

# 随机变量数字特征

Didnelpsun

## 目录

|          |                     |          |
|----------|---------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>一维随机变量数字特征</b>   | <b>1</b> |
| 1.1      | 数学期望 . . . . .      | 1        |
| 1.1.1    | 概念 . . . . .        | 1        |
| 1.1.2    | 性质 . . . . .        | 1        |
| 1.2      | 方差标准差 . . . . .     | 2        |
| 1.2.1    | 概念 . . . . .        | 2        |
| 1.2.2    | 性质 . . . . .        | 2        |
| 1.3      | 切比雪夫不等式 . . . . .   | 2        |
| 1.4      | 常用分布数字特征 . . . . .  | 3        |
| <b>2</b> | <b>二维随机变量数字特征</b>   | <b>3</b> |
| 2.1      | 数学期望 . . . . .      | 3        |
| 2.2      | 协方差相关系数 . . . . .   | 4        |
| 2.2.1    | 概念 . . . . .        | 4        |
| 2.2.2    | 性质 . . . . .        | 4        |
| <b>3</b> | <b>独立性与相关性</b>      | <b>5</b> |
| 3.1      | 分布判断独立性 . . . . .   | 6        |
| 3.2      | 数字特征判断相关性 . . . . . | 6        |
| 3.3      | 基本判别流程 . . . . .    | 6        |

有时候研究随机变量，其是没有具体的概率分布的，而对于这种类型我们只用研究其数学特征就可以了。

## 1 一维随机变量数字特征

### 1.1 数学期望

#### 1.1.1 概念

设  $X$  是随机变量， $Y$  是  $X$  的函数， $Y = g(X)$ 。

**定义：**若  $X$  是离散型随机变量，其分布列为  $p_i = P\{X = x_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ )，若级数  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$  绝对收敛，则称随机变量  $X$  的数学期望存在，并将级数和  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$  称为随机变量  $X$  的**数学期望**，记为  $E(X)$  或  $EX$ ，即  $EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ ，否则  $X$  数学期望不存在。（数学期望实际上是一种加权的合理平均值）

若级数  $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$  也绝对收敛，则称  $Y = g(X)$  的数学期望  $E[g(X)]$  存在，且  $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$ ，否则  $g(X)$  的数学期望不存在。

**定义：**若  $X$  是连续型随机变量，其概率密度为  $f(x)$ 。若积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$  绝对收敛，则称  $X$  的数学期望存在，且  $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ ，否则  $X$  的数学期望不存在。

若积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$  绝对收敛，则称  $g(X)$  的数学期望存在， $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$ ，否则  $g(X)$  的数学期望不存在。

#### 1.1.2 性质

- 对任意常数  $a_i$  和随机变量  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 有  $E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i EX_i$ ，其中  $Ec = c$ ， $E(aX + c) = aEX + c$ ， $E(X \pm Y) = EX \pm EY$ 。
- 若  $XY$  相互独立，则  $E(XY) = EX \cdot EY$ ， $E[g_1(X), g_2(Y)] = E[g_1(X)] \cdot E[g_2(Y)]$ ，一般若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立，则  $E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n EX_i$ ， $E\left[\prod_{i=1}^n g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^n E[g_i(X_i)]$ 。

## 1.2 方差标准差

### 1.2.1 概念

**定义:** 设  $X$  是随机变量, 若  $E[(X-EX)^2]$  存在, 则称  $E[(X-EX)^2]$  为  $X$  的方差, 记为  $D(X)$  或  $DX$ , 即  $DX = E[(X-EX)^2] = E(X^2) - (EX)^2 = EX^2 - E^2X$ 。称  $\sqrt{DX}$  为  $X$  的标准差或均方差, 记为  $\sigma(X)$ , 称随机变量  $X^* = \frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$  为  $X$  的标准化随机变量, 此时  $EX^* = 0$ ,  $DX^* = 1$ 。

当  $X$  为离散型随机变量时  $D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} [x_i - E(X)]^2 p_i$ , 当  $X$  为连续型随机变量时  $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$ 。

### 1.2.2 性质

- $DX \geq 0$ ,  $E(X^2) = DX + (EX)^2 \geq (EX)^2$ 。
- $Dc = 0$ 。
- $D(aX + b) = a^2 DX$ 。
- $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2Cov(X, Y) = DX + DY \pm 2E[(X-EX)(Y-EY)]$ 。
- 若  $XY$  相互独立, 则  $D(aX \pm bY) = a^2 DX + b^2 DY$ , 一般若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立,  $g_i(x)$  为关于  $x$  的连续函数, 则  $D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 DX_i$ ,  
 $D\left[\sum_{i=1}^n g_i(X_i)\right] = \sum_{i=1}^n D[g_i(X_i)]$ 。

