矩阵

Didnelpsun

目录

矩阵本质是一个表格。

1 矩阵定义

定义：$m \times n$ 矩阵是由 $m \times n$ 个数 a_{ij}（元素）排成的 m 行 n 列的数表。

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素是复数的矩阵是**复矩阵**。

行数列数都为 n 的就是 n **阶矩阵**或**方阵**，记为 A_n。

行矩阵或行向量定义：只有一行的矩阵 $A = (a_1 a_2 \cdots a_n)$。

列矩阵或列向量定义：只有一列的矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$。

同型矩阵定义：两个矩阵行数、列数相等。

相等矩阵定义：是同型矩阵，且对应元素相等的矩阵。记为 $A = B$。

零矩阵定义：元素都是零的矩阵，记为 O，但是不同型的零矩阵不相等。

对角矩阵或对角阵定义：从左上角到右下角的直线（对角线）以外的元素都是 0 的矩阵，记为 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$。

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

单位矩阵或单位阵定义：$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$ 的对角矩阵，记为 E。这种线性变换叫做恒等变换，$AE = A$。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2 矩阵运算

2.1 矩阵加法减法

设与两个矩阵都是同型矩阵 $m \times n$，$A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$，则其加法就是 $A + B$。

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{m+n}+b_{m+n} \end{pmatrix}$$

- $A+B=B+A$。
- $(A+B)+C=A+(B+C)$。

若 $-A=(-a_{ij})$，则 $-A$ 是 A 的负矩阵，$A+(-A)=O$。
从而矩阵的减法为 $A-B=A+(-B)$。

2.2 数乘矩阵

数 λ 与矩阵 A 的乘积记为 λA 或 $A\lambda$，规定：

$$\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

假设 A、B 都是 $m\times n$ 的矩阵，λ、μ 为数：

- $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$。
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$。
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$。

矩阵加法与数乘矩阵都是矩阵的线性运算。

2.3 矩阵相乘

设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 的矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 的矩阵，那么 $A\times B=AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$。即：$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$（$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$）

所以按此定义一个 $1\times s$ 行矩阵与 $s\times 1$ 列矩阵的乘积就是一个 1 阶方针即一个数：

$$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=c_{ij}。$$

从而 $AB=C$ 的 c_{ij} 就是 A 的第 i 行与 B 的 j 列的乘积。

当 A 左边乘 P 为 PA，称为**左乘** P，若右边乘 P 为 AP，则称为**右乘** P。

注意：只有左矩阵的列数等于右矩阵的行数才能相乘。

只有 AB 都是方阵的时候才能 AB 与 BA。

矩阵的左乘与右乘不一定相等，即 $AB\neq BA$。

定义：若方阵 AB 乘积满足 $AB=BA$，则表示其是**可交换**的。

$A\neq O$，$B\neq O$，但是不能推出 $AB\neq O$ 或 $BA\neq O$。

$AB=O$ 不能推出 $A=O$ 或 $B=O$。

$A(X-Y)=O$ 当 $A\neq O$ 也不能推出 $X=Y$。

- $(AB)C=A(BC)$。
- $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$。
- $A(B+C)=AB+AC$。
- $(B+C)A=BA+CA$。
- $EA=AE=A$。

λE 称为**纯量阵**，$(\lambda E_n)A_n=\lambda A_n=A_n(\lambda E_n)$。

若 $A_{m\times s}$，$B_{s\times n}=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$，其中 β 为 n 行的列矩阵，则：

$AB=A(\beta_1,\cdots,\beta_s)=(A\beta_1,\cdots,A\beta_n)$。

2.4 矩阵幂

只有方阵才能连乘，从而只有方阵才有幂。

若 A 是 n 阶方阵，所以：

$$A^1=A，A^2=A^1A^1，\cdots，A^{k+1}=A^kA^1$$

- $A^kA^l=A^{k+l}$。

- $(A^k)^l = A^{kl}$。

因为矩阵乘法一般不满足交换率，所以 $(AB)^k \neq A^kB^k$。只有 AB 可交换时才相等。

若 $A \neq 0$ 不能推出 $A^k \neq 0$，如：

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$。$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$。

