微分方程

Didnelpsun

目录

本节内容较少。

若一曲线过点 $(1,2)$，且该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $2x$，求该曲线的方程。

令所求曲线为 $\varphi(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$，且 $x=1$ 时，$y=2$。

两边积分：$\int\mathrm{d}y=y=\int 2x\,\mathrm{d}x$。所以 $y=x^2+C$。

代入 $(1,2)$，$C=1$，所以 $y=x^2+1$。

1　微分方程基本概念

1.1　微分方程构成

定义：表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，即含导数的方程就是微分方程。导数可能是一阶导数也可能是二阶以及以上阶数的导数。

定义：微分方程所出现的未知函数的最高阶导数的阶数就是该微分方程的**阶**。

n 阶微分方程的形式是 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$。其中最高阶导数是必须出现的。若能从中解出最高阶导数，则可得微分方程 $y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$。

1.2　微分方程的解

定义：若微分方程中的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则就是微分方程的**通解**。

如若 $y''=3$，则 $y'=3x+C_1$，$y=\dfrac{3}{2}x^2+C_1x+C_2$，此时含有两个任意常数 C_1C_2，则微分方程的阶数也为 2。

定义：确定通解中任意常数后，就得到微分方程的**特解**。

定义：当给出 $x=x_0$ 时 y_0 与 y'_0 的值，那么这些条件就是**初值条件**，如上面的 $y''=3$。

求微分方程 $y'=f(x,y)$ 满足初值条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解这样的问题，就是一阶微分方程的初值问题，记为 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y|_{x=x_0}=y_0\end{cases}$。

微分方程的解的图形是一条曲线，叫做微分方程的**积分曲线**，初值问题的集几何意义就是求微分方程的通过某点的积分曲线。

例题：判断函数 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 是否是微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + k^2x = 0$ 的解，若是则令其为 $k \neq 0$ 时方程的通解，求满足初值条件 $x|_{t=0} = A$，$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$ 时的特解。

解：判断是否为方程的解，就要将这个解代入微分方程中。微分方程中除了 x，还出现了 x''，所以需要先将 x 对 t 求两次导：

$x' = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt$，$x'' = -k^2C_1\sin kt - k^2C_2\sin kt$。代入方程：

$-k^2(C_1\sin kt + C_2\sin kt) + k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) \equiv 0$，所以是解，然后求特解：

代入 $x|_{t=0} = A$，$\therefore C_1 = A$，代入 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$，$\therefore C_2 = 0$。

所以代入 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 得到特解：$x = A\cos kt$。

2　可分离变量的微分方程

对于第一节的 $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$ 可以直接求解，但是不是所有一阶微分方程都可以如此求通解，如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2$ 两端直接积分就可以得到通解 $x^2 + C$。

但是并不是所有都是如此，如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2$ 求积分得 $y = \int 2xy^2\,\mathrm{d}x$，这本身不能直接解，但是可以将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2$ 先两边同乘 $\frac{\mathrm{d}x}{y^2}$ 得到 $\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = 2x\mathrm{d}x$，将 xy 分离在两端，然后两边同时积分得到 $-\frac{1}{y} = x^2 + C$，所以 $y = -\frac{1}{x^2+C}$。

即若可以变型为 $g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$ 的一阶导数方程就是可分离变量的微分方程。即将含 y 的放在一边，含 x 的放在另一边。

然后对两边求积分就得到 $\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$，解得隐式解或隐式通解 $G(y) = F(x) + C$。

例题：求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$。

解：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\,\mathrm{d}x$，$\ln|y| = x^2 + C$，$|y| = e^{x^2+C}$。

$\therefore y = \pm e^{x^2}e^C = \pm C_1e^{x^2} = C_2e^{x^2}$。

注意：在微分方程部分可以直接 $\ln y = x^2 + C$ 而不用管正负号，因为正负号都会被归为常数中。

3　齐次方程

3.1　自然齐次方程

若一阶微分方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，则这方程就是一个齐次方程。

如 $(xy-y^2)\mathrm{d}x-(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$ 可以化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{xy-y^2}{x^2-2xy}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$。

解决齐次方程问题的过程：令 $u=\dfrac{y}{x}$；$y=xu$；$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。

代入微分方程：$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$，$\therefore x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u$，分离变量：$\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，求积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$。最后求出积分再用 $\dfrac{y}{x}$ 替代 u。

