# 矩阵

Didnelpsun

## 目录

矩阵本质是一个表格。

# 1　矩阵定义

$m\times n$ 矩阵是由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}$（元素）排成的 $m$ 行 $n$ 列的数表。

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵是复矩阵。

行数列数都为 $n$ 的就是 $n$ 阶矩阵或方阵，记为 $A_n$。

行矩阵或行向量：只有一行的矩阵 $A=(a_1a_2\cdots a_n)$。

列矩阵或列向量：只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_m \end{pmatrix}$。

同型矩阵：两个矩阵行数、列数相等。

相等矩阵：是同型矩阵，且对应元素相等的矩阵。记为 $A=B$。

零矩阵：元素都是零的矩阵，记为 $O$，但是不同型的零矩阵不相等。

对角矩阵或对角阵：从左上角到右下角的直线(对角线)以外的元素都是 0 的矩阵，记为 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

单位矩阵或单位阵：$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$ 的对角矩阵，记为 $E$。这种线性变换叫做恒等变换，$AE=A$。

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

# 2　矩阵运算

## 2.1　矩阵加法减法

设与两个矩阵都是同型矩阵 $m\times nA=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$，则其加法就是 $A+B$。

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{m+n}+b_{m+n} \end{pmatrix}$$

- $A+B=B+A$。
- $(A+B)+C=A+(B+C)$。

若 $-A=(-a_{ij})$，则 $-A$ 是 $A$ 的负矩阵，$A+(-A)=O$。
从而矩阵的减法为 $A-B=A+(-B)$。

## 2.2 数乘矩阵

数 $\lambda$ 与矩阵 $A$ 的乘积记为 $\lambda A$ 或 $A\lambda$，规定：

$$\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

假设 $A$、$B$ 都是 $m\times n$ 的矩阵，$\lambda$、$\mu$ 为数：

- $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$。
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$。
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$。

矩阵加法与数乘矩阵都是矩阵的线性运算。

## 2.3 矩阵相乘

设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 的矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 的矩阵，那么 $A\times B=AB=C_{m\times n}=(c_{ij})$。即：

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

所以按此定义一个 $1 \times s$ 行矩阵与 $s \times 1$ 列矩阵的乘积就是一个 1 阶方针即一个数：

$$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{is}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} = c_{ij}。$$

从而 $AB = C$ 的 $c_{ij}$ 就是 $A$ 的第 $i$ 行与 $B$ 的 $j$ 列的乘积。

注意：只有左矩阵的列数等于右矩阵的行数才能相乘。

只有 $AB$ 都是方阵的时候才能 $AB$ 与 $BA$。

矩阵的左乘与右乘不一定相等，即 $AB \neq BA$。

若方阵 $AB$ 乘积满足 $AB = BA$，则表示其是可交换的。

$A \neq O$，$B \neq O$，但是不能推出 $AB \neq O$ 或 $BA \neq O$。

$AB = O$ 不能推出 $A = O$ 或 $B = O$。

$A(X - Y) = O$ 当 $A \neq O$ 也不能推出 $X = Y$。

- $(AB)C = A(BC)$。
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$。
- $A(B + C) = AB + AC$。
- $(B + C)A = BA + CA$。
- $EA = AE = A$。

$\lambda E$ 称为纯量阵，$(\lambda E_n)A_n = \lambda A_n = A_n(\lambda E_n)$。

若 $A_{m \times s}$，$B_{s \times n} = (\beta_1, \cdots, \beta_s)$，其中 $\beta$ 为 $n$ 行的列矩阵，则：

$AB = A(\beta_1, \cdots, \beta_s) = (A\beta_1, \cdots, A\beta_n)$。

## 2.4 矩阵幂

只有方阵才能连乘，从而只有方阵才有幂。

若 $A$ 是 $n$ 阶方阵，所以：

$$A^1 = A，\ A^2 = A^1A^1，\ \cdots，\ A^{k+1} = A^kA^1$$

- $A^kA^l = A^{k+l}$。

- $(A^k)^l = A^{kl}$。

因为矩阵乘法一般不满足交换率，所以 $(AB)^k \neq A^kB^k$。只有 $AB$ 可交换时才相等。

若 $A \neq 0$ 不能推出 $A^k \neq 0$，如：

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$。$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$。

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A^3 = O$。

矩阵幂可以同普通多项式进行处理。

如 $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + n$, 对于 $A$ 就是 $f(A) = a_nA^n + \cdots + a_1A + a_nE$。

