

标题

Didnelpsun

目录

1	总体与样本	1
1.1	总体定义	1
1.2	样本	1
1.2.1	定义	1
1.2.2	分布	1
2	统计量与分布	1
2.1	统计量	1
2.2	常用统计量	2
2.3	顺序统计量	2
2.3.1	概念	2
2.3.2	性质	2
2.4	三大分布	3
2.4.1	χ^2 分布	3
2.4.1.1	概念	3
2.4.1.2	性质	3
2.4.2	t 分布	4
2.4.2.1	概念	4
2.4.2.2	性质	4
2.4.3	F 分布	4
2.4.3.1	概念	4
2.4.3.2	性质	5
2.5	正态总体下结论	5

3	参数点估计	6
3.1	概念	6
3.2	方法	6
3.2.1	矩估计法	6
3.2.2	最大似然估计	7
3.2.2.1	定义	7
3.2.2.2	步骤	8
3.3	估计量平均标准	9
3.3.1	无偏性	9
3.3.2	有效性	10
3.3.3	一致性	10
4	参数区间估计与假设检验	10
4.1	区间估计	10
4.1.1	概念	10
4.1.2	正态总体均值的置信空间	11
4.1.2.1	估计 μ 而 σ 已知	11
4.1.2.2	估计 μ 而 σ 未知	11
4.2	假设检验	11
4.2.1	思想	12
4.2.2	正态总体下的六大检验与拒绝域	12
4.3	两类错误	12

1 总体与样本

1.1 总体定义

定义：研究对象的全体称为总体，组成总体的每一个元素称为个体。

1.2 样本

1.2.1 定义

定义： n 个相互独立且域总体 X 有相同概率分布的随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 所组成的整体 (X_1, X_2, \dots, X_n) 称为来自总体 X ，容量为 n 的一个简单随机样本，简称样本。一次抽样结果的 n 个具体值 (x_1, x_2, \dots, x_n) 称为来自样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的一个观测值或样本值。

在概率论中称为独立同分布，而在数理统计就称为简单随机样本。

1.2.2 分布

对于容量为 n 的样本 X_1, X_2, \dots, X_n 有如下定理：假设总体 X 的分布函数为 $F(x)$ （概率密度为 $f(x)$ ，或概率分布为 $p_i = P\{X = x_i\}$ ），则 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数为 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i)$ 。

对于离散型随机变量联合分布： $F(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\}$ 。

对于连续型随机变量联合概率密度： $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$ 。

2 统计量与分布

2.1 统计量

设 X_1, X_2, \dots, X_n 来自总体 X 的一个样本， $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 n 元函数，若 g 中不含有任何未知参数，则称 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的一个统计量。若 (x_1, x_2, \dots, x_n) 为样本值，则称 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的观测值。

2.2 常用统计量

- 样本均值: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 。
- 样本方差: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 。
- 样本标准差: $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ 。
- 样本 k 阶 (原点) 矩: $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ ($k = 1, 2, \dots$)。
- 样本 k 中心矩: $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$ ($k = 1, 2, \dots$)。

2.3 顺序统计量

2.3.1 概念

将样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的 n 个观测量按其值从小到大的顺序排列, 得到 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ 。

随机变量 $X_{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 称为第 k 顺序统计量, 其中 $X_{(1)}$ 是最小顺序统计量, 而 $X_{(n)}$ 是最大顺序统计量。

$X_{(n)}$ 的分布函数为 $F_{(n)}(x) = [F(x)]^n$, 概率密度为 $f_{(n)}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x)$ 。

证明: $F_{(n)}(x) = P\{X_{(n)} \leq x\} = P\{\max\{x_1, \dots, x_n\} \leq x\} = P\{x_1 \leq x, \dots, x_n \leq x\} = P\{x_1 \leq x\} \cdots P\{x_n \leq x\} = F_{(1)}(x) \cdots F_{(n)}(x) = [F(x)]^n$ 。

$X_{(1)}$ 的分布函数为 $F_{(1)}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$, 概率密度为 $f_{(1)}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1}f(x)$ 。

