极限

Didnelpsun

目录

极限运算分为函数极限和数列极限，数列极限和函数极限可以相互转化，这里主要以函数极限作为示例。

1 基本计算方式

课本上极限计算可以使用的主要计算方式：

1.1 基础四则运算

只有式子的极限各自存在才能使用四则运算，使用的频率较少。

1.2 重要极限

重要极限有两个，但是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 这个很少用，因为往往用等价无穷小替代了，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 则用的较多，当出现分数幂的幂指函数时，不要先去取对数，而是使用重要极限看看能不能转换。

例题：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$。

解：$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3}\cdot\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{-3}{6+x}\cdot\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-\frac{3}{2}\cdot\frac{x-1}{x+6}}=e^{-\frac{3}{2}}$。

例题：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$。

解：$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^x\cdot\dfrac{2x+3}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{3}{2x}}{1+\dfrac{1}{2x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^x}{\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e。$$

1.3 导数定义

极限转换以及连续性的时候会用到，但是使用的频率也较小。

1.4 等价无穷小替换

当看到复杂的式子，且不论要求的极限值的趋向，而只要替换的式子是 $\Delta \to 0$ 时的无穷小，就使用等价无穷小进行替换。

注意：替换的必然是整个求极限的乘或除的因子，一般加减法与部分的因子不能进行等价无穷小替换。

对于无法直接得出变换式子的，可以对对应参数进行凑，以达到目标的可替换的等价无穷小。

1.5 夹逼准则

夹逼准则可以用来证明不等式也可以用来计算极限。但是最重要的是找到能夹住目标式子的两个式子。

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{10}{x}\right]$，其中 $[\cdot]$ 为取整符号。

解：取整函数公式：$x-1<[x]\leqslant x$，所以 $\dfrac{10}{x}-1<\left[\dfrac{10}{x}\right]\leqslant\dfrac{10}{x}$。

当 $x>0$ 时，$x\to 0^+$，两边都乘以 10，$10-x<x\cdot\left[\dfrac{10}{x}\right]\leqslant x\cdots\dfrac{10}{x}=10$，而左边在 $x\to 0^+$ 时极限也为 10，所以夹逼准则，中间 $x\cdot\left[\dfrac{10}{x}\right]$ 极限也为 10。

当 $x>0$ 时，$x\to 0^-$，同样也是夹逼准则得到极限为 10。

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{10}{x}\right]=10$。

1.6 拉格朗日中值定理

对于形如 $f(a)-f(b)$ 的极限式子就可以使用拉格朗日中值定理，这个 $f(x)$ 为任意的函数。使用拉格朗日中值定理最重要的还是找到这个 $f(x)$。

可以将极限式子中形如 $f(a)-f(b)$ 的极限部分使用拉格朗日中值定理进行替换。

例题：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{2}{n}-\arctan\dfrac{2}{n+1}\right)$。

解：因为式子不算非常复杂，其实也可以通过洛必达法则来完成，但是求导会很复杂。而 $\arctan x$ 可以认定为 $f(x)$。

从而 $\arctan\dfrac{2}{n}-\arctan\dfrac{2}{n+1}$ 为 $f(\dfrac{2}{n})-f(\dfrac{2}{n+1})=f'(\xi)\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n+1}\right)$。

其中 $\dfrac{2}{n+1}<\xi<\dfrac{2}{n}$，而当 $n\to\infty$ 时，$f'(\xi)=\dfrac{1}{1+\xi^2}\to 1$。

$\therefore \arctan\dfrac{2}{n} - \arctan\dfrac{2}{n+1} \sim \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1} = \dfrac{2}{n(n+1)}$。

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{2}{n} - \arctan\dfrac{2}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \dfrac{2}{n(n+1)} = 2$。

