不定积分与定积分

Didnelpsun

目录

1　不定积分

1.1　基本积分

例题： 汽车以 20m/s 的速度行驶，刹车后匀减速行驶了 50m 停止，求刹车加速度。

已知题目含有两个变量：距离和时间，设距离为 s，时间为 t。

因为汽车首先按 20m/s 匀速运动，所以 $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=20$，最开始距离为 0，所以 $s|_{t=0}=0$。

又因为是匀减速的，所以速度形如：$v=\frac{s}{t}=kt+b$，从而令二阶导数下 $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=k$。

所以 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\int\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t=\int k\,\mathrm{d}t=kt+C_1$。

代入 $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=20$，所以 $C_1=20$，即 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=kt+20$。

所以 $\mathrm{d}s=(kt+20)\,\mathrm{d}t$，从而 $s=\int(kt+20)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}kt^2+20t+C_2$。

又 $s|_{t=0}=0$，所以代入得 $C_2=0$，所以 $s=\frac{1}{2}kt^2+20t$。

当 $s=50$ 时停住，所以此时 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=0$，得到 $t=-\frac{20}{k}$。

代入 s：$50=\frac{1}{2}k\left(-\frac{20}{k}\right)^2+20\left(-\frac{20}{k}\right)$，解得 $k=-4$，即加速度为-4m/s^2。

1.2　换元积分

1.2.1　第一类换元

1.2.1.1　聚集因式

将复杂的式子转换为简单的一个因式放到 d 后面看作一个整体，然后利用基本积分公式计算。

例题： 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$。

$=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x\ln\ln x}=\int\frac{\mathrm{d}(\ln\ln x)}{\ln\ln x}=\ln|\ln\ln x|+C$。

例题： 求 $\int\frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$。

$=-\int10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}(\arccos x)=-\frac{1}{2}\int10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}(2\arccos x)=-\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln10}+C$。

1.2.1.2　积化和差

对于两个三角函数的乘积可以使用积化和差简单计算。

例题： 求 $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x \,\mathrm{d}x$。

$= \displaystyle\int \cos 3x \sin 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x)\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{2}\int \sin 5x \,\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{10}\cos 5x + \dfrac{1}{2}\cos x + C$。

1.2.1.3　三角拆分

主要用于 $\sec^2 - 1 = \tan^2 x$，当出现 $\tan^2$、$\tan^3$ 等与 $\sec x$ 在一起作为乘积时可以考虑拆分换元。

例题： $\displaystyle\int \tan^3 x \sec x \,\mathrm{d}x$。

$= \displaystyle\int (\sec^2 x - 1)\tan x \sec x \,\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}(\sec x) = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$。

需要利用到有理积分的高阶多项式分配与低阶多项式因式分解。

1.2.1.4　反三角换元

当积分式子中存在 $\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$ 这种反三角函数时，可以考虑将其令为 t 来进行简化计算。从而 x 分别为 $\sin t$、$\cos t$、$\tan t$。

例题： 求 $\int (\arcsin x)^2 \,\mathrm{d}x$。

令 $\arcsin x = t$，$\therefore x = \sin t$，$\mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$。

$= \int t^2 \cos t \,\mathrm{d}t$。除了换元法还需要使用分部积分法，可以直接进行分部积分也可以使用下面讲到的分部积分拓展公式的表格法来计算，$\cos t$ 更难求导，所以对其积分，放在下面，t^2 容易求导，所以对其求导，放在上面：

t^2	$2t$	2	0
$\cos t$	$\sin t$	$-\cos t$	$-\sin t$

$\therefore = t^2 \sin t - 2t\cos t - \sin t + C = (\arcsin x)^2 x + 2\arcsin x\sqrt{1-x^2} - 2x + C$。

