矩阵

Didnelpsun

目录

1　矩阵幂

1.1　对应成比例

因为矩阵运算不满足交换率但是满足结合率，且一行矩阵乘一列矩阵的乘积为一个数，所以可以推出矩阵的幂的运算方法。

这个方法要求 $r(A)=1$，即对应成比例。

令 A 为 n 阶方阵，将 A 拆为 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\alpha^T\beta$，所以 $A^n=\alpha^T\beta\alpha^T\beta\cdots\alpha^T\beta$，利用结合率：$\alpha^T(\beta\alpha^T)(\beta\cdots\alpha^T)\beta$，中间一共 $n-1$ 个 $\beta\alpha^T$，$\beta\alpha^T$ 是一个数，即 $A^n=(\beta\alpha^T)^{n-1}\alpha^T\beta=(\beta\alpha^T)^{n-1}A$。

例题：$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$，求 A^n。

解：$A=(1,-2,3)^T(1,2,3)$，所以 $A^n=((1,2,3)(1,-2,3)^T)^n(1,-2,3)^T(1,2,3)$ $=6^{n-1}A$。

若矩阵 A 的行与列都成比例，则 $A^n=[tr(A)]^{n-1}A$，$[tr(A)]=\sum a_{ii}$，即矩阵迹为对角线元素值之和。

1.2　试算归纳

对 A 进行试算，如 A^2，若 A^k 是一个数量阵，那么计算 A^n 就只用找规律就可以了。

例题：$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^n（$n\geqslant 2$）。

解：通过计算得知 $A^2=4E$，这是一个数量阵。

$\therefore A^n=\begin{cases} 4^kE, & n=2k \\ 4^kA, & n=2k+1 \end{cases}$。

1.3　行列结合

将一个矩阵拆成 $\alpha\beta^T$ 的形式，其中都是列向量，从而进行幂运算可以进行结合 $\beta^T\alpha$ 为一个常数。

例题：设 $\alpha=(1,3,-2)^T$，$\beta=(2,0,0)^T$，$A=\alpha\beta^T$，求 A^3。

解：$\because \beta^T\alpha=[2,0,0][1,3,-2]^T=2$，$\therefore A^3=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\beta^T=4\alpha\beta^T=4A$。

1.4 拆分矩阵

将 A^n 拆分为两个矩阵 $A^n=(B+C)^n$,其中 BC 应该是可逆的,即 $BC=CB$，所以一般有一个是 E。

例题：$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 A^n。

解：$A=E+B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$。

$\therefore A^n=(E+B)^n=C_n^0E^n+C_n^1E^{n-1}B+C_n^2E^{n-2}B^2+\cdots$。

又 $B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$。

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$。

$\therefore B^4=B^5=\cdots=O$。

$\therefore A^n=(E+B)^n=C_n^0E^n+C_n^1E^{n-1}B+C_n^2E^{n-2}B^2$。

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

1.5 分块矩阵

$\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}A^n&O\\O&B^n\end{bmatrix}$。

2 初等变换

若 A 和 B 等价，求一个可逆矩阵 P，使得 $PA=B$。只用右乘 $P=BA^{-1}$。

需要根据逻辑上的计算还原出左乘的初等矩阵。

例题：$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&-4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，当 $A\sim B$ 时，求 P 使得 $PA=B$。.

解：目标是将 A 变为 B，所以第一步将第一列的第二行的-1 变为 0。即将第一行加到第二行。

左乘 $E_{21}(1)A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&-4\end{pmatrix}=C$。

然后对第二列进行消，首先将第三行加上第二行的两倍。

$E_{32}(2)C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}=B$。

$\therefore E_{32}(2)E_{21}(1)A=B$。

$P=E_{32}(2)E_{21}(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$。

3 逆矩阵

3.1 定义法

找出一个矩阵 B，使得 $AB=E$，则 A 可逆，$A^{-1}=B$。

例题：A，B 均是 n 阶方阵，且 $AB=A+B$，证明 $A-E$ 可逆，并求 $(A-E)^{-1}$。

解：要证明 $A-E$，就要从 $AB=A+B$ 中尽量凑出。

$AB=A+B$ 变为 $AB-B=A$，从而提取 $(A-E)B=A$，$(A-E)BA^{-1}=E$。

但是 A^{-1} 是未知的，所以 $A-E$ 的逆矩阵不能用 BA^{-1} 来表示。

$AB-A=B$，所以提出 $A(B-E)=B$，即 $A(B-E)=B-E+E$，$(A-E)(B-E)=E$，所以 $A-E$ 的逆矩阵就是 $B-E$。

3.2 分解乘积

将 A 分解为若干个可逆矩阵的乘积。若 $A=BC$，B，C 可逆，则 A 可逆，且 $A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$。同理 $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$。

