

# 多元函数微分学

Didnelpsun

## 目录

<b>1</b>	<b>基本概念</b>	<b>1</b>
1.1	二元函数 . . . . .	1
1.2	复合函数 . . . . .	1
1.2.1	链式法则 . . . . .	1
1.2.2	特殊值反代 . . . . .	2
1.3	积分与微分 . . . . .	2
1.3.1	积分到微分 . . . . .	2
1.3.2	微分到积分 . . . . .	2
1.4	全微分 . . . . .	3
1.4.1	含参数 . . . . .	3
1.4.2	极限定义 . . . . .	3
1.4.3	隐函数 . . . . .	4
<b>2</b>	<b>多元函数微分应用</b>	<b>5</b>
2.1	极值 . . . . .	5
2.2	空间曲线的切线与法平面 . . . . .	5
2.2.1	参数方程 . . . . .	5
2.2.2	交面式方程 . . . . .	5
2.3	空间曲面的切平面与法线 . . . . .	6
2.3.1	隐式 . . . . .	6
2.3.2	显式 . . . . .	6

# 1 基本概念

## 1.1 二元函数

函数以  $f(u, v)$  的形式来出现, 需要分别对其求偏导。

**例题:** 设  $z = e^{xy} + f(x + y, xy)$ ,  $f(u, v)$  有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

解: 令  $x + y$  为  $u$ ,  $xy$  为  $v$ ,  $f(u, v)$  对  $u$  求导就是  $f'_1$ , 对  $v$  求导就是  $f'_2$ , 求  $uv$  依次求导就是  $f''_{12}$ , 以此类推。

首先求一次偏导:  $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = ye^{xy} + f'_1 + f'_2 y$ 。

接着对  $y$  求偏导:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + \frac{\partial f'_1}{\partial y} + \frac{\partial f'_2 y}{\partial y}$ 。  
 $= e^{xy} + xye^{xy} + \frac{\partial f'_1}{\partial y} + \frac{\partial f'_2}{\partial y} y + f'_2 \frac{\partial y}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + \frac{\partial f'_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f'_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f'_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + f'_2$   
 $= e^{xy} + xye^{xy} + f''_{11} + f''_{12}x + f''_{21}y + f''_{22}xy + f'_2$ 。

又  $f(u, v)$  具有两阶连续偏导数, 所以  $f''_{12} = f''_{21}$ 。

即  $= e^{xy} + xye^{xy} + f''_{11} + (x + y)f''_{12} + xyf''_{22} + f'_2$ 。

## 1.2 复合函数

函数以复合函数形式  $f(g(x, y))$  出现, 函数的变量是一个整体。

### 1.2.1 链式法则

若是给出相应的不等式可以通过链式法则求出对应的表达式。

**例题:** 设  $u = u(\sqrt{x^2 + y^2})$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ ) 有二阶连续的偏导数, 且满足  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2$ , 则求  $u(\sqrt{x^2 + y^2})$ 。

解: 这个函数是复合函数  $u = u(r)$  和  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  而成。根据复合函数求导法则:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{du}{dr} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{du}{dr} \cdot \frac{x}{r}, \quad \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{du}{dr} \cdot \frac{x}{r} \right) = \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{du}{dr} \right) + \frac{du}{dr} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) = \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{du}{dr} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{du}{dr} \cdot \frac{r - x \cdot (\partial r / \partial x)}{r^2} \\ &= \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \cdot \frac{r^2 - x^2}{r^3} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{du}{dr} \cdot \frac{y}{r} \right) = \frac{y}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{du}{dr} \right) + \frac{du}{dr} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r} \right) = \frac{y}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{du}{dr} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{du}{dr} \cdot \frac{r^2 - y^2}{r^3} \\ &= \frac{y^2}{r^2} \cdot \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} \cdot \frac{r^2 - y^2}{r^3}\end{aligned}$$

代入不等式:  $\frac{x^2+y^2}{r^2} \cdot \frac{du^2}{dr^2} + \frac{du}{dr} \cdot \frac{2r^2-x^2-y^2}{r^3} - \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} + u = x^2+y^2$ 。

