不定积分与定积分

Didnelpsun

目录

1 不定积分

1.1 基本积分

例题：汽车以 20m/s 的速度行驶，刹车后匀减速行驶了 50m 停止，求刹车加速度。

已知题目含有两个变量：距离和时间，设距离为 s，时间为 t。

因为汽车首先按 20m/s 匀速运动，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=20$，最开始距离为 0，所以 $s|_{t=0}=0$。

又因为是匀减速的，所以速度形如：$v=\dfrac{s}{t}=kt+b$，从而令二阶导数下 $\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=k$。

所以 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t=\int k\,\mathrm{d}t=kt+C_1$。

代入 $\left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=20$，所以 $C_1=20$，即 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=kt+20$。

所以 $\mathrm{d}s=(kt+20)\,\mathrm{d}t$，从而 $s=\displaystyle\int(kt+20)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}kt^2+20t+C_2$。

又 $s|_{t=0}=0$，所以代入得 $C_2=0$，所以 $s=\dfrac{1}{2}kt^2+20t$。

当 $s=50$ 时停住，所以此时 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$，得到 $t=-\dfrac{20}{k}$。

代入 s：$50=\dfrac{1}{2}k\left(-\dfrac{20}{k}\right)^2+20\left(-\dfrac{20}{k}\right)$，解得 $k=-4$，即加速度为-4m/s^2。

1.2 换元积分

1.2.1 第一类换元

1.2.1.1 聚集因式

将复杂的式子转换为简单的一个因式放到 d 后面看作一个整体，然后利用基本积分公式计算。

例题：求 $\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$。

$=\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x\ln\ln x}=\int\dfrac{\mathrm{d}(\ln\ln x)}{\ln\ln x}=\ln|\ln\ln x|+C$。

例题：求 $\displaystyle\int\dfrac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$。

$=-\displaystyle\int 10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{2}\int 10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}(2\arccos x)=-\dfrac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10}+C$。

1.2.1.2 积化和差

对于两个三角函数的乘积可以使用积化和差简单计算。

例题：求 $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x \,\mathrm{d}x$。

$\displaystyle= \int \cos 3x \sin 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x)\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{2}\int \sin 5x \,\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{10}\cos 5x + \dfrac{1}{2}\cos x + C$。

1.2.1.3 三角拆分

主要用于 $\sec^2 - 1 = \tan^2 x$，当出现 $\tan^2$、$\tan^3$ 等与 $\sec x$ 在一起作为乘积时可以考虑拆分换元。

例题：$\displaystyle\int \tan^3 x \sec x \,\mathrm{d}x$。

$\displaystyle= \int (\sec^2 x - 1)\tan x \sec x \,\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}(\sec x) = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$。

需要利用到有理积分的高阶多项式分配与低阶多项式因式分解。

1.2.1.4 反三角换元

当积分式子中存在 $\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$ 这种反三角函数时，可以考虑将其令为 t 来进行简化计算。从而 x 分别为 $\sin t$、$\cos t$、$\tan t$。

1.2.1.5 指对换元

当积分式子存在指数函数 e^x 或对数函数 $\ln x$ 时，可以考虑令其为 t，从而 x 分别为 $\ln t$ 和 e^t。

1.2.1.6 倒数换元

当被积函数的分母的幂次要比分子高两次以及以上时，令 $x = \dfrac{1}{t}$。

1.2.1.7 有理换元

书上这个类型属于有理函数部分，我这里移动到第一类换元中。即将无理因式直接设为一个变量，从而提高式子的阶数，消除无理式变为有理式。

有理换元时无理因式中的 x 必须是一阶的，如 $\sqrt[3]{x+6} = u$，若是二阶需要利用第二类换元（三角换元），否则则无法消去无理因式项，因为 x 不能用单个的 u 来表示，如 $\sqrt{x^3+6} = u$，$u = \sqrt[3]{u^2-6}$。

例题：求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}$。

令 $u=\sqrt[3]{x+1}$，从而 $x=u^3-1$，$\mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$。

$=\displaystyle\int\frac{3u^2}{1+u}\mathrm{d}u=\int\frac{3u^2+3u-3u-3+3}{1+u}\mathrm{d}u=\int\left(3u-3+\frac{3}{1+u}\right)\mathrm{d}u$

