

# 无穷级数

Didnelpsun

## 目录

<b>1</b>	<b>常数项级数</b>	<b>1</b>
1.1	正项级数 . . . . .	1
1.1.1	放缩法 . . . . .	1
1.1.2	比较判别法 . . . . .	1
1.1.3	比值判别法 . . . . .	1
1.1.4	根值判别法 . . . . .	1
1.1.5	积分判别法 . . . . .	1
1.2	交错级数 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>幂级数</b>	<b>2</b>
2.1	收敛域 . . . . .	2
2.1.1	基本方法 . . . . .	2
2.1.2	缺项变换 . . . . .	2
2.1.3	收敛域变换 . . . . .	3
2.1.4	常数项级数变换 . . . . .	3
2.2	函数展开 . . . . .	3
2.2.1	因式分解 . . . . .	3
2.2.2	先导后积 . . . . .	4
2.3	级数求和 . . . . .	4
2.3.1	先导后积 . . . . .	4
2.3.2	先积后导 . . . . .	5
<b>3</b>	<b>傅里叶级数</b>	<b>5</b>

# 1 常数项级数

## 1.1 正项级数

如果题目中没有说明，要首先证明多项式为正数，否则不能使用正项级数的方法。

### 1.1.1 放缩法

即根据收敛准则来进行判断。如果要判断原级数收敛，则辅助级数应该是对其放大，判断原级数发散，则辅助级数应该是对其缩小。

### 1.1.2 比较判别法

都需要找到一个好的级数进行比较。常用的只有两个：

$$p \text{ 级数: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1, \text{收敛} \\ p \leq 1, \text{发散} \end{cases}。$$

$$\text{等比级数 (几何级数): } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a} q^{n-1} \begin{cases} |q| < 1, \text{收敛} \\ |q| \geq 1, \text{发散} \end{cases}。$$

当不知道用哪个时可以使用洛必达先计算一下极限值。

### 1.1.3 比值判别法

适用于含有  $a^n$ ,  $n!$ ,  $n^n$  的通项。主要是  $n!$ 。

例题：判断  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 。

解：利用比值判别法，令  $a_n = \frac{n!}{n^n}$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$ ，注意这里幂也为变量，不是等于 1 而是上下同时除以  $n^n$ ， $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n}$ ，根据两个重要极限得到  $= \frac{1}{e} < 1$ ，所以收敛。

### 1.1.4 根值判别法

适用于含有  $a^n$ ,  $n^n$  的通项。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1。$$

### 1.1.5 积分判别法

例题：判断级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  的敛散性。

解：因为  $\frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{n}$ ，调和级数发散，所以比较判别法找不到一个较好的辅助级数。同理根据级数形式比值和根值判别法都无法使用。

令  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ ， $a_n = f(n)$ ，在  $[2, +\infty)$  上  $\frac{1}{n \ln n}$  单调减且非负。

级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  与  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$  同敛散。  
 $= \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$ ，所以原级数发散。

## 1.2 交错级数

# 2 幂级数

## 2.1 收敛域

### 2.1.1 基本方法

使用比值或根值法进行求解。

**例题：**求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$  的收敛半径。

解：

比值法：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} - (-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{e^n - (-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e + (\frac{-1}{e})^n}{1 - (\frac{-1}{e})^n}.$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ \infty & |x| \geq 1 \end{cases}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{e} \right)^n = 0, \quad \text{原式} = e. \quad R = \frac{1}{e}.$$

根值法：

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^n - (-1)^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e \sqrt[n]{1 - (-\frac{1}{e})^n}}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}}, \quad \text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e \sqrt[n]{1-0}}{1 \cdot 1} = e, \quad \text{所以 } R = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

### 2.1.2 缺项变换

若求  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$  或  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ ，则求出其  $\rho$ ， $R = \sqrt{\frac{1}{\rho}}$ 。

**例题：**求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$  的收敛半径。

解：由于分母都是幂函数，所以使用根值法：
$$\begin{aligned} &= \lim_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3^n + (-2)^n}} \\ &= \lim_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1 + (-\frac{2}{3})^n}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

所以  $R = 3$ 。注意这里是错误的，因为之前求收敛域时都是  $x^n$ ，而这里是  $x^{2n-1}$ ，只有奇数次项，所以幂级数的一半都没有了。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^2)^n$ ，当前已知收敛半径为 3，即  $|x^2| < 3$ ，即  $|x| < \sqrt{3}$ 。

### 2.1.3 收敛域变换

**例题：**已知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$  在  $x=0$  处收敛，在  $x=-4$  处发散，求  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$  的收敛域。

