多元函数积分学

Didnelpsun

目录

1　二重积分

1.1　交换积分次序

1.1.1　直角坐标系

例题：交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$。

解：已知积分区域分为两个部分。将 X 型变为 Y 型。画出图形可以知道 $y \in (0,1)$，x 的上下限由 $y = x^2$ 和 $y = \dfrac{1}{2}(3-x)$ 转化为 $\sqrt{y}$ 和 $3-2y$。

所以转换为 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$。

1.1.2　极坐标系

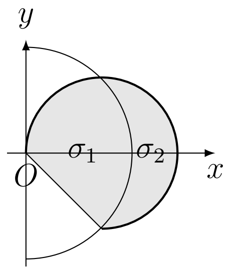
例题：对 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$ 交换积分次序。

解：对于极坐标的积分次序交换需要利用直角坐标系来画图了解，特别是对于 r 的上下限。

对 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 变为 y 轴，$\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ 变为 $y = -x$。

对 $r = 2\cos\theta$ 变为 xy 的表达式,$r^2 = 2\cos\theta$,即 $x^2+y^2 = 2x$,$(x-1)^2+y^2 = 1$。

所以所得到的 σ 为一个圆割去一个扇形。



交换积分次序后就需要以一个长度以极点为圆心做圆，切割 σ。

由 σ 可知取长度 $\sqrt{2}$ 可以切分。

所以 σ 可以分为左边的 σ_1 和右边的 σ_2。

σ_1 的 $r \in [0, \sqrt{2}]$，σ_2 的 $r \in [\sqrt{2}, 2]$。

σ_1 的 θ 下限是 $y = -x$ 这条边，即 $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$，上限是 $r = 2\cos\theta$ 这个圆，则 $\theta = \arccos\dfrac{r}{2}$。

σ_2 的 θ 界限都是是 $r = 2\cos\theta$ 这个圆，此时 $r > 0$ 恒成立，但是上限是上半部分 $\theta > 0$，而下限是下半部分 $\theta < 0$，即上限 $\theta = \arccos\dfrac{r}{2}$，所以下限为 $\theta = -\arccos\dfrac{r}{2}$。

综上交换积分次序结果为：

$\int_0^{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{\sqrt{2}}^{2} r\,\mathrm{d}r \int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$。

1.2 极直互化

例题：将 $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y e^{-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{R} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 转换为极坐标系并计算结果。

解：首先根据积分上下限得到积分区域 $D=\left\{0\leqslant y\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}R,0\leqslant x\leqslant y\right\}\cup\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}R\leqslant y\leqslant R,0\leqslant x\leqslant\sqrt{R^2-y^2}\right\}$，$D$ 为一个八分之一圆的扇形。

根据 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 替换得到 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant r\leqslant R,\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$。

又 $e^{-y^2}\cdot e^{-x^2}=e^{-(x^2+y^2)}=e^{-r^2}$。

$\therefore I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}\theta\int_0^R e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r$。

1.3 二重积分计算

二重积分若是累次积分形式出现，则计算可以使用上面两种方法简便运算。

1.3.1 交换积分次序

主要用于直角坐标系。

当按照当前的积分次序无法算出时需要更换积分次序。主要是看 $f(x,y)$ 是对 x 先积分更简单还是对 y 先积分更简单。

例题：求 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}\cos^2 x\,\mathrm{d}x$。

解：首先直接对这个式子直接计算，$\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$，原式 $=\dfrac{1}{2}\int_0^1(\pi-2y-\arcsin y)\mathrm{d}y$。根本无法解出。

考虑交换积分次序，首先求 σ，$y\in[0,1]$，$x\in[\arcsin y,\pi-\arcsin y]$，则 $\sin x=y$，$y=\sin(\pi-x)=\sin x$ 即 $x\in[0,\sin x]$。

将积分区域换成 X 型：$x\in[0,\pi]$，$y\in[0,\sin x]$。

$\int_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\cos^2 x\sin x\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}(\cos x)=-\left.\dfrac{\cos^3 x}{3}\right|_0^{\pi}=\dfrac{2}{3}$。