证明: $F_{(1)}(x) = P\{X_{(1)} \leq x\} = P\{\min\{x_1, \dots, x_n\} \leq x\} = 1 - P\{\min\{x_1, \dots, x_n\} > x\} = 1 - P\{x_1 > x, \dots, x_n > x\} = 1 - P\{x_1 > x\} \cdots P\{x_n > x\} = 1 - [1 - P\{x_1 \leq x\}] \cdots [1 - P\{x_n \leq x\}] = 1 - [1 - F_{(1)}(x)] \cdots [1 - F_{(n)}(x)] = 1 - [1 - F(x)]^n$ 。

2.3.2 性质

设总体 X 的期望 $EX = \mu$, 方差 $DX = \sigma^2$, 样本 X_1, X_2, \dots, X_n 取自 X , \bar{X} 和 S^2 分别为样本的均值和方差, 则:

- $EX_i = \mu$ 。
- $DX_i = \sigma^2$ 。

- $E\bar{X} = EX = \mu$ 。
- $D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{1}{n} DX = \frac{\sigma^2}{n}$ 。
- $E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) = E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)\right) =$
 $E\left(\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2\right)\right) = E\left(\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\right) =$
 $\frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n EX_i^2 - nE\bar{x}^2\right) = \frac{n}{n-1} [(EX_i)^2 + DX_i -$
 $(E\bar{x})^2 - D\bar{x}] = \frac{n}{n-1} \left(\mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) = DX = \sigma^2$ 。

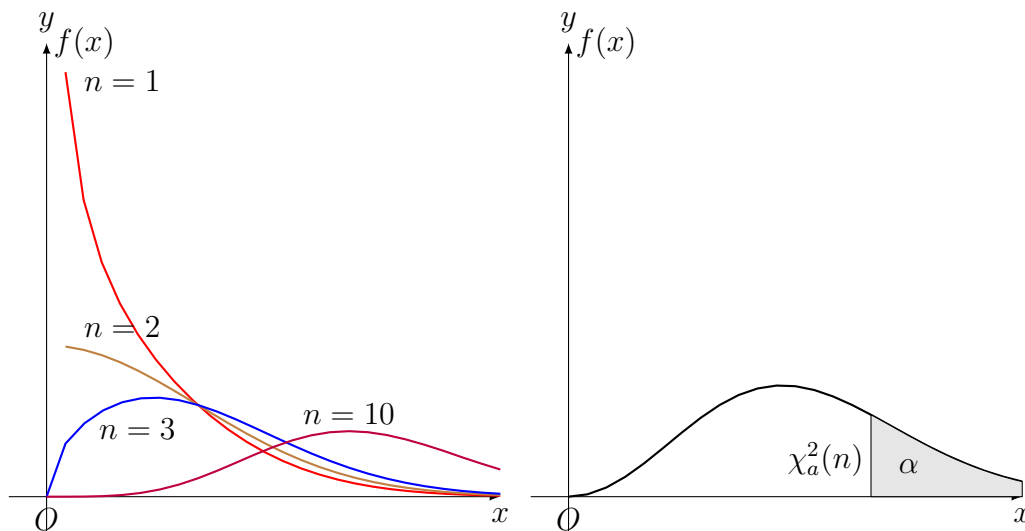
2.4 三大分布

2.4.1 χ^2 分布

2.4.1.1 概念

定义：若随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立，且都服从标准正态分布，则随机变量 $X = \sum_{i=1}^n X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $X \sim \chi^2(n)$ ，特别地 $X_i^2 \sim \chi^2(1)$ 。

对给定的 α ($0 < \alpha < 1$) 称满足 $P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(x) dx = \alpha$ 的 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位点。



2.4.1.2 性质

- 若 $X_1 \sim \chi^2(n_1)$, $X_2 \sim \chi^2(n_2)$, X_1, X_2 相互独立，则 $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$ 。
- 一般，若 $X_i \sim \chi^2(n_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$)， X_1, X_2, \dots, X_m 相互独立，则

$$\sum_{i=1}^m X_i \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^m n_i \right).$$

