极限

Didnelpsun

目录

1　极限类型

七种：$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$。

①其中 $\frac{0}{0}$ 为洛必达法则的基本型。$\frac{\infty}{\infty}$ 可以类比 $\frac{0}{0}$ 的处理方式。$0\cdot\infty$ 可以转为 $\frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$。设置分母有原则，简单因式才下放（简单：幂函数，e 为底的指数函数）。

②$\infty-\infty$ 可以提取公因式或通分，即和差化积。

③$\infty^0, 0^0, 1^\infty$，就是幂指函数。

$$u^v = e^{v\ln u} = \begin{cases} \infty^0 & \rightarrow & e^{0\cdot+\infty} \\ 0^0 & \rightarrow & e^{0\cdot-\infty} \\ 1^\infty & \rightarrow & e^{\infty\cdot 0} \end{cases}$$

$$\therefore \lim u^v = e^{\lim v\cdot\ln u} = e^{\lim v(u-1)}$$

综上，无论什么样的四则形式，都必须最后转换为商的形式。

2　常用化简运算

2.1　对数法则

例题：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{[\ln(1-x)+\ln(1+x)]\sin\dfrac{x}{x+1}}$。

注意在积或商的时候不能把对应的部分替换为 0，如分母部分的 $[\ln(1-x)+\ln(1+x)]$ 就无法使用 $\ln(1+x)\sim x$ 替换为 $-x+x$，这样底就是 0 了，无法求得最后的极限。

这时可以尝试变形，如对数函数相加等于对数函数内部式子相乘：$\ln(1-x)+\ln(1+x)=\ln(1-x^2)\sim -x^2$。

2.2　指数法则

一般需要与洛必达法则配合使用。

例题：求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0, b>0, c>0)$。

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{a^x+b^x+c^x}}$$ （洛必达法则）

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln a+\ln b+\ln c}{1+1+1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(abc)}{3}} = \sqrt[3]{abc}$。

例题：求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} - \sqrt{e}\right]$。

首先对于幂指函数需要取指数，所以 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n})}$。

而后面的多一个 $\sqrt{e}$ 导致整个式子变为一个复杂的式子，而与 e^x 相关的是 $e^x - 1 \sim x$。

所以 $e^{\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n})} - \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{2}} - 1\right) = e^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{2}\right]$。

综上：

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} - \sqrt{e}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n})} - \sqrt{e}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[e^{\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{2}} - 1\right)\right] = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\lim_{n\to\infty} n^2\left[\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right]$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{e}}{4}$$

2.3 三角函数关系式

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$。

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot x^2}(\sin x \sim x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x\cos^2 x}{x^4}(\sin x\cos x \sim \frac{1}{2}\sin 2x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x - \frac{1}{4}\cdot 2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2}{4x^3}(\sin x\cos x \sim \frac{1}{2}\sin 2x) = \lim_{x\to 0}\frac{2x - \frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2 - \frac{1}{2}\cos 4x\cdot 4}{12x^2} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}(1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2) = \frac{4}{3}$$

2.4 提取常数因子

提取常数因子就是提取出能转换为常数的整个极限式子的因子。这个因子必然在自变量的趋向时会变为非 0 的常数，那么这个式子就可以作为常数提出。

2.5 提取公因子

当作为商的极限式子上下都具有公因子时可以提取公因子然后相除，从而让未知数集中在分子或分母上。

例题：求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^5-5x+4}$。

需要先提取公因子：

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{2}{3}$。

（当然可以使用洛必达法则得到极限为 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-6}{2x-5}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8-6}{8-5}$）

注意：提取公因子的时候应该注意开平方等情况下符号的问题。如果极限涉及倒正负两边则必须都讨论。

当趋向为负且式子中含有根号的时候最好提取负因子，从而让趋向变为正。

例题：求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)+2\ln 2x\right]$。

题目的形式为 $\infty-\infty$，所以必须使用后面的倒代换转换为商的形式。

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\left[\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)-2\ln 2\right]$。

这里就需要注意到因为 $\sqrt{4x^2+x}$ 的限制导致这个式子必然为正数，而 $x\to-\infty$ 代表自变量为负数，所以提出来的 x 必然是负数，而原式是正数，所以就需要添加一个负号，而后面的 $2\ln 2x$ 则没有要求，所以直接变成 $-2\ln 2$ 就可以了。

