给定的  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) 称满足  $P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(x) dx = \alpha$  的  $\chi_\alpha^2(n)$  为  $\chi^2(n)$  分布的上  $\alpha$  分位点。



#### 2.4.1.2 性质

- 若  $X_1 \sim \chi^2(n_1)$ ,  $X_2 \sim \chi^2(n_2)$ ,  $X_1, X_2$  相互独立，则  $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$ 。
- 一般，若  $X_i \sim \chi^2(n_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )， $X_1, X_2, \dots, X_m$  相互独立，则

$$\sum_{i=1}^m X_i \sim \chi^2 \left( \sum_{i=1}^m n_i \right).$$

- 若  $X \sim \chi^2(n)$ , 则  $EX = n$ ,  $DX = 2n$ 。

## 2.4.2 $t$ 分布

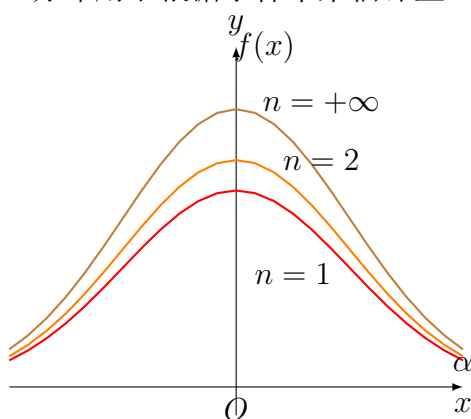
### 2.4.2.1 概念

也称为学生分布。

若随机变量  $X \sim N(0, 1)$ ,  $Y \sim \chi^2(n)$ ,  $XY$  相互独立, 则随机变量  $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$  服从自由度为  $n$  的  $t$  分布, 记为  $t \sim t(n)$ 。

当  $t \rightarrow \infty$  时,  $t$  分布就是标准正态分布。其是偶函数, 所以  $Et = 0$ 。

$t$  分布用于根据小样本来估计呈正态分布且方差未知的总体的均值。



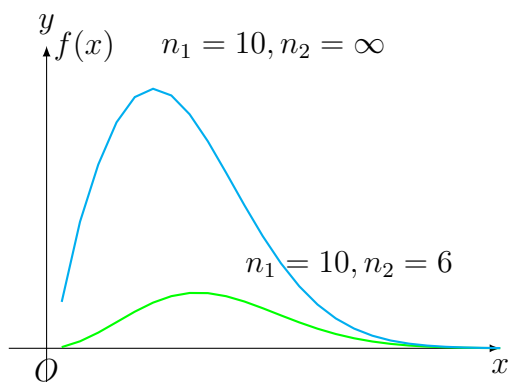
### 2.4.2.2 性质

由  $t$  分布的概率密度  $f(x)$  图形的对称性可知  $P\{t > -t_\alpha(n)\} = P\{t > t_{1-\alpha}(n)\}$ , 所以  $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$ 。

## 2.4.3 $F$ 分布

### 2.4.3.1 概念

若随机变量  $X \sim \chi^2(n_1)$ ,  $Y \sim \chi^2(n_2)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$  服从自由度为  $(n_1, n_2)$  的  $F$  分布, 记为  $F \sim F(n_1, n_2)$ , 其中  $n_1$  为第一自由度,  $n_2$  为第二自由度。



### 2.4.3.2 性质

- 若  $F \sim F(n_1, n_2)$ , 则  $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$ 。
- $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha}(n_2, n_1)$ 。

证明性质二：记  $F \sim F(n_2, n_1)$ 。

$\therefore P\{F > F_\alpha(n_2, n_1)\} = \alpha, P\{F \leq F_\alpha(n_2, n_1)\} = 1 - \alpha$ 。

取倒数：  $P\left\{\frac{1}{F} \geq \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}\right\} = 1 - \alpha$ 。

又根据性质 1：  $\frac{1}{F} \sim F(n_1, n_2)$ ,  $P\left\{\frac{1}{F} \geq F_{1-\alpha}(n_1, n_2)\right\} = 1 - \alpha$ 。