1.7 洛必达法则

洛必达法则的本质是降低商形式的极限式子的幂次。

洛必达在处理一般的极限式子比较好用，但是一旦式子比较复杂最好不要使用洛必达法则，最好是对求导后有规律或幂次较低的式子进行上下求导。

对于幂次高的式子必然使用洛必达法则。

洛必达法则必须使用在分式都趋向 0 或 ∞ 时，如果不是这样的趋向则不能使用。如：

例题：求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$。

如果使用洛必达法则，则会得到结果为 1，这是错误的，因为分子在 $x\to 1$ 时结果为常数 1。正确的计算方式：

解：$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=\infty$。

1.8 泰勒公式

泰勒公式一般会使用趋向 0 的麦克劳林公式，且一般只作为极限计算的一个小部分，用来替代一个部分。

且一般只有麦克劳林公式表上的基本初等函数才会使用倒泰勒公式，复合函数最好不要使用。

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$。

分析：该题目使用洛必达法则会比较麻烦且难以计算，所以先考虑是否能用泰勒展开。

解：$x\to 0$，$\sin x = x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，$\tan x = x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，$\arcsin x = x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，$\arctan x = x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$。

$\therefore \sin x-\tan x = -\dfrac{1}{2}x^3+o(x^3)$，$\arcsin x-\arctan x=\dfrac{1}{2}x^3+o(x^3)$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\frac{1}{x}x^3+o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}=-1$。

2 常用化简技巧

2.1 对数法则

如 $\log_n(a\cdot b)=\log_n a+\log_n b$，$\log_n\frac{a}{b}=\log_n a-\log_n b$。

换底公式：对于 $a,c\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 且 $b\in(0,+\infty)$ 时，有 $\log_a b=\dfrac{\log_n b}{\log_n a}$。

例题：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{[\ln(1-x)+\ln(1+x)]\sin\dfrac{x}{x+1}}$。

注意在积或商的时候不能把对应的部分替换为 0，如分母部分的 $[\ln(1-x)+\ln(1+x)]$ 就无法使用 $\ln(1+x)\sim x$ 替换为 $-x+x$，这样底就是 0 了，无法求得最后的极限。

解：这时可以尝试变形，如对数函数相加等于对数函数内部式子相乘：$\ln(1-x)+\ln(1+x)=\ln(1-x^2)\sim -x^2$。

2.2 指数法则

当出现 $f(x)^{g(x)}$ 的类似幂函数与指数函数类型的式子，需要使用 $u^v=e^{v\ln u}$。

一般需要与洛必达法则配合使用。

例题：求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$。

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2})'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=e^0=1$

例题：求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}(a>0,b>0,c>0)$。

解：$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{a^x+b^x+c^x}}$（洛必达法则）

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln a+\ln b+\ln c}{1+1+1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(abc)}{3}}=\sqrt[3]{abc}$。

例题：求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}-\sqrt{e}\right]$。

解：首先对于幂指函数需要取指数，所以 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n})}$。

而后面的多一个 $\sqrt{e}$ 导致整个式子变为一个复杂的式子，而与 e^x 相关的是 $e^x-1\sim x$。

所以 $e^{\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n})}-\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{2}}-1\right)=e^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\dfrac{n}{2}\ln(1+\dfrac{1}{n})-\dfrac{1}{2}\right]$。

综上：

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}-\sqrt{e}\right]=\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n})}-\sqrt{e}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[e^{\frac{1}{2}}\cdot\left(e^{\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{2}}-1\right)\right]=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\lim_{n\to\infty} n^2\left[\ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{e}}{4}$$

2.3 三角函数关系式

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot x^2}(\sin x\sim x)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}(\sin x\cos x\sim\frac{1}{2}\sin 2x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{4}\cdot 2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2}{4x^3}(\sin x\cos x\sim\frac{1}{2}\sin 2x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{1}{2}\cos 4x\cdot 4}{12x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}(1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2)=\frac{4}{3}$$

2.4 提取常数因子

提取常数因子就是提取出能转换为常数的整个极限式子的因子。这个因子必然在自变量的趋向时会变为非 0 的常数，那么这个式子就可以作为常数提出。

2.5 提取公因子

当作为商的极限式子上下都具有公因子时可以提取公因子然后相除，从而让未知数集中在分子或分母上。

例题：求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^5-5x+4}$。

解：需要先提取公因子：$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{2}{3}$。

（当然可以使用洛必达法则得到极限为 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-6}{2x-5}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8-6}{8-5}$）