将 x 下翻变成分母为 $\dfrac{1}{x}$，并令 $t=\dfrac{1}{x}$。

$=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{\sqrt{t+4}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)-2\ln 2}{-t}$。

幂次不高可以尝试洛必达：

$=\lim\limits_{t\to 0^-}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln(2+t)}{\sqrt{t+4}}+\dfrac{\sqrt{t+4}}{2+t}\right)=-\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{2}{2}\right)=-\dfrac{\ln 2}{4}-1$。

2.6 幂指函数

当出现 $f(x)^{g(x)}$ 的类似幂函数与指数函数类型的式子，需要使用 $u^v=e^{v\ln u}$。

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$。

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=e^0=1$

2.7 有理化

当遇到带有根号的式子可以使用等价无穷小，但是只针对形似 $(1+x)a-1 \sim ax$ 的式子，而针对 $x^a \pm x^b$ 的式子则无法替换，必须使用有理化来将单个式子变为商的形式。

如 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \dfrac{a+b}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}$。

例题：求极限 $\lim\limits_{x \to -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$。

首先定性分析：$\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot (\sqrt{x^2+100}+x)$。

在 $x \to -\infty$ 趋向时，x 就趋向无穷大。

而 $\sqrt{x^2+100}$ 为一次，所以 $\sqrt{x^2+100}+x$ 趋向 0。

又 $\sqrt{x^2+100}$ 在 $x \to -\infty$ 时本质为根号差，所以有理化：

$$\lim_{x \to -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x) = \lim_{x \to -\infty} x\frac{x^2+100-x^2}{\sqrt{x^2+100}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}$$

$$\xRightarrow{\text{令}x=-t} \lim_{t \to +\infty} \frac{-100t}{\sqrt{t^2+100}+t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-100}{\sqrt{1+\dfrac{100}{t^2}}+1} = -50$$

例题：求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$。

$$= \lim_{x \to 0} \sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{1+\sin^2 x}+x}{x^2(1+\sin^2 x)-x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}+1}{x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2}{x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x\cos x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}。$$

2.8 换元法

换元法本身没什么技巧性，主要是更方便计算。最重要的是获取到共有的最大因子进行替换。

例题：求极限 $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln x \ln(1-x)$。

当 $x \to 1^-$ 时，$\ln x$ 趋向 0，$\ln(1-x)$ 趋向 $-\infty$。

又 $x \to 0$，$\ln(1+x) \sim x$，所以 $x \to 1$，$\ln x \sim x-1$：

$$\lim_{x \to 1^-} \ln x \ln(1-x) = \lim_{x \to 1^-} (x-1)\ln(1-x) \xRightarrow{t=1-x} = -\lim_{t \to 0^+} t\ln t$$

$$= -\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\dfrac{1}{t}} = -\lim_{t\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{t}}{-\dfrac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} t = 0$$

2.9 倒代换

2.9.1 含有分式

当极限式子中含有分式中一般都需要用其倒数，把分式换成整式方便计算。

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot 2x^{-3}}{100x^{99}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{50}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}}$

使用洛必达法则下更复杂，因为分子的幂次为负数，导致求导后幂次绝对值越来越大，不容易计算。

使用倒代换再洛必达降低幂次，令 $t = \dfrac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{e^{-t}}{t^{-50}} = \lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{t^{50}}{e^t} = \lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{50t^{49}}{e^t}$

$= \cdots$

$= \lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{50!}{e^t} = 0$

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$。

该式子含有分数，所以尝试使用倒数代换：

$\lim\limits_{x\to +\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x] \xRightarrow{令x=\frac{1}{t}} \lim\limits_{t\to 0^+}\left(\dfrac{e^t-1}{t^2}-\dfrac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{e^t-1-t}{t^2}$

$\xRightarrow{泰勒展开e^t} \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{2}t^2}{t^2} = \dfrac{1}{2}$

2.9.2 $\infty - \infty$ 型

2.10 拆项

拆项需要根据式子形式进行，所以很难找到普遍规律。

例题：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+6)}{6n^6}$。

需要将分子和分母都拆为 6 项：

$= \dfrac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\times\dfrac{n+2}{n}\times\cdots\dfrac{n+6}{n} = \dfrac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})(1+\dfrac{2}{n})\cdots(1+\dfrac{6}{n}) = \dfrac{1}{6}$。