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^3 = O$。

矩阵幂可以同普通多项式进行处理。

如 $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + n$，对于 A 就是 $f(A) = a_nA^n + \cdots + a_1A + a_nE$。

$f(A) = A^2 - A - 6E = (A + 2E)(A - 3E)$。

2.5 矩阵转置

把矩阵 A 的行换成同序数的列就得到一个新矩阵，就是 A 的转置矩阵 A^T。若 A 为 $m \times n$，则 A^T 为 $n \times m$。

- $(A^T)^T = A$。
- $(A + B)^T = A^T + B^T$。
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$。
- $(AB)^T = B^TA^T$。

对称矩阵或对称阵定义：元素以对角线为对称轴对应相等，$A = A^T$。

2.6 方阵行列式

由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式称为矩阵 A 的行列式，记为 $\det A$ 或 $|A|$。

- $|A^T| = |A|$。
- $|\lambda A| = \lambda^n|A|$。
- $|AB| = |A| \cdot |B| = |BA|$。

伴随矩阵或伴随阵定义：行列式 $|A|$ 各个元素的代数余子式 A_{ij} 转置构成的矩阵。

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $AA^* = A^*A = |A|E$。

2.7 分块矩阵

在行列式的时候提到了分块行列式，分块行列式计算时要求对应的零行列式必须是行列数相等的，而对于分块矩阵而言则不要求，且不一定要零矩阵。

对于行列数较多的矩阵常使用**分块法**，将大矩阵化为小矩阵。将矩阵用横纵线分为多个小矩阵，每个矩阵成为矩阵的**子块**，以子块为元素的矩阵就是**分块矩阵**。

2.7.1 分块矩阵计算

分块矩阵的计算法则与普通矩阵计算类似。

定理：若 AB 矩阵行列数相同，采用相同的分块法，则

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}。$$

定理：设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，$\lambda$ 为数，则 $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$。

定理：若 $A_{m\times l}$，$B_{l\times n}$，采用相同的分块法，则

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}, \quad C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj}。$$

定理： 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$。

定理： 设 A 为 n 阶方阵，A 的分块矩阵只有对角线上才有非零子块且都是方阵，其余子块都是零矩阵，即 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$，称为**分块对角矩阵**。$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$。

若 $|A_i|\neq 0$，则 $|A|\neq 0$，且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$。

2.7.2 按行按列分块

对于 $m\times n$ 的矩阵 A，其 n 列称为 A 的 n 个列向量，若第 j 列记为 $a_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$，则 A 可以按列分块为 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。

其 m 行称为 A 的 m 个行向量，若第 i 行记为 $a_i^T=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$，则 A 可以按行分块为 $A=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$。

若对于 $A_{m\times s}$ 与 $B_{s\times n}$ 的乘积矩阵 $AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$，若将 A 按行分为 m 块，B 按列分为 n 块，则有：

$$AB=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix} a_1^Tb_1 & a_1^Tb_2 & \cdots & a_1^Tb_n \\ a_2^Tb_1 & a_2^Tb_2 & \cdots & a_2^Tb_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^Tb_1 & a_m^Tb_2 & \cdots & a_m^Tb_n \end{pmatrix}=(c_{ij})_{m\times n}。$$

3　线性方程组

矩阵是根据线性方程组得到。

3.1　线性方程组与矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

n 元齐次线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases}$$

n 元非齐次线性方程组。

对于齐次方程，$x_1=\cdots=x_n=0$ 一定是其解，称为其**零解**，若有一组不全为零的解，则称为其**非零解**。其一定有零解，但是不一定有非零解。