注意：提取公因子的时候应该注意开平方等情况下符号的问题。如果极限涉及倒正负两边则必须都讨论。

当趋向为负且式子中含有根号的时候最好提取负因子，从而让趋向变为正。

例题：求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)+2\ln 2x\right]$。

解：题目的形式为 $\infty-\infty$，所以必须使用后面的倒代换转换为商的形式。

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\left[\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)-2\ln 2\right]$。

这里就需要注意到因为 $\sqrt{4x^2+x}$ 的限制导致这个式子必然为正数，而 $x\to-\infty$ 代表自变量为负数，所以提出来的 x 必然是负数，而原式是正数，所以就需要添加一个负号，而后面的 $2\ln 2x$ 则没有要求，所以直接变成 $-2\ln 2$ 就可以了。

将 x 下翻变成分母为 $\dfrac{1}{x}$，并令 $t=\dfrac{1}{x}$。

$=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{\sqrt{t+4}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)-2\ln 2}{-t}$。

幂次不高可以尝试洛必达：

$=\lim\limits_{t\to 0^-}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln(2+t)}{\sqrt{t+4}}+\dfrac{\sqrt{t+4}}{2+t}\right)=-\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{2}{2}\right)=-\dfrac{\ln 2}{4}-1$。

2.6 有理化

当遇到带有根号的式子可以使用等价无穷小，但是只针对形似 $(1+x)a-1\sim ax$ 的式子，而针对 $x^a\pm x^b$ 的式子则无法替换，必须使用有理化来将单个式子变为商的形式。

2.6.1 和差形式

如 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\dfrac{a+b}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$。

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$。

解：首先定性分析：$\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot(\sqrt{x^2+100}+x)$。

在 $x\to-\infty$ 趋向时，x 就趋向无穷大。

而 $\sqrt{x^2+100}$ 为一次，所以 $\sqrt{x^2+100}+x$ 趋向 0。

又 $\sqrt{x^2+100}$ 在 $x\to-\infty$ 时本质为根号差，所以有理化：

$$\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=\lim_{x\to-\infty}x\frac{x^2+100-x^2}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}$$

$$\xRightarrow{令x=-t}\lim_{t\to+\infty}\frac{-100t}{\sqrt{t^2+100}+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-100}{\sqrt{1+\dfrac{100}{t^2}}+1}=-50$$

例题：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$。

解：$=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1+\sin^2 x}+x}{x^2(1+\sin^2 x)-x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}+1}{x\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cos x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$。

2.6.2 乘积形式

此时带有根号的式子只有单个没有加上或减去另一个式子，所以就需要将其转换为和差形式，如三角函数中 $x\pm n\pi$ 结果不变。

例题：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$。

解：由于 $\sin(x+n\pi)=\pm\sin x$，而 $\sin^2(x+n\pi)=\sin^2 x$。

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2[\pi(\sqrt{n^2+n}-n)]=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\dfrac{\pi}{\sqrt{1+1/n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\dfrac{\pi}{2}=1$。

2.7 换元法

换元法本身没什么技巧性，主要是更方便计算。最重要的是获取到共有的最大因子进行替换。

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$。

解：当 $x\to 1^-$ 时，$\ln x$ 趋向 0，$\ln(1-x)$ 趋向 $-\infty$。

又 $x\to 0$，$\ln(1+x)\sim x$，所以 $x\to 1$，$\ln x\sim x-1$：

$\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)\ln(1-x)\xRightarrow{t=1-x}=-\lim\limits_{t\to 0^+}t\ln t$

$=-\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln t}{\frac{1}{t}}=-\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=\lim\limits_{t\to 0^+}t=0$

2.8 倒代换

2.8.1 含有分式

当极限式子中含有分式中一般都需要用其倒数，把分式换成整式方便计算。

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot 2x^{-3}}{100x^{99}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{50}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}}$

使用洛必达法则下更复杂，因为分子的幂次为负数，导致求导后幂次绝对值越来越大，不容易计算。

使用倒代换再洛必达降低幂次，令 $t=\dfrac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{-50}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{e^t}$$
$$=\cdots$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0$$

