相似

Didnelpsun

目录

特征值往往与前面的内容进行混合考察。

1 特征值与特征向量

首先根据 $|\lambda E - A| = 0$ 求出 λ，然后把 λ 逐个带入 $(\lambda E - A)x = 0$，根据齐次方程求解方法进行初等变换求出基础解系。这个基础解系就是当前特征值的特征向量。

1.1 代数余子式

例题：已知 A 是 3 阶方阵，特征值为 1，2，3，求 $|A|$ 的元素 a_{11}, a_{22}, a_{33} 的代数余子式 A_{11}, A_{22}, A_{33} 的和 $\sum\limits_{i=1}^{3} A_{ii}$。

解：首先代数余子式的和 A_{11}, A_{22}, A_{33} 一般在行列式展开定理中使用，但是这里给出的不是一行或一列的代数余子式，而是主对角线上的代数余子式，这就无法使用代数余子式来表达行列式的值了。

而另一个提到代数余子式的地方就是伴随矩阵 A^*，所求的正好是伴随矩阵的迹 $tr(A^*) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$。

又根据特征值性质，特征值的和为矩阵的迹，特征值的积为矩阵行列式的值，所以 $tr(A^*) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^*$

$= \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{|A|}{\lambda_i} = \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\lambda_i} = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 = 2 + 3 + 6 = 11$。

1.2 特征值

1.2.1 对应特征向量

通过相关式子将逆矩阵转换为原矩阵。同一个向量的逆矩阵的特征值是原矩阵的特征值的倒数。

例题：已知 $\overrightarrow{\alpha} = (a, 1, 1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，则求 $\overrightarrow{\alpha}$ 在矩阵 A 中对应的特征值。

解：由于 $\overrightarrow{\alpha}$ 是 A^{-1} 的特征向量，所以令此时的特征值为 λ_0，则定义 $\lambda_0 \overrightarrow{\alpha} = A^{-1}\overrightarrow{\alpha}$，$\lambda_0 A \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha}$。

即 $\lambda_0\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & a & -2\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$，即 $\lambda_0\begin{bmatrix}-a & 2 & 2\\ 2a & a & -2\\ 2a & -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$。

即根据矩阵代表的是方程组，得到 $\lambda_0(4-a)=a$，$\lambda_0(3a-2)=1$，$\lambda_0(2a-3)=1$。

又 $\lambda_0\neq 0$，$3a-2=2a-3$，$a=-1$，则 $\lambda_0=-\dfrac{1}{5}$。

所以矩阵 A 对应的特征值为 -5。

1.2.2 矩阵关系式

例题：已知 A 为 3 阶矩阵，$A^2+A-2E=0$，$|A|=-2$，求其特征值。

解：需要求 A 特征值，但是 A 未知，特征向量也未知，如何求？

首先要求特征值，就要首先设出特征方程：$A\xi=\lambda\xi$，$\xi\neq 0$。

又 $A^2+A-2E=0$，所以代入方程：$(A^2+A-2E)\xi=(\lambda^2+\lambda-2)\xi=0$。

$\because \xi\neq 0$，$\lambda^2+\lambda-2=0$，解得 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$。

但是不知道这个特征值各是几重，只知道存在这两种特征值。

又 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$，所以 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$。

1.3 特征向量

1.3.1 实对称矩阵

使用实对称矩阵性质，给出其他特征向量和特征值，即实对称矩阵的不同特征值的特征向量相互正交（$B^TA=0$）。

例题：已知 A 为三阶实对称矩阵，特征值为 $1,3\ -2$，其中 $\alpha_1=(1,2,-2)^T$，$\alpha_2=(4,-1,a)^T$ 分别属于特征值 $\lambda=1$，$\lambda=3$ 的特征向量。求 A 属于特征值 $\lambda=-2$ 的特征向量。

解：令 A 属于特征值 $\lambda=-2$ 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$。

根据实对称矩阵的正交性质。

$\alpha_1^T\alpha_2=4-2-2a=0$，$\alpha_2^T\alpha_3=4x_1-x_2+ax_3=0$，$\alpha_3^T\alpha_1=x_1+2x_2-2x_3=0$。

$a=1$，$4x_1-x_2+x_3=0$，$x_1+2x_2-2x_3=0$，解得基础解系 $(0,1,1)^T$,$\alpha_3=(0,k,k)^T$（$k\neq 0$）。