即  $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha}(n_2, n_1)$ 。

## 2.5 正态总体下结论

设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的一个样本,  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  分别是样本的均值和方差, 则:

1.  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ , 即  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 。
  2.  $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ 。
  3.  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$  ( $\mu$  未知时, 在 2 中用  $\bar{X}$  代替  $\mu$ )。
  4.  $\bar{X}$  与  $S^2$  相互独立,  $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$  ( $\sigma$  未知时在 1 中用  $S$  代替  $\sigma$ )。
- 进一步有  $\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$ 。

设  $X_1, X_2, \dots, X_m$  是来自正态总体  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  的一个样本, 设  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  是来自正态总体  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  的一个样本,  $X_i$  和  $Y_i$  相互独立,  $\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$ ,  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ ,  $S_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$ ,  $S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$  分别是样本  $X_i$ ,  $Y_i$  的均值和方差,  $S_w = \frac{1}{m+n-2} [(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2] = \frac{1}{m+n-2} [\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2]$ , 则:

1.  $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1)$ 。(根据期望和方差性质)
2.  $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1, n-1)$ 。
3. 当  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  时,  $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$ 。

### 3 参数点估计

#### 3.1 概念

**定义:** 设总体  $X$  的分布函数为  $F(x; \theta)$ , 其中  $\theta$  为一个未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是取自总体  $X$  的一个样本。由样本构造一个适当的统计量  $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  作为参数  $\theta$  的估计, 称统计量  $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为  $\theta$  的**估计量**, 一般记为  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 。

如果  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是样本的一个观察值, 将其代入估计量  $\hat{\theta}$  中得到值  $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 并且此值作为未知参数  $\theta$  的参数值, 统计值称这个值为未知参数  $\theta$  的**估计值**。

建立一个适当的统计量作为未知参数  $\theta$  的估计量并以相应的观察值作为未知参数估计值的问题, 就是参数  $\theta$  的**点估计问题**。

#### 3.2 方法

##### 3.2.1 矩估计法

使用替换思想, 用样本矩来估计总体矩。

1. 写出总体  $k$  阶矩  $\mu_k = E(X^k)$ , 其中  $\mu$  含有参数  $\theta$ 。



2. 写出样本  $k$  阶矩  $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ ,  $A_k$  只与样本有关。

3. 令总体  $k$  阶矩 = 样本  $k$  阶矩, 即  $E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ , 就得到了  $\theta$  的方程。

**例题:** 来自总体的  $X$  的简单随机样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 总体  $X$  的概率分布为  $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2\theta & \theta & 1-3\theta \end{pmatrix}$ , 其中  $0 < \theta < \frac{1}{3}$ , 求参数  $\theta$  的矩估计量。

解: 令  $\bar{X} = EX$ , 即  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = (-1)2\theta + 0\theta + 2(1-3\theta) = 2-8\theta$ 。

所以  $\hat{\theta} = \frac{2-\bar{X}}{8}$ 。

**例题:** 来自总体的  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} (1+\theta)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 其中  $\theta > -1$  为未知参数, 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的样本容量为  $n$  的简单随机样本, 求  $\theta$  的矩估计量。

解: 令  $\bar{X} = EX$ ,  $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^1 x(1+\theta)x^\theta dx = (1+\theta) \frac{x^{\theta+2}}{\theta+2} \Big|_0^1 = \frac{1+\theta}{2+\theta}$ 。

解得  $\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$ 。

### 3.2.2 最大似然估计

#### 3.2.2.1 定义

对未知参数  $\theta$  进行估计时, 在该参数可能取值的范围  $I$  内选取, 使得样本获得次观测值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的概率最大的参数值  $\hat{\theta}$  作为  $\theta$  的估计, 这样的  $\hat{\theta}$  最有利于  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的出现。

设总体  $X$  是离散型, 其概率分布为  $P\{X=x\} = p(x; \theta)$ ,  $\theta \in I$ ,  $\theta$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为  $X$  的一个样本, 则  $X_1, X_2, \dots, X_n$  取值为  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的概率为  $P\{X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n\} = \prod_{i=1}^n P\{X_i=x_i\} = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$ 。显然这个概率值为  $\theta$  的函数, 记为  $L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$ 。称  $L(\theta)$  为样本的似然函数。

**定义:** 若存在  $\hat{\theta} \in I$ , 使得  $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in I} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ , 则称  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为参数  $\theta$  的最大似然估计, 对应的统计量  $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  称为参数  $\theta$  的最大似然估计量。

同理若总体  $X$  为连续型随机变量, 其概率密度为  $f(x; \theta)$ ,  $\theta \in I$ , 则样本的似然函数为  $L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ .

**定义:** 若存在  $\hat{\theta} \in I$ , 使得  $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{\theta \in I} \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ , 则称  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为参数  $\theta$  的最大似然估计, 对应的统计量  $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  称为参数  $\theta$  的最大似然估计量。

### 3.2.2.2 步骤

1. 写出样本的似然函数。  $L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  或  $\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 。
2. 如果  $p(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  或  $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  关于  $\theta_i$  可微, 则令  $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} = 0$  或  $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i} = 0$ 。由于  $L(\theta)$  是乘积形式, 且  $\ln x$  单调增, 所以  $L(\theta)$  域  $\ln L(\theta)$  在同一  $\theta$  处取极值, 所以更多采用后面一种对数似然方程组来解。求得  $\theta_i$  的最大似然估计量为  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ )。
3. 如果  $p(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  或  $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  不可微, 或似然方程组无解, 则应由定义用其他方法求  $\hat{\theta}$ , 如当  $L(\theta)$  为  $\theta$  的单调函数时,  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的取值上限或下限。

即将概率密度或概率分布连乘, 然后取对数, 再求导令其为 0 解出  $\hat{\theta}$ 。

**例题:** 来自总体的  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} (1+\theta)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 其中  $\theta > -1$  为未知参数, 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的样本容量为  $n$  的简单随机样本, 求  $\theta$  的最大似然估计量。

解: 这是上面的矩估计的题目延伸。

首先  $L(\theta) = (1+\theta)x_1^\theta \cdot (1+\theta)x_2^\theta \cdots = (1+\theta) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^\theta$ 。

取对数  $\ln L(\theta) = n \ln(1+\theta) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i$

对其求导:  $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{1+\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$ , 解得  $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1$ 。

最大似然估计量为  $-\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} - 1$ 。

**注意:** 估计值用小写  $x$ , 估计量用大写  $X$ 。

### 3.3 估计量平均标准

不同的估计法所产生的估计量有所差异，需要有一套标准来评判估计量。

#### 3.3.1 无偏性

**定义：**若参数  $\theta$  的估计量  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  对一切  $n$  及  $\theta \in I$ ，有  $E\hat{\theta} = \theta$ ，则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的无偏估计量。

**例题：**设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是正态总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本，为使  $D = k \sum_{i=1}^n (X_{i+1} - X_i)^2$  称为总体方差  $\sigma^2$  的无偏估计量，求  $k$ 。

解：已知总体方差为  $\sigma^2$ ，所以代入：

$$ED = \sigma^2 = kE\left(\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2\right) = kE\left(\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1}^2 - 2X_i X_{i+1} + X_i^2)\right)。$$

已知样本方差  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$ 。所以为什么样本方差要除以  $n-1$  而不是  $n$ ？可以利用无偏性来证明。

证明：根据方差  $DX_i = EX_i^2 - E^2 X_i$ ，从而  $EX_i^2 = DX_i + E^2 X_i = \sigma^2 + \mu^2$ ，类似  $D\bar{X} = E(\bar{X}^2) - (E\bar{X})^2$ ， $D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ 。

$$\therefore E(\bar{X}^2) = D\bar{X} + (E\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2。$$

所以对样本方差求期望： $ES^2 = E\left(\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2\right)\right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right) = \frac{1}{n-1} \left(n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right) = \sigma^2$ 。