- 若 $X \sim \chi^2(n)$, 则 $EX = n$, $DX = 2n$ 。

2.4.2 t 分布

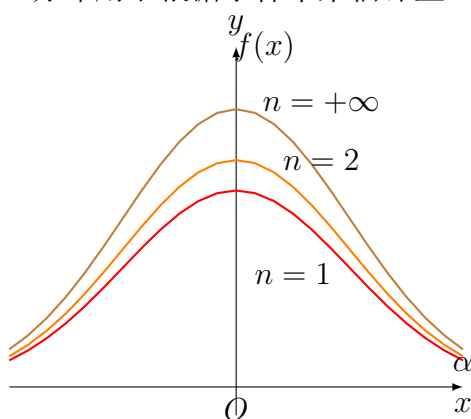
2.4.2.1 概念

也称为学生分布。

若随机变量 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, XY 相互独立, 则随机变量 $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记为 $t \sim t(n)$ 。

当 $t \rightarrow \infty$ 时, t 分布就是标准正态分布。其是偶函数, 所以 $Et = 0$ 。

t 分布用于根据小样本来估计呈正态分布且方差未知的总体的均值。



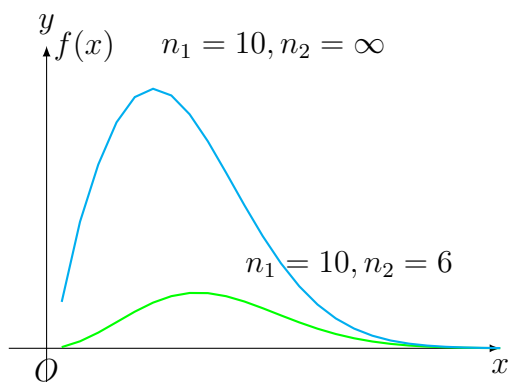
2.4.2.2 性质

由 t 分布的概率密度 $f(x)$ 图形的对称性可知 $P\{t > -t_\alpha(n)\} = P\{t > t_{1-\alpha}(n)\}$, 所以 $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$ 。

2.4.3 F 分布

2.4.3.1 概念

若随机变量 $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$, 其中 n_1 为第一自由度, n_2 为第二自由度。



2.4.3.2 性质

- 若 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$ 。
- $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha}(n_2, n_1)$ 。

证明性质二：记 $F \sim F(n_2, n_1)$ 。

$\therefore P\{F > F_\alpha(n_2, n_1)\} = \alpha, P\{F \leq F_\alpha(n_2, n_1)\} = 1 - \alpha$ 。

取倒数： $P\left\{\frac{1}{F} \geq \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}\right\} = 1 - \alpha$ 。

又根据性质 1： $\frac{1}{F} \sim F(n_1, n_2)$, $P\left\{\frac{1}{F} \geq F_{1-\alpha}(n_1, n_2)\right\} = 1 - \alpha$ 。

即 $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha}(n_2, n_1)$ 。

2.5 正态总体下结论

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 分别是样本的均值和方差, 则:

1. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, 即 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 。
 2. $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ 。
 3. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$ (μ 未知时, 在 2 中用 \bar{X} 代替 μ)。
 4. \bar{X} 与 S^2 相互独立, $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$ (σ 未知时在 1 中用 S 代替 σ)。
- 进一步有 $\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$ 。

设 X_1, X_2, \dots, X_m 是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的一个样本, 设 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 是来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的一个样本, X_i 和 Y_i 相互独立, $\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$, $S_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$, $S_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ 分别是样本 X_i , Y_i 的均值和方差, $S_w = \frac{1}{m+n-2} [(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2] = \frac{1}{m+n-2} [\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2]$, 则:

1. $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1)$ 。(根据期望和方差性质)
2. $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1, n-1)$ 。
3. 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 时, $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$ 。

3 参数点估计

3.1 概念

定义: 设总体 X 的分布函数为 $F(x; \theta)$, 其中 θ 为一个未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的一个样本。由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 作为参数 θ 的估计, 称统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 θ 的**估计量**, 一般记为 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 。

如果 x_1, x_2, \dots, x_n 是样本的一个观察值, 将其代入估计量 $\hat{\theta}$ 中得到值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 并且此值作为未知参数 θ 的参数值, 统计值称这个值为未知参数 θ 的**估计值**。