$f(A) = A^2 - A - 6E = (A + 2E)(A - 3E)$。

## 2.5 矩阵转置

把矩阵 $A$ 的行换成同序数的列就得到一个新矩阵，就是 $A$ 的转置矩阵 $A^T$。若 $A$ 为 $m \times n$，则 $A^T$ 为 $n \times m$。

- $(A^T)^T = A$。
- $(A + B)^T = A^T + B^T$。
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$。
- $(AB)^T = B^TA^T$。

对称矩阵或对称阵：元素以对角线为对称轴对应相等，$A = A^T$。

## 2.6 方阵行列式

由 $n$ 阶方阵 $A$ 的元素所构成的行列式称为矩阵 $A$ 的行列式，记为 $\det A$ 或 $|A|$。

## 2.7 线性方程组与矩阵

- $|A^T| = |A|$。

- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$。

- $|AB| = |A| \cdot |B| = |BA|$。

伴随矩阵或伴随阵：行列式 $|A|$ 各个元素的代数余子式 $A_{ij}$ 构成的矩阵。

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $AA^* = A^*A = |A|E$。

# 3 线性方程组

矩阵是根据线性方程组得到。

## 3.1 线性方程组与矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$n$ 元齐次线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$n$ 元非齐次线性方程组。

对于齐次方程，$x_1 = \cdots = x_n = 0$ 一定是其解，称为其零解，若有一组不全为零的解，则称为其非零解。其一定有零解，但是不一定有非零解。

对于非齐次方程，只有 $b_1 \cdots b_n$ 不全为零才是。

令系数矩阵 $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，未知数矩阵 $X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，常数项矩阵 $b_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$，增广矩阵 $B_{m\times(n+1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$。

所以 $AX = \begin{pmatrix} a_1 1x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$。

从而 $AX = b$ 等价于 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$，当 $b = O$ 就是齐次线性方程。

从而矩阵可以简单表示线性方程。

## 3.2 线性方程组的解

对于一元一次线性方程：$ax = b$：

- 当 $a \neq 0$ 时，可以解得 $x = \dfrac{b}{a}$。
- 当 $a = 0$ 时，若 $b \neq 0$ 时，无解，若 $b = 0$ 时，无数解。

当推广到多元一次线性方程组：$AX = b$，如何求出 $X$ 这一系列的 $x$ 的解?

从数学逻辑上看，已知多元一次方程，有 $m$ 个约束方程，有 $n$ 个未知数，假定 $m \leqslant n$。

当 $m < n$ 时，就代表有更多的未知变量不能被方程约束，从而有 $n - m$ 个自由变量，所以就是无数解，解组中其他解可以由自由变量来表示。

当 $m = n$ 时代表约束与变量数量相等，此时又要分三种情况。

当所有的约束条件其中存在线性相关，即一部分约束条件可以由其他约束表示，则代表这部分约束条件是没用的，实际上的约束条件变少，从而情况等于 $m < n$，结果是无数解。

当所有的约束条件不存在线性相关，但是一部分约束条件互相矛盾，则约束条件下就无法解出解，从而结果是无实数解。

当所有的约束条件不存在线性相关，且相互之间不存在矛盾情况，这时候才会解出一个实数解，从而结果是有唯一实解。

若使用矩阵来解决线性方程组的问题，其系数矩阵 $A_{m\times n}$。

对于 $A \neq O$，则 $AX = b$，若存在一个矩阵 $B_{n\times n}$ 类似 $\dfrac{1}{a}$，使得 $BAX = Bb$，解得 $EX = X = Bb$，这个 $B$ 就是 $A$ 的逆矩阵。

对于 $A=O$ 即不可逆，需要判断 $b$ 是否为 0，若不是则无实数解，若是则无穷解，这种判断需要用到增广矩阵，需要用到矩阵的秩判断。

# 4 逆矩阵

逆矩阵类比倒数，若对于 $n$ 阶矩阵 $A$，有一个 $n$ 阶矩阵 $B$，使得 $AB=BA=E$，则 $A$ 可逆，$B$ 是 $A$ 的逆矩阵也称为逆阵，且逆矩阵唯一，记为 $B=A^{-1}$。

**定理：** 若矩阵 $A$ 可逆，则 $|A|\neq 0$。

证明：若 $A$ 可逆，则 $AA^{-1}=E$，所以 $|A|\cdot|A^{-1}|=|E|=1$，$|A|\neq 0$。

可以类比普通数字，若 $a$ 有一个倒数 $\frac{1}{a}$，则 $a\neq 0$，否则无法倒。

**定理：** 若 $|A|\neq 0$，则 $A$ 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$。