代入  $x^2+y^2=r^2$ :  $\frac{d^2u}{dr^2} + u = r^2$ , 为二阶线性常系数微分方程。

通解为  $u = C_1 \cos r + C_2 \sin r + r^2 - 2$ 。

即  $u(\sqrt{x^2+y^2}) = C_1 \cos \sqrt{x^2+y^2} + C_2 \sin \sqrt{x^2+y^2} + x^2+y^2 - 2$ 。

### 1.2.2 特殊值反代

若是给出的不等式后还给出对应的特殊值, 可以直接代入然后反代求出函数, 而不用链式法则。

**例题:** 设  $z = e^x + y^2 + f(x+y)$ , 且当  $y=0$  时,  $z = x^3$ , 则求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。

**解:** 已知  $y=0$  时,  $z = e^x + f(x) = x^3$ ,  $\therefore f(x) = x^3 - e^x$ ,  $f(x+y) = (x+y)^3 - e^{x+y}$ ,  $z = e^x + y^2 + (x+y)^3 - e^{x+y}$ 。

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = e^x + 3(x+y)^2 - e^{x+y}$ 。

## 1.3 积分与微分

### 1.3.1 积分到微分

可能一个函数是积分的形式, 又包含多个变量, 要求其多元微分值。

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = b'(x)f[b(x)] - a'(x)f[a(x)]。$$

**例题:** 设  $z = \int_0^1 |xy-t|f(t) dt$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , 其中  $f(x)$  为连续函数, 求  $z''_{xx} + z''_{yy}$ 。

**解:** 首先因为  $z$  是一个绝对值的形式, 所以根据积分的性质可以拆开积分区间去掉绝对值:  $z = \int_0^{xy} (xy-t)f(t) dt + \int_{xy}^1 (t-xy)f(t) dt = xy \int_0^{xy} f(t) dt - \int_0^{xy} tf(t) dt + \int_{xy}^1 tf(t) dt - xy \int_{xy}^1 f(t) dt$ 。

$$z'_x = y \int_0^{xy} f(t) dt + xy^2 f(xy) - xy^2 f(xy) - xy^2 f(xy) - y \int_{xy}^1 f(t) dt + xy^2 f(xy) = y \int_0^{xy} f(t) dt - y \int_{xy}^1 f(t) dt。$$

$$z''_{xx} = y^2 f(xy) + y^2 f(xy) = 2y^2 f(xy), \text{ 同理根据变量对称性 } z''_{yy} = 2x^2 f(xy), \\ z''_{xx} + z''_{yy} = 2(x^2 + y^2)f(xy)。$$

### 1.3.2 微分到积分

注意多元函数进行积分的适合多出来的常数  $C$  不再是常数, 而是与积分变量相关的  $C(x)$ ,  $C(y)$ , 因为对其中一个变量积分时, 另一个变量是看作常数的。

**例题：** 设  $z = f(x, y)$  满足  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$ ，且  $f(x, 0) = x$ ， $f(0, y) = y^2$ ，求  $f(x, y)$ 。

解：根据  $\partial x \partial y$  的求导顺序反向积分：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int (x + y) dy = xy + \frac{1}{2}y^2 + C_1(x) \quad (x \text{ 看作常数})$$

再次积分  $z = \int \left( xy + \frac{1}{2}y^2 + C_1(x) \right) dx = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \int C_1(x) dx + C_2(y)$ 。 $(y \text{ 看作常数})$

又  $f(x, 0) = x$ ，代入  $\int C_1(x) dx + C_2(0) = x$ ，两边求导  $C_1(x) = 1$ ，即  $\int C_1(x) dx = \int dx = x$ ， $z = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + C_2(y)$ 。