建立一个适当的统计量作为未知参数 θ 的估计量并以相应的观察值作为未知参数估计值的问题, 就是参数 θ 的**点估计问题**。

3.2 方法

3.2.1 矩估计法

使用替换思想, 用样本矩来估计总体矩。

1. 写出总体 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$, 其中 μ 含有参数 θ 。

2. 写出样本 k 阶矩 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$, A_k 只与样本有关。

3. 令总体 k 阶矩 = 样本 k 阶矩, 即 $E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$, 就得到了 θ 的方程。

例题: 来自总体的 X 的简单随机样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 总体 X 的概率分布为 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2\theta & \theta & 1-3\theta \end{pmatrix}$, 其中 $0 < \theta < \frac{1}{3}$, 求参数 θ 的矩估计量。

解: 令 $\bar{X} = EX$, 即 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = (-1)2\theta + 0\theta + 2(1-3\theta) = 2-8\theta$ 。

所以 $\hat{\theta} = \frac{2-\bar{X}}{8}$ 。

例题: 来自总体的 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} (1+\theta)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 $\theta > -1$ 为未知参数, 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本容量为 n 的简单随机样本, 求 θ 的矩估计量。

解: 令 $\bar{X} = EX$, $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^1 x(1+\theta)x^\theta dx = (1+\theta) \frac{x^{\theta+2}}{\theta+2} \Big|_0^1 = \frac{1+\theta}{2+\theta}$ 。

解得 $\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$ 。

3.2.2 最大似然估计

3.2.2.1 定义

对未知参数 θ 进行估计时, 在该参数可能取值的范围 I 内选取, 使得样本获得次观测值 x_1, x_2, \dots, x_n 的概率最大的参数值 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计, 这样的 $\hat{\theta}$ 最有利于 x_1, x_2, \dots, x_n 的出现。

设总体 X 是离散型, 其概率分布为 $P\{X=x\} = p(x; \theta)$, $\theta \in I$, θ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为 X 的一个样本, 则 X_1, X_2, \dots, X_n 取值为 x_1, x_2, \dots, x_n 的概率为 $P\{X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n\} = \prod_{i=1}^n P\{X_i=x_i\} = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$ 。显然这个概率值为 θ 的函数, 记为 $L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$ 。称 $L(\theta)$ 为样本的似然函数。

定义: 若存在 $\hat{\theta} \in I$, 使得 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in I} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$, 则称 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为参数 θ 的最大似然估计, 对应的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为参数 θ 的最大似然估计量。

同理若总体 X 为连续型随机变量，其概率密度为 $f(x; \theta)$ ， $\theta \in I$ ，则样本的似然函数为 $L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ 。

定义：若存在 $\hat{\theta} \in I$ ，使得 $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{\theta \in I} \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ ，则称 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为参数 θ 的最大似然估计，对应的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为参数 θ 的最大似然估计量。

3.2.2.2 步骤

1. 写出样本的似然函数。 $L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 或 $\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 。
2. 如果 $p(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 或 $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 关于 θ_i 可微，则令 $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} = 0$ 或 $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i} = 0$ 。由于 $L(\theta)$ 是乘积形式，且 $\ln x$ 单调增，所以 $L(\theta)$ 域 $\ln L(\theta)$ 在同一 θ 处取极值，所以更多采用后面一种对数似然方程组来解。求得 θ_i 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ($i = 1, 2, \dots, k$)。
3. 如果 $p(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 或 $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 不可微，或似然方程组无解，则应由定义用其他方法求 $\hat{\theta}$ ，如当 $L(\theta)$ 为 θ 的单调函数时， $\hat{\theta}$ 为 θ 的取值上限或下限。

即将概率密度或概率分布连乘，然后取对数，再求导令其为 0 解出 $\hat{\theta}$ 。

例题：设总体 X 的概率分布为：

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 为未知参数，从总体 X 中抽取容量为 8 的一组样本，其样本值为 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3。求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

解：首先将所有的概率相乘： $L(\theta) = (1-2\theta)^4 [2\theta(1-\theta)]^2 \cdot \theta^2 \cdot \theta^2 = 4\theta^6 (1-\theta)^2 (1-2\theta)^4$ 。

对其求对数： $\ln L(\theta) = \ln 4 + 6 \ln \theta + 2 \ln(1-\theta) + 4 \ln(1-2\theta)$ 。

对其求导： $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} - \frac{8}{1-2\theta} = 0$ 。解得 $\theta = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{12}$ 。

