

# 矩阵

Didneipsun

## 目录

<b>1</b>	<b>矩阵幂</b>	<b>1</b>
1.1	对应成比例 . . . . .	1
1.2	试算归纳 . . . . .	1
1.3	行列结合 . . . . .	1
1.4	拆分矩阵 . . . . .	2
1.5	分块矩阵 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>初等变换</b>	<b>3</b>
2.1	可逆矩阵 . . . . .	3
<b>3</b>	<b>逆矩阵</b>	<b>3</b>
3.1	定义法 . . . . .	3
3.2	分解乘积 . . . . .	4
3.3	初等变换 . . . . .	4
3.4	分块矩阵 . . . . .	4
<b>4</b>	<b>方阵行列式</b>	<b>6</b>
4.1	两项积商 . . . . .	6
4.2	两项和差 . . . . .	6
<b>5</b>	<b>矩阵方程</b>	<b>7</b>
5.1	直接化简 . . . . .	7
5.2	凑目标式 . . . . .	7

<b>6</b>	<b>矩阵秩</b>	<b>8</b>
6.1	未知参数 . . . . .	8
6.2	矩阵运算 . . . . .	8

# 1 矩阵幂

## 1.1 对应成比例

因为矩阵运算不满足交换率但是满足结合率，且一行矩阵乘一列矩阵的乘积为一个数，所以可以推出矩阵的幂的运算方法。

这个方法要求  $r(A) = 1$ ，即对应成比例。

令  $A$  为  $n$  阶方阵，将  $A$  拆为  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T (b_1, b_2, \dots, b_n) = \alpha^T \beta$ ，所以  $A^n = \alpha^T \beta \alpha^T \beta \cdots \alpha^T \beta$ ，利用结合率： $\alpha^T (\beta \alpha^T) (\beta \cdots \alpha^T) \beta$ ，中间一共  $n-1$  个  $\beta \alpha^T$ ， $\beta \alpha^T$  是一个数，即  $A^n = (\beta \alpha^T)^{n-1} \alpha^T \beta = (\beta \alpha^T)^{n-1} A$ 。

例题： $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ ，求  $A^n$ 。

解： $A = (1, -2, 3)^T (1, 2, 3)$ ，所以  $A^n = ((1, 2, 3)(1, -2, 3)^T)^n (1, -2, 3)^T (1, 2, 3) = 6^{n-1} A$ 。

若矩阵  $A$  的行与列都成比例，则  $A^n = [tr(A)]^{n-1} A$ ， $[tr(A)] = \sum a_{ii}$ ，即矩阵迹为对角线元素值之和。

## 1.2 试算归纳

对  $A$  进行试算，如  $A^2$ ，若  $A^k$  是一个数量阵，那么计算  $A^n$  就只用找规律就可以了。

例题： $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ，求  $A^n$  ( $n \geq 2$ )。

解：通过计算得知  $A^2 = 4E$ ，这是一个数量阵。

$$\therefore A^n = \begin{cases} 4^k E, & n = 2k \\ 4^k A, & n = 2k + 1 \end{cases}。$$

## 1.3 行列结合

将一个矩阵拆成  $\alpha \beta^T$  的形式，其中都是列向量，从而进行幂运算可以进行结合  $\beta^T \alpha$  为一个常数。

例题：设  $\alpha = (1, 3, -2)^T$ ， $\beta = (2, 0, 0)^T$ ， $A = \alpha \beta^T$ ，求  $A^3$ 。

解:  $\because \beta^T \alpha = [2, 0, 0][1, 3, -2]^T = 2, \therefore A^3 = (\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T) = \alpha(\beta^T \alpha)(\beta^T \alpha)\beta^T = 4\alpha\beta^T = 4A。$

## 1.4 拆分矩阵

将  $A^n$  拆分为两个矩阵  $A^n = (B+C)^n$ , 其中  $BC$  应该是可逆的, 即  $BC = CB$ , 所以一般有一个是  $E$ 。

例题:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 求  $A^n$ 。

解:  $A = E + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$

$\therefore A^n = (E + B)^n = C_n^0 E^n + C_n^1 E^{n-1} B + C_n^2 E^{n-2} B^2 + \dots。$

又  $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$

$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O。$

$\therefore B^4 = B^5 = \dots = O。$

$\therefore A^n = (E + B)^n = C_n^0 E^n + C_n^1 E^{n-1} B + C_n^2 E^{n-2} B^2。$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## 1.5 分块矩阵

$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}。$

## 2 初等变换

### 2.1 可逆矩阵

若  $A$  和  $B$  等价, 求一个可逆矩阵  $P$ , 使得  $PA = B$ 。只用右乘  $P = BA^{-1}$ 。  
需要根据逻辑上的计算还原出左乘的初等矩阵。

