

矩阵

Didneipsun

目录

1	矩阵幂	1
1.1	对应成比例	1
1.2	试算归纳	1
1.3	行列结合	1
1.4	拆分矩阵	2
1.5	分块矩阵	2
2	初等变换	2
3	逆矩阵	3
3.1	定义法	3
3.2	分解乘积	4
3.3	初等变换	4
3.4	分块矩阵	4
4	伴随矩阵	6
5	方阵行列式	6
5.1	两项积商	6
5.2	两项和差	6
6	矩阵方程	7
6.1	直接化简	7
6.2	凑目标式	7

7	矩阵秩	8
7.1	未知参数	8
7.2	矩阵运算	8
8	矩阵等价	9

1 矩阵幂

1.1 对应成比例

因为矩阵运算不满足交换率但是满足结合率，且一行矩阵乘一列矩阵的乘积为一个数，所以可以推出矩阵的幂的运算方法。

这个方法要求 $r(A) = 1$ ，即对应成比例。

令 A 为 n 阶方阵，将 A 拆为 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T (b_1, b_2, \dots, b_n) = \alpha^T \beta$ ，所以 $A^n = \alpha^T \beta \alpha^T \beta \dots \alpha^T \beta$ ，利用结合率： $\alpha^T (\beta \alpha^T) (\beta \dots \alpha^T) \beta$ ，中间一共 $n-1$ 个 $\beta \alpha^T$ ， $\beta \alpha^T$ 是一个数，即 $A^n = (\beta \alpha^T)^{n-1} \alpha^T \beta = (\beta \alpha^T)^{n-1} A$ 。

例题： $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ ，求 A^n 。

解： $A = (1, -2, 3)^T (1, 2, 3)$ ，所以 $A^n = ((1, 2, 3)(1, -2, 3)^T)^n (1, -2, 3)^T (1, 2, 3) = 6^{n-1} A$ 。

若矩阵 A 的行与列都成比例，则 $A^n = [tr(A)]^{n-1} A$ ， $[tr(A)] = \sum a_{ii}$ ，即矩阵迹为对角线元素值之和。

1.2 试算归纳

对 A 进行试算，如 A^2 ，若 A^k 是一个数量阵，那么计算 A^n 就只用找规律就可以了。

例题： $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ，求 A^n ($n \geq 2$)。

解：通过计算得知 $A^2 = 4E$ ，这是一个数量阵。

$$\therefore A^n = \begin{cases} 4^k E, & n = 2k \\ 4^k A, & n = 2k + 1 \end{cases}。$$

1.3 行列结合

将一个矩阵拆成 $\alpha \beta^T$ 的形式，其中都是列向量，从而进行幂运算可以进行结合 $\beta^T \alpha$ 为一个常数。

例题：设 $\alpha = (1, 3, -2)^T$ ， $\beta = (2, 0, 0)^T$ ， $A = \alpha \beta^T$ ，求 A^3 。

解: $\because \beta^T \alpha = [2, 0, 0][1, 3, -2]^T = 2, \therefore A^3 = (\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T) = \alpha(\beta^T \alpha)(\beta^T \alpha)\beta^T = 4\alpha\beta^T = 4A。$

1.4 拆分矩阵

将 A^n 拆分为两个矩阵 $A^n = (B+C)^n$, 其中 BC 应该是可逆的, 即 $BC = CB$, 所以一般有一个是 E 。

例题: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^n 。

解: $A = E + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$

$\therefore A^n = (E + B)^n = C_n^0 E^n + C_n^1 E^{n-1} B + C_n^2 E^{n-2} B^2 + \dots。$

又 $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$

$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O。$

$\therefore B^4 = B^5 = \dots = O。$

$\therefore A^n = (E + B)^n = C_n^0 E^n + C_n^1 E^{n-1} B + C_n^2 E^{n-2} B^2。$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.5 分块矩阵