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$。

解：该式子含有分数，所以尝试使用倒数代换：

$$\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]\xRightarrow{令x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^t-1}{t^2}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}$$
$$\xRightarrow{泰勒展开e^t}\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2}=\frac{1}{2}$$

2.8.2 $\infty-\infty$ 型

2.8.3 $\infty\cdot\infty$ 型

2.9 拆项

拆项需要根据式子形式进行，所以很难找到普遍规律。

2.9.1 积拆项

例题：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+6)}{6n^6}$。

解：需要将分子和分母都拆为 6 项：

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n}\times\cdots\frac{n+6}{n}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{6}{n})=\frac{1}{6}。$$

当极限式子中出现不知道项数的 n 时，一般需要使用拆项，把项重新组合。一般的组合是根据等价无穷小。

2.9.2 和拆项

而对于复杂的具有同一结构的和的式子也可以考虑拆项。

例题：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$。（$n\in N^+$）

解：这里可以使用等价无穷小 $e^x-1\sim x$。

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e}{x}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e}{x}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\right)}$$
$$=e^{\frac{e}{n}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}+\cdots+\frac{e^{nx}-1}{x}\right)}=e^{\frac{e}{n}[1+2+\cdots+n]}=e^{\frac{e}{n}\cdot\frac{n(1+n)}{2}}=e^{\frac{e(1+n)}{2}}$$

例题：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{\ln\cos x}$

解：可以使用 $\cos x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{\ln\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{-\dfrac{x^2}{2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}}{-\dfrac{x^2}{2}}+\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{-\dfrac{x^2}{2}}$$
$$=-1+\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos 2x})+\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{-\dfrac{x^2}{2}}$$
$$=-1+\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}(\cos 2x-1)+\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{-\dfrac{x^2}{2}}$$
$$=-1+\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}(-\dfrac{4x^2}{2})+\left(-\dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{9x^2}{2}\right)}{-\dfrac{x^2}{2}}=-6$$

3 极限计算形式

极限相关计算形式主要分为下面六种：

1. 未定式：直接根据式子计算极限值。
2. 极限转换：根据已知的极限值计算目标极限值。
3. 求参数：已知式子的极限值，计算式子中未知的参数。
4. 极限存在性：根据式子以及极限存在性计算极限或参数。
5. 极限唯一性：式子包含参数，根据唯一性计算两侧极限并求出参数与极限值。
6. 函数连续性：根据连续性与附加条件计算极限值或参数。
7. 迭代式数列：根据数列迭代式计算极限值。

8. 变限积分：根据变限积分计算极限值。

3.1 极限不定式类型

七种：$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$。

①其中 $\frac{0}{0}$ 为洛必达法则的基本型。$\frac{\infty}{\infty}$ 可以类比 $\frac{0}{0}$ 的处理方式。$0 \cdot \infty$ 可以转为 $\frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$。设置分母有原则，简单因式才下放（简单：幂函数，e 为底的指数函数）。

6 ②$\infty - \infty$ 可以提取公因式或通分，即和差化积。

③$\infty^0, 0^0, 1^\infty$，就是幂指函数。

$$u^v = e^{v \ln u} = \begin{cases} \infty^0 & \rightarrow \quad e^{0 \cdot +\infty} \\ 0^0 & \rightarrow \quad e^{0 \cdot -\infty} \\ 1^\infty & \rightarrow \quad e^{\infty \cdot 0} \end{cases}$$

$\therefore \lim u^v = e^{\lim v \cdot \ln u} = e^{\lim v(u-1)}$

综上，无论什么样的四则形式，都必须最后转换为商的形式。

3.2 极限转换

3.2.1 整体换元

最常用的方式就是将目标值作为一个部分，然后对已知的式子进行替换。

例题：已知 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1-x) + xf(x)}{x^2} = 0$，求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x}$。

解：令目标 $\frac{f(x)-1}{x} = t$，$\therefore f(x) = tx + 1$。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x) + xf(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x) + tx^2 + x}{x^2} \text{(泰勒展开)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x - \frac{x^2}{2} + tx^2 + x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(t - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} t = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}$。