若是方程可以变为齐次方程，则 x 和 y 的幂应该是对称的，可以尝试除以一个 x^a 来变为 $\dfrac{y^a}{x^a}$ 形式。

例题：求 $y^2+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解：得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$。

然后将这个等式化为 $\dfrac{y}{x}$ 的形式，分子分母同时除以 x^2：$\dfrac{\dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{xy-x^2}{x^2}}=\dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x}-1}$。

从而到第三步：$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u^2}{u-1}$，$\therefore x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u^2}{u-1}-u=\dfrac{u}{u-1}$。

$\therefore \dfrac{u-1}{u}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，$\therefore \displaystyle\int\frac{u-1}{u}\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，$u-\ln u=\ln x+C$，$\ln xu=u+C$。

代入 $u=\dfrac{y}{x}$，得到 $\ln y=\dfrac{y}{x}+C$，所以得到 $y=Ce^{\frac{y}{x}}$。

3.2　* 可化为齐次方程

对于自然齐次方程，其形式如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{A_1x+B_1y}{A_2x+B_2y}$，则可以除以 x 得到齐次方程。

而对于形式如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}$，则因为有常数项，所以不能直接除以 x。

所以想尝试消去常数项。令 $x=X+h$，$y=Y+k$。

$\therefore \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\dfrac{A_1X+B_1Y+A_1h+B_1k+C_1}{A_2X+B_2Y+A_2h+B_2k+C_2}$，当取一个合适的 h 和 k 时常数项 $A_1h+B_1k+C_1=A_2h+B_2k+C_2=0$，从而能化为齐次方程。

若 $\dfrac{A_2}{A_1} \neq \dfrac{B_2}{B_1}$，则可以解得：

$$\begin{cases} k = \dfrac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_2B_1 - A_1B_2} \\ h = \dfrac{A_1B_1C_2 - A_2B_1C_1 + A_1A_2B_1C_1 - A_1^2B_2C_1}{A_1^2B_2 - A_1A_2B_1} \end{cases}.$$

若 $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{B_2}{B_1}$，即关系式对应成比例。

令 $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{B_2}{B_1} = \lambda$，$\therefore \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{A_1x + B_1y + C_1}{\lambda(A_1x + B_1y) + C_2}$。

又令 $A_1x + B_1y = v$，$\therefore \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = A_1 + B_1\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = A_1 + B_1\dfrac{v + C_1}{\lambda v + C_2}$ $= \dfrac{(A_1\lambda + B_1)v + A_1C_2 + B_1C_1}{\lambda v + C_2}$。此时未知数只有 v，所以可以按照可分离变量来处理。

4　一阶线性微分方程

4.1　线性方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ 就是一阶线性方程。因为其对未知函数 y 与其导数都是一次方程。

若 $Q(x) \equiv 0$，则是齐次一阶线性微分方程，可化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\,\mathrm{d}x$，$\ln y = \int P(x)\,\mathrm{d}x + C'$，$y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} \cdot e^{C'}$，$y = Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$。

若 $Q(x) \neq 0$，则是非齐次一阶线性微分方程，令 $y = ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$，求 u 这个关于 x 的函数的具体值，这就是**常数变易法**。代入 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$，得到 $u'e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} - ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}P(x) + P(x)ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} = Q(x)$，得到 $u'e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} = Q(x)$，从而得到 u'，再对 u' 积分得到 $u = \displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C$。从而代入 $y = ue^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$，得到定理：$y = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$。非齐次通解就是其齐次通解加上一个非齐次的特解。

例题：求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x + y}$。

解：不能直接做，因为不能分离出 y。

可以两边求倒数：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - x = y$，颠倒 xy，得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = x$。就可以按照公式来求。

或令 $x + y = u$，所以 $y = u - x$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 1$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1 + u}{u}$，$\dfrac{u}{1 + u}\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$。

4.2 * 伯努利方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n$ 就是伯努利方程。若 $y=0$ 则是齐次方程，若 $y=1$ 则是一阶线性方程。

变形：$y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$，又令 $y^{1-n}=z$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，从而 $\dfrac{1}{1-n}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n$ 得到 $\dfrac{1}{1-n}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+P(x)z=Q(x)$，从而 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$，将 $(1-n)P(x)$ 当作 $P(x)$，$(1-n)Q(x)$ 当中 $Q(x)$ 代入得到 z 的关系式，再求 y。