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}。$$

2 初等变换

若 A 和 B 等价, 求一个可逆矩阵 P , 使得 $PA = B$ 。只用右乘 $P = BA^{-1}$ 。

需要根据逻辑上的计算还原出左乘的初等矩阵。

例题: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 当 $A \sim B$ 时, 求 P

使得 $PA = B$ 。

解: 目标是将 A 变为 B , 所以第一步将第一列的第二行的-1 变为 0。即将第一行加到第二行。

$$\text{左乘 } E_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = C。$$

然后对第二列进行消, 首先将第三行加上第二行的两倍。

$$E_{32}(2)C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B。$$

$$\therefore E_{32}(2)E_{21}(1)A = B。$$

$$P = E_{32}(2)E_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}。$$

3 逆矩阵

3.1 定义法

找出一个矩阵 B , 使得 $AB = E$, 则 A 可逆, $A^{-1} = B$ 。

例题: A, B 均是 n 阶方阵, 且 $AB = A + B$, 证明 $A - E$ 可逆, 并求 $(A - E)^{-1}$ 。

解: 要证明 $A - E$, 就要从 $AB = A + B$ 中尽量凑出。

$AB = A + B$ 变为 $AB - B = A$, 从而提取 $(A - E)B = A, (A - E)BA^{-1} = E$ 。

但是 A^{-1} 是未知的, 所以 $A - E$ 的逆矩阵不能用 BA^{-1} 来表示。

$AB - A = B$, 所以提出 $A(B - E) = B$, 即 $A(B - E) = B - E + E$, $(A - E)(B - E) = E$, 所以 $A - E$ 的逆矩阵就是 $B - E$ 。

3.2 分解乘积

将 A 分解为若干个可逆矩阵的乘积。若 $A = BC$, B, C 可逆, 则 A 可逆, 且 $A^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ 。同理 $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ 。

例题: 设 A, B 为同阶可逆方阵, 且 $A^{-1} + B^{-1}$ 可逆, 求 $(A + B)^{-1}$ 。

解: 已知 $A^{-1} + B^{-1}$ 可以用来表示其他式子, 要求 $A + B$ 的逆, 则需要将 $A + B$ 转为其逆。

$$\because A + B = A(E + A^{-1}B) = A(B^{-1} + A^{-1})B.$$

$$\therefore (A + B)^{-1} = B^{-1}(B^{-1} + A^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

3.3 初等变换

$$\left[\begin{array}{c|c} A & E \end{array} \right] \xrightarrow{r} \left[\begin{array}{c|c} E & A^{-1} \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c} A \\ E \end{array} \right] \xrightarrow{c} \left[\begin{array}{c} E \\ A^{-1} \end{array} \right].$$

3.4 分块矩阵

基于拉普拉斯展开式。

对于一些分块矩阵的逆, 若 A, B 都可逆, 则: $\left[\begin{array}{cc} A & O \\ O & B \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{array} \right],$

$$\left[\begin{array}{cc} O & A \\ B & O \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{array} \right].$$

例题: 已知 $A = \begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}$, 其中 B 为 $r \times r$ 可逆矩阵, C 为 $s \times s$ 可逆矩阵, 求 A^{-1} 。

解: $\because |A| = \begin{vmatrix} B & O \\ D & C \end{vmatrix} = |B||C| \neq 0$, 所以 A 可逆, 设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ 。

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = E_{r+s}. \text{ 即 } \begin{pmatrix} BX & BY \\ DX + CZ & DY + CW \end{pmatrix} = E_{r+s}.$$

$$\therefore \begin{cases} BX = E \\ BY = O \\ DX + CZ = O \\ DY + CW = E \end{cases}, \quad \begin{cases} B^{-1}BX = B^{-1}, & X = B^{-1} \\ B^{-1}BY = O, & Y = O \\ CZ = -DX = -DB^{-1}, & Z = -C^{-1}DB^{-1} \\ CW = E, & W = C^{-1} \end{cases}.$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

当分块矩阵为三角矩阵时，对角线为原方块矩阵的逆矩阵，非 0 的一角为原矩阵，再左乘同行的逆矩阵，右乘同列的逆矩阵。

$$\therefore A = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}。$$

当分块矩阵为副对角矩阵时，对角线为对角方块矩阵的逆矩阵，非 0 的一角为原矩阵，再左乘同行的逆矩阵，右乘同列的逆矩阵。

$$\therefore A = \begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}。$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \end{pmatrix}。$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_n^{-1} \end{pmatrix}。$$

$$A = \begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \ddots & \\ A_n & & \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} & & A_n^{-1} \\ & \ddots & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}。$$

例题：已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，求 A 。

解：由于 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ ，所以 $A = |A|(A^*)^{-1}$ 。已知 A^* 可知 $(A^*)^{-1}$ ，所以重点就是求 $|A|$ 。

$$\text{又 } |A^*| = |A|^{n-1}, |A^*| = -8, |A| = -2。$$

所以根据分块矩阵的逆运算，可以得到 $(A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}。$

$$\text{所以 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}。$$

4 伴随矩阵

伴随矩阵一般只会计算三阶及以下。

伴随矩阵和逆矩阵往往共同参与运算，并有许多公式。

1. $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$ 。
2. $|A^*| = |A|^{n-1}$ 。
3. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ 。

证明关系式一，由于 $A^* = |A|A^{-1}$ ， $(A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A$ 。

