

# 无穷级数

Didnelpsun

## 目录

<b>1</b>	<b>常数项级数</b>	<b>1</b>
1.1	概念 . . . . .	1
1.1.1	基本概念 . . . . .	1
1.1.2	性质 . . . . .	1
1.2	级数敛散性判别 . . . . .	2
1.2.1	正项级数 . . . . .	2
1.2.1.1	概念 . . . . .	2
1.2.1.2	收敛原则 . . . . .	2
1.2.1.3	比较判别法 . . . . .	2
1.2.1.4	比较判别法极限性质 . . . . .	3
1.2.1.5	比值判别法 . . . . .	3
1.2.1.6	根值判别法 . . . . .	4
1.2.2	交错级数 . . . . .	4
1.2.2.1	概念 . . . . .	4
1.2.2.2	莱布尼兹判别法 . . . . .	4
1.2.3	任意项级数 . . . . .	5
1.2.3.1	概念 . . . . .	5
1.2.3.2	绝对收敛 . . . . .	5
1.2.3.3	条件收敛 . . . . .	5
<b>2</b>	<b>幂级数</b>	<b>6</b>
2.1	概念 . . . . .	6
2.1.1	定义 . . . . .	6

2.1.2	阿贝尔定理 . . . . .	7
2.1.3	收敛域 . . . . .	7
2.1.3.1	具体型 . . . . .	7
2.1.3.2	抽象型 . . . . .	8
2.2	幂级数求和函数 . . . . .	9
2.2.1	概念 . . . . .	9
2.2.2	运算法则 . . . . .	9
2.2.3	性质 . . . . .	10
2.2.4	重要展开式 . . . . .	10
2.3	函数展开为幂级数 . . . . .	11
2.3.1	概念 . . . . .	11
2.3.2	求法 . . . . .	11
2.3.2.1	直接法 . . . . .	11
2.3.2.2	间接法 . . . . .	11
<b>3</b>	<b>傅里叶级数</b>	<b>11</b>
3.1	* 三角级数 . . . . .	11
3.2	函数展开为傅里叶级数 . . . . .	12

# 1 常数项级数

## 1.1 概念

级数的经典悖论为芝诺悖论。

### 1.1.1 基本概念

**定义：**给定义一个无穷数列  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ，将其各项用加号连起来的得到的记号  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ，即  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  叫做无穷级数，简称级数，其中  $u_n$  称为该级数的通项。

若  $u_n$  是常数而不是函数，则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  就被称为常数项无穷级数，简称常数项级数。

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  称为级数的部分和， $\{S_n\}$  是级数的部分和数量。

**定义：**若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ，则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛，并称  $S$  为该收敛级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的和；若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  不存在或为  $\pm\infty$ ，则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散。

研究  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛还是发散，就是研究级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的敛散性。

在级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  去掉前  $m$  项，得  $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots$ ，称为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的  $m$  项后余项

### 1.1.2 性质

1. 线性性质：若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  均收敛，且其和分别为  $S$ ， $T$ ，则任给常数  $a, b$ ，有  $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$  也收敛，且其和为  $aS + bT$ ，即  $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n + b \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 。
2. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛，则其任意  $m$  项后余项  $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$  也收敛；若存在  $m$  项后余项  $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$  收敛，则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛。
3. 级数收敛必要条件：若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

证明性质三： $u_n = S_n - S_{n-1}$ ，所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$ 。极限为 0 不一定收敛。

## 1.2 级数敛散性判别

### 1.2.1 正项级数

#### 1.2.1.1 概念

**定义：**若通项  $u_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为正项级数。

#### 1.2.1.2 收敛原则

**定理：**正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的充要条件是其部分和数列  $\{S_n\}$  有界。(某一函数在固定区间内变化率是有界的, 则变化范围是有界的)

证明：必要性：由于  $u_n \geq 0, \therefore S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \geq 0$ , 且  $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots, \{S_n\}$  单调不减且下界为 0。当  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在, 则  $\{S_n\}$  必有上界。有上界下界则  $\{S_n\}$  有界。(某一函数在固定区间内变化率是有界的, 则变化范围是有界的)

充分性：由于  $\{S_n\}$  单调不减, 所以根据单调有界准则,  $\{S_n\}$  收敛, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在, 于是  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛。

基本就是使用放缩法判断是否有界。

**定理：**等比级数 (几何级数):  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a} q^{n-1} \begin{cases} |q| < 1, \text{收敛} \\ |q| \geq 1, \text{发散} \end{cases}$ 。