$0 < \theta < \frac{1}{2}$ ，舍去正值，得到 $\hat{\theta} = \frac{7 - \sqrt{13}}{12}$ 。

例题：来自总体的 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} (1+\theta)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，其中 $\theta > -1$ 为未知参数，设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本容量为 n 的简单随机样本，求 θ 的最大似然估计量。

解：这是上面的矩估计的题目的延申。

首先 $L(\theta) = (1+\theta)x_1^\theta \cdot (1+\theta)x_2^\theta \cdots = (1+\theta) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^\theta$ 。

取对数 $\ln L(\theta) = n \ln(1+\theta) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i$

对其求导： $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{1+\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$ ，解得 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1$ 。

最大似然估计量为 $-\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} - 1$ 。

注意：估计值用小写 x ，估计量用大写 X 。

3.3 估计量平均标准

不同的估计法所产生的估计量有所差异，需要有一套标准来评判估计量。

3.3.1 无偏性

定义：若参数 θ 的估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 对一切 n 及 $\theta \in I$ ，有 $E\hat{\theta} = \theta$ ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。

例题：设 X_1, X_2, \dots, X_n 是正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，为使 $D = k \sum_{i=1}^n (X_{i+1} - X_i)^2$ 称为总体方差 σ^2 的无偏估计量，求 k 。

解：已知总体方差为 σ^2 ，所以代入：

$$ED = \sigma^2 = kE\left(\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2\right) = kE\left(\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1}^2 - 2X_i X_{i+1} + X_i^2)\right)。$$

已知样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$ 。所以为什么样本方差要除以 $n-1$ 而不是 n ？可以利用无偏性来证明。

证明：根据方差 $DX_i = EX_i^2 - E^2 X_i$ ，从而 $EX_i^2 = DX_i + E^2 X_i = \sigma^2 + \mu^2$ ，类似 $D\bar{X} = E(\bar{X}^2) - (E\bar{X})^2$ ， $D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ 。

$$\therefore E(\bar{X}^2) = D\bar{X} + (E\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2。$$

所以对样本方差求期望： $ES^2 = E\left(\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2\right)\right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n EX_i^2 - nE(\bar{X}^2)\right) = \frac{1}{n-1} \left(n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right) = \sigma^2$ 。

3.3.2 有效性

也称为最小方差性。只有同样的无偏性才能比较有效性。

定义：设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量，若 $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ ，则 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ **有效**。

$$EX_i^2 = EX_{i+1}^2 = (EX_{i+1})^2 + DX_{i+1} = \mu^2 + \sigma^2, 2EX_i EX_{i+1} = 2(EX_i)^2 = 2\mu^2.$$

$$\text{代入：} = k \sum_{i=1}^{n-1} (2\mu^2 + 2\sigma^2 - 2\mu^2) = 2k\sigma^2(n-1) = \sigma. \text{ 解得 } k = \frac{1}{2(n-1)}.$$

3.3.3 一致性

也称为相合性。

定义：设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量，若对任意 $\epsilon > 0$ ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon\} = 1$ ，即 $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta (n \rightarrow \infty)$ ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计量（相合估计量）。

4 参数区间估计与假设检验

区间估计和假设检验都是基于小概率事件基本上不可能发生的情况。

4.1 区间估计

区间估计是根据样本估计总体期望 μ 所在的区间。有两个参数，一个是区间长度，一个是落入概率。

4.1.1 概念

定义：已知从总体 X 中取出一部分样本 X_n ，则这些样本的平均值 \bar{X} 不一定等于 X 的期望即应该的平均值 μ ，但是其之间的差距应该不大，即差距较小的概率较大，从而表示为 $P(|\bar{X} - \mu| < \Delta) = 1 - \alpha$ ， α 为**显著性水平**，其一般是一个较小的正数。而 $1 - \alpha$ 称为**置信度**或**置信水平**。

定义： $I = I(T, \theta)$ ， T 为已知常量， θ 为未知参数，其分布 F 已知且与 θ 无关，则 I 为**枢轴变量**。给定 $1 - \alpha$ ，确定 F 上的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数 $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ，上 $1 - \frac{\alpha}{2}$ 分位数 $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ，则 $P\{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq I(T, \theta) \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1 - \alpha$ 。