$=\dfrac{3}{2}u^2-3u+3\ln|1+u|+C=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|+C$。

例题：求 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$。

令 $u=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，$x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)=\dfrac{-2u(1+u^2)-2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}$

$=\displaystyle\int u\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot\frac{-4u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\int\frac{-4u^2}{(1-u)(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u$

令 $\dfrac{A}{1-u}+\dfrac{B}{1+u}+\dfrac{Cu+D}{1+u^2}=\dfrac{-4u^2}{(1-u)(1+u)(1+u^2)}$。

通分：$A(1+u^2+u+u^3)+B(1+u^2-u-u^3)+(Cu-Cu^3+D-Du^2)$

$=(A-B-C)u^3+(A+B-D)u^2+(A-B+C)u+(A+B+D)=-4u^2$

$\therefore A-B-C=0$，$A+B-D=-4$，$A-B+C=0$，$A+B+D=0$。

$\therefore A=B=-1$，$C=0$，$D=2$。

原式 $=\displaystyle\int\left(\frac{2}{1+u^2}-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$

$=2\arctan u+\ln|1-u|-\ln|1+u|+C$

$=2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+C$。

1.2.1.8 万能公式

同样属于有理积分的内容，但是本质还是属于三角函数的部分。

令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，$\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$。

例题：求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$。

令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，从而 $\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$：

$=\displaystyle\int\frac{1}{3+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}+C$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\tan\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$。

1.2.2 第二类换元

使用换元法做了换元之后是要带回式子中的，也就是说要保证反函数的存在才能代入有意义。为了保证反函数的存在，因此要保证原函数的单调性，所以要有一个规定的范围来使原函数保证单调。

1.2.2.1 $\sqrt{a^2-x^2}$：$x=a\sin t(a\cos t)$

若令 $x=a\sin t$，则根据 $\sin t\in(-1,1)$ 得到主区间：$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$。

若令 $x=a\cos t$，则根据 $\cos t\in(-1,1)$，得到主区间：$t\in(0,\pi)$。

例题：求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$。

令 $x=\sin t$（$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$），所以 $\sqrt{1-x^2}=\cos t$，$\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$，$t=\arcsin x$。

因为式子 $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}>0$，单调递减，所以不用讨论正负号。

$$=\int\frac{\cos t}{1+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{2\cos^2\dfrac{t}{2}-1}{2\cos^2\dfrac{t}{2}}\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t-\int\sec^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=t-\tan\frac{t}{2}+C$$

$$=t-\frac{\sin\dfrac{t}{2}}{\cos\dfrac{t}{2}}+C=t-\frac{\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}{\cos^2\dfrac{t}{2}}+C=t-\frac{\sin t}{1+\cos t}+C$$

$$=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C。$$

1.2.2.2 $\sqrt{a^2+x^2}$：$x=a\tan t$

根据 $\tan t\in R$，从而得到主空间：$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$。

例题：求 $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$。

虽然本题目看着可以从分母解开平方，然后低阶分配，但是这分母是平方的式子很难分配，所以需要使用换元法。

令 $x=\tan t$，$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x^2+1=\sec^2 t$，$\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$。

因为 $(x^2+1)^2>0$，虽然 x^3+1 可能为负可能为正，但是都是单调递增的，所以不用考虑正负号。

$$=\int\frac{\tan^3 t+1}{\sec^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\sin^3 t+\cos^3 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\sin t(1-\cos^2 t)+\cos^3 t}{\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\int\frac{\cos^2 t-1}{\cos t}\mathrm{d}(\cos t)+\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\int\cos t\,\mathrm{d}(\cos t)-\int\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}(\cos t)+\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int\cos 2t\,\mathrm{d}(2t)$$

$$=\int\cos^t-\ln\cos t+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C\text{（}\cos t\text{ 在 }t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\text{ 中为正）}$$

$\because\tan t=x$，$\therefore\sin t=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$。

$$=\frac{1+x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\arctan x+C。$$

1.2.2.3 $\sqrt{x^2-a^2}$：$x=a\sec t$

根据 $\sec t \in (-1,1)$，所以从而得到主空间：$t \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$。