**例题：**判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  的敛散性。

解:  $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时  $\sqrt{n} \rightarrow \infty$ , 无上界所以发散。

#### 1.2.1.3 比较判别法

**定理：**给出两个正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ , 若从某项开始有  $u_n \leq v_n$  成立, 则:

①若  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛; ②若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  也发散。  
即大的收敛小的也收敛, 小的发散大的也发散。

**例题：**判断调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  的敛散性。

解:  $\because x > 0, x > \ln(1+x), \therefore \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 。

又对于  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$ 。

$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$ 。当  $\ln(n+1)$  在  $n \rightarrow \infty$  时,  $S_n \rightarrow \infty$ 。

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  也发散。

**定理:**  $p$  级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1, \text{收敛} \\ p \leq 1, \text{发散} \end{cases}$ 。

#### 1.2.1.4 比较判别法极限性质

是比较判别法的推论, 利用极限的阶数来比较。

给出两个正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ,  $v_n \neq 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ :

1. 若  $A = 0$ , 则当  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛。
2. 当  $A = +\infty$ , 当  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也发散。
3. 若  $0 < A < +\infty$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  具有相同敛散性。

**例题:** 判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$  敛散性。

解: 令  $\frac{1}{n} = x$ ,  $n \rightarrow \infty$  所以  $x \rightarrow 0^+$ 。当  $x \rightarrow 0^+$ ,  $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ 。  
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{6} \neq 0$ , 所以  $\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}$  与  $\frac{1}{n^3}$  具有相同敛散性。

根据  $p$  级数定理,  $p = 3 > 1$ , 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$  收敛。

#### 1.2.1.5 比值判别法

也称为达朗贝尔判别法。根据自己的通项的商进行比较。

**定理:** 给出一正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ , 则: ①若  $\rho < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛; ②若  $\rho > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散。

**注意:**  $\rho = 1$  时无法根据此判断  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  敛散性, 如  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛。

适用于含有  $a^n$ ,  $n!$ ,  $n^n$  的通项。

**例题:** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n n!}{n^n}$  的敛散性, 其中  $a$  为非零常数。

解: 记  $u_n = \frac{|a|^n n!}{n^n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = |a| e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n}{n+1}} = |a| e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)} = |a| e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)} = |a| e^{-1} = \frac{|a|}{e}$ 。

若  $0 < |a| < e$ , 所以收敛; 若  $|a| > e$ , 所以发散; 若  $|a| = e$ , 则回代得到比值  $e \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow 1^+$ , 且  $u_1 = e$ ,  $\therefore u_n > u_1 > 0$ , 所以发散。

### 1.2.1.6 根值判别法

也称为柯西判别法。

**定理:** 给出正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ , 则①若  $\rho < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛; 若  $\rho > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散。

适用于含有  $a^n, n^n$  的通项。

同理  $\rho = 1$  也会失效。

**例题:** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^3}$  的敛散性。

**解:** 记  $u = \left( n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^3}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(n \sin \frac{1}{n} - 1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}} = e^{-\frac{1}{6}} < 1$ , 所以收敛。

## 1.2.2 交错级数

### 1.2.2.1 概念

**定义:** 若级数各项正负相间出现, 则这样的级数是交错级数, 一般写为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$ , 其中  $u_n > 0$ 。

### 1.2.2.2 莱布尼兹判别法

**定义:** 给出一交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ,  $u_n > 0, n = 1, 2, \cdots$ , 若  $\{u_n\}$  单调不增  $u_n \geq u_{n+1}$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 则该级数收敛。

**例题:** 判断交错调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  的敛散性。

**解:**  $\because \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 。

且  $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ , 所以级数收敛。

**例题:** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2})$  的敛散性, 其中  $a$  为非零常数。

**解:**  $\because \sin(\alpha + n\pi) = (-1)^n \sin \alpha$ .  $\therefore \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2}) = \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2} - n\pi + n\pi) = (-1)^n \sin \left( \frac{a^2 \pi}{\sqrt{n^2 + a^2} + n} \right)$ 。

记  $u_n = \sin\left(\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)$ , 又  $n \rightarrow \infty$  时  $\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n} \rightarrow 0^+$  且单调不增,  $\sin x$  在  $x \rightarrow 0^+$  时也是单调函数, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  且单调不增。

所以收敛。

**例题:** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{1+n}$  的敛散性。

**解:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n)}{1+n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$ 。

对  $\frac{\ln(1+n)}{1+n}$  进行比较有些麻烦, 所以令  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ 。