证明关系式二，对 $A^* = |A|A^{-1}$ 两边取行列式，得到 $|A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^n|A^{-1}| = \frac{|A|^n}{|A^{-1}|^{n-1}} = |A|^{n-1}$ 。

证明关系式三，对 $(A^*)^* = (A^*)^{-1}|A^*| = (|A|A^{-1})^{-1}|A|^{n-1} = |A|^{-1}A|A|^{n-1} = |A|^{n-2}A$ 。

5 方阵行列式

5.1 两项积商

1. $|A^T| = |A|$ 。
2. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 。
3. $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ 。
4. $|AB| = |A| \cdot |B| = |BA|$ 。
5. $|A^*| = |A|^{n-1}$ 。

因为两项积商比较简单，所以基本上会变换 A 和 B ，让其变为转置或逆矩阵。

5.2 两项和差

两项和差需要将方阵拆分为向量组的形式，然后根据矩阵与行列式的运算法则进行运算。（注意其中的差别）

例题：设四阶方阵 $A = [\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$, $B = [\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$, 其中 α, β, γ_i 均为四维向量，且 $|A| = 5$, $|B| = -\frac{1}{2}$, 求 $|A + 2B|$ 。

解： $|[\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4] + 2[\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]| = |[\alpha + 2\beta, 3\gamma_2, 3\gamma_3, 3\gamma_4]| = 27|[\alpha + 2\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]| = 27|[\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]| + 54|[\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]| = 27(|A| + 2|B|) = 108$ 。

6 矩阵方程

含有未知矩阵的方程就是矩阵方程，需要将方程进行恒等变形，化为 $AX = B$ 、 $XA = B$ 或 $AXB = C$ 的形式。

若 A, B 可逆，且可以分别得到 $X = A^{-1}B$, $X = BA^{-1}$, $X = A^{-1}CB^{-1}$ 。

6.1 直接化简

例题：设 3 阶方阵 A, B 满足 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 且 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$,

求 B 。

解： $A^{-1}BA = (6E + B)A, A^{-1}B = 6E + B, A^{-1}B - B = 6E, (A^{-1} - E)B = 6E$ 。

$\therefore B = 6(A^{-1} - E)^{-1}$ 。

6.2 凑目标式

有时候直接化简非常麻烦，因为所求的式子很复杂，甚至出现结果不能得到的情况。

例题：已知 $AB = A + B$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求 $(A - E)^{-1}$ 。

解：已知 $AB = A + B$, 求 $A - E$, 则向目标计算。

$AB - B = A$, 即 $(A - E)B = A$, $(A - E)^{-1} = BA^{-1}$ 。因为 A 未知，所以要消去 A 。

根据 $AB = A + B$, 得到 $AB - A = B$, 即 $A(B - E) = B, A^{-1} = (B - E)B^{-1}$ 。

$(A - E)^{-1} = BA^{-1} = B(B - E)B^{-1}$, 然后就不知道接下来怎么办了。

我们很希望 BB^{-1} 在一起消掉, 但是无论如何操作都无法完成。但是也可以通过此得到解题的启示, 按 $(A - E)(B - E)$ 去凑。

回到 $(A - E)B = A$, 去凑 $B - E$, 先尝试两边减去 E , 得到 $(A - E)B - E = A - E$, 正好左移右项 $(A - E)(B - E) = E$, 解得 $(A - E)^{-1} = B - E$ 。

$$\text{即} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

7 矩阵秩

7.1 未知参数

已知一个矩阵的秩, 求其矩阵中的参数。需要将矩阵简化, 使得最下面的一行除了参数没有别的非零常数。

例题: 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ -1 & a & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $r(A) = 3$, 求 A 。

解: 首先对 A 化简: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a - 2 & 4 - a \\ 0 & 0 & (a + 1)(3 - a) & a(a - 3) \end{bmatrix}$, 若 $r(A) = 3$, 则 $(a + 1)(3 - a)$ 与 $a(a - 3)$ 不全为 0, 所以 $a \neq 3$ 。

7.2 矩阵运算

给出几个矩阵, 进行矩阵运算求出对应的秩。

$$r(kA) = r(A)。$$

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}。 \text{当且仅当 } AB \text{ 满秩等号成立。}$$

$$r(A + B) \leq r(A|B) \leq r(A) + r(B)。$$

$$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n - 1 \\ 0, r(A) < n - 1 \end{cases}。$$

例题：已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求 $r(AB+2A)$ 。

解： $r(AB+2A) = r(A(B+2E))$ 。又 $B+2E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $r(B+2E) =$

4。

又 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

所以 $r(A) = 2$, $r(AB+2A) = \min\{r(A), r(B+2E)\} = 2$ 。

8 矩阵等价

其实求等价矩阵就是判定其秩是否相等。