例题：求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x$。

令 $x=3\sec t$。$\therefore \sqrt{x^2-9}=3\tan t$，$\mathrm{d}x=3\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$。

因为式子 $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}$ 的分子必然为为正，而对于分子在 0 两边的单调性不同，所以需要对 x 进行正负区分，又 $x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$，所以：

当 $x>3$ 时，$\sec t>1$，即 $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。

$=\displaystyle\int 3\tan^2 t\,\mathrm{d}t=3\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t$

$=3\tan t-3t+C=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\dfrac{3}{x}+C$。

当 $x<-3$ 时，$\sec t<-1$，即 $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$。

$=-\displaystyle\int 3\tan^2 t\,\mathrm{d}t=-3\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t$

$=-3\tan t+3t+C=\sqrt{x^2-9}+3\arccos\dfrac{3}{x}+C$（$\tan t<0$）

$=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\dfrac{3}{-x}+3\pi+C$（$3\arccos\dfrac{3}{x}=3\pi-3\arccos-\dfrac{3}{x}$）

$=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\dfrac{3}{-x}+C$。

综上结果为 $\sqrt{x^2-9}-3\arccos\dfrac{3}{|x|}+C$。

1.2.2.4 辅助换元

在使用换元法的时候有可能单个式子不能求出积分，而使用其他辅助式子加减在一起积分可以得到结果，从而能得到原式和辅助式子的积分结果。对于这类题目需要观察什么样的式子能让积分简单。

例题：求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$。

令 $x=\sin t$，所以 $\sqrt{1-x^2}=\cos t$，$\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$。

$\because x+\sqrt{1-x^2}$ 可能为正可能为负，正负时单调性不同，所以令 $x+\sqrt{1-x^2}=0$，即 $\sin t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $t\in(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4})\cup(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$。

$\therefore=\displaystyle\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$（$t\in(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$）。

这时你会发现使用积化和差、万能公式、倍角公式都无法解出这个积分，所以这时候就需要另外一个辅助积分式子加上或减去这个式子，从而让和以及差更容易解出积分。这里根据式子特点让辅助式子分子为 $\sin t$：

令 $I_1=\displaystyle\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$，$I_2=\displaystyle\int\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$。

$I_1+I_2=\displaystyle\int\frac{\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t=t$。

$I_1 - I_2 = \int \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(\sin t + \cos t)}{\sin t + \cos t} = \ln|\sin t + \cos t| + C$。

所以 $I_1 = \frac{1}{2}(\arcsin x + \ln|x + \sqrt{1-x^2}|) + C$。

同理 $t \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 也得到同样结果。

1.2.2.5 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

当被积函数含有根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 时，需要对其配方变成 $\sqrt{\varphi^2(x)+k^2}$、$\sqrt{\varphi^2(x)-k^2}$、$\sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$ 三种形式再进行三角函数换元。

1.3 分部积分

因为分部积分法使用 $\int u \,\mathrm{d}v = uv - \int v \,\mathrm{d}u$，所以基本上用于两项乘积形式的积分式子。

函数积分难度为：反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数。越往右求导越难，左边更应该当 u 进行求导，而右边更适合做 v 进行积分。

1.3.1 基本分部

如果不是多次分部就是基本分部，目的都是为了降低积分式子幂次。

1.3.1.1 非幂函数优先

当幂函数与一些微分后能降低幂函数幂次的函数在一起时，先对非幂函数优先分部积分，结果与幂函数相乘可以消去幂次，以达到降低幂次的作用。

如 $\int x^n \ln x \,\mathrm{d}x$，$\int x^n \arctan x \,\mathrm{d}x$，$\int x^n \arcsin x \,\mathrm{d}x$。

例题：求 $\int x^2 \arctan x \,\mathrm{d}x$。

$= \frac{1}{3}\int \arctan x \,\mathrm{d}(x^3) = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int x^3 \,\mathrm{d}(\arctan x)$

$= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x + x^3 - x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}$

$= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$。

1.3.1.2 幂函数优先

当幂函数与三角函数在一起微分时，因为三角函数无论如何积分都不会被消去，所以应该优先消去幂函数部分，从而降低幂次。

如 $\int x^a \sin x \,\mathrm{d}x$，$\int x^a \cos x \,\mathrm{d}x$。

例题：求 $\int x \tan^2 x \,\mathrm{d}x$。

$= \int x(\sec^2 -1)\,\mathrm{d}x = \int x \,\mathrm{d}(\tan x) - \dfrac{x^2}{2} = x\tan x + \ln|\cos x| - \dfrac{x^2}{2} + C$。

1.3.2 多次分部

对于一部分通过微分形式不会发生变化的函数，所以需要多次积分，然后利用等式求出目标值。即三角函数和指数函数，这两种积分形式不变，指数函数一次积分保持不变，而三角函数两次积分保持不变。

如：$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$，$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$。

例题：求 $\int e^x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$。

$= \sin^2 x \cdot e^x - \int e^x \,\mathrm{d}(\sin^2 x) = \sin^2 x \cdot e^x - \int e^x \cdot \sin 2x \,\mathrm{d}x$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \int \sin 2x \,\mathrm{d}(e^x) = \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + \int e^x \,\mathrm{d}(\sin 2x)$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2\int e^x \cdot \cos 2x \,\mathrm{d}x$ （①）

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2\int \cos 2x \,\mathrm{d}(e^x)$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x - 2\int e^x \,\mathrm{d}(\cos 2x)$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4\int e^x \cdot \sin 2x \,\mathrm{d}x$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4\int \sin 2x \,\mathrm{d}(e^x)$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4\sin 2x \cdot e^x - 4\int e^x \,\mathrm{d}(\sin 2x)$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4\sin 2x \cdot e^x - 8\int e^x \cdot \cos 2x \,\mathrm{d}x$ （②）

然后①=②：$\int e^x \cdot \cos 2x \,\mathrm{d}x = \dfrac{e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)}{5} + C$

代入①：$= \dfrac{e^x(5\sin^2 x - 5\sin 2x + 2\cos 2x + 4\sin 2x)}{5} + C$

$= \dfrac{e^x(5\sin^2 x - \sin 2x + 2\cos 2x)}{5} + C = e^x\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5}\sin 2x - \dfrac{1}{10}\cos 2x\right) + C$

$\int uv''' \,\mathrm{d}x = \int u \,\mathrm{d}(v'') = uv'' - \int v''u' \,\mathrm{d}x$

$\int u'v'' \,\mathrm{d}x = \int u' \,\mathrm{d}(v') = u'v' - \int v'u'' \,\mathrm{d}x$

$\int u''v' \,\mathrm{d}x = \int u'' \,\mathrm{d}v = u''v - \int vu''' \,\mathrm{d}x$

$\therefore \int uv''' \,\mathrm{d}x = uv'' - u'v' + u''v - \int u'''v \,\mathrm{d}x$。

1.3.3 分部与换元

分部积分法和换元积分法经常一起使用。

例题：求 $\int e^{\sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}x$。

令 $\sqrt[3]{x} = u$，从而 $x = u^3$，$\mathrm{d}x = 3u^2 \,\mathrm{d}u$。

$= 3\int e^u u^2\,\mathrm{d}u = 3\int u^2\,\mathrm{d}(e^u) = 3u^2e^u - 3\int e^u\,\mathrm{d}(u^2) = 3u^2e^u - 6\int e^u u\,\mathrm{d}u$
$= 3u^2e^u - 6\int u\,\mathrm{d}(e^u) = 3u^2e^u - 6ue^u + 6\int e^u\,\mathrm{d}u = 3u^2e^u - 6ue^u + 6e^u + C$
$= 3e^u(u^2 - 2u + 2) + C = 3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 2) + C$。

例题： 求 $\int e^{\sqrt{3x+9}}\,\mathrm{d}x$。

令 $\sqrt{3x+9} = u$，从而 $x = \dfrac{1}{3}(u^2 - 9)$，$\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}u\,\mathrm{d}u$：

