

# 随机变量数字特征

Didnelpsun

## 目录

<b>1</b>	<b>一维随机变量数字特征</b>	<b>1</b>
1.1	数学期望 . . . . .	1
1.1.1	离散型随机变量 . . . . .	1
1.1.1.1	分布律变换 . . . . .	1
1.1.1.2	定义 . . . . .	1
1.1.2	连续型随机变量 . . . . .	1
1.1.2.1	概率密度 . . . . .	1
1.1.2.2	概率密度函数 . . . . .	2
1.1.2.3	分布函数 . . . . .	2
1.1.3	抽象概率密度 . . . . .	2
1.2	方差 . . . . .	3
1.2.1	方差关系 . . . . .	3
1.2.2	期望关系 . . . . .	3
1.3	切比雪夫不等式 . . . . .	3
<b>2</b>	<b>二维随机变量数字特征</b>	<b>3</b>
2.1	协方差 . . . . .	3
2.1.1	性质 . . . . .	3
<b>3</b>	<b>独立性与相关性</b>	<b>4</b>
3.1	独立性 . . . . .	4
3.2	相关性 . . . . .	4
<b>4</b>	<b>切比雪夫不等式</b>	<b>4</b>
4.1	区间概率 . . . . .	4

# 1 一维随机变量数字特征

## 1.1 数学期望

### 1.1.1 离散型随机变量

#### 1.1.1.1 分布律变换

可以根据随机变量分布律的形式拟合出已知的离散型随机变量分布，从而得到已知的期望。

**例题：**设随机变量  $X$  的分布律为  $P\{X = k\} = \frac{1}{2^k k! (\sqrt{e} - 1)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 求  $EX$ 。

**解：**查看分布律中含有  $k!$  的形式，所以可以考虑转换为泊松分布。泊松分布的标准形式是  $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 。

$$P\{X = k\} = \frac{1}{2^k k! (\sqrt{e} - 1)} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} e^{-\frac{1}{2}}, \quad X \sim \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1} P\left(\frac{1}{2}\right).$$
$$\therefore EX = \frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{e} - 2}.$$

#### 1.1.1.2 定义

对于已知  $E(X)$  和  $X$  的分布，要求  $E(f(x))$  的值，此时很难拟合到已知分布律，所以需要按照离散随机变量的期望定义来计算。注意虽然  $f(x)$  对于  $x$  是变化了，但是对应的概率是不变的。

**例题：**已知  $X \sim P(\lambda)$ ，求  $E(X)E\left(\frac{1}{1+X}\right)$ 。

**解：**已知  $X \sim P(\lambda)$ ，则  $E(X) = \lambda$ 。而  $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$  无法通过拟合求出，所以就要用到期望的定义。

$$E(X)E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}. \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \text{ 为概率和等于 } 1\right)$$

### 1.1.2 连续型随机变量

基本上都是以  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)x dx$  的变式进行计算。

#### 1.1.2.1 概率密度

给出  $X$  概率密度。

**例题：**连续型随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} (-\infty < x < +\infty)$ ，求  $EX$ 。

解：  $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2\pi} \ln(1+x^2)|_{-\infty}^{+\infty}$ 。发散，所以不存在。

### 1.1.2.2 概率密度函数

给出  $X$  概率密度与  $X$  的相关函数。

**例题：**连续型随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} (-\infty < x < +\infty)$ ，求  $E(\min\{|X|, 1\})$ 。

解：  $E(\min\{|X|, 1\}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \min\{|x|, 1\} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \min\{x, 1\} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{2}{\pi} \int_1^{+\infty} 1 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2)|_0^1 + \frac{2}{\pi} \arctan x|_1^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \ln 2 + \frac{1}{2}$ 。

### 1.1.2.3 分布函数

给出  $X$  分布与  $X$  的相关函数。

**例题：**随机变量  $X \sim N(0, 1)$ ，求  $E[(X-2)^2 e^{2X}]$ 。

解：  $E[(X-2)^2 e^{2X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 e^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = e^2 E(t^2) = e^2 [DX + (EX)^2] = e^2(1+0^2) = e^2$ 。

### 1.1.3 抽象概率密度

主要是判断概率密度函数和期望之间的关系。期望的积分形式中的上下限与期望值无关，即如果改变期望的积分上下限那么其期望值是不确定的，只有概率密度变化才能算出具体的值。

**例题：**设随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f(x)$ ， $E(X) = a$ ，判断  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x+a) dx = 0$ ， $\int_{-\infty}^a xf(x) dx = \frac{1}{2}$ 。

解：由于  $E(X) = a$ ，则  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = a$ 。

对于  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x+a) dx = 0$ ，令  $x+a = t$ ， $x = t-a$ ，所以代入  $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt - a \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = a - a = 0$ ，所以成立。

对于  $\int_{-\infty}^a xf(x) dx = \frac{1}{2}$ ，其上下限变化，相当于积分值面积的底长是不确定的， $a$  表示的是平均面积，这根底长的一半无关，所以不成立。

## 1.2 方差

### 1.2.1 方差关系

**例题：**相互独立的随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  具有相同的方差  $\sigma^2 > 0$ ，设  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，求  $D(X_1 - \bar{X})$ 。