如果是已知值中含有目标值的关系式，可以将已知值作为一个整体来换算为目标值。

例题：已知 $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = 1$，$\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 3$，求出 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的极限值。

解：设 $u_n = a_n + b_n$，$v_n = a_n - b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 3$。

根据极限运算规则，若 u_n、v_n 存在极限，则 $u_n + v_n$、$u_n - v_n$ 也存在极限。

且 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1 + 3 = 4$，$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n - \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1 - 3 = -2$。

且 $a_n = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$，$b_n = \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$，所以 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 极限存在。

$\lim\limits_{n\to\inf} a_n = \dfrac{1}{2} \times 4 = 2$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$。

3.2.2 关系转换

例题：如果 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x + f(x)}{x^4}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{f(x)}$ 为常数多少？

解：由 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x + f(x)}{x^4} = A$，而目标是 x^3，所以需要变形：

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x + f(x)}{x^4} = A$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x + f(x) \cdot x}{x^4} = A \cdot \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^3} = 0$

泰勒展开：$x - \sin x = \dfrac{1}{6}x^3$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{f(x)} = -6$

3.2.3 脱帽法

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$。

例题：如果 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x + f(x)}{x^4}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{f(x)}$ 为常数多少？

解：由 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x + f(x)}{x^4} = A$ 脱帽：$\dfrac{x \sin x + f(x)}{x^4} = A + \alpha$。

得到：$f(x) = Ax^4 + \alpha \cdot x^4 - (x - \sin x)$。

反代入：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Ax^4 + \alpha \cdot x^4 - x + \sin x}{x^3} = 0 + 0 - \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{6}$。

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{f(x)} = -6$。

3.3 求参数

因为求参数类型的题目中式子是未知的，所以求导后也是未知的，所以一般不要使用洛必达法则，而使用泰勒展开。

一般极限式子右侧等于一个常数，或是表明高阶或低阶。具体的关系参考无穷小比阶。

在求参数的时候要注意与 0 的关系。

3.3.1 常数

例题：设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，求常数 a，b。

解：根据泰勒展开式：$x\to 0,\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{x}+o(x^2)$，$x-\ln(1+x)\sim\dfrac{1}{2}x^2\sim 1-\cos x$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x-\left(\dfrac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=2\neq 0$$

$$1-a=0;-\left(\frac{1}{2}+b\right)=2$$

$\therefore a=1;b=-\dfrac{5}{2}$。

3.3.2 无穷小

3.3.2.1 等价无穷小

等价无穷小一般不会使用 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ 的方式来求参数，而是直接求没有参数的极限，然后对比求出参数。

例题：当 $n\to\infty$ 时，$e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 与 An^{-p} 为等价无穷小，求 A 与 p。

解：$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 由于是一个幂函数，所以对其取对数简化，$e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$，又 An^{-p} 是以积的形式，所以 $e-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$ 的极限应该也是积的形式，提出一个 e：$e(1-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1})=-e(e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}-1)$。

又使用等价无穷小 $e^x-1\sim x$，$-e(e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}-1)\sim -e\left[n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$。

又 $n\to\infty$，$-e\left[n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1\right]\sim\dfrac{e}{2n}$。

3.3.2.2 某阶无穷小

若是求某个式子与另一个式子的某阶无穷小，则同右边等于常数一样，也需要使用泰勒展开。

例题：确定常数 a 和 b，使得 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 当 $x\to 0$ 时关于 x 的 5 阶等价无穷小。

解：使用泰勒展开展开到五阶：

$$
\begin{aligned}
&f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x\\
&=x-a\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right]-\frac{b}{2}\left[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^5)\right]\\
&=(1-a-b)x+\left(\frac{a}{6}+\frac{2b}{3}\right)x^3-\left(\frac{a}{120}+\frac{2b}{15}\right)x^5+o(x^5)。
\end{aligned}
$$

所以若为五阶无穷小，则五阶前的常数应该都为 0。

所以 $1-a-b=0$，$\dfrac{a}{6}+\dfrac{2b}{3}=0$，$\dfrac{a}{120}+\dfrac{2b}{15}\neq 0$。