1.2.1.5　指对换元

当积分式子存在指数函数 e^x 或对数函数 $\ln x$ 时，可以考虑令其为 t，从而 x 分别为 $\ln t$ 和 e^t。

1.2.1.6　倒数换元

当被积函数的分母的幂次要比分子高两次以及以上时，令 $x = \dfrac{1}{t}$。

1.2.1.7　有理换元

书上这个类型属于有理函数部分，我这里移动到第一类换元中。即将无理因式直接设为一个变量，从而提高式子的阶数，消除无理式变为有理式。

有理换元时无理因式中的 x 必须是一阶的，如 $\sqrt[3]{x+6}=u$，若是二阶需要利用第二类换元（三角换元），否则则无法消去无理因式项，因为 x 不能用单个的 u 来表示，如 $\sqrt{x^3+6}=u$，$u=\sqrt[3]{u^2-6}$。

例题： 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}$。

令 $u=\sqrt[3]{x+1}$，从而 $x=u^3-1$，$\mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$。

$$=\int\frac{3u^2}{1+u}\mathrm{d}u=\int\frac{3u^2+3u-3u-3+3}{1+u}\mathrm{d}u=\int\left(3u-3+\frac{3}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{3}{2}u^2-3u+3\ln|1+u|+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|+C。$$

例题： 求 $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$。

令 $u=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)=\dfrac{-2u(1+u^2)-2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}$

$$=\int u\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot\frac{-4u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\int\frac{-4u^2}{(1-u)(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u$$

令 $\dfrac{A}{1-u}+\dfrac{B}{1+u}+\dfrac{Cu+D}{1+u^2}=\dfrac{-4u^2}{(1-u)(1+u)(1+u^2)}$。

通分：$A(1+u^2+u+u^3)+B(1+u^2-u-u^3)+(Cu-Cu^3+D-Du^2)$

$=(A-B-C)u^3+(A+B-D)u^2+(A-B+C)u+(A+B+D)=-4u^2$

$\therefore A-B-C=0$，$A+B-D=-4$，$A-B+C=0$，$A+B+D=0$。

$\therefore A=B=-1$，$C=0$，$D=2$。

原式 $\displaystyle=\int\left(\frac{2}{1+u^2}-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$

$=2\arctan u+\ln|1-u|-\ln|1+u|+C$

$=2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+C$。

1.2.1.8　万能公式

同样属于有理积分的内容，但是本质还是属于三角函数的部分。

令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，$\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$。

例题： 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$。

令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，从而 $\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$：

$$=\int\frac{1}{3+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C。$$

1.2.2 第二类换元

使用换元法做了换元之后是要带回式子中的，也就是说要保证反函数的存在才能代入有意义。为了保证反函数的存在，因此要保证原函数的单调性，所以要有一个规定的范围来使原函数保证单调。

1.2.2.1 $\sqrt{a^2-x^2}$：$x = a\sin t(a\cos t)$

若令 $x = a\sin t$，则根据 $\sin t \in (-1,1)$ 得到主区间：$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$。

若令 $x = a\cos t$，则根据 $\cos t \in (-1,1)$，得到主区间：$t \in (0,\pi)$。

例题： 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$。

令 $x = \sin t \,(t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right))$, 所以 $\sqrt{1-x^2} = \cos t, \mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t, t = \arcsin x$。

因为式子 $\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} > 0$，单调递减，所以不用讨论正负号。

$$= \int \frac{\cos t}{1+\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{2\cos^2 \frac{t}{2} - 1}{2\cos^2 \frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t - \int \sec^2 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = t - \tan\frac{t}{2} + C$$

$$= t - \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} + C = t - \frac{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2}} + C = t - \frac{\sin t}{1+\cos t} + C$$

$$= \arcsin x - \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C。$$

1.2.2.2 $\sqrt{a^2+x^2}$：$x = a\tan t$

根据 $\tan t \in R$，从而得到主空间：$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$。

例题： 求 $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$。

虽然本题目看着可以从分母解开平方，然后低阶分配，但是这分母是平方的式子很难分配，所以需要使用换元法。

令 $x = \tan t$，$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，$x^2+1 = \sec^2 t$，$\mathrm{d}x = \sec^2 t\,\mathrm{d}t$。

