

随机变量及其分布

Didneipsun

目录

1	二项分布	1
2	泊松分布	1
3	几何分布	1
4	均匀分布	2
5	指数分布	3
6	正态分布	3

1 二项分布

例题：已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ， Y 表示对 X 进行 3 次独立重复试验中事件 $\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$ ，求 $P\{Y = 2\}$ 。

解：已知对 X 进行独立重复试验，表示这个进行的是伯努利试验，从而 $Y \sim B(n, p)$ 。又是 3 次，所以 $Y \sim B(3, p)$ 。

只用求出这个 p 即 $\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$ 的概率就可以了。又已知 $f(x)$ 。

$$\therefore p = \left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \, dx = \frac{1}{4}。 \therefore P\{Y = 2\} = B\left(3, \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{64}。$$

2 泊松分布

例题：设一本书的各页印刷错误的个数 X 服从泊松分布。已知只有一个和只有两个印刷错误的页数相同，则随机抽查的 4 页中无印刷错误的概率 p 为？

$$\text{解：} \because P\{X = 1\} = P\{X = 2\}, \therefore \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}, \lambda = 2。$$

由于随机抽四页类似于伯努利试验是相互独立的，所以随机抽 4 页都无错误的概率为 $[P\{X = 0\}]^4 = e^{-8}$ 。

3 几何分布

例题：已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，对 X 进行独立重复观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数，求 Y 的概率分布。

解：由题目直到就停止，知道 $Y \sim G(p)$ 。

$$\text{又 } p = P\{X \geq 3\} = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 \, dx = \frac{1}{8}$$

这是对几何分布的变形，首先进行 k 次试验，第 k 次成功，所以要乘 p ，而因为是第 2 个成功，所以前面的 $k - 1$ 次中有 $k - 2$ 次失败和一次成功，所以一共 $p^2(1 - p)^{k-2}$ 。因为前面的成功的一次在 $k - 1$ 中任意一个地方就可以了，所以一共有 $k - 1$ 中可能性，要考虑到排列，所以还要乘 $(k - 1)$ 。

$$\therefore P\{Y = k\} = (k - 1) \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}。$$

4 均匀分布

例题：已知随机变量 $X \sim U(a, b)$ ($a > 0$) 且 $P\{0 < X < 3\} = \frac{1}{4}$, $P\{X > 4\} = \frac{1}{2}$, 求 X 的概率密度以及 $P\{1 < X < 5\}$ 。

解： $\because P\{X > 4\} = \frac{1}{2}$, 4 在其区间中点上, $\frac{a+b}{2} = 4$ 。

$\because P\{0 < X < 3\} = \frac{1}{4}$, 3 若在 a 左边则概率为 0, 所以必然在右边。

$\therefore P\{a < X < 3\} = \frac{1}{4}$, $P\{< 3X < 4\} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\frac{4-3}{b-a} = \frac{1}{4}$ 。

解得 $a = 2$, $b = 6$, $X \sim U(2, 6) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 2 < x < 6 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

$P\{1 < X < 5\} = \frac{5-2}{6-2} = \frac{3}{4}$ 。

例题：已知随机变量 X 在区间 $[0, 1]$ 上服从均匀分布, 在 $X = x$ ($0 < x < 1$) 的条件下随机变量 Y 在区间 $[0, x]$ 上服从均匀分布。

(1) (X, Y) 的概率密度。

解： X 在区间 $[0, 1]$ 上服从均匀分布, 则 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

Y 在 $X = x$ 下均匀分布, 则 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

(X, Y) 联合概率 = 条件概率 \times 边缘概率。

即 $f(x, y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

(2) Y 的概率密度。

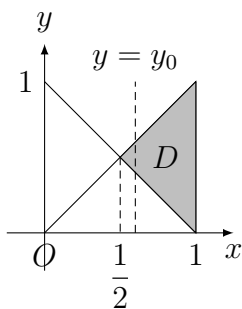
解：首先求 Y 的边缘概率密度, 就需要积 X 。然后求 y 的区间, XY 的联合区间是横坐标 $[0, 1]$ 到纵坐标 $[0, 1]$ 的下三角形, 则 $y \in [0, 1]$ 。

然后求 Y 就在联合概率密度所规定的区间中画一条 $y = y_0$ 的线, 从左先交到的是 $y = x$, 所以下限就是 y , 后交的是 $x = 1$, 所以上限为 1。最后将 y 的

联合分布函数放在中间, 得到 $f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\ln y, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 。

(3) 概率 $P\{X + Y > 1\}$ 。

解：求 $P\{X + Y > 1\}$ 就是求一个区间的概率值, 即 $P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy$ 。



$$\begin{aligned} \text{所以 } P\{X + Y > 1\} &= \iint_D \frac{1}{x} d\delta, \\ D &= x + y > 1 \cap 0 < y < x < 1. \\ \iint_D \frac{1}{x} d\delta &= \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{1-x}^x \frac{1}{x} dy = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

5 指数分布

例题：已知随机变量 $X \sim E(1)$, a 为常数且大于 0, 求 $P\{X \leq a+1 | X > a\}$ 。

$$\text{解: } P\{X \leq a+1 | X > a\} = \frac{P\{a < X \leq a+1\}}{P\{X > a\}} = \frac{\int_a^{a+1} e^{-x} dx}{\int_a^{+\infty} e^{-x} dx} = 1 - \frac{1}{e}.$$

也可以根据指数分布的无记忆性: $P\{X \leq a+1 | X > a\} = 1 - P\{X > a+1 | X > a\} = 1 - P\{X > 1\} = P\{X \leq 1\} = F(1) = 1 - \frac{1}{e}$ 。

6 正态分布

例题：已知随机变量 $X \sim N(0,1)$, 对给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 数 μ_α 满足 $P\{X > \mu_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 求 x 。

解： $P\{X > \mu_\alpha\} = \alpha$ 即表示 μ_α 为标准正态分布的上 α 分位点。

又 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 即 $-x < X < x$ 的面积为 α , 所以两边的面积各为 $\frac{1-\alpha}{2}$, $P\{X < x\} = P\{X > x\} = \frac{1-\alpha}{2}$ 。

\therefore 面积为 α 的下标为 α , \therefore 面积为 $\frac{1-\alpha}{2}$ 的下标为 $\frac{1-\alpha}{2}$, $x = \mu_{\frac{1-\alpha}{2}}$ 。