解得 $a=\dfrac{4}{3}$，$b=-\dfrac{1}{3}$。

3.4 极限存在性

一般会给出带有参数的例子，并给定一个点指明在该点极限存在，求参数。

若该点极限存在，则该点两侧的极限都相等。

例题：设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x(b\cos x-1)}{e^x+a}, & x>0\\ \dfrac{\sin x}{\ln(1+3x)}, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处极限存在，则 a，b 分别为。

解：首先根据极限在 $x=0$ 存在，且极限的唯一性。分段函数在 0 两侧的极限值必然相等。

$\because \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{3x}=\dfrac{1}{3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x(b\cos x-1)}{e^x+a}$。

又 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x(b\cos x-1)}{e^x+a}$ 的分母的 e^x 当 $x\to0^+$ 时 $e^x\to1$，假如 $a\neq-1$，则 $e^x+a\neq0$，则为一个常数。

从而提取常数因子：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x(b\cos x-1)}{e^x+a}=\dfrac{1}{1+a}\lim\limits_{x\to0^+}\sin x(b\cos x-1)$，这时候 $\sin x$ 是趋向 0 的，而 $b\cos x-1$ 无论其中的 b 为何值都是趋向一个常数或 0，这时候他们的乘积必然为无穷小，从而无法等于 $\dfrac{1}{3}$ 这个常数。

$\therefore a=-1$，从而让极限式子变为一个商的形式：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x(b\cos x-1)}{e^x+a}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x(b\cos x-1)}{e^x-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x(b\cos x-1)}{x}\\
&=\lim_{x\to0^+}b\cos x-1=b-1=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$\therefore a=-1,b=\dfrac{4}{3}$。

3.5 极限唯一性

若极限存在则必然唯一。

例题：设 a 为常数，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-\pi}{e^{\frac{2}{x}}+1}+a\cdot\arctan\dfrac{1}{x}\right)$ 存在，求出极限值。

解：因为求 $x\to 0$，所以需要分两种情况讨论：

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-\pi}{e^{\frac{2}{x}}+1}+a\cdot\arctan\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-\pi}{e^{\frac{2}{x}}+1}\right)+\lim_{x\to 0^+}\left(a\cdot\arctan\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{0\cdot\left(e^{\frac{2}{x}}\right)^2+e^{\frac{1}{x}}-\pi}{1\cdot\left(e^{\frac{2}{x}}\right)^2+1}\right)+a\cdot\frac{\pi}{2}=a\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-\pi}{e^{\frac{2}{x}}+1}+a\cdot\arctan\frac{1}{x}\right)=-\pi+a\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi-\frac{\pi}{2}\cdot a$$

因为极限值具有唯一性，所以 $-\pi-\dfrac{\pi}{2}a=\dfrac{\pi}{2}a$，所以 $a=-1$，极限值为 $-\dfrac{\pi}{2}$。

3.6 函数连续性

函数的连续性代表：极限值 = 函数值。所以函数的连续性需要靠极限完成。

3.6.1 极限判连续性

题目给出函数，往往是分段函数，然后判断分段点的连续性。

例题：讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]}$。

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\ln\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{1}{2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$。

$\therefore\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}$。

又 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$，且 $f(0)=e^{-\frac{1}{2}}$。

从而 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

3.6.2 连续性求极限

例题：函数在 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $f(1)=1$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[2+f\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right]$。

解：根据题目，所求的 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[2+f\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right]$ 中，唯一未知的且会随着 $x\to+\infty$ 而变换就是 $f\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$。如果我们可以求出这个值就可以了。

而我们对于 $f(x)$ 的具体的关系是未知的，只知道 $f(1)=1$。那么先需要考察 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$ 的整数最大值。

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$

$\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}f(x^{\frac{1}{x}})=f(1)=1$。

3.7 迭代式数列

3.7.1 简单递推表达式

最重要的是将递推式进行变形。这种递推式都是比较简单的，a_n 和 a_{n+1} 都是一次的，可以裂项相消等将 a_n 消去。

例题：数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=0,a_1=1,2a_{n+1}=a_n+a_{n-1},n=1,2,\cdots$。计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