因为 $(x^2+1)^2 > 0$，虽然 x^3+1 可能为负可能为正，但是都是单调递增的，所以不用考虑正负号。

$$= \int \frac{\tan^3 t + 1}{\sec^2 t}\mathrm{d}t = \int \frac{\sin^3 t + \cos^3 t}{\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{\sin t(1-\cos^2 t) + \cos^3 t}{\cos t}\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t}\mathrm{d}(\cos t) + \int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \int \cos t \, \mathrm{d}(\cos t) - \int \frac{1}{\cos t} \, \mathrm{d}(\cos t) + \frac{1}{2} \int \mathrm{d}t + \frac{1}{4} \int \cos 2t \, \mathrm{d}(2t)$$

$$= \int \cos^t - \ln \cos t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C \text{（}\cos t \text{ 在 } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 中为正）}$$

$\because \tan t = x$，$\therefore \sin t = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$。

$$= \frac{1+x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \arctan x + C\text{。}$$

1.2.2.3 $\sqrt{x^2-a^2}$：$x = a \sec t$

根据 $\sec t \in (-1, 1)$，所以从而得到主空间：$t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$。

例题： 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \mathrm{d}x$。

令 $x = 3 \sec t$。$\therefore \sqrt{x^2-9} = 3 \tan t$，$\mathrm{d}x = 3 \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$。

因为式子 $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}$ 的分子必然为为正，而对于分子在 0 两边的单调性不同，所以需要对 x 进行正负区分，又 $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$，所以：

当 $x > 3$ 时，$\sec t > 1$，即 $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$。

$$= \int 3 \tan^2 t \, \mathrm{d}t = 3 \int (\sec^2 t - 1) \mathrm{d}t$$

$$= 3 \tan t - 3t + C = \sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{x} + C\text{。}$$

当 $x < -3$ 时，$\sec t < -1$，即 $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$。

$$= -\int 3 \tan^2 t \, \mathrm{d}t = -3 \int (\sec^2 t - 1) \mathrm{d}t$$

$$= -3 \tan t + 3t + C = \sqrt{x^2-9} + 3 \arccos \frac{3}{x} + C \text{（}\tan t < 0\text{）}$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{-x} + 3\pi + C \text{（}3 \arccos \frac{3}{x} = 3\pi - 3 \arccos -\frac{3}{x}\text{）}$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{-x} + C\text{。}$$

综上结果为 $\sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \dfrac{3}{|x|} + C$。

1.2.2.4 辅助换元

在使用换元法的时候有可能单个式子不能求出积分，而使用其他辅助式子加减在一起积分可以得到结果，从而能得到原式和辅助式子的积分结果。对于这类题目需要观察什么样的式子能让积分简单。

例题： 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$。

令 $x = \sin t$，所以 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$，$\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$。

$\because x+\sqrt{1-x^2}$ 可能为正可能为负，正负时单调性不同，所以令 $x+\sqrt{1-x^2} = 0$，即 $\sin t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $t \in (-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}) \cup (-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2})$。

$\therefore = \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} \mathrm{d}t \ \ (t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}))$。

这时你会发现使用积化和差、万能公式、倍角公式都无法解出这个积分，所以这时候就需要另外一个辅助积分式子加上或减去这个式子，从而让和以及差更容易解出积分。这里根据式子特点让辅助式子分子为 $\sin t$：

令 $I_1 = \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} \mathrm{d}t$，$I_2 = \int \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} \mathrm{d}t$。

$I_1 + I_2 = \int \frac{\sin t + \cos t}{\sin t + \cos t} \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t$。

$I_1 - I_2 = \int \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(\sin t + \cos t)}{\sin t + \cos t} = \ln|\sin t + \cos t| + C$。

所以 $I_1 = \frac{1}{2}(\arcsin x + \ln|x + \sqrt{1 - x^2}|) + C$。

同理 $t \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 也得到同样结果。

1.2.2.5 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

当被积函数含有根式 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ 时，需要对其配方变成 $\sqrt{\varphi^2(x) + k^2}$、$\sqrt{\varphi^2(x) - k^2}$、$\sqrt{k^2 - \varphi^2(x)}$ 三种形式再进行三角函数换元。

1.3 分部积分

因为分部积分法使用 $\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u$，所以基本上用于两项乘积形式的积分式子。

