随机变量及其分布

Didnelpsun

目录

1 二项分布

例题：已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0,\text{其他} \end{cases}$，$Y$ 表示对 X 进行 3 次独立重复试验中事件 $\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$，求 $P\{Y=2\}$。

解：已知对 X 进行独立重复试验，表示这个进行的是伯努利试验，从而 $Y\sim B(n,p)$。又是 3 次，所以 $Y\sim B(3,p)$。

只用求出这个 p 即 $\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$ 的概率就可以了。又已知 $f(x)$。

$\therefore p=\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$。$\therefore P\{Y=2\}=B\left(3,\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{9}{64}$。

2 泊松分布

例题：设一本书的各页印刷错误的个数 X 服从泊松分布。已知只有一个和只有两个印刷错误的页数相同，则随机抽查的 4 页中无印刷错误的概率 p 为?

解：$\because P\{X=1\}=P\{X=2\}$，$\therefore \dfrac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$，$\lambda=2$。

由于随机抽四页类似于伯努利试验是相互独立的，所以随机抽 4 页都无错误的概率为 $[P\{X=0\}]^4=e^{-8}$。

3 几何分布

例题：已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x>0 \\ 0,\text{其他} \end{cases}$，对 X 进行独立重复观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数，求 Y 的概率分布。

解：由题目直到就停止，知道 $Y\sim G(p)$。

又 $p=P\{X\geqslant 3\}=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}$

这是对几何分布的变形，首先进行 k 次试验，第 k 次成功，所以要乘 p，而因为是第 2 个成功，所以前面的 $k-1$ 次中有 $k-2$ 次失败和一次成功，所以一共 $p^2(1-k)^{k-2}$。因为前面的成功的一次在 $k-1$ 中任意一个地方就可以了，所以一共有 $k-1$ 中可能性，要考虑到排列，所以还要乘 $(k-1)$。

$\therefore P\{Y=k\}=(k-1)\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\cdot\left(\dfrac{7}{8}\right)^{k-2}$。

4 均匀分布

例题：已知随机变量 $X \sim U(a,b)$（$a>0$）且 $P\{0<X<3\}=\dfrac{1}{4}$，$P\{X>4\}=\dfrac{1}{2}$，求 X 的概率密度以及 $P\{1<X<5\}$。

解：$\because P\{X>4\}=\dfrac{1}{2}$，4 在其区间中点上，$\dfrac{a+b}{2}=4$。

$\because P\{0<X<3\}=\dfrac{1}{4}$，3 若在 a 左边则概率为 0，所以必然在右边。

$\therefore P\{a<X<3\}=\dfrac{1}{4}$，$P\{<3X<4\}=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{4-3}{b-a}=\dfrac{1}{4}$。

解得 $a=2$，$b=6$，$X \sim U(2,6)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 2<x<6\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

$P\{1<X<5\}=\dfrac{5-2}{6-2}=\dfrac{3}{4}$。

5 指数分布

例题：已知随机变量 $X \sim E(1)$，a 为常数且大于 0，求 $P\{X \leqslant a+1|X>a\}$。

解：$P\{X \leqslant a+1|X>a\}=\dfrac{P\{a<X \leqslant a+1\}}{P\{X>a\}}=\dfrac{\int_a^{a+1} e^{-x}\,\mathrm{d}x}{\int_a^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x}=1-\dfrac{1}{e}$。

也可以根据指数分布的无记忆性：$P\{X \leqslant a+1|X>a\}=1-P\{X>a+1|X>a\}=1-P\{X>1\}=P\{X \leqslant 1\}=F(1)=1-\dfrac{1}{e}$。

6 正态分布

例题：已知随机变量 $X \sim N(0,1)$，对给定的 α（$0<\alpha>1$），数 μ_α 满足 $P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，求 x。

解：$P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha$ 即表示 μ_α 为标准正态分布的上 α 分位点。

又 $P\{|X|<x\}=\alpha$，即 $-x<X<x$ 的面积为 α，所以两边的面积各为 $\dfrac{1-\alpha}{2}$，$P\{X<x\}=P\{X>x\}=\dfrac{1-\alpha}{2}$。

$\because$ 面积为 α 的下标为 α，$\therefore$ 面积为 $\dfrac{1-\alpha}{2}$ 的下标为 $\dfrac{1-\alpha}{2}$，$x=\mu_{\frac{1-\alpha}{2}}$。