解：首先看题目，给出的递推式设计到二阶递推，即存在三个数列变量，所以我们必须先求出对应的数列表达式。因为这个表达式涉及三个变量，所以尝试对其进行变型：

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{a_{n-1}-a_n}{2}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)(a_n-a_{n-1})=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2(a_{n-1}-a_{n-2})$

$=\cdots$

$=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n(a_1-a_0)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

然后得到了 $a_{n+1}-a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$，而需要求极限，所以使用列项相消法的逆运算：

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_1-a_0)+a_0$

$=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^0$

$=\dfrac{1\cdot\left(1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2}{3}$

3.7.2 单调有界准则

对于无法将关系式通过变形归纳为一般式的关系式，对于其极限就必须使用单调有界准则来求出。

单调有界的数列必有极限。需要证明单调性和有界性，然后对式子求极限就能求出目标极限。

单调性可以通过求导来得到，有界性可以结合式子和单调性来得到，或者使用裂项相消法和放缩法来得到一个类似夹逼定理的上下界。

3.7.2.1 通项公式

例题：$x_0=0$，$x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}(n\in N*)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解：首先应该知道数列的趋向都是趋向正无穷。

然后对关系式进行变形：$x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=2-\dfrac{1}{1+x_{n-1}}$。

首先证明单调性，令 $f(x)=2-\dfrac{1}{1+x}$。

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$，则 $f(x)$ 单调递增。

所以不管 $x=x_{n-1}$ 或其他，$f'(x)>0$，x_n 都是单调递增，则 $x_n\geqslant x_0=0$。

然后证明有界性，$\because x_n\geqslant 0$ 且单调，$\therefore x_n=2-\dfrac{1}{1+x_{n-1}}\in[0,2]$。

从而 x_n 有界。

所以根据单调有界定理，x_n 的极限存在。

对于关系式两边取极限：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=\dfrac{1+2\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}}=\dfrac{1+2\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{1+\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$。

解该一元二次方程：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，又根据保号性，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>0$。

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。

3.7.2.2 复杂递推公式

许多题目只给出样子，连通项公式都不会给出，只会给出一个复杂递推公式，其中包括开根号，倒数，甚至只是举例。这种题目就必须使用单调有界准则来完成，甚至还需要其他的技巧。

例题：求出数列 $\sqrt{2}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdots$ 的极限。

解：根据数列样式，无法通过普通的通项公式来表达，所以需要考虑使用递推式来表示：$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$。

首先证明有界性：

给定一个任意的正整数 k，再根据递推式，假定 $x_k < 2$，所以 $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+2} = 2$。且 $x_1 = \sqrt{2}$ 满足假定，所以 $x_k < 2$ 对于任意的正整数 k 都成立，所以 x_n 存在上界 2。

然后证明单调性，根据其递推式：

$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2+x_n} - x_n = \dfrac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n} = \dfrac{-(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n}$。

又 $0 < x_n < 2$，从而上式子大于 0，从而数列单调递增。

所以根据单调有界定理，数列 $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ 一定存在极限，令其极限值 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

将递推式两边平方并取极限：$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(2+x_n)$。

从而 $a^2 = 2+a$，得出 $a = 2$（根据极限的保号性 -1 被舍去）。

例题：已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a$（$a > 0$），$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求其值。

证明：由于 $a > 0$，根据 a_{n+1} 表达式所以 $a_n > 0$，看到递推表达式的乘积为常数的形式可以想到使用不等式 $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ 来转换：$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right) \geqslant \sqrt{2}$。

即 $\{a_n\}$ 有下界 $\sqrt{2}$。

又将通项相减得到相邻两项关系：$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{a_n} - \dfrac{a_n}{2} = \dfrac{2-a_n^2}{2a_n} \leqslant 0$（$n \geqslant 2$）。

所 $\{a_n\}$ 单调递减。

由单调有界准则，a_n 存在极限 A，且 $A \geqslant \sqrt{2}$。

对于关系式两边取极限 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$，则 $A = \dfrac{1}{2}\left(A + \dfrac{2}{A}\right)$。

解得 $A = \sqrt{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$。

3.8 数列和

使用定积分的精确定义 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot i\right)\frac{b-a}{n}$。