**解：**由题已知  $DX_i = \sigma^2$ 。

$$D(X_1 - \bar{X}) = D\left(X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = D\left(\frac{n-1}{n}X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 DX_1 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n DX_i = \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} \sigma^2 + \frac{n-1}{n^2} \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2。$$

### 1.2.2 期望关系

**例题：**已知随机变量  $X_1, X_2$  相互独立，且都服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ )，求  $D(X_1 X_2)$ 。

**解：** $X_1, X_2$  服从  $N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $EX_1 = EX_2 = \mu$ 。

$$D(X_1 X_2) = E[(X_1 X_2)^2] - [E(X_1 X_2)]^2 = E(X_1^2 X_2^2) - (EX_1 EX_2)^2。$$

若  $X_1, X_2$  相互独立则  $X_1^2, X_2^2$  相互独立，则  $= EX_1^2 EX_2^2 - \mu^4$ 。

$$\text{又 } EX_1^2 = EX_2^2 = DX_1 + (EX_1)^2 = DX_2 + (EX_2)^2 = \sigma^2 + \mu^2。$$

$$(\sigma^2 + \mu^2)^2 - \mu^4 = \sigma^4 + 2\sigma^2 \mu^2。$$

## 1.3 切比雪夫不等式

$$P\{|X - EX| \leq \epsilon\} \leq \frac{DX}{\epsilon^2} \text{ 或 } P\{|X - EX| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\epsilon^2}。$$

## 2 二维随机变量数字特征

### 2.1 协方差

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)。$$

#### 2.1.1 性质

**例题：**已知  $XY$  的相关系数  $\rho_{XY} \neq 0$ ，设  $Z = aX + b$ ， $ab$  为常数，则求出  $\rho_{XY} = \rho_{YZ}$  成立的充要条件。

**解：**由于  $Cov(Y, Z) = Cov(Y, aX + b) = aCov(Y, X) = aCov(X, Y)$ ， $DZ = D(aX + b) = a^2 Dx$ 。

$\rho_{YZ} = \frac{Cov(Y, Z)}{\sqrt{DY}\sqrt{DZ}} = \frac{aCov(X, Y)}{\sqrt{DY}\sqrt{a^2DX}} = \frac{a}{|a|}\rho_{XY}$ , 所以相等的条件是  $\frac{a}{|a|} = 1$ , 即  $a > 0$ 。

**例题：**设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布，且方差  $\sigma^2 > 0$ ,  $Y_1 = \sum_{i=2}^n X_i$  和  $Y_2 = \sum_{j=1}^{n-1} X_j$ , 求  $Y_1$  和  $Y_n$  的协方差  $Cov(Y_1, Y_n)$ 。

解： $\because Y_1 = \sum_{i=2}^n X_i, Y_2 = \sum_{j=1}^{n-1} X_j, DX_i = \sigma^2$ 。

### 3 独立性与相关性

独立范围小于不相关范围。所以我们一般先用数字特征判断相关性再用分布判断独立性。

$$Cov(X, Y) = E(XY) - EXEY \begin{cases} \neq 0 \Leftrightarrow XY \text{ 相关} \Rightarrow X \text{ 与 } Y \text{ 不独立} \\ = 0 \Leftrightarrow XY \text{ 不相关, 分布 } \begin{cases} XY \text{ 独立} \\ XY \text{ 不独立} \end{cases} \end{cases}$$

且如果服从二维正态分布，则  $XY$  独立与不相关等价。

#### 3.1 独立性

通过分布来确定独立性。如独立条件是  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$ 。

#### 3.2 相关性

通过数字特征来判断相关性。如不相关性条件是  $\rho_{XY} = 0$ 、 $Cov(X, Y) = 0$ 、 $E(XY) = EXEY$ 、 $D(X \pm Y) = DX + DY$ 。

### 4 切比雪夫不等式

切比雪夫不等式用于估算随机变量在区间的概率，证明收敛性问题。

#### 4.1 区间概率

常用变式  $P\{|Z - EZ| \geq \epsilon\} \leq \frac{DZ}{\epsilon^2}$  或  $P\{|Z - EZ| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{DZ}{\epsilon^2}, Z = f(X)$ 。

**例题：**已知随机变量  $XY$ ,  $EX = EY = 2$ 、 $DX = 1$ 、 $DY = 4$ ,  $\rho_{XY} = 0.5$ , 估计概率  $P\{|X - Y| \geq 6\}$ 。

解: 已知  $\rho_{XY} = 0.5 = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{Cov(X, Y)}{2}$ ,  $Cov(X, Y) = 1 = E(XY) - EXEY$ ,  $E(XY) = 5$ 。

令  $X - Y = Z$ ,  $EZ = EX - EY = 0$ ,  $DZ = DX + DY - 2Cov(X, Y) = 1 + 4 - 2 = 3$ 。

取  $\epsilon = 6$ , 由切比雪夫不等式得  $P\{|X - Y| \geq 6\} = P\{|Z - 0| \geq 6\} \leq \frac{DZ}{\epsilon^2} = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$ 。