#### 3.3.2 有效性

也称为最小方差性。只有同样的无偏性才能比较有效性。

**定义：**设  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  与  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$  都是  $\theta$  的无偏估计量，若  $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ ，则  $\hat{\theta}_1$  比  $\hat{\theta}_2$  有效。

$$EX_i^2 = EX_{i+1}^2 = (EX_{i+1})^2 + DX_{i+1} = \mu^2 + \sigma^2, 2EX_i EX_{i+1} = 2(EX_i)^2 = 2\mu^2。$$

$$\text{代入：} = k \sum_{i=1}^{n-1} (2\mu^2 + 2\sigma^2 - 2\mu^2) = 2k\sigma^2(n-1) = \sigma^2。 \text{解得 } k = \frac{1}{2(n-1)}。$$

#### 3.3.3 一致性

也称为相合性。

**定义：**设  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为未知参数  $\theta$  的估计量，若对任意  $\epsilon > 0$ ，有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon\} = 1$ ，即  $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta (n \rightarrow \infty)$ ，则称  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的一致估计量（相合估计量）。

## 4 参数区间估计与假设检验

区间估计和假设检验都是基于小概率事件基本上不可能发生的情况。

### 4.1 区间估计

区间估计是根据样本估计总体期望  $\mu$  所在的区间。有两个参数，一个是区间长度，一个是落入概率。

#### 4.1.1 概念

**定义：**已知从总体  $X$  中取出一部分样本  $X_n$ ，则这些样本的平均值  $\bar{X}$  不一定等于  $X$  的期望即应该的平均值  $\mu$ ，但是其之间的差距应该不大，即差距较小的概率较大，从而表示为  $P(|\bar{X} - \mu| < \Delta) = 1 - \alpha$ ， $\alpha$  为**显著性水平**，其一般是一个较小的正数。而  $1 - \alpha$  称为**置信度**或**置信水平**。

求置信区间的枢轴变量法：

1. 找到与待估计参数  $\theta$  有关的统计量  $T$ 。（ $T$  一般是  $\theta$  的点估计）
2. 找到一个函数  $I = I(T, \theta)$ ， $T$  为已知常量， $\theta$  为未知参数，其分布  $F$  已知（正态、 $\chi^2$ 、 $t$ 、 $F$ ）且与  $\theta$  无关，则  $I$  为**枢轴变量**。
3. 给定  $1 - \alpha$ ，确定  $F$  上的上  $\frac{\alpha}{2}$  分位数  $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ，上  $1 - \frac{\alpha}{2}$  分位数  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ，则  $P\{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq I(T, \theta) \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1 - \alpha$ 。
4. 求出  $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$  是参数  $\theta$  的置信度为  $1 - \alpha$  的区间估计，则区间  $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$  包含参数  $\theta$  的概率为  $1 - \alpha$ 。

#### 4.1.2 正态总体均值的置信空间

##### 4.1.2.1 估计 $\mu$ 而 $\sigma$ 已知

假设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ （若不服从正态分布就用中心极限定理来解决）。

即  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ，规范化后记枢轴变量  $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = U$ ，则  $U \sim N(0, 1)$ 。

又中间面积为  $1 - \alpha$ ，得到两端面积  $\frac{\alpha}{2}$ 。

得到上  $\alpha$  分位数  $U_{\frac{\alpha}{2}}$ ，所以  $P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq U_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$ 。

左边解得  $P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$ 。

解得  $\mu \in [\bar{X} - U_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + U_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ 。

这个  $\mu$  所处的区间就是**置信区间**，区间上限就是**置信上限**，区间下限就是**置信下限**。

#### 4.1.2.2 估计 $\mu$ 而 $\sigma$ 未知

当  $\sigma$  未知的时候就无法根据  $\sigma$  求出置信区间了，所以根据正态总体下的结论，用样本方差  $S$  代替方差  $\sigma$ ，且  $\frac{(\bar{X} - \mu)}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 。

令枢轴变量  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = t$ ，所以  $t \sim t(n-1)$ 。同样  $t$  分布图形的中间面积  $1 - \alpha$ ，则两边面积为  $\frac{\alpha}{2}$ 。

可得上  $\alpha$  分位点  $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ ，所以  $P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| \leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1 - \alpha$ ，

左边解得  $P\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1 - \alpha$ 。

解得  $\mu \in [\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]$ 。

#### 4.1.2.3 估计 $\sigma^2$ 而 $\mu$ 已知

由于需要利用  $\mu$  来估计  $\sigma^2$ ，所以令枢轴变量  $\chi = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ 。

