无穷级数

Didnelpsun

目录

1　求和函数

可以利用展开式求和函数，但是很多展开式的通项都不是公式中的，就需要对通项进行变形。

1.1　先导后积

n 在分母上，先导后积。使用变限积分：$\int_{x_0}^{x} S'(t)\,\mathrm{d}t = S(x) - S(x_0)$，即 $S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^{x} S'(t)\,\mathrm{d}t$。一般选择 x_0 为展开点。

例题：求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的和函数。

解：已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$，而这里求和是 $\dfrac{x^n}{n}$，所以需要对其进行转换。

对 $\dfrac{x^n}{n}$ 求导就得到了 x^{n-1} 消去了分母的 n，所以使用先导后积的方法。

记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$，则 $x^n = (x-0)^n$，取 $x_0 = 0$。

$\therefore S(x) = S(0) + \displaystyle\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\right)_t' \mathrm{d}t = 0 + \int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1})\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = -\ln(1-x)$。收敛域为 $(-1,1)$。

1.2　先积后导

n 在分子上，先积后导。$(\int S(x)\,\mathrm{d}x)' = S(x)$。

例题：求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数。

解：记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = x(\int \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\,\mathrm{d}x)' = x(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n)' = x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{x}{(1-x)^2}$。收敛域为 $[-1,1]$。