1.3.2 积分性质

直角坐标系和极坐标系都可以使用。

若积分区域 σ 关于 $x=k_1$ 或 $y=k_2$ 对称，则当 $f(x,y)$ 含有 $x-k_1$ 或 $y-k_2$ 因式时重积分值为 0。

例题：设 $D: x^2+y^2 \leqslant 2x+2y$，求 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

解：本题目使用直角坐标系和极坐标系都不好做。所以需要利用积分性质，对 D 进行平移等操作。

利用平移，由于 $D:(x-1)^2+(y-1)^2=2$，令 $x=1+r\cos\theta$，$y=1+r\sin\theta$，则利用极坐标，$r\in[0,\sqrt{2}],\theta\in[0,2\pi],=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}((1+r\cos\theta)(1+r\sin\theta)r)\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(1+r\sin\theta+r\cos\theta+r^2\sin\theta\cos\theta)r\,\mathrm{d}r$，又将 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 对 θ 在 $[0,2\pi]$ 进行积分全部为 0，所以直接把后面的全消掉，变为 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\,\mathrm{d}r=2\pi$。

1.3.3 切分区域

主要用于直角坐标系转为极坐标系。

将不规则的区域划分为圆域。

例题：设 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，求 $\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

解：由 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，知道可以使用极坐标系来表示，但是 D 是一个正方形，无法用圆来简单表示。

又 D 可以从 $y=x$ 切割为两个部分，所以令下三角形为 D_1，$\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\iint\limits_{D_1}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

所以 $0\leqslant y$ 和 $y=x$ 可以确定 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 可以确定 r 上界为 $x=1$，即 $r\cos\theta=1$，即 $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$，确定 $r\in\left[0,\dfrac{1}{\cos\theta}\right]$。

所以 $=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\mathrm{d}r=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}=2\ln(\sec\theta+\tan\theta)|_0^{\frac{\pi}{4}}=2\ln(1+\sqrt{2})$。

即对二重积分求导，需要将二重积分化为一重积分。

1.3.4 坐标轴移动

主要用于直角坐标系转为极坐标系。

面对 D 为一个圆的部分区域，而圆心不在原点，则可以坐标轴移动让圆心到原点上，从而方便积分，本质就是换元。

例题：设积分区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2x+2y\}$，求 $\iint_D(x^2+xy+y^2)\mathrm{d}\sigma$。

解：D 为 $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant\sqrt{2}$，即圆心在 $(1,1)$ 的圆，极坐标系无法表示，所以必须平移坐标轴。

令 $x-1=u$，$y-1=v$，$x=u+1$，$y=v+1$，此时 $D'=\{(u,v)|u^2+v^2\leqslant 2\}$。

$\iint\limits_D(x^2+xy+y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D'}[(u+1)^2+(u+1)(v+1)+(v+1)^2]\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{D'}[u^2+uv+v^2+3(u+v)+3]\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{D'}(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\iint\limits_{D'}[uv+3(u+v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v+3\iint_{D'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$。

由于 $uv+3(u+v)$ 是关于 u 或 v 的奇函数，且 D' 关于 uv 轴都对称，所以积分值为 0。且根据二重积分的几何意义 $\iint\limits_{D'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=S_{D'}=2\pi$。

所以 $\iint_D(x^2+xy+y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D'}(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+6\pi$。

转换为极坐标系，$u=r\cos\theta$，$v=r\sin\theta$，则 $D'=\{(r,\theta)|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}\}$。

$\iint\limits_{D'}(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\,\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{2}(\sqrt{2})^4=2\pi$。

所以原式 $=2\pi+6\pi=8\pi$。

1.4 二重积分等式

1.4.1 函数

例题：设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\sqrt{x^2+y^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+y^2$，求 $f(x,y)$。

解：$\because f(x,y)$ 为连续函数，所以其在区间上可积且是一个常数。

令 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=A$。对 $f(x,y)=\dfrac{A}{\pi}\sqrt{x^2+y^2}+y^2$ 两边积分：