例题：设 A，B 为同阶可逆方阵，且 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，求 $(A+B)^{-1}$。

解：已知 $A^{-1}+B^{-1}$ 可以用来表示其他式子，需要求 $A+B$ 的逆，则需要将 $A+B$ 转为其逆。

$\because A+B=A(E+A^{-1}B)=A(B^{-1}+A^{-1})B$。

$\therefore (A+B)^{-1}=B^{-1}(B^{-1}+A^{-1})^{-1}A^{-1}$。

3.3 初等变换

$$\begin{bmatrix}A\vdots B\end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}E\vdots A^{-1}\end{bmatrix}，\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{bmatrix}E\\A^{-1}\end{bmatrix}。$$

3.4 分块矩阵

基于拉普拉斯展开式。

对于一些分块矩阵的逆，若 A,B 都可逆，则：$\begin{bmatrix}A & O\\O & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & O\\O & B^{-1}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}O & A\\B & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & B^{-1}\\A^{-1} & O\end{bmatrix}$。

例题：已知 $A=\begin{pmatrix}B & O\\D & C\end{pmatrix}$，其中 B 为 $r\times r$ 可逆矩阵，C 为 $s\times s$ 可逆矩阵，求 A^{-1}。

解：$\because |A|=\begin{vmatrix}B & O\\D & C\end{vmatrix}=|B||C|\neq 0$，所以 A 可逆，设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}X & Y\\Z & W\end{pmatrix}$。

$AA^{-1}=\begin{pmatrix}E_r & O\\O & E_s\end{pmatrix}=E_{r+s}$。即 $\begin{pmatrix}BX & BY\\DX+CZ & DY+CW\end{pmatrix}=E_{r+s}$。

$$\therefore \begin{cases}BX=E\\BY=O\\DX+CZ=O\\DY+CW=E\end{cases}，\begin{cases}B^{-1}BX=B^{-1}, & X=B^{-1}\\B^{-1}BY=O, & Y=O\\CZ=-DX=-DB^{-1}, & Z=-C^{-1}DB^{-1}\\CW=E, & W=C^{-1}\end{cases}。$$

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}B^{-1} & O\\-C^{-1}DB^{-1} & C^{-1}\end{pmatrix}$。

当分块矩阵为三角矩阵时，对角线为原方块矩阵的逆矩阵，非 0 的一角为原矩阵，再左乘同行的逆矩阵，右乘同列的逆矩阵。

$\therefore A=\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}$，$A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$。

当分块矩阵为副对角矩阵时，对角线为对角方块矩阵的逆矩阵，非 0 的一角为原矩阵，再左乘同行的逆矩阵，右乘同列的逆矩阵。

$\therefore A=\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}$，$A^{-1}=\begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$。

$\therefore A=\begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix}$，$A^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \end{pmatrix}$。

$A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}$，$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_n^{-1} \end{pmatrix}$。

$A=\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \ddots & \\ A_n & & \end{pmatrix}$，$A^{-1}=\begin{pmatrix} & & A_n^{-1} \\ & \iddots & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}$。

例题：已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，求 A。

解：由于 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，所以 $A=|A|(A^*)^{-1}$。已知 A^* 可知 $(A^*)^{-1}$，所以重点就是求 $|A|$。

又 $|A^*|=|A|^{n-1}$，$|A^*|=-8$，$|A|=-2$。

所以根据分块矩阵的逆运算，可以得到 $(A^*)^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$。

所以 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$。

4　方阵行列式

4.1　两项积商

- $|A^T| = |A|$。
- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$。
- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$。
- $|AB| = |A| \cdot |B| = |BA|$。
- $|A^*| = |A|^{n-1}$。