函数积分难度为：反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数。越往右求导越难，左边更应该当 u 进行求导，而右边更适合做 v 进行积分。

1.3.1 基本分部

如果不是多次分部就是基本分部，目的都是为了降低积分式子幂次。

1.3.1.1 非幂函数优先

当幂函数与一些微分后能降低幂函数幂次的函数在一起时，先对非幂函数优先分部积分，结果与幂函数相乘可以消去幂次，以达到降低幂次的作用。

如 $\int x^n \ln x \, \mathrm{d}x$，$\int x^n \arctan x \, \mathrm{d}x$，$\int x^n \arcsin x \, \mathrm{d}x$。

例题： 求 $\int x^2 \arctan x \, \mathrm{d}x$。

$= \frac{1}{3} \int \arctan x \, \mathrm{d}(x^3) = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int x^3 \, \mathrm{d}(\arctan x)$

$= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x + x^3 - x}{1 + x^2} \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{3}\int x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}$$
$$= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C。$$

1.3.1.2 幂函数优先

当幂函数与三角函数在一起微分时，因为三角函数无论如何积分都不会被消去，所以应该优先消去幂函数部分，从而降低幂次。

如 $\int x^a \sin x \,\mathrm{d}x$，$\int x^a \cos x \,\mathrm{d}x$。

例题：求 $\int x \tan^2 x \,\mathrm{d}x$。

$= \int x(\sec^2 - 1)\,\mathrm{d}x = \int x \,\mathrm{d}(\tan x) - \dfrac{x^2}{2} = x\tan x + \ln|\cos x| - \dfrac{x^2}{2} + C$。

1.3.2 多次分部

对于一部分通过微分形式不会发生变化的函数，所以需要多次积分，然后利用等式求出目标值。即三角函数和指数函数，这两种积分形式不变，指数函数一次积分保持不变，而三角函数两次积分保持不变。

也称为积分再现、循环积分法。

如：$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$，$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$。

例题：求 $\int e^x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$。

$= \sin^2 x \cdot e^x - \int e^x \,\mathrm{d}(\sin^2 x) = \sin^2 x \cdot e^x - \int e^x \cdot \sin 2x \,\mathrm{d}x$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \int \sin 2x \,\mathrm{d}(e^x) = \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + \int e^x \,\mathrm{d}(\sin 2x)$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2\int e^x \cdot \cos 2x \,\mathrm{d}x \quad$ (①)

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2\int \cos 2x \,\mathrm{d}(e^x)$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x - 2\int e^x \,\mathrm{d}(\cos 2x)$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4\int e^x \cdot \sin 2x \,\mathrm{d}x$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4\int \sin 2x \,\mathrm{d}(e^x)$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4\sin 2x \cdot e^x - 4\int e^x \,\mathrm{d}(\sin 2x)$

$= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4\sin 2x \cdot e^x - 8\int e^x \cdot \cos 2x \,\mathrm{d}x \quad$ (②)

然后①=②：$\int e^x \cdot \cos 2x \,\mathrm{d}x = \dfrac{e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)}{5} + C$

代入①：$= \dfrac{e^x(5\sin^2 x - 5\sin 2x + 2\cos 2x + 4\sin 2x)}{5} + C$

$= \dfrac{e^x(5\sin^2 x - \sin 2x + 2\cos 2x)}{5} + C = e^x\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5}\sin 2x - \dfrac{1}{10}\cos 2x\right) + C$

1.3.3 分部积分推广公式

分部积分法可以直接利用表格简便计算，以三次导数的积分为例：

$\int uv''' \,\mathrm{d}x = \int u \,\mathrm{d}(v'') = uv'' - \int v''u' \,\mathrm{d}x$

$\int u'v'' \,\mathrm{d}x = \int u' \,\mathrm{d}(v') = u'v' - \int v'u'' \,\mathrm{d}x$

$\int u''v' \,\mathrm{d}x = \int u'' \,\mathrm{d}v = u''v - \int vu''' \,\mathrm{d}x$