例题:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 当  $A \sim B$  时, 求  $P$

使得  $PA = B$ 。

解: 目标是将  $A$  变为  $B$ , 所以第一步将第一列的第二行的-1 变为 0。即将第一行加到第二行。

$$\text{左乘 } E_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = C。$$

然后对第二列进行消, 首先将第三行加上第二行的两倍。

$$E_{32}(2)C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B。$$

$$\therefore E_{32}(2)E_{21}(1)A = B。$$

$$P = E_{32}(2)E_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}。$$

## 3 逆矩阵

### 3.1 定义法

找出一个矩阵  $B$ , 使得  $AB = E$ , 则  $A$  可逆,  $A^{-1} = B$ 。

例题:  $A, B$  均是  $n$  阶方阵, 且  $AB = A + B$ , 证明  $A - E$  可逆, 并求  $(A - E)^{-1}$ 。

解: 要证明  $A - E$ , 就要从  $AB = A + B$  中尽量凑出。

$AB = A + B$  变为  $AB - B = A$ , 从而提取  $(A - E)B = A$ ,  $(A - E)BA^{-1} = E$ 。

但是  $A^{-1}$  是未知的, 所以  $A - E$  的逆矩阵不能用  $BA^{-1}$  来表示。

$AB - A = B$ , 所以提出  $A(B - E) = B$ , 即  $A(B - E) = B - E + E$ ,  
 $(A - E)(B - E) = E$ , 所以  $A - E$  的逆矩阵就是  $B - E$ 。

### 3.2 分解乘积

将  $A$  分解为若干个可逆矩阵的乘积。若  $A = BC$ ,  $B, C$  可逆, 则  $A$  可逆,  
 且  $A^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ 。同理  $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ 。

**例题:** 设  $A, B$  为同阶可逆方阵, 且  $A^{-1} + B^{-1}$  可逆, 求  $(A + B)^{-1}$ 。

**解:** 已知  $A^{-1} + B^{-1}$  可以用来表示其他式子, 需要求  $A + B$  的逆, 则需要  
 将  $A + B$  转为其逆。

$$\because A + B = A(E + A^{-1}B) = A(B^{-1} + A^{-1})B.$$

$$\therefore (A + B)^{-1} = B^{-1}(B^{-1} + A^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

### 3.3 初等变换

$$\left[ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right] \xrightarrow{r} \left[ \begin{array}{c} E \\ A^{-1} \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right] \xrightarrow{c} \left[ \begin{array}{c} E \\ A^{-1} \end{array} \right].$$

### 3.4 分块矩阵

基于拉普拉斯展开式。

对于一些分块矩阵的逆, 若  $A, B$  都可逆, 则:  $\left[ \begin{array}{cc} A & O \\ O & B \end{array} \right]^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{array} \right],$

$$\left[ \begin{array}{cc} O & A \\ B & O \end{array} \right]^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{array} \right].$$

**例题:** 已知  $A = \begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}$ , 其中  $B$  为  $r \times r$  可逆矩阵,  $C$  为  $s \times s$  可逆  
 矩阵, 求  $A^{-1}$ 。

**解:**  $\because |A| = \begin{vmatrix} B & O \\ D & C \end{vmatrix} = |B||C| \neq 0$ , 所以  $A$  可逆, 设  $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ 。

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = E_{r+s}. \text{ 即 } \begin{pmatrix} BX & BY \\ DX + CZ & DY + CW \end{pmatrix} = E_{r+s}.$$

$$\therefore \begin{cases} BX = E \\ BY = O \\ DX + CZ = O \\ DY + CW = E \end{cases}, \begin{cases} B^{-1}BX = B^{-1}, & X = B^{-1} \\ B^{-1}BY = O, & Y = O \\ CZ = -DX = -DB^{-1}, & Z = -C^{-1}DB^{-1} \\ CW = E, & W = C^{-1} \end{cases} \\ \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

当分块矩阵为三角矩阵时，对角线为原方块矩阵的逆矩阵，非 0 的一角为原矩阵，再左乘同行的逆矩阵，右乘同列的逆矩阵。

$$\therefore A = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

当分块矩阵为副对角矩阵时，对角线为对角方块矩阵的逆矩阵，非 0 的一角为原矩阵，再左乘同行的逆矩阵，右乘同列的逆矩阵。

$$\therefore A = \begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \ddots & \\ A_n & & \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} & & A_n^{-1} \\ & \ddots & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}.$$