$f'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $\{u_n\}$  单调减少, 所以收敛。

### 1.2.3 任意项级数

#### 1.2.3.1 概念

**定义:** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  各项可为正可为负, 可为零, 则这种级数就是任意项级数。

给任意项级数每一项加上绝对值  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$ , 就得到了正项级数, 称为原级数的绝对值级数。

#### 1.2.3.2 绝对收敛

**定义:** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  为任意项级数, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  绝对收敛。

#### 1.2.3.3 条件收敛

**定义:** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  为任意项级数, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$  发散, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  条件收敛。

**定理:** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  必收敛。(绝对收敛则收敛)

**定理:** 收敛级数的项任意加括号后所得的新级数仍收敛, 且其和不变。

**定理:** 若原级数绝对收敛, 不论将其项如何排列, 则所得的新级数也收敛, 且其和不变。(绝对收敛的级数具有可交换性)

**例题:** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则下面级数必收敛的是 ()。

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{u_n}{n}$       B.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$       C.  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$       D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

解：对于  $A$ ，取  $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ ，则原来  $\frac{u_n}{n} = (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$  收敛，但是乘上  $(-1)^n$  就不一定收敛，得到  $\frac{1}{n \ln n}$ 。

**定理：** 广义  $p$  级数：  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \begin{cases} p > 1, \text{收敛} \\ p \leq 1, \text{发散} \end{cases}$ 。（ $n=1$  无意义，从  $n=2$  开始不影响其敛散性）

所以  $A$  发散。

对于  $B$ ，取  $u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ ，则  $u_n^2 = \frac{1}{n}$ ，调和级数不收敛。

对于  $C$ ，取  $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ，则得到  $u_{2n-1} - u_{2n} = \frac{1}{n}$ ，调和级数不收敛。

对于  $D$ ，由于  $u_n$  收敛，则  $u_{n+1}$  也收敛，所以相加也收敛，选  $D$ 。

**定理：** 若  $u_n^2$  收敛，则  $\frac{u_n}{n}$  绝对收敛。

证明：因为不等式  $|a||b| \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2}$ ， $\therefore 0 \leq |u_n \frac{1}{n}| \leq \frac{u_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2}$ 。

且  $u_n^2$  收敛，则  $\frac{u_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2}$  也收敛，根据性质得证。

## 2 幂级数

### 2.1 概念

#### 2.1.1 定义

**定义：** 设函数列  $\{u_n(x)\}$  定义在区间  $I$  上，称  $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$  为定义在区间  $I$  上的函数项级数，记为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ，当  $x$  取确定的值  $x_0$  时， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  成为常数项级数  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x_0)$ 。

**定义：** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的一般项  $u_n(x)$  为  $n$  次幂函数，则称  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  为幂级数，是一种常用的函数项级数，一般形式为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$ ，其标准形式为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ ，其中  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 为幂级数的系数。

幂级数也称为泰勒级数，与泰勒展开式一样的结构。

**定义：** 若给定  $x_0 \in I$ ，有  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  收敛，则称点  $x_0$  为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛点；若给定  $x_0 \in I$ ，有  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  发散，则点  $x_0$  为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的发散点。



### 2.1.2 阿贝尔定理

**定义：**当幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在点  $x = x_1$  ( $x_1 \neq 0$ ) 处收敛时, 对于满足  $|x| < |x_1|$  的一切  $x$ , 幂级数**绝对收敛**; 当幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = x_2$  ( $x_2 \neq 0$ ) 处发散时, 对于满足  $|x| > |x_2|$  的一切  $x$ , 幂级数**发散**。

所以一定存在一个点  $R$ , 在  $|x| < |R|$  中绝对收敛, 在  $|x| > |R|$  中发散,  $R$  称为**收敛半径**。对于点  $\pm R$  需要代入幂级数变成常数项级数进行计算, 判别其敛散性。

### 2.1.3 收敛域

**定义：**函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的所有收敛点的集合就是其**收敛域**。

#### 2.1.3.1 具体型

收敛域的求法:

$$1. \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \text{ 则 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 收敛半径 } R \text{ 的表达式为 } \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}。$$

2. 开区间  $(-R, R)$  为幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛区间。

3. 代入  $R$  判断该点的敛散性, 最后组合得到收敛域。

但是这种方法有一点不方便, 如若只知道  $a_n$  和  $a_{n+2}$  的关系则求  $\rho = \frac{1}{R}$  比较麻烦。

收敛域的统一求法:

1. 取绝对值  $|u_0(x)| \geq 0$ , 从而可以使用正项级数的判别法。

2. 根据比值判别法或根值判别法, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \rho$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \rho$ , 令其小于 1, 得到收敛区间  $x \in (a, b)$ 。

3. 单独讨论  $x = a$ ,  $x = b$  处的敛散性, 得到收敛域。

**例题：**求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  的收敛域。

**解：**令  $|u_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n} \right|$ 。由于含有  $x^n$ , 所以使用比值判别法。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{n+1} \frac{n}{|x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x|。$$

令其小于 1, 即  $|x| < 1$ ,  $-1 < x < 1$ 。

当  $x = -1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{n}}$  收敛。当  $x = 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散。

所以  $x$  收敛域为  $[-1, 1)$ 。

### 2.1.3.2 抽象型

**定理:** 根据阿贝尔定理, 已知  $\lim_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  在某点  $x_1$  ( $x_1 \neq x_0$ ) 的敛散性, 确定该幂级数的收敛半径可分为三种情况:

1. 若在  $x_1$  处收敛, 则收敛半径  $R \geq |x_1 - x_0|$ 。
2. 若在  $x_1$  处发散, 则收敛半径  $R \leq |x_1 - x_0|$ 。
3. **注意:** 若在  $x_1$  处条件收敛, 则  $R = |x_1 - x_0|$ 。

**定理:** 已知  $\sum a_n(x-x_1)^n$  的敛散性, 讨论  $\sum b_n(x-x_2)^m$  的敛散性:

1.  $(x-x_1)^n$  与  $(x-x_2)^m$  的转换一般通过初等变形来完成, 包括①平移收敛区间; ②提出或乘以因式  $(x-x_0)^k$  等。
2.  $a_n$  与  $b_n$  的转换一般通过微积分变形来完成, 包括①对级数逐项求导; ②对级数逐项积分等。
3. 以下三种情况, 级数收敛半径不变, 收敛域要具体代入点讨论:
  - (a) 对级数提出或乘以因式  $(x-x_0)^k$  或进行平移等, 收敛半径不变。
  - (b) 对级数逐项求导, 收敛半径不变, 收敛域可能缩小。
  - (c) 对级数逐项积分, 收敛半径不变, 收敛域可能扩大。

**例题:** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$  在点  $x=1$  处条件收敛, 则幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$  在点  $x=2$  处 ()。

A. 绝对收敛    B. 条件收敛    C. 发散    D. 敛散性不确定

解:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-(-1))^n$ , 所以  $x_0 = -1$ 。

又  $x=1$  处条件收敛, 所以  $R = 1 - (-1) = 2$ 。从而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$  的收敛区间为  $(-3, 1)$ 。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$  要转换为  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ , 则首先中心点要从 -1 移动到 1,  $a_n(x+1)^n \rightarrow a_n(x-1)^n$ , 由于平移不改变收敛半径, 所以  $a_n(x-1)^n$  收敛区间为  $(1, 3)$ 。

然后将  $a_n(x-1)^n$  变为  $na_n(x-1)^n$ , 需要进行求导得到  $na_n(x-1)^{n-1}$ , 求导收敛半径不变, 所以收敛区间依然为  $(1, 3)$ 。最后还要乘上  $(x-1)$  得到  $na_n(x-1)^n$  就是所求, 收敛区间依然为  $(1, 3)$ 。

而在  $x=2$  在收敛区间内, 必然绝对收敛, 所以选 A。

## 2.2 幂级数求和函数

### 2.2.1 概念

**定义:** 在收敛域上, 记  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , 并称  $S(x)$  为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的**和函数**。

### 2.2.2 运算法则

若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  的收敛半径分别为  $R_a$  和  $R_b$  ( $R_a \neq R_b$ ), 则:

- $k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} k a_n x^n$ ,  $|x| < R$ ,  $k$  为常数。
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ ,  $|x| < R = \min\{R_a, R_b\}$ 。

实际运算中, 可能运算法则要求的起始  $n$  值不同,  $a_n b_n$  不为不包含  $x$  的常数,  $x^n$  的幂次不同, 恒等变形方法如下:

1. 通项, 下标一起变化:  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k+l}^{\infty} a_{n-l} x^{n-l}$ , 其中  $l$  为整数。
2. 只变下标, 只变通项:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_{k+l-1} x^{k+l-1} + \sum_{n=k+l}^{\infty} a_n x^n$ 。
3. 只变通项, 不变下标:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-l}$ 。