$\therefore \int uv''' \,\mathrm{d}x = uv'' - u'v' + u''v - \int u'''v \,\mathrm{d}x$。

所以分部积分法找到对应的规律，表格上求导，下积分：

符号	$+$	-	$+$	$\cdots$	$(-1)^{n+1}$
u 的各阶导数	u	u'	u''	$\cdots$	u^{n+1}
$v^{(n+1)}$ 的各阶原函数	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	$v^{(n-1)}$	$\cdots$	v

以 u 为起点左上右下错位相乘，各项符号正负交错，直到 uv 的导阶数相同，最后一项是 $(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v \,\mathrm{d}x$，只要这最后一项可以解出来就可以停止了，即上下是同一类的函数或幂函数求导成 0。

例题： 求 $\int (x^3+2x+6)e^{2x} \,\mathrm{d}x$。

如果要一般求，则需要拆分：$\int (x^3+2x+6)e^{2x} \,\mathrm{d}x = \int x^3e^{2x} \,\mathrm{d}x + 2\int xe^{2x} \,\mathrm{d}x + 6\int e^2x \,\mathrm{d}x$。

而如果使用分部积分的推广公式，令 $u = x^3+2x+6$，$v = e^{2x}$。

x^3+2x+6	$3x^2+2$	$6x$	6	0
e^{2x}	$\dfrac{1}{2}e^{2x}$	$\dfrac{1}{4}e^{2x}$	$\dfrac{1}{8}e^{2x}$	$\dfrac{1}{16}e^{2x}$

$\therefore = (x^3+2x+6)\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right) - (3x^2+2)\left(\dfrac{1}{4}e^{2x}\right) + 6x\left(\dfrac{1}{8}e^{2x}\right) - 6\left(\dfrac{1}{16}e^{2x}\right) + \displaystyle\int 0\cdot(\dfrac{1}{16}e^{2x}) \,\mathrm{d}x = \left(\dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{7}{4}x + \dfrac{17}{8}\right)e^{2x} + C$。

例题： 求 $\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$。

$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
x^2	$\dfrac{1}{3}x^3$

$\therefore = \dfrac{1}{3}x^3\ln x - \displaystyle\int \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{3}x^3 \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}x^3\ln x - \dfrac{1}{9}x^3 + C$。

1.3.4 分部与换元

分部积分法和换元积分法经常一起使用。

例题： 求 $\int e^{\sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}x$。

令 $\sqrt[3]{x} = u$，从而 $x = u^3$，$\mathrm{d}x = 3u^2 \,\mathrm{d}u$。

$= 3\int e^u u^2\,\mathrm{d}u = 3\int u^2\,\mathrm{d}(e^u) = 3u^2e^u - 3\int e^u\,\mathrm{d}(u^2) = 3u^2e^u - 6\int e^u u\,\mathrm{d}u$

$= 3u^2e^u - 6\int u\,\mathrm{d}(e^u) = 3u^2e^u - 6ue^u + 6\int e^u\,\mathrm{d}u = 3u^2e^u - 6ue^u + 6e^u + C$

$= 3e^u(u^2 - 2u + 2) + C = 3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 2) + C$。

例题： 求 $\int e^{\sqrt{3x+9}}\,\mathrm{d}x$。

令 $\sqrt{3x+9} = u$，从而 $x = \dfrac{1}{3}(u^2 - 9)$，$\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}u\,\mathrm{d}u$：

$= \dfrac{2}{3}\displaystyle\int ue^u\,\mathrm{d}u = \dfrac{2}{3}\int u\,\mathrm{d}(e^u) = \dfrac{2}{3}ue^u - \int \dfrac{2}{3}e^u\,\mathrm{d}u = \dfrac{2}{3}ue^u - \dfrac{2}{3}e^u + C$

$= \dfrac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}}(\sqrt{3x+9} - 1) + C$。

1.4 有理积分

针对于多项式分式，需要将分母和分子拆解。

1.4.1 高阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$，且 $f(x)$、$g(x)$ 都为与 x 相关的多项式，$f(x)$ 阶数高于或等于 $g(x)$，则 $f(x)$ 可以按照 $g(x)$ 的形式分配，约去式子，得到最简单的表达。