所以  $P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n) \leq \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right) = 1 - \alpha$ ，由于  $\chi^2$  分布的图形是不对称的，所以上下限都需要单独查出。

解得  $\sigma^2 \in \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)}\right]$ 。

#### 4.1.2.4 估计 $\sigma^2$ 而 $\mu$ 未知

由于  $\mu$  未知，所以不可用了，使用  $\bar{X}$  替换  $\mu$ 。令枢轴变量  $\chi = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$ 。

同理解得  $\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}\right]$ 。

从而得到基本置信空间公式：

参数	条件	置信区间
$\mu$	$\sigma$ 已知	$\left[ \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{\frac{\alpha}{2}} \right]$
	$\sigma$ 未知	$\left[ \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right]$
$\sigma$	$\mu$ 已知	$\sigma^2 \in \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right]$
	$\mu$ 未知	$\left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right]$

## 4.2 假设检验

已经有了对期望  $\mu$  的假设，对这个假设进行检验。若所处的区间在拒绝域中，就拒绝原假设。

### 4.2.1 思想

已经有了假设样本期望为  $\mu = \mu_0$ 。则  $P(|\bar{X} - \mu_0| < \Delta) = 1 - \alpha$ ，所以取对立事件  $P(|\bar{X} - \mu_0| \geq \Delta) = \alpha$ ，这是一个小概率事件。若对这个小概率事件发生了，则否定原假设。

若  $\sigma$  已知，则  $\Delta = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，则区间  $(-\infty, \mu_0 - \Delta] \cup [\mu_0 + \Delta, +\infty)$  称为**拒绝域**，即小概率发生的区间。

若  $\sigma$  未知，则  $\Delta = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$ ，拒绝域一样。

设  $\theta$  为总体位置参数， $\theta_0$  为已知常数，则假设检验类型：

类型		$H_0$	$H_1$
双边检验		$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$
单边检验	右边	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$
	左边	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$

假设检验步骤：

1. 根据问题要求提出原假设  $H_0$  和备择假设  $H_1$ 。
2. 根据假设和条件确定检验统计量，在  $H_0$  成立的条件下确定其分布。
3. 给定显著性水平  $\alpha$ ，在  $H_0$  成立的条件下根据  $P\{H_0 \text{ 为真, 拒绝 } H_0\} \leq \alpha$  确定拒绝域和临界点。

4. 由样本值计算出检验统计量值，若该值落入拒绝域，则拒绝  $H_0$ ，否则接受  $H_0$ 。

#### 4.2.2 正态总体下的六大检验与拒绝域

检验参数	条件	原假设 $H_0$	备择假设 $H_1$	检验法与统计量	拒绝域
$\mu$	$\sigma = \sigma_0$	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U$ 检验 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$ u  \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
		$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$u \geq u_\alpha$
		$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$u \leq -u_\alpha$
	$\sigma$ 未知	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T$ 检验 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$ t  \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
		$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$t \geq t_\alpha(n-1)$
		$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$t \leq -t_\alpha(n-1)$
$\sigma^2$	$\mu$ 已知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2$ 检验 $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$
		$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$
		$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n)$
	$\mu$ 未知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2$ 检验 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$
		$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$
		$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n-1)$
					$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$

#### 4.3 两类错误

显著性水平  $\alpha$  实际上是犯第一类错误的概率的上界。

类型	第一类错误	第二类错误
含义	若 $H_0$ 为真，否定 $H_0$ （弃真）	若 $H_0$ 为假，接受 $H_0$ （存伪）
发生概率	$\alpha = P\{\text{拒绝 } H_0   H_0 \text{ 为真}\}$	$\beta = P\{\text{接受 } H_0   H_0 \text{ 为假}\}$ $= P\{\text{接受 } H_0   H_1 \text{ 为真}\}$
说明	仅控制犯第一类错误的概率的检验称为显著性检验， 概率为显著性水平	当样本容量固定， 则 $\alpha$ 和 $\beta$ 中任意一个减少， 则另一个必然增大， 若要同时增大， 则只能增大样本容量