对于非齐次方程，只有 $b_1\cdots b_n$ 不全为零才是。

令**系数矩阵** $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，**未知数矩阵** $X_{n\times 1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，**常数项矩阵** $b_{m\times 1}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$，**增广矩阵** $B_{m\times(n+1)}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$。

所以 $AX=\begin{pmatrix} a_11x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}$。

从而 $AX=b$ 等价于 $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases}$，当 $b=O$ 就是齐次线性方程。

从而矩阵可以简单表示线性方程。

3.2 线性方程组的解

对于一元一次线性方程：$ax=b$：

- 当 $a\neq 0$ 时，可以解得 $x=\dfrac{b}{a}$。
- 当 $a=0$ 时，若 $b\neq 0$ 时，无解，若 $b=0$ 时，无数解。

当推广到多元一次线性方程组：$AX=b$，如何求出 X 这一系列的 x 的解?

从数学逻辑上看，已知多元一次方程，有 m 个约束方程，有 n 个未知数，假定 $m\leqslant n$。

当 $m<n$ 时，就代表有更多的未知变量不能被方程约束，从而有 $n-m$ 个自由变量，所以就是无数解，解组中其他解可以由自由变量来表示。

当 $m=n$ 时代表约束与变量数量相等，此时又要分三种情况。

当所有的约束条件其中存在线性相关，即一部分约束条件可以由其他约束表示，则代表这部分约束条件是没用的，实际上的约束条件变少，从而情况等于 $m<n$，结果是无数解。

当所有的约束条件不存在线性相关，但是一部分约束条件互相矛盾，则约束条件下就无法解出解，从而结果是无实数解。

当所有的约束条件不存在线性相关，且相互之间不存在矛盾情况，这时候才会解出一个实数解，从而结果是有唯一实解。

若使用矩阵来解决线性方程组的问题，其系数矩阵 $A_{m\times n}$。

对于 $A\neq O$，则 $AX=b$，若存在一个矩阵 $B_{n\times n}$ 类似 $\dfrac{1}{a}$，使得 $BAX=Bb$，解得 $EX=X=Bb$，这个 B 就是 A 的逆矩阵。

对于 $A=O$ 即不可逆，需要判断 b 是否为 0，若不是则无实数解，若是则无穷解，这种判断需要用到增广矩阵，需要用到矩阵的秩判断。

4 逆矩阵

定义：逆矩阵类比倒数，若对于 n 阶矩阵 A，有一个 n 阶矩阵 B，使得 $AB=BA=E$，则 A 可逆，B 是 A 的逆矩阵也称为逆阵，且逆矩阵唯一，记为 $B=A^{-1}$。

定理：若矩阵 A 可逆，则 $|A|\neq 0$。

证明：若 A 可逆，则 $AA^{-1}=E$，所以 $|A|\cdot|A^{-1}|=|E|=1$，$|A|\neq 0$。

可以类比普通数字，若 a 有一个倒数 $\dfrac{1}{a}$，则 $a\neq 0$，否则无法倒。

定理：若 $|A|\neq 0$，则 A 可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$。

证明：$\because AA^*=A^*A=|A|E$，又 $|A|\neq 0$，$A\dfrac{1}{|A|}A^*=\dfrac{1}{|A|}A^*A=E$。

按逆矩阵定义，当 A 可逆，与 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$。

当 $|A|=0$ 时，A 为**奇异矩阵**，否则是**非奇异矩阵**。

定理：矩阵是可逆矩阵的必要条件是非奇异矩阵。

定理：若 $AB=E$ 或 $BA=E$，则 $B=A^{-1}$。

- 若 A 可逆，则 $(A^{-1})^{-1}=A$。
- 若 A 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 $(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$。
- 若 AB 为同阶矩阵且都可逆，则 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。
- 若 A 可逆，则 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$。
- 若 A 可逆，$\lambda\mu$ 为整数时，$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu}$，$(A^{\lambda})^{\mu}=A^{\lambda\mu}$。