如  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n} = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^{2n}$ 。

### 2.2.3 性质

收敛域的扩大和缩小在于其端点是否通过求导或积分变得可取了。

- 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $S(x)$  在其收敛区间  $I$  上连续, 且如果幂级数在收敛区间的端点  $x = \pm R$  处收敛, 则和函数  $S(x)$  在  $(-R, R]$  或  $[-R, R)$  上连续。
- 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $S(x)$  在其收敛域  $I$  上可积, 且有逐项积分公式  $\int_0^x S(t) dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (x \in I)$ , 逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同收敛半径, 但是收敛域可能扩大。
- 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $S(x)$  在其收敛区间  $(-R, R)$  内可导, 且有逐项求导公式  $S'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (|x| < R)$ , 逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同收敛半径, 但是收敛域可能缩小。

### 2.2.4 重要展开式

$x$  的取值指其幂指数的收敛域。第七个幂函数问题较复杂, 收敛区间与  $\alpha$  取值有关。

1.  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty。$
2.  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1。$
3.  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1。$
4.  $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \leq 1。$
5.  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty。$
6.  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty。$
7.  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots,$   
$$\begin{cases} x \in (-1, 1), \text{ 当 } \alpha \leq -1 \\ x \in (-1, 1], \text{ 当 } -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1, 1], \text{ 当 } \alpha > 0 \end{cases}$$

## 2.3 函数展开为幂级数

### 2.3.1 概念

**定义：**若函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处存在任意阶导数，则称  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$  为函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的泰勒级数，则  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 。

当  $x_0 = 0$  时，称  $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$  为函数  $f(x)$  的麦克劳林级数，若收敛，则  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 。

都是函数展开成幂级数。

### 2.3.2 求法

#### 2.3.2.1 直接法

逐个计算  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$  并代入，但是一般很麻烦。

#### 2.3.2.2 间接法

利用已知的七个幂级数展开式，通过变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分和待定系数等得到。

**例题：**求函数  $f(x) = \arctan x$  在  $x = 0$  处的幂级数展开。

解：  $f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ ， $|x^2| < 1$ 。

已经求得求导后的函数的幂级数展开，所以求原函数的幂级数展开只需要积分，利用先导后积公式： $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 。

求导的级数要求  $|x| < 1$ ，代入  $x = \pm 1$  到最后结果得到两个交错级数，所以收敛域其实为  $[-1, 1]$ （可以不写）。

## 3 傅里叶级数

### 3.1 \* 三角级数

**定义：**将正弦函数  $A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$  按三角公式变形得到  $A_n \sin \varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos \varphi_n \sin n\omega t$ ，令  $\frac{a_0}{2} = A_0$ ， $a_n = A_n \sin \varphi_n$ ， $b_n = A_n \cos \varphi_n$ ， $\omega = \frac{\pi}{l}$ ，则

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right)$ 。这个级数就是三角级数。

### 3.2 函数展开为傅里叶级数

**定义：** 设  $f(x)$  在  $[-l, l]$  上连续或只有有限个第一类间断点，且至多只有有限个真正的极值点，则  $f(x)$  的傅里叶级数处处收敛，记和函数为  $S(x)$ ，有

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)。$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n = 1, 2, \dots。$$

其中三角函数也可以展开为幂级数，所以最后都能通过幂级数展开。

**例题：** 将  $f(x) = 1 - x^2$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) 展开为傅里叶级数。

$$\text{解： } S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)。$$

$$\text{其中 } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - x^2) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x^2) dx = 2 - \frac{2}{3}\pi^2。$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - x^2) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \cos nx dx - \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \right) = \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1}。$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - x^2) \sin nx dx = 0 \quad (\text{奇函数乘偶函数为奇函数，且上下限对称})$$

$$f(x) \sim S(x) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1} \cos nx。$$

**定义：** 当  $f(x)$  是偶函数，则  $\sin$  被消去， $f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$ ，称为余弦级数。

**定义：** 当  $f(x)$  是奇函数，则  $\cos$  被消去， $f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$ ，称为正弦级数。

若  $f(x)$  因为定义区间不对称导致无奇偶性，则补充定义域，使其称为奇偶函数。

$$\text{迪利克雷定理定义： } f(x) \sim S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \text{ 为间断点} \\ \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}, & x = \pm l \end{cases}$$