又  $f(0, y) = y^2$ ，代入  $C_2(y) = y^2$ 。

$$\therefore z = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + y^2。$$

## 1.4 全微分

### 1.4.1 含参数

基本上是用含参数的全微分来求参数。有多种方法。

**例题：** 设  $(ax^2y^2 - 2xy^2)dx + (2x^3y + bx^2y + 1)dy$  是函数  $f(x, y)$  的全微分，求参数。

解：由全微分定义可知， $f'_x = ax^2y^2 - 2xy^2$ ， $f'_y = 2x^3y + bx^2y + 1$ 。

分别对其积分： $f(x, y) = \int (ax^2y^2 - 2xy^2)dx = \int (2x^3y + bx^2y + 1)dy$ 。

从而  $\frac{a}{3}x^3y^2 - x^2y^2 + C(y) = x^3y^2 + \frac{b}{2}x^2y^2 + y + C(x)$ ，解得  $a = 3$ ， $b = -2$ ， $f(x) = x^3y^2 - x^2y^2 + y$ 。

### 1.4.2 极限定义

全微分形式： $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$ 。

要求  $dz|_{(a,b)}$ ，就要求  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) - f(a, b) = cx + dy + o(\rho)$ ， $c$  和  $d$  就是  $dx dy$  的参数。

**例题：** 连续函数  $z = f(x, y)$  满足  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0$ ，求  $dz|_{(0,1)}$ 。

解：当  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 1$  时  $\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \rightarrow 0$ ，又  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0$ ，  
 $\therefore \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y) - 2x + y - 2 = 0$ 。

又  $f(x, y)$  连续，则  $f(0, 1) + 1 - 2 = 0$ ， $f(0, 1) = 1$ 。将值代入，并按分子配方：

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - f(0, 1) - 2x + (y - 1)}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0$ , 即  $f(x, y) - f(0, 1) = 2x - (y - 1) + o(\rho)$ 。

根据全微分的定义偏导数就是其系数,  $f'_x(0, 1) = 2$ ,  $f'_y(0, 1) = -1$ 。

$\therefore dz|_{(0,1)} = 2dx - dy$ 。

**例题:** 设  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处连续, 且  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - a - bx - cy}{\ln(1 + x^2 + y^2)} = 1$ , 其中  $a, b, c$  为常数, 求  $df(x, y)|_{(0,0)}$ 。

**解:** 根据全微分的定义, 分母应该是根号的形式, 所以对于极限使用等价无穷小替换  $\ln(x+1) \sim x$ ,  $\ln(1+x^2+y^2) = x^2+y^2$ ,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - a - bx - cy}{x^2 + y^2} = 1$ 。

又  $(x, y) \rightarrow 0$  时  $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ ,  $\therefore f(x, y) - a - bx - cy \rightarrow 0$ 。

又  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处连续,  $f(0, 0) = a$ 。根据极限和无穷小的关系将其代回:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - bx - cy}{x^2 + y^2} = 1 + o(1)。$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) - f(0, 0) - bx - cy = x^2 + y^2 + o(1) \cdot (x^2 + y^2) = o(\rho)。$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) - f(0, 0) = bx + cy + o(\rho)。$$

$$\text{即 } f'_x(0, 0) = b, \quad f'_y(0, 0) = c. \quad df(x, y)|_{(0,0)} = bdx + cdy。$$

### 1.4.3 隐函数

二元隐函数求导公式:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ 。

三元隐函数求导公式:  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$ 。

**例题:** 设  $f(x, y, z) = e^x + y^2z$ , 其中  $z = z(x, y)$  由  $x + y + z + xyz = 0$  确定, 求  $f'_x(0, 1, -1)$ 。

**解:**  $f'_x(x, y, z) = e^x + y^2z'_x$ 。

又  $x + y + z + xyz = 0$  对  $x$  求导:  $1 + z'_x + yz + xyz'_x = 0$ , 代入  $(0, 1, -1)$ ,  $1 + z'_x - 1 = 0$ ,  $z'_x = 0$ 。代入  $f'_x(x, y, z) = e^0 = 1$ 。

## 2 多元函数极值最值

### 2.1 无条件极值

## 3 多元函数微分应用

### 3.1 空间曲线的切线与法平面

#### 3.1.1 参数方程

设空间曲线  $\Gamma$  由参数方程 
$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$$
 给出, 其中  $\phi(t), \psi(t), \omega(t)$  均可导,