## 1.3 切比雪夫不等式

**定义:** 若随机变量  $X$  的方差  $DX$  存在, 则对任意  $\epsilon > 0$ , 有  $P\{|X-EX| \geq \epsilon\} \leq \frac{DX}{\epsilon^2}$  或  $P\{|X-EX| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\epsilon^2}$ 。

$P\{|X-EX| \geq \epsilon\}$  即代表变量与期望的差距大于某个值的概率,  $DX$  就是方差,  $DX$  越小证明波动越小, 波动在  $\epsilon$  外的概率就越小, 反之同理, 而  $\epsilon$  越小, 则  $\frac{DX}{\epsilon^2}$  越大, 则代表  $X$  靠近期望  $EX$  的概率越大, 反之同理。

证明: 若  $X$  是连续型随机变量, 令  $|X-EX| \geq \epsilon = D$ , 则  $P\{|X-EX| \geq \epsilon\} = \int_D f(x) dx$ , 又该区间上  $|X-EX| \geq \epsilon$ ,  $\therefore \frac{(X-EX)^2}{\epsilon^2} \geq 1$ 。

$$\int_D f(x) dx \leq \int_D \frac{(X-EX)^2}{\epsilon^2} f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(X-EX)^2}{\epsilon^2} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\epsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (X - EX)^2 f(x) dx = \frac{DX}{\epsilon^2}.$$

可以用于估算随机变量在某范围中取值的概率，也可以证明某些收敛性问题（如数学统计章节中的一致性）。

**例题：**设  $XY$  为随机变量，数学期望都是 2，方差分别为 1 和 4，相关系数为 0.5，尝试估计估计概率  $P\{|X - Y| \geq 6\}$ 。

解：令  $Z = X - Y$ ， $\therefore EZ = E(X - Y) = EX - EY = 2 - 2 = 0$ ，所以  $P\{|X - Y| \geq 6\} = P\{|X - Y - 0| \geq 6\} = P\{|Z - EZ| \geq 6\} \leq \frac{DZ}{6^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ 。

## 1.4 常用分布数字特征

| 分布                         | 分布列 $p_i$ 或概率密度 $f(x)$   | 期望                  | 方差                     |
|----------------------------|--|---------------------|------------------------|
| 0-1 分布<br>$B(1, p)$        | $P\{X = k\} = p^k(1 - p)^{1-k}, k = 0, 1$                                      | $p$                 | $p(1 - p)$             |
| 二项分布<br>$B(n, p)$          | $P\{X = k\} = C_n^k p^k(1 - p)^{n-k}, k = 0, \dots, n$                         | $np$                | $np(1 - p)$            |
| 泊松分布<br>$P(\lambda)$       | $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, \dots$                 | $\lambda$           | $\lambda$              |
| 几何分布<br>$G(p)$             | $P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1}, p, k = 1, \dots$                                  | $\frac{1}{p}$       | $\frac{1 - p}{p^2}$    |
| 正态分布<br>$N(\mu, \sigma^2)$ | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in R$ | $\mu$               | $\sigma^2$             |
| 均匀分布<br>$U(a, b)$          | $f(x) = \frac{1}{b - a}, a < x < b$  | $\frac{a + b}{2}$   | $\frac{(b - a)^2}{12}$ |
| 指数分布<br>$E(\lambda)$       | $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$   | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$  |

## 2 二维随机变量数字特征

### 2.1 数学期望

**定义：**若  $XY$  为随机变量， $g(X, Y)$  为  $XY$  的函数，如果  $(X, Y)$  为离散型随机变量，其联合分布为  $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ )，若级数  $\sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$  绝对收敛，则  $E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$ ；如果  $(X, Y)$  为连

续型随机变量，其概率密度为  $f(x, y)$ ，若积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$  绝对收敛，则定义  $E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$ 。

## 2.2 协方差相关系数

### 2.2.1 概念

**定义：**若随机变量  $XY$  的方差存在且  $DX > 0$ ， $DY > 0$ ，则称  $E[(X - EX)(Y - EY)]$  为随机变量  $X$  与  $Y$  的协方差，记为  $Cov(X, Y)$ ，即  $Cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E(XY - XEY - YEX + EXEY) = E(XY) - EX \cdot EY$ 。

$$\text{其中 } E(XY) = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_j P\{X = x_i, Y = y_j\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy \end{cases}。$$

从定义来看，方差  $DX$  就是自己的协方差  $Cov(X, X)$ 。

$$\begin{aligned} \text{协方差也可以标准化，已知 } X^* &= \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}, Y^* = \frac{Y - EY}{\sqrt{DY}}, \text{ 则 } Cov(X^*, Y^*) \\ &= Cov\left(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}, \frac{Y - EY}{\sqrt{DY}}\right) = \frac{Cov(X - EX, Y - EY)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \\ &= \frac{Cov(X, Y) - Cov(X, EY) - Cov(EX, Y) + Cov(EX, EY)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}。 \end{aligned}$$