即 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 是参数 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的区间估计，则区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 包含参数 θ 的概率为 $1 - \alpha$ 。

4.1.2 正态总体均值的置信空间

4.1.2.1 估计 μ 而 σ 已知

假设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (若不服从正态分布就用中心极限定理来解决)。则 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, $P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < \frac{\Delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$ 。记 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = Z$, 则 $Z \sim N(0, 1)$ 。其中置信区间为 $(\mu - \Delta, \mu + \Delta)$ 。

$\therefore P\left(|Z| < \frac{\Delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$, 从而中间面积为 $1 - \alpha$, 得到两端面积 $\frac{\alpha}{2}$ 。

得到上 α 分位数 $Z_{\frac{\alpha}{2}}$, $\therefore \frac{\Delta}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_{\frac{\alpha}{2}}$, 解得 $\Delta = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。

代入: 解得 $\mu \in (\bar{X} - \Delta, \bar{X} + \Delta) = (\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 。

这个 μ 所处的区间就是置信区间, 区间上限就是置信上限, 区间下限就是置信下限。

4.1.2.2 估计 μ 而 σ 未知

当 σ 未知的时候就无法求出置信区间了, 所以根据正态总体下的结论, 用样本方差 S 代替方差 σ , 且 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$ 。

所以 $P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}\right| < \frac{\Delta}{S/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$, 令 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = t$, 所以 $t \sim t(n-1)$ 。

可得上 α 分位点 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, 所以 $\frac{\Delta}{S/\sqrt{n}} = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, 解得 $\Delta = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$ 。

代入: 解得 $\mu \in (\bar{X} - \Delta, \bar{X} + \Delta) = \mu \in (\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}})$ 。

综上: 求置信空间的关键是求 Δ :

参数	条件	置信区间
μ	σ 已知	$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mu_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mu_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
	σ 未知	$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$
σ	μ 未知	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}\right)$

4.2 假设检验

已经有了对期望 μ 的假设, 对这个假设进行检验。若所处的区间在拒绝域中, 就拒绝原假设。

4.2.1 思想

已经有了假设样本期望为 $\mu = \mu_0$ 。则 $P(|\bar{X} - \mu_0| < \Delta) = 1 - \alpha$ ，所以取对立事件 $P(|\bar{X} - \mu_0| \geq \Delta) = \alpha$ ，这是一个小概率事件。若对这个小概率事件发生了，则否定原假设。

若 σ 已知，则 $\Delta = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，则区间 $(-\infty, \mu_0 - \Delta] \cup [\mu_0 + \Delta, +\infty)$ 称为**拒绝域**，即小概率发生的区间。

若 σ 未知，则 $\Delta = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}$ ，拒绝域一样。

设 θ 为总体位置参数， θ_0 为已知常数，则假设检验类型：

类型		H_0	H_1
双边检验		$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$
单边检验	右边	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$
	左边	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$

4.2.2 正态总体下的六大检验与拒绝域

检验参数	条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验法与统计量	拒绝域
μ	$\sigma = \sigma_0$	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	U 检验 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$ u \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
		$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$u \geq u_{\alpha}$
		$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$u \leq -u_{\alpha}$
	σ 未知	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	T 检验 $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$ t \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
		$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$t \geq t_{\alpha}(n-1)$
		$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$t \leq -t_{\alpha}(n-1)$
σ^2	μ 已知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	χ^2 检验 $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$
		$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$
		$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n)$
	μ 未知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	χ^2 检验 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$
		$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$
		$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$

4.3 两类错误

显著性水平 α 实际上是犯第一类错误的概率的上界。

类型	第一类错误	第二类错误
含义	若 H_0 为真，否定 H_0 （弃真）	若 H_0 为假，接受 H_0 （存伪）
发生概率	$\alpha = P\{\text{拒绝}H_0 H_0\text{为真}\}$	$\beta = P\{\text{接受}H_0 H_0\text{为假}\}$ $= P\{\text{接受}H_0 H_1\text{为真}\}$
说明	仅控制犯第一类错误的概率的检验称为显著性检验， 概率为显著性水平	当样本容量固定， 则 α 和 β 中任意一个减少， 则另一个必然增大， 若要同时增大， 则只能增大样本容量