二次型

Didnelpsun

目录

1　二次型

1.1　定义

n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式：

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \quad & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & +a_{22}x_2^x + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & \cdots \\ & +a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

这就是 n **元二次型**，简称**二次型**。

$\because x_ix_j = x_jx_i$，令 $a_{ij} = a_{ji}\,(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$：

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$，这个式子就是完全展开式。

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$，这个就是和式。

1.2　矩阵表示

二次型可以用矩阵来表示，即 $f(x) = x^TAx$。其中 x 是列向量。

矩阵表示的重点就是找到中间的 A，A 是 f 的二次型矩阵。

方法是：A 的主对角线元素 a_{ii} 是 x_i^2 的对应系数，a_{ij} 与 a_{ji} 是混合项 x_ix_j 的系数的一半。

如一个二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}(x_1, x_2, x_3)^T$。

所以可以发现二次型矩阵就是一个对称矩阵，所以只要能写出二次型的就一定存在一个对称矩阵，就一定可以相似对角化。

2 标准型与规范型

2.1 配方法

2.2 正交变换法

2.3 合同变换

2.3.1 线性变换

对于 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 若令 $\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$

记 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则上式写为 $x = Cy$ 称为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的**线性变换**。

若线性变换的系数矩阵 C 可逆，即 $|C| \neq 0$，则称为**可逆线性变换**。

若 $f(x) = x^TAx$，令 $x = Cy$，则 $f(x) = (Cy)^TA(Cy) = y^T(C^TAC)y$，记 $B = C^TAC$，则 $f(x) = y^TBy = g(y)$，此时二次型 $f(x) = x^TAx$ 通过线性变换 $x = Cy$ 得到一个新二次型 $g(y) = y^TBy$。即将二次型用 x 表示换成用 y 表示。

$x^TAx = y^TBy$ 这种改变表示方法的变换就是合同变换。

2.3.2 定义

二次型 $f(x)$ 与 $g(y)$ 的系数矩阵 A 与 B 满足 $B = C^TAC$，这种关系就是**合同变换**。

设 AB 为 n 阶实对称矩阵，若存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = B$，则称 AB **合同**，记为 $A \simeq B$，此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为**合同二次型**。

2.4 惯性定理

3 正定二次型

3.1 定义

3.2 性质

3.3 判定