例题： $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$。

$$= \int \frac{x^3 + 9x - 9x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3+9x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x - \int \frac{9x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int x\,\mathrm{d}x - \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln(9+x^2) + C。$$

1.4.2 低阶多项式分解

当不定积分式子形如 $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$，且 $f(x)$、$g(x)$ 都为与 x 相关的多项式，$f(x)$ 阶数低于 $g(x)$，且 $g(x)$ 可以因式分解为 $g(x) = g_1(x)g_2(x)\cdots$ 时，先因式分解再进行运算。

有理积分的拆项是最小项的最高次数不超过 2。所以具体的分解基本原理：

1. 一次单项式 $ax+b$ 产生一项 $\dfrac{A}{ax+b}$。
2. k 重一次因式 $(ax+b)^k$ 产生 k 项：$\dfrac{A_1}{ax+b} + \dfrac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \dfrac{A_n}{(ax+b)^n}$。
3. 二次因式 px^2+qx+r 产生一项：$\dfrac{Ax+B}{px^2+qx+r}$。

4. k 重二次因式 $(px^2+qx+r)^k$ 产生 k 项：$\dfrac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}+\cdots+\dfrac{A_nx+B_n}{(px^2+qx+r)^k}$。

虽然分母可以因式分解，但是整个式子不一定能因式分解，特别是某个因子的阶数高于一阶，所以若不能因式分解则可以考虑低阶多项式分配的方式。

例题： 求 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$。

令 $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{x-1}=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$。

通分：$=A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2$

$=A(x^2-1)+B(x-1)+C(x^2+2x+1)$

$=(A+C)x^2+(B+2C)x+(C-A-B)=x^2+1$。

从而 $A+C=1$，$B+2C=0$，$C-A-B=1$。

所以 $A=C=\dfrac{1}{2}$，$B=-1$，所以 $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{2(x-1)}$。

$\displaystyle\therefore=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}\right]\mathrm{d}x$

$=\dfrac{1}{2}\ln|x-1|+\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+\dfrac{1}{x+1}+C=\dfrac{1}{2}\ln|x^2-1|+\dfrac{1}{x+1}+C$。

当然也没必要将所有式子拆开再同类型合并进行相等计算，可以直接将因式的解代入令部分因式等于 0 来计算，如：

通分：$=A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2=x^2+1$。

代入 $x=-1$：$B(-1-1)=-2B=(-1)^2+1$，$\therefore B=-1$。

代入 $x=1$：$C(1+1)^2=1^2+1$，$\therefore 4C=2$，$C=\dfrac{1}{2}$。

代入 $x=0$：$-A-B+C=1$，代入 $B=-1$，$C=\dfrac{1}{2}$，$\therefore A=\dfrac{1}{2}$。

1.4.3 低阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\displaystyle\int\frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$，且 $f(x)$、$g(x)$ 都为与 x 相关的多项式，$f(x)$ 阶数低于 $g(x)$，且 $g(x)$ 不能因式分解为 $g(x)=g_1(x)g_2(x)\cdots$ 时，则可以分配式子：$\displaystyle\int\frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x=a_1\int\frac{\mathrm{d}(f_1(x))}{g_1(x)}+a_2\int\frac{\mathrm{d}(f_2(x))}{g_2(x)}+\cdots$，将积分式子组合成积分结果为分式的函数，如 $\ln x$、$\arcsin x$、$\arctan x$ 等。

例题： 求 $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$。

因为 x^2+2x+3 不能因式分解，所以考虑将分子按照分母形式进行分配。优先对高阶的 x 进行分配。

首先因为分子最高阶为 x 只比分母最高阶 x^2 低一阶，所以考虑将 $x-1$ 分配到微分号内。

$\because \mathrm{d}(x^2+2x+3)=2x+2$，而现在是 $x-1$，所以：

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}$$

$$-\int\frac{1}{\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2x+3)-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C。$$