当极限式子中出现不知道项数的 n 时，一般需要使用拆项，把项重新组合。一般的组合是根据等价无穷小。

而对于复杂的具有同一结构的式子也可以考虑拆项。

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$。（$n\in N^+$）
这里可以使用等价无穷小 $e^x-1\sim x$。

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{x}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{x}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\right)}$$
$$=e^{\frac{e}{n}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}+\cdots+\frac{e^{nx}-1}{x}\right)}=e^{\frac{e}{n}[1+2+\cdots+n]}=e^{\frac{e}{n}\cdot\frac{n(1+n)}{2}}=e^{\frac{e(1+n)}{2}}$$

例题：求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{\ln\cos x}$

可以使用 $\cos x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$。

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{\ln\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{-\frac{x^2}{2}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{x^2}{2}}+\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{-\frac{x^2}{2}}$$
$$=-1+\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{\cos 2x})+\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{-\frac{x^2}{2}}$$
$$=-1+\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(\cos 2x-1)+\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{-\frac{x^2}{2}}$$
$$=-1+\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{4x^2}{2})+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{9x^2}{2}\right)}{-\frac{x^2}{2}}=-6$$

3 基本计算方式

课本上极限计算可以使用的主要计算方式：

3.1 基础四则运算

只有式子的极限各自存在才能使用四则运算，使用的频率较少。

3.2 重要极限

重要极限有两个，但是 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 这个很少用，因为往往用等价无穷小替代了，而 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 则用的较多，当出现分数幂的幂指函数时，不要先去取对数，而是使用重要极限看看能不能转换。

例题：求 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$。

$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+3}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{x-1}{x+6}}=e^{-\frac{3}{2}}$。

例题：求 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$。

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x\cdot\frac{2x+3}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e$。

3.3 导数定义

极限转换以及连续性的时候会用到，但是使用的频率也较小。

3.4 等价无穷小替换

当看到复杂的式子，且不论要求的极限值的趋向，而只要替换的式子是 $\Delta\to 0$ 时的无穷小，就使用等价无穷小进行替换。

注意：替换的必然是整个求极限的乘或除的因子，一般加减法与部分的因子不能进行等价无穷小替换。

对于无法直接得出变换式子的，可以对对应参数进行凑，以达到目标的可替换的等价无穷小。

3.5 夹逼准则

夹逼准则可以用来证明不等式也可以用来计算极限。但是最重要的是找到能夹住目标式子的两个式子。

例题：求极限 $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{10}{x}\right]$，其中 $[\cdot]$ 为取整符号。

取整函数公式：$x-1<[x]\leqslant x$，所以 $\frac{10}{x}-1<\left[\frac{10}{x}\right]\leqslant\frac{10}{x}$。

当 $x>0$ 时，$x\to 0^+$，两边都乘以 10，$10-x<x\cdot\left[\frac{10}{x}\right]\leqslant x\cdots\frac{10}{x}=10$，而左边在 $x\to 0^+$ 时极限也为 10，所以夹逼准则，中间 $x\cdot\left[\frac{10}{x}\right]$ 极限也为 10。

当 $x>0$ 时，$x\to 0^-$，同样也是夹逼准则得到极限为 10。

$\therefore \lim_{x\to 0} x\left[\frac{10}{x}\right]=10$。

3.6 拉格朗日中值定理

对于形如 $f(a)-f(b)$ 的极限式子就可以使用拉格朗日中值定理，这个 $f(x)$ 为任意的函数。使用拉格朗日中值定理最重要的还是找到这个 $f(x)$。

3.6.1 证明不等式

证明不等式最重要的还是找到 $f(x)$，有时候不等式不存在 $f(a)-f(b)$ 这种式子，就需要我们转换。

3.6.1.1 对数函数特性

对于对数函数，要记住其特定的性质：$\log_n(\frac{a}{b})=\log_n a-\log_n b$。

例题：设 $a>b>0$，证明：$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$。

因为 $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$，所以令 $f(x)=\ln x$。

所以根据拉格朗日中值定理：$\ln a-\ln b=f'(\xi)(a-b)$（$\xi\in(b,a)$）。

又 $f'(\xi)=\frac{1}{\xi}$，所以 $\ln a-\ln b=\frac{a-b}{\xi}$。

又 $\xi\in(b,a)$，所以 $\frac{1}{\xi}\in(\frac{1}{a},\frac{1}{b})$。

所以 $\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{\xi}<\frac{a-b}{b}$，从而 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$，得证。

