

# 矩阵

Didneipsun

## 目录

<b>1</b>	<b>矩阵的幂</b>	<b>1</b>
1.1	对应成比例 . . . . .	1
1.2	试算归纳 . . . . .	1
1.3	拆分矩阵 . . . . .	1
<b>2</b>	<b>初等变换</b>	<b>2</b>
2.1	可逆矩阵 . . . . .	2
<b>3</b>	<b>逆矩阵</b>	<b>3</b>
3.1	定义法 . . . . .	3
3.2	分解乘积 . . . . .	3
3.3	初等变换 . . . . .	4
3.4	分块矩阵 . . . . .	4
<b>4</b>	<b>矩阵方程</b>	<b>5</b>

# 1 矩阵的幂

## 1.1 对应成比例

因为矩阵运算不满足交换率但是满足结合率，且一行矩阵乘一列矩阵的乘积为一个数，所以可以推出矩阵的幂的运算方法。

这个方法要求  $r(A) = 1$ ，即对应成比例。

令  $A$  为  $n$  阶方阵，将  $A$  拆为  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T (b_1, b_2, \dots, b_n) = \alpha^T \beta$ ，所以  $A^n = \alpha^T \beta \alpha^T \beta \dots \alpha^T \beta$ ，利用结合率： $\alpha^T (\beta \alpha^T) (\beta \dots \alpha^T) \beta$ ，中间一共  $n-1$  个  $\beta \alpha^T$ ， $\beta \alpha^T$  是一个数，即  $A^n = (\beta \alpha^T)^{n-1} \alpha^T \beta = (\beta \alpha^T)^{n-1} A$ 。

例题：  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ ，求  $A^n$ 。

解： $A = (1, -2, 3)^T (1, 2, 3)$ ，所以  $A^n = ((1, 2, 3)(1, -2, 3)^T)^n (1, -2, 3)^T (1, 2, 3) = 6^{n-1} A$ 。

若矩阵  $A$  的行与列都成比例，则  $A^n = [tr(A)]^{n-1} A$ ， $[tr(A)] = \sum a_{ii}$ ，即矩阵迹为对角线元素值之和。

## 1.2 试算归纳

对  $A$  进行试算，如  $A^2$ ，若  $A^k$  是一个数量阵，那么计算  $A^n$  就只用找规律就可以了。

例题：  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ，求  $A^n$  ( $n \geq 2$ )。

解：通过计算得知  $A^2 = 4E$ ，这是一个数量阵。

$$\therefore A^n = \begin{cases} 4^k E, & n = 2k \\ 4^k A, & n = 2k + 1 \end{cases}。$$

## 1.3 拆分矩阵

将  $A^n$  拆分为两个矩阵  $A^n = (B+C)^n$ ，其中  $BC$  应该是可逆的，即  $BC = CB$ ，所以一般有一个是  $E$ 。

例题：  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，求  $A^n$ 。

解：  $A = E + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

$\therefore A^n = (E + B)^n = C_n^0 E^n + C_n^1 E^{n-1} B + C_n^2 E^{n-2} B^2 + \dots$ 。

又  $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ 。

$\therefore B^4 = B^5 = \dots = O$ 。

$\therefore A^n = (E + B)^n = C_n^0 E^n + C_n^1 E^{n-1} B + C_n^2 E^{n-2} B^2$ 。

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## 2 初等变换

### 2.1 可逆矩阵

若  $A$  和  $B$  等价，求一个可逆矩阵  $P$ ，使得  $PA = B$ 。只用右乘  $P = BA^{-1}$ 。

需要根据逻辑上的计算还原出左乘的初等矩阵。

例题：  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ ，  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，当  $A \sim B$  时，求  $P$