1.4.4 低阶多项式因式分解与分配

有时候一个式子需要同时用到因式分解和分配两种方式。

例题： 求 $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}\mathrm{d}x$。

$$=\int\frac{x^5-x^3+x^4-x^2+x^3-x+x^2+x-8}{x^3-x}\mathrm{d}x$$

$$=\textstyle\int x^2\,\mathrm{d}x+\int x\,\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x+\displaystyle\int\frac{x^x+x-8}{x^3-x}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{x^2+x-8}{x^3-x}\mathrm{d}x$$

令 $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-1}=\dfrac{x^2+x-8}{x^3-x}$。

$\therefore (A+B+C)x^2+(C-B)x-A=x^2+x-8$。$A=8$，$B=-4$，$C=-3$。

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{8}{x}\mathrm{d}x-\int\frac{4}{x+1}\mathrm{d}x-\int\frac{3}{x-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+8\ln|x|-4\ln|x+1|-3\ln|x-1|+C。$$

1.4.5 有理积分与其他积分运算

换元积分法可以与有理积分、分部积分共同使用。

例题： 求 $\displaystyle\int\frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$。

首先根据因式分解：$\dfrac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}$。

$\therefore Ax^3+(A+B)x^2+(A+B+C)x+(B+D)=-x^2-2$。

解得：$A=0$，$B=D=-1$，$C=1$。

$$=\int\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2(x^2+x+1)}-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$\because x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$，$\therefore$ 令 $u=x+\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$：

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(u^2+a^2)^2}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\left(a^2\left(\left(\frac{u}{a}\right)^2+1\right)\right)^2}$$,使用第二类换元法（三角换元）：$\frac{u}{a} = \tan t$，$u = a\tan t$，$\mathrm{d}u = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$，$t = \arctan\frac{u}{a}$。

$$\therefore = \int \frac{a\sec^2 t}{a^4\sec^4 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a^3}\int \frac{\mathrm{d}t}{sec^2 t} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^3}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \mathrm{d}t + \frac{1}{2a^3}\int \cos 2t\,\mathrm{d}(2t) = \frac{t}{a^3} + \frac{\sin 2t}{2a^3} = \frac{\arctan\frac{u}{a}}{a^3} + \frac{\sin t\cos t}{a^3}。$$

$$\because \tan t = \frac{u}{a}，\therefore \tan^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1-\cos^2 t}{\cos 2t} = \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} = \frac{u^2}{a^2}$$

$$\therefore \sin t = \frac{u}{\sqrt{a^2+u^2}}，\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}，\frac{\sin t\cos t}{a^3} = \frac{u}{a^2(a^2+u^2)}。$$

$$\therefore \text{原式} = -\frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\arctan\frac{u}{a}}{a^3} + \frac{u}{a^2(a^2+u^2)}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} + \frac{x+\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}} + \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}(x^2+x+1)}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} + C$$

$$= -\frac{4x+3}{2(x^2+x+1)} - \frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C。$$

2 定积分

2.1 定限积分与极限

若极限中有 n 这种变量，也可以通过定积分的定义来做，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} = \int_1^0 f(x)\,\mathrm{d}x$。

1. 先提出 $\dfrac{1}{n}$。

2. 凑出 $\dfrac{i}{n}$。

3. 写出 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。

例题： 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$。

即求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}$。如果我们要传统求的话一般使用夹逼准则，找到放缩的两个函数。

所以找到两个：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+n}<\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}<\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+1}$。

即 $\dfrac{1}{2}<\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}<\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$。夹逼准则失败。

所以对 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}$ 通过定积分定义进行计算。

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i}{n}}\dfrac{1}{n}=\displaystyle\int_0^1\dfrac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=[\ln(1+x)]_0^1=\ln 2$。

例题： 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+4}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n^2}\right)$。

即求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n+i}{n^2+i^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n^2+ni}{n^2+i^2}\cdot\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1+\dfrac{i}{n}}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{n}$

$=\displaystyle\int_0^1\dfrac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\left[\arctan x+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$。

2.2 变限积分

2.3 牛莱公式

2.4 换元积分

2.5 分部积分

2.6 反常积分

3 积分应用

3.1 面积

3.2 体积

3.3 弧长