3.6.1.2 查找特定值

对于证明一种不等式，如果里面没有差式，也无法转换为差式，那么就可以考虑制造差式，对于 $f(x)$ 一般选择更高阶的，a 选择 x，b 要根据题目和不等式设置一个常数。

一般是 0 或 1。可以先尝试 1。

例题：当 $x > 1$ 时，证明 $e^x > ex$。

题目中没有差式，所以需要选择一个函数作为基准函数，里面有一个指数函数和一个幂函数，所以选择 e^x 作为基准函数。

然后选择一个常数作为 b 值，可以先选一个 1 作为 b 值：$f(x) - f(1) = f'(\xi)(x-1)$。

从而 $e^x - e = e^\xi(x-1)$，$\xi \in (1, x)$，所以 $e^x - e > e(x-1)$，即 $e^x > ex$，得证。

3.6.2 极限计算

可以将极限式子中形如 $f(a) - f(b)$ 的极限部分使用拉格朗日中值定理进行替换。

例题：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(\arctan\dfrac{2}{n} - \arctan\dfrac{2}{n+1}\right)$。

因为式子不算非常复杂，其实也可以通过洛必达法则来完成，但是求导会很复杂。而 $\arctan x$ 可以认定为 $f(x)$。

从而 $\arctan\dfrac{2}{n} - \arctan\dfrac{2}{n+1}$ 为 $f(\dfrac{2}{n}) - f(\dfrac{2}{n+1}) = f'(\xi)\left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1}\right)$。

其中 $\dfrac{2}{n+1} < \xi < \dfrac{2}{n}$，而当 $n \to \infty$ 时，$f'(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2} \to 1$。

$\therefore \arctan\dfrac{2}{n} - \arctan\dfrac{2}{n+1} \sim \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1} = \dfrac{2}{n(n+1)}$。

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(\arctan\dfrac{2}{n} - \arctan\dfrac{2}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \dfrac{2}{n(n+1)} = 2$。

3.7 洛必达法则

洛必达法则的本质是降低商形式的极限式子的幂次。

洛必达在处理一般的极限式子比较好用，但是一旦式子比较复杂最好不要使用洛必达法则，最好是对求导后有规律或幂次较低的式子进行上下求导。

对于幂次高的式子必然使用洛必达法则。

洛必达法则必须使用在分式都趋向 0 或 ∞ 时，如果不是这样的趋向则不能使用。如：

例题：求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$。

如果使用洛必达法则，则会得到结果为 1，这是错误的，因为分子在 $x\to 1$ 时结果为常数 1。正确的计算方式：

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty$。

3.8 泰勒公式

泰勒公式一般会使用趋向 0 的麦克劳林公式，且一般只作为极限计算的一个小部分，用来替代一个部分。

且一般只有麦克劳林公式表上的基本初等函数才会使用倒泰勒公式，复合函数最好不要使用。

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$。

分析：该题目使用洛必达法则会比较麻烦且难以计算，所以先考虑是否能用泰勒展开：

$x\to 0$，$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，$\arcsin x=x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，$\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$。

$\therefore \sin x-\tan x=-\dfrac{1}{2}x^3+o(x^3)$，$\arcsin x-\arctan x=\dfrac{1}{2}x^3+o(x^3)$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\frac{1}{x}x^3+o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}=-1$。

4 极限计算形式

极限相关计算形式主要分为下面六种：

1. 未定式：直接根据式子计算极限值。
2. 极限转换：根据已知的极限值计算目标极限值。
3. 求参数：已知式子的极限值，计算式子中未知的参数。
4. 极限存在性：根据式子以及极限存在性计算极限或参数。
5. 极限唯一性：式子包含参数，根据唯一性计算两侧极限并求出参数与极限值。

6. 函数连续性：根据连续性与附加条件计算极限值或参数。

7. 迭代式数列：根据数列迭代式计算极限值。

8. 变限积分：根据变限积分计算极限值。

4.1 极限转换

4.1.1 整体换元

最常用的方式就是将目标值作为一个部分，然后对已知的式子进行替换。

例题：已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+xf(x)}{x^2}=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$。

令目标 $\dfrac{f(x)-1}{x}=t$，$\therefore f(x)=tx+1$。

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+xf(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+tx^2+x}{x^2}$(泰勒展开)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x-\dfrac{x^2}{2}+tx^2+x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(t-\dfrac{1}{2}\right)x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}t=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1}{2}$。

