多元函数微分学

Didnelpsun

目录

1　多元函数微分应用

1.1　空间曲线的切线与法平面

1.1.1　参数方程

设空间曲线 Γ 由参数方程 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ 给出，其中 $\phi(t),\psi(t),\omega(t)$ 均可导，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 Ω 上的点，且当 $t=t_0$ 时，$\phi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$，$\omega'(t_0)$ 均不为 0，则：

- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为 $\vec{\tau}=(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$。
- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\phi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$。
- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面（过 P_0 且与切线垂直的平面）方程为 $\phi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$。

1.1.2　交面式方程

设空间曲线 Γ 由交面方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 给出，则：

- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为
$\vec{\tau}=\left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0},\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0},\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0}\right)$。
- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为
$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}},\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0}},\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0}}$。
- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面方程为
$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0}(z-z_0)=0$。

1.2　空间曲面的切平面与法线

1.2.1　隐式

设空间曲面 Σ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 Σ 上的点，则：

- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),$ $F'_z(x_0,y_0,z_0))$ 且法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0}$。
- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为 $F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y$ $(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$。

1.2.2 显式

设空间曲面 Σ 由方程 $z=f(x,y)$ 给出，令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，假定法向量的方向向下，即其余 z 轴正向所成的角为钝角，即 z 为-1，则：

- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1)$，且法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$。
- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为 $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)$ $(y-y_0)-(z-z_0)=0$。

若是反之成锐角，则将里面所有的-1 都换成 1。

若用 α,β,γ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量的方向角，并这里假定法向量的方向是向上的，即其余 z 轴正向所成的角 γ 为锐角，则法向量**方向余弦**为 $\cos\alpha=\dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，其中 $f_x=f'_x(x_0,y_0)$，$f_y=f'_y(x_0,y_0)$。

例题：设直线 $L\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于 $(1,-2,5)$，求 ab 的值。

解：L 在 π 上且与曲面相切，则 π 为 L 的切平面。设曲面方程 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$。

曲面法向量为 $\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}=\{2x,2y,-1\}$，代入 $(1,-2,5)$，则法向量为 $\{2,-4,-1\}$。

又点法式：$\pi:2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$，即 $2x-4y-z-5=0$。

联立直线方程，得到：$(5+a)x+4b+ab-2=0$，又 x 是任意的。

解得 $a=-5,b=-2$。