$= \dfrac{2}{3}\displaystyle\int ue^u\,\mathrm{d}u = \dfrac{2}{3}\int u\,\mathrm{d}(e^u) = \dfrac{2}{3}ue^u - \int \dfrac{2}{3}e^u\,\mathrm{d}u = \dfrac{2}{3}ue^u - \dfrac{2}{3}e^u + C$
$= \dfrac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}}(\sqrt{3x+9} - 1) + C$。

1.4 有理积分

1.4.1 高阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$，且 $f(x)$、$g(x)$ 都为与 x 相关的多项式，$f(x)$ 阶数高于或等于 $g(x)$，则 $f(x)$ 可以按照 $g(x)$ 的形式分配，约去式子，得到最简单的表达。

例题： $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$。

$$= \int \frac{x^3 + 9x - 9x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3+9x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x - \int \frac{9x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int x\,\mathrm{d}x - \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln(9+x^2) + C。$$

1.4.2 低阶多项式分解

当不定积分式子形如 $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$，且 $f(x)$、$g(x)$ 都为与 x 相关的多项式，$f(x)$ 阶数低于 $g(x)$，且 $g(x)$ 可以因式分解为 $g(x) = g_1(x)g_2(x)\cdots$ 时，先因式分解再进行运算。

因式分解时需要注意两点：一点是分解后的式子的分子最高阶要低于分母最高阶数一阶；二是当分母中出现某一因式有大于等于二的幂次时，需要把其分解为从一阶到其当前阶数的因式相加，但是阶数跟一阶因式的分子阶数一样，否则就缺一个不等式而求不出来。

虽然分母可以因式分解，但是整个式子不一定能因式分解，特别是某个因子的阶数高于一阶，所以若不能因式分解则可以考虑低阶多项式分配的方式。

例题： 求 $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$。

令 $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{x-1} = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$。

通分：$=A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2$

$=A(x^2-1)+B(x-1)+C(x^2+2x+1)$

$=(A+C)x^2+(B+2C)x+(C-A-B)=x^2+1$。

从而 $A+C=1$，$B+2C=0$，$C-A-B=1$。

所以 $A=C=\dfrac{1}{2}$，$B=-1$，所以 $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{2(x-1)}$。

$\therefore=\displaystyle\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}\right]\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{2}\ln|x-1|+\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+\dfrac{1}{x+1}+C=\dfrac{1}{2}\ln|x^2-1|+\dfrac{1}{x+1}+C$。

1.4.3 低阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\displaystyle\int\frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$，且 $f(x)$、$g(x)$ 都为与 x 相关的多项式，$f(x)$ 阶数低于 $g(x)$，且 $g(x)$ 不能因式分解为 $g(x)=g_1(x)g_2(x)\cdots$ 时，则可以分配式子：$\displaystyle\int\frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x=a_1\int\frac{\mathrm{d}(f_1(x))}{g_1(x)}+a_2\int\frac{\mathrm{d}(f_2(x))}{g_2(x)}+\cdots$，将积分式子组合成积分结果为分式的函数，如 $\ln x$、$\arcsin x$、$\arctan x$ 等。

例题：求 $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$。

因为 x^2+2x+3 不能因式分解，所以考虑将分子按照分母形式进行分配。优先对高阶的 x 进行分配。

首先因为分子最高阶为 x 只比分母最高阶 x^2 低一阶，所以考虑将 $x-1$ 分配到微分号内。

$\because\mathrm{d}(x^2+2x+3)=2x+2$，而现在是 $x-1$，所以：

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}$

$-\displaystyle\int\frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2x+3)-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$

$=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\sqrt{2}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+C$。

1.4.4 低阶多项式因式分解与分配

有时候一个式子需要同时用到因式分解和分配两种方式。

例题：求 $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\mathrm{d}x$。

$=\displaystyle\int\frac{x^5-x^3+x^4-x^2+x^3-x+x^2+x-8}{x^3-x}\mathrm{d}x$

$= \int x^2\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x + \displaystyle\int \frac{x^x+x-8}{x^3-x}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \displaystyle\int \frac{x^2+x-8}{x^3-x}\mathrm{d}x$

令 $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{x-1} = \dfrac{x^2+x-8}{x^3-x}$。