4.1.2 关系转换

例题：如果 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}$ 为常数多少？

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+f(x)}{x^4}=A$，而目标是 x^3，所以需要变形：

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+f(x)}{x^4}=A$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+f(x)\cdot x}{x^4}=A\cdot\lim\limits_{x\to 0}x=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$

泰勒展开：$x-\sin x=\dfrac{1}{6}x^3$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}=-6$

4.1.3 脱帽法

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$。

例题：如果 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}$ 为常数多少？

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+f(x)}{x^4}=A$ 脱帽：$\dfrac{x\sin x+f(x)}{x^4}=A+\alpha$。
得到：$f(x)=Ax^4+\alpha\cdot x^4-(x-\sin x)$。
反代入：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ax^4+\alpha\cdot x^4-x+\sin x}{x^3}=0+0-\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{6}$。
$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}=-6$。

4.2 求参数

因为求参数类型的题目中式子是未知的，所以求导后也是未知的，所以一般不要使用洛必达法则，而使用泰勒展开。

一般极限式子右侧等于一个常数，或是表明高阶或低阶。具体的关系参考无穷小比阶。

在求参数的时候要注意与 0 的关系。

例题：设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，求常数 a，b。

根据泰勒展开式：$x\to 0,\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{x}+o(x^2)$，$x-\ln(1+x)\sim\dfrac{1}{2}x^2\sim 1-\cos x$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=2\neq 0$$

$$1-a=0;-\left(\frac{1}{2}+b\right)=2$$

$\therefore a=1;b=-\dfrac{5}{2}$。

4.3 极限存在性

一般会给出带有参数的例子，并给定一个点指明在该点极限存在，求参数。

若该点极限存在，则该点两侧的极限都相等。

例题：设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x(b\cos x-1)}{e^x+a}, & x>0\\ \dfrac{\sin x}{\ln(1+3x)}, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处极限存在，则 a，b 分别为。

解：首先根据极限在 $x=0$ 存在，且极限的唯一性。分段函数在 0 两侧的极限值必然相等。

$\because\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{3x}=\dfrac{1}{3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x(b\cos x-1)}{e^x+a}$。

又 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x(b\cos x-1)}{e^x+a}$ 的分母的 e^x 当 $x\to0^+$ 时 $e^x\to1$，假如 $a\neq-1$，则 $e^x+a\neq0$，则为一个常数。

从而提取常数因子：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x(b\cos x-1)}{e^x+a}=\dfrac{1}{1+a}\lim\limits_{x\to0^+}\sin x(b\cos x-1)$，这时候 $\sin x$ 是趋向 0 的，而 $b\cos x-1$ 无论其中的 b 为何值都是趋向一个常数或 0，这时候他们的乘积必然为无穷小，从而无法等于 $\dfrac{1}{3}$ 这个常数。

$\therefore a=-1$，从而让极限式子变为一个商的形式：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x(b\cos x-1)}{e^x+a}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x(b\cos x-1)}{e^x-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x(b\cos x-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}b\cos x-1=b-1=\frac{1}{3}$$

$\therefore a=-1,b=\dfrac{4}{3}$。

4.4 极限唯一性

若极限存在则必然唯一。

例题：设 a 为常数，$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-\pi}{e^{\frac{2}{x}}+1}+a\cdot\arctan\dfrac{1}{x}\right)$ 存在，求出极限值。

因为求 $x\to0$，所以需要分两种情况讨论：

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-\pi}{e^{\frac{2}{x}}+1}+a\cdot\arctan\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-\pi}{e^{\frac{2}{x}}+1}\right)+\lim_{x\to0^+}\left(a\cdot\arctan\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{0\cdot\left(e^{\frac{2}{x}}\right)^2+e^{\frac{1}{x}}-\pi}{1\cdot\left(e^{\frac{2}{x}}\right)^2+1}\right)+a\cdot\frac{\pi}{2}=a\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-\pi}{e^{\frac{2}{x}}+1}+a\cdot\arctan\frac{1}{x}\right)=-\pi+a\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi-\frac{\pi}{2}\cdot a$$

因为极限值具有唯一性，所以 $-\pi-\dfrac{\pi}{2}a=\dfrac{\pi}{2}a$，所以 $a=-1$，极限值为 $-\dfrac{\pi}{2}$。

