线性方程组

Didnelpsun

目录

1　基础解系

1.1　方程求通解

1.2　通解求通解

题目给出 ξ_i 是 $Ax=0$ 的基础解系，然后判断这几个基础解系的变式是否还能称为基础解系，判断条件就是对这些基础解析进行初等运算（往往是加减），如果最后能凑成 0 则代表其线性相关，所以不能成为基础解系，否则可以。

如 $\xi_1+\xi_2$、ξ_2+x_3、$\xi_3+\xi_1$ 可以成为，因为 $(\xi_1+\xi_2)-(\xi_2+x_3)+(\xi_3+\xi_1)=2\xi_1\neq 0$，$\xi_1-\xi_2$、$\xi_2-x_3$、$\xi_3-\xi_1$ 不能成为，因为 $(\xi_1-\xi_2)+(\xi_2-x_3)+(\xi_3-\xi_1)=0$。

1.3　特解求通解

1.4　通解判断特解

已知特解为方程的一个解，知道通解，所以特解可以由通解线性表出，所以将通解和特解组成增广矩阵进行初等变换（如果是判断多个向量，则可以一起组成），通解矩阵的秩和增广矩阵的秩相同则代表可以线性表出，否则不能。

1.5　特解判断特解

已知特解，对特解进行初等变换，然后判断这个式子是否还是原方程的特解，可以直接将新式子代入原方程求得结果。

例题：已知 α_1、α_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同解，则判断 $3\alpha_1-2\alpha_2$ 是否为原方程的特解。

解：已知 α_1、α_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同解，即 $A\alpha_1=b$，$A\alpha_2=b$。

代入 $Ax=b$：$A(3\alpha_1-2\alpha_2)=3A\alpha_1-2A\alpha_2=3b-2b=b$，所以成立。

1.6　线性表出

2　反求参数

基本上都是给出方程组有无穷多解：

- 齐次方程组：系数矩阵是降秩的；行列式值为 0。
- 非齐次方程组：系数矩阵与增广矩阵秩相同且降秩。

例题：已知齐次线性方程组 $\begin{cases} ax_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + (a+2)x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 有无穷多解，求参数 a。

解：使用矩阵比较麻烦，三阶的系数矩阵可以使用行列式。

$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & 3 \\ 1 & a+2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & a+5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (a+5)(a+6) = 0$。

解得 $a = -5$ 或 $a = -6$。

3 公共解