使得  $PA = B$ 。

解：目标是将  $A$  变为  $B$ ，所以第一步将第一列的第二行的-1 变为 0。即将第一行加到第二行。

$$\text{左乘 } E_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = C。$$

然后对第二列进行消，首先将第三行加上第二行的两倍。

$$E_{32}(2)C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B。$$

$$\therefore E_{32}(2)E_{21}(1)A = B。$$

$$P = E_{32}(2)E_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}。$$

## 3 逆矩阵

### 3.1 定义法

找出一个矩阵  $B$ ，使得  $AB = E$ ，则  $A$  可逆， $A^{-1} = B$ 。

**例题：**  $A, B$  均是  $n$  阶方阵，且  $AB = A + B$ ，证明  $A - E$  可逆，并求  $(A - E)^{-1}$ 。

**解：** 要证明  $A - E$ ，就要从  $AB = A + B$  中尽量凑出。

$AB = A + B$  变为  $AB - B = A$ ，从而提取  $(A - E)B = A$ ， $(A - E)BA^{-1} = E$ 。

但是  $A^{-1}$  是未知的，所以  $A - E$  的逆矩阵不能用  $BA^{-1}$  来表示。

$AB - A = B$ ，所以提出  $A(B - E) = B$ ，即  $A(B - E) = B - E + E$ ， $(A - E)(B - E) = E$ ，所以  $A - E$  的逆矩阵就是  $B - E$ 。

### 3.2 分解乘积

将  $A$  分解为若干个可逆矩阵的乘积。若  $A = BC$ ， $B, C$  可逆，则  $A$  可逆，且  $A^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ 。

**例题：** 设  $A, B$  为同阶可逆方阵，且  $A^{-1} + B^{-1}$  可逆，求  $(A + B)^{-1}$ 。

**解：** 已知  $A^{-1} + B^{-1}$  可以用来表示其他式子，需要求  $A + B$  的逆，则需要将  $A + B$  转为其逆。

$$\therefore A + B = A(E + A^{-1}B) = A(B^{-1} + A^{-1})B。$$

$$\therefore (A + B)^{-1} = B^{-1}(B^{-1} + A^{-1})^{-1}A^{-1}。$$

### 3.3 初等变换

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{c} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}.$$

### 3.4 分块矩阵

基于拉普拉斯展开式。

对于一些分块矩阵的逆, 若  $A, B$  都可逆, 则:  $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix},$

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

**例题:** 已知  $A = \begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}$ , 其中  $B$  为  $r \times r$  可逆矩阵,  $C$  为  $s \times s$  可逆矩阵, 求  $A^{-1}$ 。

解:  $\because |A| = \begin{vmatrix} B & O \\ D & C \end{vmatrix} = |B||C| \neq 0$ , 所以  $A$  可逆, 设  $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ 。

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = E_{r+s}. \text{ 即 } \begin{pmatrix} BX & BY \\ DX + CZ & DY + CW \end{pmatrix} = E_{r+s}.$$

$$\therefore \begin{cases} BX = E \\ BY = O \\ DX + CZ = O \\ DY + CW = E \end{cases}, \begin{cases} B^{-1}BX = B^{-1}, & X = B^{-1} \\ B^{-1}BY = O, & Y = O \\ CZ = -DX = -DB^{-1}, & Z = -C^{-1}DB^{-1} \\ CW = E, & W = C^{-1} \end{cases}.$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

当分块矩阵为三角矩阵时, 对角线为原方块矩阵的逆矩阵, 非 0 的一角为原矩阵, 再左乘同行的逆矩阵, 右乘同列的逆矩阵。

$$\therefore A = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

当分块矩阵为副对角矩阵时, 对角线为对角方块矩阵的逆矩阵, 非 0 的一角为原矩阵, 再左乘同行的逆矩阵, 右乘同列的逆矩阵。

$$\therefore A = \begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \end{pmatrix}。$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_n^{-1} \end{pmatrix}。$$

$$A = \begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \ddots & \\ A_n & & \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} & & A_n^{-1} \\ & \ddots & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}。$$

## 4 矩阵方程

含有未知矩阵的方程就是矩阵方程，需要将方程进行恒等变形，化为  $AX = B$ 、 $XA = B$  或  $AXB = C$  的形式。

若  $A$ 、 $B$  可逆，且可以分别得到  $X = A^{-1}B$ ， $X = BA^{-1}$ ， $X = A^{-1}CB^{-1}$ 。

**例题：**设 3 阶方阵  $A$ ， $B$  满足  $A^{-1}BA = 6A + BA$ ，且  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ ，

求  $B$ 。

**解：** $A^{-1}BA = (6E + B)A$ ， $A^{-1}B = 6E + B$ ， $A^{-1}B - B = 6E$ ， $(A^{-1} - E)B = 6E$ 。

$\therefore B = 6(A^{-1} - E)^{-1}$ 。