多元函数积分学

Didnelpsun

目录

1　二重积分

1.1　交换积分次序

1.1.1　直角坐标系

例题：交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$。

解：已知积分区域分为两个部分。将 X 型变为 Y 型。画出图形可以知道 $y \in (0,1)$，x 的上下限由 $y = x^2$ 和 $y = \dfrac{1}{2}(3-x)$ 转化为 $\sqrt{y}$ 和 $3-2y$。

所以转换为 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$。

1.1.2　极坐标系

例题：对 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$ 交换积分次序。

解：对于极坐标的积分次序交换需要利用直角坐标系来画图了解，特别是对于 r 的上下限。

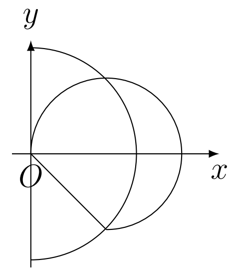
对 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 变为 y 轴，$y = -\dfrac{\pi}{4}$ 变为 $y = -x$。

对 $r = 2\cos\theta$ 变为 xy 的表达式，$r^2 = 2\cos\theta$，即 $x^2+y^2 = 2x$，$(x-1)^2+y^2 = 1$。

所以所得到的 σ 为一个圆割去一个扇形。

交换积分次序后就需要以一个长度以极点为圆心做圆，切割 σ。

由 σ 可知取长度 $\sqrt{2}$ 可以切分。



所以 σ 可以分为左边的 σ_1 和右边的 σ_2。

σ_1 的 $r \in [0, \sqrt{2}]$，σ_2 的 $r \in [\sqrt{2}, 2]$。

σ_1 的 θ 下限是 $y = -x$ 这条边，即 $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$，上限是 $r = 2\cos\theta$ 这个圆，则 $\theta = \arccos\dfrac{r}{2}$。

σ_2 的 θ 界限都是是 $r = 2\cos\theta$ 这个圆，但是上限是上半部分，此时 $y > 0$，而下限是下半部分，此时 $y < 0$，即上限 $r\cos$，所以下限为 $\theta = -\arccos\dfrac{r}{2}$。

综上交换积分次序结果为：

$\int_0^{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{\sqrt{2}}^{2} r\,\mathrm{d}r \int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$。

1.2　极直互化

例题：将 $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{-y^2}\mathrm{d}y \int_0^{y} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{R} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 转换为极坐标系并计算结果。

解：首先根据积分上下限得到积分区域 $D=\left\{0\leqslant y\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}R,0\leqslant x\leqslant y\right\}\cup\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}R\leqslant y\leqslant R,0\leqslant x\leqslant\sqrt{R^2-y^2}\right\}$，$D$ 为一个八分之一圆的扇形。

根据 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 替换得到 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant r\leqslant R,\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$。

又 $e^{-y^2}\cdot e^{-x^2}=e^{-(x^2+y^2)}=e^{-r^2}$。

$\therefore I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r$。

1.3 累次积分计算

二重积分若是累次积分形式出现，则计算可以使用上面两种方法简便运算。

1.3.1 交换积分次序

例题：