**解：**根据阿贝尔定理，已知在  $x=0$  处收敛，且中心点在  $x=-2$ ，则收敛区间为  $(-4, 0)$ ，在  $x=-4$  处发散，则  $x < -4$ ， $x > 0$  处发散。

然后确定两端端点敛散性， $x=0$  处收敛则收敛域包括  $x=0$ ， $x=-4$  处发散则收敛域不包括  $x=-4$ ，得到收敛域  $(-4, 0]$ 。

对于  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$  的中心点为  $x=3$ ，则根据相对位置收敛域为  $(1, 5]$ 。

### 2.1.4 常数项级数变换

可以代入特殊点确定收敛点，将幂级数转换为常数项级数。

**例题：**若级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  条件收敛，求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^n$  的收敛区间。

**解：**已知  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  条件收敛，则对于幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-1)^n$  而言在  $x=2$  处条件收敛，即得到以中心点  $x=1$  的收敛区间  $(0, 2)$ 。

## 2.2 函数展开

### 2.2.1 因式分解

**例题：**将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$  展开为  $x-1$  的幂级数并指出收敛区间。

**解：** $\frac{1}{x^2 - 3x - 4} = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right)$ 。

$\frac{1}{x-4} = \frac{1}{(x-1)-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{x-1}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x-1}{3} \right)^n, \left| \frac{x-1}{3} \right| < 1, x \in (-2, 4)$ 。

$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x-1)+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{x-1}{2} \right)^n, \left| -\frac{x-1}{2} \right| < 1, x \in (-1, 3)$ 。

所以其幂级数就是其加和，收敛区间为  $(-2, 4) \cap (-1, 3) = (-1, 3)$ 。

### 2.2.2 先导后积

**例题：**求函数  $f(x) = \arctan x$  在  $x = 0$  处的幂级数展开。

**解：** $f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, | -x^2 | < 1$ 。

已经求得求导后的函数的幂级数展开，所以求原函数的幂级数展开只需要积分，利用先导后积公式： $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 。

求导的级数要求  $|x| < 1$ ，代入  $x = \pm 1$  到最后结果得到两个交错级数，所以收敛域其实为  $[-1, 1]$ （可以不写）。

## 2.3 级数求和

即对展开式进行逆运算，根据幂级数展开式反推原幂级数。

可以利用展开式求和函数，但是很多展开式的通项都不是公式中的，就需要对通项进行变形。

在求和之前要先计算收敛半径和收敛域。

无论是哪个方法都要求求导和积分后系数  $n+a$  与幂次  $n$  相等，所以求导或积分的目的就是为了让它们相同，从而能被看成一个整体。

### 2.3.1 先导后积

$\sum \frac{x^{f(n)}}{P(n)}$ ： $n$  在分母上，先导后积。使用变限积分： $\int_{x_0}^x S'(t) dt = S(x) - S(x_0)$ ，即  $S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^x S'(t) dt$ 。一般选择  $x_0$  为展开点。

主要公式： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x) \ ((-1, 1])$ ； $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \ ([-1, 1))$ 。

目的是让  $P(n) = f(n)$ 。

**例题：**求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$  的和函数。

**解：**首先  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1, R = 1$ 。

当  $x = \pm 1$  时， $x^{2n} = 1$ ，所以原式  $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ，为交错级数，由莱布尼茨判别法可知极限为 0 且单调递减，从而该级数收敛。从而收敛域为  $[-1, 1]$ 。

令  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$ 。易得  $x = 0$  时  $S(x) = 1$ 。

当  $x \neq 0$  时， $S(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} dx$   
 $= \frac{1}{x} \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}] dx$ 。

所以  $(-1)^n x^{2n}$  为一个几何级数, 所以  $q = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(-1)^n x^{2n}} = -x^2$ 。

从而  $= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\arctan x}{x}$ 。

### 2.3.2 先积后导

$\sum P(n)x^{f(n)}$ :  $n$  在分子上, 先积后导。  $(\int S(x) dx)' = S(x)$ 。

主要公式:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad ( (-1, 1) )$ ;  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad ( (-1, 1) )$ 。

目的是让  $P(n) = f^{(n)}(n) \cdots f'(n)$ 。

例题: 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$  的和函数。

解: 记  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = x(\int \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} dx)' = x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)' = x \left( \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$ 。收敛域为  $[-1, 1]$ 。

例题: 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$  的和函数。

解:  $(n+1)(n+3)$  的形式可以推出  $(n+1)(n+2)$  是求两次导的结果, 而这里是  $(n+1)(n+3)$ , 所以拆开:  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \right)'' + \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left( \frac{x^2}{1-x} \right)'' + \left( \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{3-x}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1, 1)$ 。

## 3 傅里叶级数