因为两项积商比较简单，所以基本上会变换 A 和 B，让其变为转置或逆矩阵。

4.2　两项和差

两项和差需要将方阵拆分为向量组的形式，然后根据矩阵与行列式的运算法则进行运算。（注意其中的差别）

例题：设四阶方阵 $A = [\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$，$B = [\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$，其中 α、β、γ_i 均为四维向量，且 $|A| = 5$，$|B| = -\dfrac{1}{2}$，求 $|A + 2B|$。

解：$= |[\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4] + 2[\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]| = |[\alpha + 2\beta, 3\gamma_2, 3\gamma_3, 3\gamma_4]| = 27|[\alpha + 2\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]| = 27|[\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]| + 54|[\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]| = 27(|A| + 2|B|) = 108$。

5　矩阵方程

含有未知矩阵的方程就是矩阵方程，需要将方程进行恒等变形，化为 $AX = B$、$XA = B$ 或 $AXB = C$ 的形式。

若 A、B 可逆，且可以分别得到 $X = A^{-1}B$，$X = BA^{-1}$，$X = A^{-1}CB^{-1}$。

5.1　直接化简

例题：设 3 阶方阵 A，B 满足 $A^{-1}BA = 6A + BA$，且 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$，求 B。

解:$A^{-1}BA=(6E+B)A$,$A^{-1}B=6E+B$,$A^{-1}B-B=6E$,$(A^{-1}-E)B=6E$。

$\therefore B=6(A^{-1}-E)^{-1}$。

5.2 凑目标式

有时候直接化简非常麻烦，因为所求的式子很复杂，甚至出现结果不能得到的情况。

例题：已知 $AB=A+B$，其中 $B=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求 $(A-E)^{-1}$。

解：已知 $AB=A+B$，求 $A-E$，则向目标计算。

$AB-B=A$，即 $(A-E)B=A$，$(A-E)^{-1}=BA^{-1}$。因为 A 未知，所以要消去 A。

根据 $AB=A+B$，得到 $AB-A=B$，即 $A(B-E)=B$，$A^{-1}=(B-E)B^{-1}$。

$(A-E)^{-1}=BA^{-1}=B(B-E)B^{-1}$，然后就不知道接下来怎么办了。

我们很希望 BB^{-1} 在一起消掉，但是无论如何操作都无法完成。但是也可以通过此得到解题的启示，按 $(A-E)(B-E)$ 去凑。

回到 $(A-E)B=A$，去凑 $B-E$，先尝试两边减去 E，得到 $(A-E)B-E=A-E$，正好左移右项 $(A-E)(B-E)=E$，解得 $(A-E)^{-1}=B-E$。

即 $=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

6 矩阵秩

6.1 未知参数

已知一个矩阵的秩，求其矩阵中的参数。需要将矩阵简化，使得最下面的一行除了参数没有别的非零常数。

例题：已知 $A=\begin{bmatrix}1&1&a&4\\1&0&2&a\\-1&a&1&0\end{bmatrix}$，$r(A)=3$，求 A。

解：首先对 A 化简：$A=\begin{bmatrix}1&1&a&4\\0&1&a-2&4-a\\0&0&(a+1)(3-a)&a(a-3)\end{bmatrix}$，若 $r(A)=3$，

则 $(a+1)(3-a)$ 与 $a(a-3)$ 不全为 0，所以 $a \neq 3$。

6.2 矩阵运算

给出几个矩阵，进行矩阵运算求出对应的秩。

$r(kA)=r(A)$。

$r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$。当且仅当 AB 满秩等号成立。

$r(A+B) \leqslant r(A|B) \leqslant r(A)+r(B)$。

$r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1 \\ 0, r(A)<n-1 \end{cases}$。

例题：已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求 $r(AB+2A)$。

解：$r(AB+2A)=r(A(B+2E))$。又 $B+2E=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，$r(B+2E)=4$。

又 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

所以 $r(A)=2$，$r(AB+2A)=\min\{r(A), r(B+2E)\}=2$。

7 矩阵等价

其实求等价矩阵就是判定其秩是否相等。