向量

Didnelpsun

目录

1　线性相关性

使用行列式不等于 0 的方法最方便，但是有时候行列不同就不能这么做了。

1.1　代入重组

若要求线性相关的式子由其他向量构成，则将式子代入表示目标式子。

例题：设 α_1，α_2，β_1，β_2，β_3 都是 n 维向量，$n \geqslant 3$，且 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\beta_2 = \alpha_1 - 2\alpha_2$，$\beta_3 = 3\alpha + 1 + 2\alpha_2$，证明向量组 β_1，β_2，β_3 线性相关。

证明：若存在 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$。

代入 α 表示 β 的式子：$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_1 - 2\alpha_2) + k_3(3\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0$。

$\therefore (k_1 + k_2 + 3k_3)\alpha_1 + (k_1 - 2k_2 + 2k_3)\alpha_2 = 0$。

$\therefore k_1 + k_2 + 3k_3 = 0$，且 $k_1 - 2k_2 + 2k_3 = 0$ 即可。

而未知数的个数大于方程个数，所以有无穷多解，从而必然有非零解，从而 β_1，β_2，β_3 线性相关。

1.2　同乘

若要求线性相关的式子存在一定的乘积关系，则可以用同乘一步步消去系数。

例题：设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使得线性方程组 $A^k x = 0$ 有解向量 α，且 $A^{k-1}\alpha \neq 0$，证明向量组 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关。

证明：假设 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性相关，则设存在系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 使得 $\lambda_1\alpha + \lambda_2 A\alpha + \cdots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$。

$\because A^k x = 0$ 的解为 α，$\therefore A^k\alpha = 0$，$\therefore \cdots = A^{k+2}\alpha = A^{k+1}\alpha = A^k\alpha = 0$。

左乘 A^{k-1}，得到 $\lambda_1 A^{k-1}\alpha + \lambda_2 A^k\alpha + \cdots + \lambda_k A^{2k-2}\alpha = \lambda_1 A^{k-1}\alpha = 0$。

$\because A^{k-1}\alpha \neq 0$，$\therefore \lambda_1 = 0$，消去 λ_1：$\lambda_2 A\alpha + \lambda_3 A^2\alpha + \cdots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$。

左乘 A^{k-2}，得到 $\lambda_2 A^{k-1}\alpha + \lambda_3 A^k\alpha + \cdots + \lambda_k A^{2k-3}\alpha = \lambda_2 A^{k-1}\alpha = 0$。

$\because A^{k-1}\alpha \neq 0$，$\therefore \lambda_2 = 0$，消去 λ_2：$\lambda_3 A^2\alpha + \lambda_4 A^3\alpha + \cdots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$。

同理依次左乘 A^n，所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$，所以 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关。

1.3 行列式

对向量的线性相关性可以从其向量组组成的行列式来计算，若行列式值为 0 则线性相关，若行列式值不为 0 则线性无关。

例题：设 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 是 s 个互不相同的数，探究 s 个 n 维列向量 $\alpha_i = [1, a_i, a_i^a, \cdots, a_i^{n-1}]^T$（$i = 1, 2, \cdots, s$）的线性相关性。

解：当 $s > n$ 时，有 n 个方程 s 个未知数，所以必然存在自由变量，从而必然线性相关性。

当 $s = n$ 时，$|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (a_i - a_j) \neq 0$。

所以线性无关。

当 $s < n$ 时，对方程矩阵切割保留方形的 s 个 $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$，

上面因为范德蒙德行列式已经不等于 0，即上面的方阵线性无关，原来无关延长无关，所以整个方程都线性无关。

综上当 $s > n$ 时线性相关，$s \leqslant n$ 时线性无关。

1.4 矩阵秩

当向量的个数与维数不同时就不能使用行列式去分析，而只能用矩阵的秩来分析。当矩阵满秩则线性无关，当矩阵降秩则线性相关。

1.4.1 线性相关性

当谈到多个向量是否线性相关时可以将向量组组成矩阵，判断其秩。

1.4.2 线性表出

当谈到一个向量是否能被其他向量线性表出时，要将这些向量全部组成一起，判断能否被其他向量表出的向量放在最右边，然后判断增广矩阵的秩。

例题：已知 $\alpha_1=(1,2,1)^T$，$\alpha_2(2,3,a)^T$，$\alpha_3=(1,a+2,-2)^T$，$\beta=(1,3,0)^T$，若 β 可以由 α_1、α_2，α_3 线性表示，且表示法不唯一，求 a。

