

连续与间断

Didneipsun

目录

| | | |
|----------|---------------------|----------|
| 1 | 连续 | 1 |
| 1.1 | 求连续区间 | 1 |
| 1.2 | 已知连续区间求参数 | 1 |
| 2 | 间断 | 2 |
| 2.1 | 求间断点 | 2 |
| 2.2 | 已知间断点求参数 | 3 |

1 连续

连续则极限值等于函数值。

1.1 求连续区间

若要考察一个函数的连续区间，必须要了解函数的所有部分，一般会给出分段函数，所以要了解分段函数的每段函数的性质。

对于函数 $f(x)$ 是个极限表达形式，我们要简化这个极限，最好得到一个 x 的表达式，从而才能判断其连续区间。

例题： $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ ，求函数连续区间。

注意到函数的形式为一个极限值，其极限趋向的变量为 n ($n \rightarrow \infty$ 指 $n \rightarrow +\infty$)。所以在该极限式子中将 x 当作类似 t 的常数。

需要先求出极限形式的 $f(x)$ ，而 x 变量的取值会影响到极限，且求的就是 x 的取值范围。所以将其分为三段：

当 $x < 0$ 时， $nx \rightarrow -\infty$ ， $\therefore e^{nx} \rightarrow 0$ ， x^2 在这个极限式子为一个常数， $\therefore x^2 e^{nx} \rightarrow 0$ ， $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \frac{x + 0}{1 + 0} = x$ 。

当 $x = 0$ 时， $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \frac{0}{2} = 0$ 。

当 $x > 0$ 时， e^{nx} 在 $n \rightarrow \infty$ 时为 ∞ ，上下都有这个无穷大的因子，所以上下都除以 e^{nx} ， $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x e^{-nx} + x^2}{1 + e^{-nx}} = \frac{0 + x^2}{1} = x^2$ 。

从而得到了 $f(x)$ 关于 x 的表达式：

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

又 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = f(0) = 0$ 。
 $f(x)$ 在 R 上连续。

1.2 已知连续区间求参数

一般会给出带有参数的分段函数，要计算参数就必须了解连续区间与函数之间的关系。

$$\text{例题: } f(x) = \begin{cases} 6, & x \leq 0 \\ \frac{e^{ax^3} - 1}{x - \arcsin x}, & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} \frac{3 \sin(x-1)}{x-1}, & x < 1 \\ e^{bx} + 1, & x \geq 1 \end{cases},$$

若 $f(x) + g(x)$ 在 R 上连续, 则求 a, b 。

解: 已知 $f(x) + g(x)$ 在 R 上连续, 但是不能判断 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的连续性。

所以分开讨论。

对于 $f(x)$ 因为左侧为常数函数, 所以若是 $f(x)$ 连续, 则必然:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax^3} - 1}{x - \arcsin x} = 6$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax^3} - 1}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^3}{x - \arcsin x}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } t = \arcsin x \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a \sin^3 t}{\sin t - t} = a \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{t^3}{\sin t - t} = a \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3t^2}{\cos t - 1} \\ & = -6a = 6. \end{aligned}$$

$\therefore a = -1$ 时 $f(x)$ 在 R 上连续。

$$\text{对于 } g(x), \text{ 当 } x < 1 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 \sin(x-1)}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin t}{t} = 3.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{bx} + 1 = e^b + 1 = 3.$$

$\therefore b = \ln 2$ 时 $g(x)$ 在 R 上连续。

$\therefore a = -1, b = \ln 2$ 时 $f(x) + g(x)$ 在 R 上连续。而 $a \neq -1$ 时 $f(x) + g(x)$ 在 $x = 0$ 时不连续, $b \neq \ln 2$ 时 $f(x) + g(x)$ 在 $x = 1$ 时不连续。

2 间断

2.1 求间断点

求间断点需要首先分析函数的表达形式。

例题: 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 求其间断点并分析其类型。

根据函数形式, 我们需要首先回顾一下幂函数的性质, 幂函数的变化趋势取决于底数。

当 $x = 1$ 时, $x^n \equiv 1$, 当 $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 时, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x^n \rightarrow \infty$, 而 $x \in (-1, 1)$ 时, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x^n \rightarrow 0$ 。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty) \\ 1, & x = 1 \\ x+1, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

所以分段点为 $x = \pm 1$ 。

当 $x = -1$ 时, $f(-1^+) = f(-1^-) = f(-1) = 0$, 所以在此处连续。

当 $x = 1$ 时, $f(1^+) = 0 \neq f(1^-) = 2$, 所以在此处简短, 为跳跃间断点。

2.2 已知间断点求参数

这种题目已知间断点, 而未知式子中的参数, 只用将间断点代入式子并利用极限计算间断点的类型就可以了。

例题: $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-b)}$ 有无穷间断点 $x = e$, 可去间断点 $x = 1$, 求 ab 的值。

已知有两个间断点 $x = a, x = b$, 其中无穷间断点指极限值为无穷的点, 可去间断点表示极限值存在且两侧相等, 但是与函数值不相等的点。

已经给出两个间断点的值为 $x = 1$ 和 $x = e$, 所以 ab 必然对应其中一个, 但是不清楚到底谁是谁。

当 $a = 1, b = e$ 时, $f(x) = \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)}$ 。

当 $x \rightarrow 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} = \frac{1}{1-e} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1} = \frac{e}{1-e} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} = \frac{e}{1-e} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} = \frac{e}{1-e}$ 。

$\therefore x = 1$ 为可去间断点。

当 $x \rightarrow e$ 时, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} = \frac{1}{e-1} \lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - e}{x-e} = \frac{e}{e-1} \lim_{x \rightarrow e} \frac{e^{x-1} - 1}{x-e} = \frac{e}{e-1} \lim_{x \rightarrow e} \frac{x-1}{x-e} = \frac{e(e-1)}{e-1} \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x-e} = \infty$ 。

$\therefore x = e$ 为无穷间断点。

当 $a = e, b = 1$ 时, $f(x) = \frac{e^x - 1}{(x-e)(x-1)}$ 。

而作为分子的 $e^x - 1$ 必然为一个常数, 当式子趋向 1 或 e 的时候分母两个不等式中的一个不等式必然为一个常数, 从而另一个不等式则变为了无穷小, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} f(x) = \infty$ 。

$\therefore a = 1, b = e$ 。