**定义：** $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$  为随机变量  $XY$  的相关系数。若  $\rho_{XY} = 0$ ，则  $XY$  不相干，否则相关。

相关系数是描述随机变量  $XY$  之间的线性关系，绝对值越靠近 1 则越线性相关。相关系数为 0 不代表没有其之间没有关系，也可能存在非线性关系。

### 2.2.2 性质

- 对称性： $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ ， $\rho_{XY} = \rho_{YX}$ ， $Cov(X, X) = DX$ ， $\rho_{XX} = 1$ 。
- 线性性： $Cov(X, c) = 0$ ， $Cov(aX + b, Y) = aCov(X, Y)$ ， $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$ 。一般  $Cov\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, Y\right) = \sum_{i=1}^n Cov(X_i, Y)$ 。
- 若  $XY$  相互独立，则  $Cov(X, Y) = 0$ 。 $D(\sum X) = \sum DX$ 。
- $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2Cov(X, Y)$ 。
- 相关系数有界性： $|\rho_{XY}| \leq 1$ 。
- 线性关系下的相关系数：若  $Y = aX + b$ ，则  $\rho_{XY} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$ 。

例题：设随机变量  $XY$  的概率分布分别为：

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $X$ | 0   | 1   |
| $P$ | 1/3 | 2/3 |

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $Y$ | -1  | 0   | 1   |
| $P$ | 1/3 | 1/3 | 1/3 |

且  $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ 。

(1) 求随机变量  $(X, Y)$  的概率分布。

(2) 求  $Z = XY$  的概率分布。

(3) 求  $XY$  的相关系数  $\rho_{XY}$ 。

(1) 解：根据已知的题目条件可以知道对应的边缘概率分布：

|                  |     |     |     |        |
|------------------|-----|-----|-----|--------|
| $X \backslash Y$ | -1  | 0   | 1   | $X$ 边缘 |
| 0                |     |     |     | 1/3    |
| 1                |     |     |     | 2/3    |
| $Y$ 边缘           | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1      |

又  $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ ，所以  $P\{X^2 \neq Y^2\} = 0$ ，所以  $X = \pm Y$ ，解得：

|                  |     |     |     |        |
|------------------|-----|-----|-----|--------|
| $X \backslash Y$ | -1  | 0   | 1   | $X$ 边缘 |
| 0                | 0   | 1/3 | 0   | 1/3    |
| 1                | 1/3 | 0   | 1/3 | 2/3    |
| $Y$ 边缘           | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1      |

(2) 解： $Z = XY$  的可能取值为-1, 0, 1。所以根据表格：

$$P\{Z = -1\} = P\{X = 1, Y = -1\} = \frac{1}{3}。$$

$$P\{Z = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{3}。$$

$$P\{Z = 0\} = 1 - P\{Z = 1\} - P\{Z = -1\} = \frac{1}{3}。$$

$$(3) \text{ 解： } \rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 0。$$

### 3 独立性与相关性

相关性是线性相关性。

- 独立则一定不相关，但是不相关不一定独立。

- 如果相关则一定不独立。
- 如果  $(X, Y)$  服从二维正态分布, 则  $XY$  独立与  $XY$  不相关是充要条件。

### 3.1 分布判断独立性

都是通过分布情况判断独立性:

- $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ 。
- $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ 。
- $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$ 。

### 3.2 数字特征判断相关性

通过相关系数  $\rho_{XY}$  来判断是否存在线性相关性。

$$\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = EX \cdot EY \Leftrightarrow D(X \pm Y) = DX + DY。$$

### 3.3 基本判别流程

当讨论随机变量  $XY$  的相关性独立性时:

1. 计算  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY$  判断是否为 0。
2. 当  $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$  时则  $XY$  相关不独立。
3. 当  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  时则  $XY$  不相关。
4. 若  $P(XY) = P(X)P(Y)$  则  $XY$  不相关但独立, 否则不相关不独立。

**例题:** 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ 。证明  $X$  与  $|X|$  不相关且不独立。

解:  $\text{Cov}(X, Y) = EXY - EXEY = EX|X| - EXE|X|$ 。

其中  $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|} dx = 0$ ,  $EXY = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|}|x| dx = 0$ 。

$\therefore \rho_{XY} = 0$ , 从而  $XY$  不相关。

令  $X \leq a$ , 则  $P\{X \leq a\}$ 。而  $P\{|X| \leq a\} = P\{-a \leq X \leq a\} < P\{X \leq a\}$ 。

$\therefore P\{X \leq a, |X| \leq a\} = P\{|X| \leq a\}$ , 又  $P\{X \leq a\} < 1$ 。

$\therefore P\{X \leq a, |X| \leq a\} \neq P\{|X| \leq a\} \cdot P\{X \leq a\}$ , 所以不独立。