5 可降阶的高阶微分方程

高阶微分方程即含二阶以及二阶以上的微分方程，需要将其降为一阶微分方程。

5.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型

右边是只包含 x 的函数。

直接对函数不断求积分就可以了。连续积分 n 次，会得到一个含有 n 个任意常数的通解。

例题：求 $y'''=e^{2x}-\cos x$。

解：$y''=\dfrac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1$，$y'=\dfrac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2$，$y=\dfrac{1}{8}e^{2x}+\sin x+\dfrac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$。

5.2 $y''=f(x,y')$ 型

即存在 y''，y' 和 x 但是没有 y。

所以令 $y'=p$，$y''=p'$，代入：$p'=f(x,p)$，代入 $p=\varphi(x,C_1)$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x,C_1)$，对其积分：$y=\int\varphi(x,C_1)\,\mathrm{d}x+C_2$。

例题：求 $(1+x^2)y''=2xy'$，满足初值条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=3$ 的特解。

解：令 $y'=p$，$y''=p'$，所以 $(1+x^2)p'=2xp$。

$\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$，$\ln p=\ln(1+x^2)+C'$，$p=C(1+x^2)$，所以 $y'=3(1+x^2)$，$y=x^3+3x+1$。

5.3 $y''=f(y,y')$ 型

即存在 y''，y' 和 y 但是没有 x。

所以令 $y'=p$，$y''=p'=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$。

设其通解为 $y'=p=\varphi(y,C_1)$。

分离变量并积分，得到通解为 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$。

例题：求微分方程 $yy''-y'^2=0$ 的通解。

解：令 $y'=p$，$y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0$。

若 $p\neq 0$，$y\neq 0$，则 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，$\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，$p=Cy$。

若 $p=0$，则 $y'=0$，则 y 是一个常数。

所以综上 $y=C_2e^{C_1y}$。

6 高阶线性微分方程

第一部分是一阶微分方程，分为可分离变量微分方程、齐次微分方程、一阶齐次线性微分方程、一阶非齐次线性微分方程。

第二部分是可降阶的高阶微分方程，分为三种。

第三部分就是本节的高阶线性微分方程，$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 就是 n 阶齐次线性微分方程，$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ 就是 n 阶非齐次线性微分方程

若 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 为两个函数，当 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 不成比例，则称 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 线性无关，否则 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 线性相关。

定理：若 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 的解，则 $y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$ 也为其解。

证明：因为 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 为解，所以代入方程：

$\varphi_1''+a(x)\varphi_1'+b(x)\varphi_1=0$，$\varphi_2''+a(x)\varphi_2'+b(x)\varphi_2=0$

从而 $(C_1\varphi_1+C_2\varphi_2)''+a(x)(C_1\varphi_1+C_2\varphi_2)'+b(x)(C_1\varphi_1+C_2\varphi_2)=C_1(\varphi_1''+a(x)\varphi_1'+b(x)\varphi_1)+C_2(\varphi_2''+a(x)\varphi_2'+b(x)\varphi_2)=0$。

所以得证。

定理：若 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 分别为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 与 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ 的解，则 $y=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ 的解。

证明：$\varphi_1''+a(x)\varphi_1'+b(x)\varphi_1=0$，$\varphi_2''+a(x)\varphi_2'+b(x)\varphi_2=f(x)$，代入 $y=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$：

$(\varphi_1+\varphi_2)''+a(x)(\varphi_1+\varphi_2)'+b(x)(\varphi_1+\varphi_2)=(\varphi_1''+a(x)\varphi_1'+b(x)\varphi_1)+(\varphi_2''+a(x)\varphi_2'+b(x)\varphi_2)=f(x)$。

所以得证。

定理: 若 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ 的解，则 $y=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 的解。

证明：$\varphi_1''+a(x)\varphi_1'+b(x)\varphi_1=f(x)$，$\varphi_2''+a(x)\varphi_2'+b(x)\varphi_2=f(x)$，代入 $y=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$：

$(\varphi_2-\varphi_1)''+a(x)(\varphi_2-\varphi_1)'+b(x)(\varphi_2-\varphi_1)$

$(\varphi_2''+a(x)\varphi_2'+b(x)\varphi_2)-(\varphi_1''+a(x)\varphi_1'+b(x)\varphi_1)$

$f(x)-f(x)=0$，所以得证。