$\therefore (A+B+C)x^2 + (C-B)x - A = x^2 + x - 8$。$A = 8$，$B = -4$，$C = -3$。

$= \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + \displaystyle\int \frac{8}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{4}{x+1}\mathrm{d}x - \int \frac{3}{x-1}\mathrm{d}x$

$= \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + 8\ln|x| - 4\ln|x+1| - 3\ln|x-1| + C$。

1.4.5 有理积分与其他积分运算

换元积分法可以与有理积分、分部积分共同使用。

例题：求 $\displaystyle\int \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$。

首先根据因式分解：$\dfrac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{Ax+B}{x^2+x+1} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}$。

$\therefore Ax^3 + (A+B)x^2 + (A+B+C)x + (B+D) = -x^2 - 2$。

解得：$A = 0$，$B = D = -1$，$C = 1$。

$= \displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$

$= -\dfrac{1}{2(x^2+x+1)} - \dfrac{3}{2}\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

$\because x^2 + x + 1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$，$\therefore$ 令 $u = x + \dfrac{1}{2}$，$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$：

$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(u^2+a^2)^2}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\left(a^2\left(\left(\frac{u}{a}\right)^2+1\right)\right)^2}$,使用第二类换元法（三角换元）：$\dfrac{u}{a} = \tan t$，$u = a\tan t$，$\mathrm{d}u = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$，$t = \arctan\dfrac{u}{a}$。

$\therefore = \displaystyle\int \frac{a\sec^2 t}{a^4\sec^4 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a^3}\int \frac{\mathrm{d}t}{sec^2 t} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^3}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$

$= \dfrac{1}{a^3}\int \mathrm{d}t + \dfrac{1}{2a^3}\int \cos 2t\,\mathrm{d}(2t) = \dfrac{t}{a^3} + \dfrac{\sin 2t}{2a^3} = \dfrac{\arctan\frac{u}{a}}{a^3} + \dfrac{\sin t\cos t}{a^3}$。

$\because \tan t = \dfrac{u}{a}$，$\therefore \tan^2 t = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1-\cos^2 t}{\cos 2t} = \dfrac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} = \dfrac{u^2}{a^2}$

$\therefore \sin t = \dfrac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}$，$\cos t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}$，$\dfrac{\sin t\cos t}{a^3} = \dfrac{u}{a^2(a^2+u^2)}$。

$\therefore$ 原式 $= -\dfrac{1}{2(x^2+x+1)} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} - \dfrac{3}{2}\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$

$= -\dfrac{1}{2(x^2+x+1)} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\arctan\frac{u}{a}}{a^3} + \dfrac{u}{a^2(a^2+u^2)}\right) + C$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\
&-\frac{3}{2}\left(\frac{\arctan\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} + \frac{x+\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)}\right)+C \\
&= -\frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\
&-\frac{3}{2}\left(\frac{\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}} + \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}(x^2+x+1)}\right)+C \\
&= -\frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2x+1}{x^2+x+1}+C \\
&= -\frac{4x+3}{2(x^2+x+1)} - \frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C。
\end{aligned}
$$

2 定积分

2.1 定限积分与极限

若极限中有 n 这种变量，也可以通过定积分的定义来做，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_1^0 f(x)\,\mathrm{d}x$。

1. 先提出 $\frac{1}{n}$。
2. 凑出 $\frac{i}{n}$。
3. 写出 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。

例题：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$。

即求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$。如果我们要传统求的话一般使用夹逼准则，找到放缩的两个函数。

所以找到两个：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+n} < \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} < \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+1}$。

即 $\frac{1}{2} < \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} < \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$。夹逼准则失败。

所以对 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$ 通过定积分定义进行计算。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=[\ln(1+x)]_0^1=\ln 2。$$

例题：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+4}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2}\right)$。

即求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n+i}{n^2+i^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n^2+ni}{n^2+i^2}\cdot\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1+\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$

$$=\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\left[\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2。$$

2.2 变限积分

2.3 牛莱公式

2.4 换元积分

2.5 分部积分

2.6 反常积分

3 积分应用

3.1 面积

3.2 体积

3.3 弧长