解：设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_2\alpha_3=\beta$，由 β 可以由 α_1、α_2，α_3 线性表示，且表示法不唯一可知 $Ax=\beta$ 有无穷解，即 $r(A)=r(A|B)<3$。

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\beta]=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{bmatrix}。$$

$\therefore a=3$。

1.5 极大线性无关组

极大线性无关组一般与向量组秩在一起使用。一般解出极大线性无关组与秩，还要用极大线性无关组表示出其余的向量，基本步骤：

1. 将向量组拼接为矩阵 A，对 A 进行初等行变换，化为最简行阶梯形矩阵，确定矩阵秩 $r(A)$。
2. 在最简行阶梯矩阵中按列找出一个秩为 $r(A)$ 的子矩阵，即在每个台阶上找一列列向量，找 $r(A)$ 列构成一个新矩阵，其就是一个极大线性无关组。
3. 将其余向量依次与极大线性无关组进行对比解出表示方法。

注意：求向量组的秩可以进行初等变换，包括行变换和列变换。但是求极大线性无关组时最好只使用行变换，因为列变换会改变方程的解。从而解方程组只能做行变换。

2 等价向量组

$r(A)=r(B)=r(A|B)$，所以需要计算三个向量组构成的矩阵的秩就可以了。

例题：设向量组 α：$\alpha_1=[1,0,2]^T$，$\alpha_2=[0,1,1]^T$，$\alpha_3=[2,-1,a+4]^T$，向量组 β：$\beta_1=[1,2,4]^T$，$\beta_2=[1,-1,a+2]^T$，$\beta_3=[3,3,10]^T$。

矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\2&1&a+4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&-1&3\\4&a+2&10\end{pmatrix}$。

(1)AB 是否等价。

(2) 向量组 AB 是否等价。

(1) 解：化简 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&1\\0&0&a\end{pmatrix}$

若 $a\neq -1$，则 $r(A)=3$，且 $a\neq 0$，则 $r(B)=3$，此时 AB 等价。

若 $a=-1$，则 $r(A)=2$，$r(B)=3$，AB 不等价。

若 $a=0$，则 $r(B)=2$，$r(A)=2$，AB 不等价。

(2) 解：因为向量组 α 拼接在一起就是 A，β 拼接在一起就是 B，所以 $r(\alpha)=r(A)$，$r(\beta)=r(B)$，$r(\alpha|\beta)=r(A|B)$。

将 AB 拼在一起做行变换，得到 $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&1&3\\0&1&-1&2&-1&3\\0&0&a+1&0&a+1&1\end{array}\right)$。

若 $a\neq -1\neq 0$，则 $r(A)=r(B)=r(A|B)$。向量组等价。

若 $a=-1$ 或 $a=0$，则 $r(A)\neq r(B)$，所以不等价。

3　向量空间

例题：设 R^3 中有两个基 A：$\alpha_1=[1,1,0]^T$，$\alpha_2=[0,1,1]^T$，$\alpha_3=[1,0,1]^T$，基 B：$\beta_1=[1,0,0]^T$，$\beta_2=[1,1,0]^T$，$\beta_3=[1,1,1]^T$。

(1) 求基 B 到基 A 的过渡矩阵。

(2) 已知 ξ 在基 B 下的坐标为 $[1,0,2]^T$，求 ξ 在基 A 下的坐标。

(1) 解：过渡矩阵为 $A=BC$，即 $B^{-1}A=C$。

(2) 解：令在基 A 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$。

$\therefore \xi=A(x_1,x_2,x_3)^T=B(1,0,2)^T$，$(x_1,x_2,x_3)^T=A^{-1}B(1,0,2)^T$。