**例题：**已知矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，求  $A$ 。

**解：**由于  $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ ，所以  $A = |A|(A^*)^{-1}$ 。已知  $A^*$  可知  $(A^*)^{-1}$ ，所以重点就是求  $|A|$ 。

$$\text{又 } |A^*| = |A|^{n-1}, |A^*| = -8, |A| = -2.$$

所以根据分块矩阵的逆运算，可以得到  $(A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

所以  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 。

## 4 方阵行列式

### 4.1 两项积商

- $|A^T| = |A|$ 。
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 。
- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ 。
- $|AB| = |A| \cdot |B| = |BA|$ 。
- $|A^*| = |A|^{n-1}$ 。

因为两项积商比较简单，所以基本上会变换  $A$  和  $B$ ，让其变为转置或逆矩阵。

### 4.2 两项和差

两项和差需要将方阵拆分为向量组的形式，然后根据矩阵与行列式的运算法则进行运算。（注意其中的差别）

**例题：**设四阶方阵  $A = [\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$ ， $B = [\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$ ，其中  $\alpha, \beta, \gamma_i$  均为四维向量，且  $|A| = 5$ ， $|B| = -\frac{1}{2}$ ，求  $|A + 2B|$ 。

解：  $|[\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4] + 2[\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]| = |[\alpha + 2\beta, 3\gamma_2, 3\gamma_3, 3\gamma_4]| = 27|[\alpha + 2\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]| = 27(|A| + 2|B|) = 108$ 。



## 5 矩阵方程

含有未知矩阵的方程就是矩阵方程，需要将方程进行恒等变形，化为  $AX = B$ 、 $XA = B$  或  $AXB = C$  的形式。

若  $A$ 、 $B$  可逆，且可以分别得到  $X = A^{-1}B$ ， $X = BA^{-1}$ ， $X = A^{-1}CB^{-1}$ 。

### 5.1 直接化简

**例题：**设 3 阶方阵  $A$ ， $B$  满足  $A^{-1}BA = 6A + BA$ ，且  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ ，

求  $B$ 。

**解：** $A^{-1}BA = (6E + B)A$ ， $A^{-1}B = 6E + B$ ， $A^{-1}B - B = 6E$ ， $(A^{-1} - E)B = 6E$ 。

$\therefore B = 6(A^{-1} - E)^{-1}$ 。

### 5.2 凑目标式

有时候直接化简非常麻烦，因为所求的式子很复杂，甚至出现结果不能得到的情况。

**例题：**已知  $AB = A + B$ ，其中  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，求  $(A - E)^{-1}$ 。

**解：**已知  $AB = A + B$ ，求  $A - E$ ，则向目标计算。

$AB - B = A$ ，即  $(A - E)B = A$ ， $(A - E)^{-1} = BA^{-1}$ 。因为  $A$  未知，所以要消去  $A$ 。

根据  $AB = A + B$ ，得到  $AB - A = B$ ，即  $A(B - E) = B$ ， $A^{-1} = (B - E)B^{-1}$ 。

$(A - E)^{-1} = BA^{-1} = B(B - E)B^{-1}$ ，然后就不知道接下来怎么办了。

我们很希望  $BB^{-1}$  在一起消掉，但是无论如何操作都无法完成。但是也可以通过此得到解题的启示，按  $(A - E)(B - E)$  去凑。

回到  $(A - E)B = A$ ，去凑  $B - E$ ，先尝试两边减去  $E$ ，得到  $(A - E)B - E = A - E$ ，正好左移右项  $(A - E)(B - E) = E$ ，解得  $(A - E)^{-1} = B - E$ 。

即  $= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

## 6 矩阵秩

### 6.1 未知参数

已知一个矩阵的秩，求其矩阵中的参数。需要将矩阵简化，使得最下面的一行除了参数没有别的非零常数。

例题：已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ -1 & a & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $r(A) = 3$ ，求  $A$ 。

解：首先对  $A$  化简： $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-2 & 4-a \\ 0 & 0 & (a+1)(3-a) & a(a-3) \end{bmatrix}$ ，若  $r(A) = 3$ ，  
则  $(a+1)(3-a)$  与  $a(a-3)$  不全为 0，所以  $a \neq 3$ 。

### 6.2 矩阵运算

给出几个矩阵，进行矩阵运算求出对应的秩。

$$r(kA) = r(A)。$$

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}。当且仅当 AB 满秩等号成立。$$

$$r(A+B) \leq r(A|B) \leq r(A) + r(B)。$$

$$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n-1 \\ 0, r(A) < n-1 \end{cases}。$$

例题：已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，求  $r(AB+2A)$ 。

解： $r(AB+2A) = r(A(B+2E))$ 。又  $B+2E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ， $r(B+2E) =$

4。

$$\text{又 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

所以  $r(A) = 2$ ,  $r(AB + 2A) = \min\{r(A), r(B + 2E)\} = 2$ 。