4.5 函数连续性

函数的连续性代表：极限值 = 函数值。

4.5.1 判断函数连续

题目给出函数，往往是分段函数，然后判断分段点的连续性。

例题：讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]}$。

又 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\ln\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}-\dfrac{1}{2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$。

$\therefore\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}$。

又 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$，且 $f(0)=e^{-\frac{1}{2}}$。

从而 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

4.5.2 连续性求极限

例题：函数在 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $f(1)=1$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[2+f\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right]$。

根据题目，所求的 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[2+f\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right]$ 中，唯一未知的且会随着 $x\to+\infty$ 而变换就是 $f\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$。如果我们可以求出这个值就可以了。

而我们对于 $f(x)$ 的具体的关系是未知的，只知道 $f(1)=1$。那么先需要考察 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$ 的整数最大值。

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}f(x^{\frac{1}{x}})=f(1)=1$。

4.6 迭代式数列

4.6.1 数列表达式

最重要的是将迭代式进行变形。

例题：数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=0,a_1=1,2a_{n+1}=a_n+a_{n-1},n=1,2,\cdots$。计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

首先看题目，给出的递推式设计到二阶递推，即存在三个数列变量，所以我们必须先求出对应的数列表达式。因为这个表达式涉及三个变量，所以尝试对其进行变型：

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_{n-1}-a_n}{2}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)(a_n-a_{n-1})=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2(a_{n-1}-a_{n-2})$

$=\cdots$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n (a_1 - a_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

然后得到了 $a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$，而需要求极限，所以使用列项相消法的逆运算：

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_1 - a_0) + a_0$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^0$$

$$= \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{2}{3}$$

4.6.2 单调有界准则

对于无法将关系式通过变形归纳为一般式的关系式，对于其极限就必须使用单调有界准则来求出。

单调有界的数列必有极限。需要证明单调性和有界性，然后对式子求极限就能求出目标极限。

例题：$x_0 = 0$，$x_n = \dfrac{1 + 2x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}(n \in N*)$，求 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$。

首先应该知道数列的趋向都是趋向正无穷。

然后对关系式进行变形：$x_n = \dfrac{1 + 2x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} = 2 - \dfrac{1}{1 + x_{n-1}}$。

首先证明单调性，令 $f(x) = 2 - \dfrac{1}{1 + x}$。

$\therefore f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$，则 $f(x)$ 单调递增。

所以不管 $x = x_{n-1}$ 或其他，$f'(x) > 0$，x_n 都是单调递增，则 $x_n \geqslant x_0 = 0$。

然后证明有界性，$\because x_n \geqslant 0$ 且单调，$\therefore x_n = 2 - \dfrac{1}{1 + x_{n-1}} \in [0, 2]$。

从而 x_n 有界。

所以根据单调有界定理，x_n 的极限存在。

对于关系式两边取极限：

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 2x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} = \dfrac{1 + 2\lim\limits_{n \to \infty} x_{n-1}}{1 + \lim\limits_{n \to \infty} x_{n-1}} = \dfrac{1 + 2\lim\limits_{n \to \infty} x_n}{1 + \lim\limits_{n \to \infty} x_n}$。

解该一元二次方程：$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$，又根据保号性，$\lim\limits_{n \to \infty} x_n > 0$。

$\therefore \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$。

而许多题目只给出样子，连通项公式都不会给出。

例题：求出数列 $\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdots$ 的极限。

根据数列样式，无法通过普通的通项公式来表达，所以需要考虑使用递推式来表示：$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$。

首先证明有界性：

给定一个任意的正整数 k，再根据递推式，假定 $x_k<2$，所以 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$。且 $x_1=\sqrt{2}$ 满足假定，所以 $x_k<2$ 对于任意的正整数 k 都成立，所以 x_n 存在上界 2。

然后证明单调性，根据其递推式：

$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\dfrac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=\dfrac{-(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n}$。

又 $0<x_n<2$，从而上式子大于 0，从而数列单调递增。

所以根据单调有界定理，数列 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 一定存在极限，令其极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

将递推式两边平方并取极限：$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(2+x_n)$。

从而 $a^2=2+a$，得出 $a=2$（根据极限的保号性 -1 被舍去）。

4.7 变限积分极限

已知更改区间限制的积分 $s(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}g(t)\,\mathrm{d}x$，$s'(x)=g[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2'(x)-g[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x)$。