$P_0(x_0, y_0, z_0)$  为  $\Omega$  上的点, 且当  $t = t_0$  时,  $\phi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$  均不为 0, 则:

- 曲线  $\Gamma$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的切向量为  $\vec{\tau} = (\phi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$ 。
- 曲线  $\Gamma$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的切线方程为  $\frac{x - x_0}{\phi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$ 。
- 曲线  $\Gamma$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的法平面 (过  $P_0$  且与切线垂直的平面) 方程为  $\phi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$ 。

#### 3.1.2 交面式方程

设空间曲线  $\Gamma$  由交面方程 
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$
 给出, 则:

- 曲线  $\Gamma$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的切向量为

$$\vec{\tau} = \left( \left| \begin{array}{cc} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{array} \right|_{P_0}, \left| \begin{array}{cc} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{array} \right|_{P_0}, \left| \begin{array}{cc} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{array} \right|_{P_0} \right)。$$

- 曲线  $\Gamma$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\left| \begin{array}{cc} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{array} \right|_{P_0}}, \frac{y - y_0}{\left| \begin{array}{cc} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{array} \right|_{P_0}}, \frac{z - z_0}{\left| \begin{array}{cc} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{array} \right|_{P_0}}。$$

- 曲线  $\Gamma$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的法平面方程为

$$\left| \begin{array}{cc} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{array} \right|_{P_0} (x - x_0) + \left| \begin{array}{cc} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{array} \right|_{P_0} (y - y_0) + \left| \begin{array}{cc} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{array} \right|_{P_0} (z - z_0) = 0。$$

## 3.2 空间曲面的切平面与法线

### 3.2.1 隐式

设空间曲面  $\Sigma$  由方程  $F(x, y, z) = 0$  给出,  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  是  $\Sigma$  上的点, 则:

- 曲面  $\Sigma$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的法向量为  $\vec{n} = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0))$  且法线方程为  $\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$ 。
- 曲面  $\Sigma$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面方程为  $F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$ 。

### 3.2.2 显式

设空间曲面  $\Sigma$  由方程  $z = f(x, y)$  给出, 令  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ , 假定法向量的方向向下, 即其余  $z$  轴正向所成的角为钝角, 即  $z$  为-1, 则:

- 曲面  $\Sigma$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的法向量为  $\vec{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$ , 且法线方程为  $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$ 。
- 曲面  $\Sigma$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的切平面方程为  $f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$ 。

若是反之成锐角, 则将里面所有的-1 都换成 1。

若用  $\alpha, \beta, \gamma$  表示曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0, z_0)$  处的法向量的方向角, 并这里假定法向量的方向是向上的, 即其余  $z$  轴正向所成的角  $\gamma$  为锐角, 则法向量方向余弦为  $\cos \alpha = \frac{-f'_x}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}, \cos \beta = \frac{-f'_y}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}$ , 其中  $f_x = f'_x(x_0, y_0), f_y = f'_y(x_0, y_0)$ 。

**例题:** 设直线  $L \begin{cases} x + y + b = 0 \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$  在平面  $\pi$  上, 而平面  $\pi$  与曲面  $z = x^2 + y^2$  相切于  $(1, -2, 5)$ , 求  $ab$  的值。

解:  $L$  在  $\pi$  上且与曲面相切, 则  $\pi$  为  $L$  的切平面。设曲面方程  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ 。

曲面法向量为  $\vec{n} = \{F'_x, F'_y, F'_z\} = \{2x, 2y, -1\}$ , 代入  $(1, -2, 5)$ , 则法向量为  $\{2, -4, -1\}$ 。

又点法式:  $\pi: 2(x - 1) - 4(y + 2) - (z - 5) = 0$ , 即  $2x - 4y - z - 5 = 0$ 。

联立直线方程, 得到:  $(5 + a)x + 4b + ab - 2 = 0$ , 又  $x$  是任意的。

解得  $a = -5, b = -2$ 。