1.3.2 可逆矩阵关系

使用可逆矩阵相似对角化的性质。若 $A \sim B$，则 $P^{-1}AP = B$。B 为纯量阵。且 B 的迹为 A 的特征值。P 为特征向量。

例题：已知 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$，$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆，求 A 关于特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量。

解：根据 $P^{-1}AP = \Lambda$，所以 P 为特征向量，$1, 1, -1$ 为特征值。

所以 A 关于 $\lambda = 1$ 的特征向量为 α_1 或 α_2。而某一特征值的全部特征向量构成特征向量子空间，所以 $\lambda = 1$ 的特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$。

1.3.3 抽象型

题目只会给对应的式子，来求对应的特征向量。需要记住特征值的关系式然后与给出的式子上靠拢，不会很复杂。

例题：已知 A 为三阶矩阵，且矩阵 A 各行元素之和均为 5，则求 A 必然存在的特征向量。

解:由于是抽象型,所以没有实际的数据,就不能求出固定的特征值,$\lambda\xi = A\xi$。

又矩阵 A 各行元素之和均为 5，所以转换为方程组：

$$\begin{cases} A_{11} + A_{12} + A_{13} = 5 \\ A_{21} + A_{22} + A_{23} = 5 \\ A_{31} + A_{32} + A_{33} = 5 \end{cases}，转为矩阵：\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

即 $\xi = (1, 1, 1)^T$。

1.4 矩阵

即根据 $A = P\Lambda P^{-1}$ 的特征向量矩阵和特征值矩阵来反求矩阵。

1.5 行列式值

一般会给出特征值，求 A 的行列式值。

1.5.1 特征方程

题目要求 $|f(A) - E|$ 的形式，即求 $f(A)$ 的特征值。

例题： 设 A 为三阶矩阵，已知 $-3E+A$ 不可逆，$|2E+A|=0$，$(E-A)x=0$ 有非零解，求 $|A^*-E|$。

解：前三个条件都是为了指明 $|-3E+A|=|3E-A|=0$，$|-2E-A|=0$，$|E-A|=0$，即得到 A 的三个特征值 $\lambda_1=3$、$\lambda_2=-2$、$\lambda_3=1$。

求 $|A^*-E|$ 即求 A^* 的特征值，然后再乘起来，即得到行列式的值。

又 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$，所以 $A^*=\dfrac{|A|}{A}$。

$|A|$ 等于特征值的乘积 -6，对应的特征值即为 $\mu_1=\dfrac{-6}{3}=-2$，$\mu_2=\dfrac{-6}{-2}=3$，$\mu_3=\dfrac{-6}{1}=-6$。

对应 A^*-E 的特征值为 -3，2，-6，所以最后的行列式值为 42。

1.5.2 矩阵函数

题目要求 $|f(A)|$ 的形式，即求 $f(A)$ 的特征值，然后求其乘积就是矩阵方程的行列式值。

2 相似理论

$P^{-1}AP=\Lambda$，P 为特征向量组，Λ 为特征值矩阵。

2.1 判断相似对角化

可以使用相似对角化的四个条件，但是最基本的使用还是 A 有 n 个无关的特征向量 ξ。

判断以下条件即可相似对角化：

1. 实对称矩阵，即所有元素关于主对角线对称。
2. 特征值都是实单根，即 n 个不同特征值，不存在重根。
3. 特征值存在 t 重根，相同特征值对应 t 个线性无关的特征向量。（如果小于 n 则不相似）

一般都是第三种情况，判断存在重根后要使用 $[\lambda E-A]$，然后计算 $r(E-A)$，然后 s 自由变量值即无关特征向量值 $=n-r$，如果 $s=t$ 则可以相似对角化，如果 $s<t$ 则不可以。

2.2 反求参数

常用方法：

- 若 $A \sim B$，则 $|A| = |B|$，$r(A) = r(B)$，$tr(A) = tr(B)$，$\lambda_A = \lambda_B$，通过等式计算参数。
- 若 ξ 是 A 属于特征值 λ 的特征向量，则有 $A\xi = \lambda\xi$，建立若干等式或方程组来计算参数。
- 若 λ 是 A 的特征值，则与 $|\lambda E - A| = 0$，通过该等式计算参数。

2.2.1 两个矩阵对比

两个矩阵相似的前提是可以相似对角化，如果存在 n 重根而没有 n 个线性无关的特征向量则必然不相似。

例题：已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & y & \\ & & -1 \end{pmatrix}$，且 $A \sim B$，求参数。

