不定积分与定积分

Didnelpsun

目录

1　不定积分

1.1　基本积分

例题：汽车以 20m/s 的速度行驶，刹车后匀减速行驶了 50m 停止，求刹车加速度。

已知题目含有两个变量：距离和时间，设距离为 s，时间为 t。

因为汽车首先按 20m/s 匀速运动，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=20$，最开始距离为 0，所以 $s|_{t=0}=0$。

又因为是匀减速的，所以速度形如：$v=\dfrac{s}{t}=kt+b$，从而令二阶导数下 $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=k$。

所以 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t=\int k\,\mathrm{d}t=kt+C_1$。

代入 $\left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=20$，所以 $C_1=20$，即 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=kt+20$。

所以 $\mathrm{d}s=(kt+20)\,\mathrm{d}t$，从而 $s=\displaystyle\int(kt+20)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}kt^2+20t+C_2$。

又 $s|_{t=0}=0$，所以代入得 $C_2=0$，所以 $s=\dfrac{1}{2}kt^2+20t$。

当 $s=50$ 时停住，所以此时 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$，得到 $t=-\dfrac{20}{k}$。

代入 s：$50=\dfrac{1}{2}k\left(-\dfrac{20}{k}\right)^2+20\left(-\dfrac{20}{k}\right)$，解得 $k=-4$，即加速度为-4m/s^2。

1.2　换元积分

使用换元法做了换元之后是要带回式子中的，也就是说要保证反函数的存在才能代入有意义。为了保证反函数的存在，因此要保证原函数的单调性，所以要有一个规定的范围来使原函数保证单调。

对于第二类换元特别要考虑这方面，而第一类换元一般不考虑。

1.2.1　第一类换元

1.2.1.1　聚集因式

将复杂的式子转换为简单的一个因式放到 d 后面看作一个整体，然后利用基本积分公式计算。

例题：$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$。

$=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x\ln\ln x}=\int\frac{\mathrm{d}(\ln\ln x)}{\ln\ln x}=\ln|\ln\ln x|+C$。

例题： $\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$。

$= -\int 10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{2}\int 10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}(2\arccos x) = -\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10} + C$。

1.2.1.2 积化和差

对于两个三角函数的乘积可以使用积化和差简单计算。

例题： $\int \sin 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$。

$= \int \cos 3x\sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\sin 5x - \sin x)\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\int \sin 5x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$。

1.2.1.3 三角拆分

主要用于 $\sec^2 - 1 = \tan^2 x$，当出现 $\tan^2$、$\tan^3$ 等与 $\sec x$ 在一起作为乘积时可以考虑拆分。

例题： $\int \tan^3 x\sec x\,\mathrm{d}x$。

$= \int(\sec^2 x - 1)\tan x\sec x\,\mathrm{d}x = \int(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}(\sec x) = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$。

1.2.2 第二类换元

当使用第二类换元时需要考虑 x 定义域与换元后式子的正负号的问题，因为根号一定为正，而在定义域上的不同部分，换元式子正负号可能不同。

1.2.2.1 $\sqrt{a^2-x^2}$：$x = a\sin t(a\cos t)$

若令 $x = a\sin t$，则根据 $\sin t \in (-1,1)$ 得到主区间：$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，从而代入式子 $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$，根据 $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos t > 0$，所以正负号无误。

若令 $x = a\cos t$，则根据 $\cos t \in (-1,1)$，得到主区间：$t \in (0,\pi)$，从而代入式子 $\sqrt{a^2-x^2} = a\sin t$，根据 $t \in (0,\pi)$，所以 $\sin t > 0$，所以正负号无误。

所以这种情况不用考虑正负号。

例题： 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$。

令 $x = \sin t$（$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$），所以 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$，$\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$，$t = \arcsin x$。

$$= \int \frac{\cos t}{1+\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{2\cos^2\frac{t}{2} - 1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t - \int \sec^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = t - \tan\frac{t}{2} + C$$

$$= t - \frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} + C = t - \frac{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}} + C = t - \frac{\sin t}{1+\cos t} + C$$
$$= \arcsin x - \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C。$$

1.2.2.2 $\sqrt{a^2+x^2}$：$x = a\tan t$

根据 $\tan t \in R$，从而得到主空间：$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，代入 $\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t$，根据 $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos t > 0$，$\sec t > 0$，所以正负号无误。

所以这种情况不用考虑正负号。

1.2.2.3 $\sqrt{x^2-a^2}$：$x = a\sec t$

根据 $\sec t \in (-1, 1)$，所以从而得到主空间：$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，代入 $\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$,根据 $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\tan t \in R$,所以此时不能保证转换后的 $a\tan t > 0$，此时必须对 x 分正负情况讨论。

例题：求 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x$。

令 $x = 3\sec t$。$\therefore \sqrt{x^2-9} = 3\tan t$，$\mathrm{d}x = 3\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$。

当 $x > 3$ 时，$\sec t > 1$，即 $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$。

$$= \int 3\tan^2 t\,\mathrm{d}t = 3\int(\sec^2 t - 1)\mathrm{d}t$$
$$= 3\tan t - 3t + C = \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{x} + C。$$

当 $x < -3$ 时，$\sec t < -1$，即 $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$。

$$= -\int 3\tan^2 t\,\mathrm{d}t = -3\int(\sec^2 t - 1)\mathrm{d}t$$
$$= -3\tan t + 3t + C = \sqrt{x^2-9} + 3\arccos\frac{3}{x} + C（\tan t < 0）$$
$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{-x} + 3\pi + C（3\arccos\frac{3}{x} = 3\pi - 3\arccos -\frac{3}{x}）$$
$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{-x} + C。$$

1.2.2.4 辅助换元

在使用换元法的时候有可能单个式子不能求出积分，而使用其他辅助式子加减在一起积分可以得到结果，从而能得到原式和辅助式子的积分结果。对于这类题目需要观察什么样的式子能让积分简单。

例题：求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$。

令 $x = \sin t$，所以 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$，$\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$。

$$\therefore = \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} \mathrm{d}t。$$

1.3 分部积分

1.3.1 基本分部

1.3.2 多次分部

1.4 有理积分

1.4.1 高阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\int \frac{f(x)}{g(x)} \,\mathrm{d}x$，且 $f(x)$、$g(x)$ 都为与 x 相关的多项式，$f(x)$ 阶数高于或等于 $g(x)$，则 $f(x)$ 可以按照 $g(x)$ 的形式分配，约去式子，得到最简单的表达。

例题： $\int \frac{x^3}{x^2+9} \,\mathrm{d}x$。

$$= \int \frac{x^3+9x-9x}{x^2+9} \,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3+9x}{x^2+9} \,\mathrm{d}x - \int \frac{9x}{x^2+9} \,\mathrm{d}x$$

$$= \int x \,\mathrm{d}x - \frac{9}{2} \int \frac{\mathrm{d}(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2} \ln(9+x^2) + C。$$

1.4.2 低阶多项式分解

当不定积分式子形如 $\int \frac{f(x)}{g(x)} \,\mathrm{d}x$，且 $f(x)$、$g(x)$ 都为与 x 相关的多项式，$f(x)$ 阶数低于 $g(x)$，则可以分解式子：$\int \frac{f(x)}{g(x)} \,\mathrm{d}x = \int \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \,\mathrm{d}x + \int \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \,\mathrm{d}x$。

2 定积分

2.1 变限积分

2.2 牛莱公式

2.3 换元积分

2.4 分部积分

2.5 反常积分

3 积分应用

3.1 面积

3.2 体积

3.3 弧长