首先可以利用迹相等，则 $2+0+x = 2+y-1$，行列式值相等，则 $-2 = -2y$，解得 $x = 0$，$y = 1$。

2.2.2 单矩阵

1. 利用 $|\lambda E - A| = 0$ 求出特征值。判断得到 n 阶矩阵有 m 个不同特征值。（$m \leqslant n$）
2. 利用 $[\lambda E - A]$ 计算秩。利用 $s = n - r$（自由变量的个数 = 未知数个数-矩阵秩）公式反解出秩 r，并以此解出未知数。

例题：已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 和对角矩阵相似，求 a。

解：由于 A 是对角矩阵，所以特征值为其迹 $\lambda = (3, 2, 3)$。特征值有二重根。

已知 $A \sim \Lambda$，$\lambda = 3$ 有两个线性无关的特征向量。即 $(3E - A)x = 0$ 有两个线性无关的解（自由变量）。即 $r(3E - A) = 1$。

$3E - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\therefore a = -2$。

2.2.3 抽象型

首先要计算其特征值，再根据特征值反代特征方程，根据向量的构成判定秩的大小。

例题：已知 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵，求 xy 关系式。

解：已知相似，即 $P^{-1}AP=\Lambda$，则需要求 A 的特征值和特征向量。

根据特征关系式 $|E\lambda-A|=0$，即 $\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，即有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=1$。

此时有二重特征值,所以应该有两个线性无关的特征向量,即对于 $(E-A)x=0$ 有两个线性无关的解向量，所以该矩阵的秩为 $3-2=1$。

$E-A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-x&1&-y\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}$。

所以当 $r(E-A)=1$ 时 $x+y=0$。

2.3 相似矩阵

2.3.1 抽象型

例题：设 A 是三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维线性无关的列向量，且 $A\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3$，$A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，求 A 相似的矩阵。

解：$A\sim\Lambda$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$。

$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$。

记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$。

又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维线性无关的列向量，$\therefore|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq0$，所以 P 可逆。

$\therefore AP=PB$，$P^{-1}AP=B$，$A\sim B$。

2.3.2 正交相似

一般会给出特征值（全部）和对应的特征向量（部分）。

$Q^{-1}AQ = P$。其中 Q 为特征向量矩阵，一般都是正交的，而 P 为对应的特征值矩阵。

首先要利用不同特征值的特征向量正交的性质，把所有的特征向量都求出来。

然后矩阵 Q 就是所有特征向量的拼合。如果要求原矩阵 A，则利用 $A\xi = \lambda\xi$，推出 $AQ = PQ$，从而 $A = PQQ^{-1}$。

例题：已知 A 是三阶实对称矩阵，若正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$，如果 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$ 和 $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$ 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量，求 Q。

解：首先由正交矩阵就可以知道各特征值正交。令 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$。对应的 $\lambda_3 = 6$。

$\alpha_3^T\alpha_1 = x_1 - x_3 = 0$，$\alpha_3^T\alpha_2 = x_2 + x_3 = 0$，求 λ_3 的特征值，则不如令 $x_3 = 1$，则解得 $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$。

这样 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，还需要将 Q 正交单位化。可知 α_3 根据正交规律求出来，一定是正交的，而 $\alpha_1^T\alpha_2 = -1 \neq 0$ 所以需要正交。

令 $\beta_1 = \alpha_1 = (1, 0, -1)^T$，$\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{<\alpha_2, \beta_1>}{<\beta_1, \beta_1>}\beta_1 = (0, 1, 1)^T + \dfrac{1}{2}(1, 0, -1)^T = (\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2})^T$。

最后对整个 Q 进行单位化：$\gamma_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$，$\gamma_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$，$\gamma_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$。

2.4 矩阵关系式

若有可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$，则：

P 即是 A 特征向量的拼合。

- $A = P\Lambda P^{-1}$。
- $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$。

- $f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}$。

例题：已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵，求 A^{100}。

解：首先 $A\sim\Lambda$，所以 A 能相似对角化。

$|\lambda E-A\lambda = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -x & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ -3 & 6 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda+1)=0$。$\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=-1$。

所以对于 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，需要 $s=2$，从而 $r(A)=1$，对应成比例。

代入 3：$(3E-A)x=0$，$\begin{pmatrix} 1 & -x & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}=0$，所以 $\dfrac{-1}{3}=\dfrac{-x}{6}$，$x=2$。

解得 $\xi_1=(1,0,1)^T$，$\xi_2=(2,1,0)^T$，$\xi_3=(1,0,-3)^T$。

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，所以 $A=P\Lambda P^{-1}$，$A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}$。