$A=\dfrac{A}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}y^2\,\mathrm{d}\sigma$，令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$：

$A=\dfrac{A}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\dfrac{2A}{3}+\dfrac{\pi}{4}$。$A=\dfrac{3}{4}\pi$。

则代入原式 $f(x,y)=\dfrac{3}{4}\sqrt{x^2+y^2}+y^2$。

1.4.2 极限

例题：设 $g(x)$ 有连续的导数，且 $g(0)=0$，$g'(0)=a\neq 0$，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的某邻域内连续，求 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{g(r^2)}$。

解：已知对于这个积分式子中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是未定式，不可能求出具体的值，所以不能再用二重积分直接计算。

面对这种未定式我们希望把这个式子变成我们已知的式子，也应该与 r 相关。此时我们可以想到二重积分中值定理。

根据二重积分中值定理 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi r^2 f(\xi,\eta)$，其中 (ξ,η) 为圆域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 上的点，所以 $\lim\limits_{r\to 0^+}f(\xi,\eta)=f(0,0)$。

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{\pi r^2 f(\xi,\eta)}{g(r^2)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\pi f(0,0)2r}{2rg'(r^2)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\pi f(0,0)}{g'(r^2)} = \frac{\pi f(0,0)}{g'(0)} = \frac{\pi f(0,0)}{a}。$$

1.4.3 求导

1.5 二重积分不等式

即对二重积分进行对比。

1.5.1 同积分域

同一积分域上二重积分大小的比较，只要比较在该区间被积函数值的大小。

1.5.2 同积分函数

同一积分函数上二重积分大小的比较，要比较函数域的大小，也要注意在函数域上被积函数的符号。

例题： 设积分区域 $D_1 = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 1\}$、$D_2 = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 2\}$、$D_3 = \left\{(x,y)|\frac{1}{2}x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$、$D_4 = \left\{(x,y)|x^2+\frac{1}{2}y^2 \leqslant 1\right\}$。
记 $I_i = \iint\limits_{D_i} \left[1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right] \mathrm{d}\sigma$（$i=1,2,3,4$），求 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}$。

解：已知 D_1、D_2 分别为半径 1 和 $\sqrt{2}$ 的圆，而 D_3、D_4 分别为横着和竖着的椭圆。可以画出图像。

被积函数 $f(x,y) = 1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)$ 为连续函数，只有在 D_4 上才能保证完全为正，以外的地方为负值。

所以 $D_1 \subset D_4$，所以 $I_1 < D_4$。对于 D_2 更大，$D_4 \subset D_2$，但是多余的左右部分是负值，积分值会在 D_4 的基础上减去这部分的值，同理 D_3 和 D_4 一个是横的椭圆一个是竖的椭圆，其积分值只有中间交叉的部分，还要减去两边多余的部分。

所以 I_4 最大。

1.6 一重积分化二重积分

对于一重积分的计算或证明可能比较有难度，如两个关于 x 的函数的一重积分乘积计算，可以将其中一个 x 当作 y，从而将一重积分的乘积变为二重积分。

1.6.1 乘积化不等式

例题：$f(x)$ 为恒大于 0 的连续函数，证明 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$。

解：首先观察这个式子，右边是积分上下限的差的乘积，左边是两个积分的乘积，看上去貌似没什么关系，而且积分式子给出的是一个未定式 $f(x)$，所以不能直接求左边值再比较大小，他们之间一定存在着某种关系。

式子左边的两个函数互为倒数，所以应该要尝试将这两个式子乘在一起来利用基本不等式计算，即将一重积分乘积变为二重积分。

对于一重积分而言只是一个自变量，对于二重积分而言就变成了两个自变量，需要令其中一个 $f(x)$ 变为 y，所以 xy 的积分区域都是一样的 $[a,b]$，所以设 $D=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$。

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint\limits_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\geqslant\frac{1}{2}\iint\limits_D 2\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}\cdot\frac{f(y)}{f(x)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\frac{1}{2}\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(b-a)^2。$$

1.6.2 乘积简化计算

例题：求 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$。

解：对于这个一重积分首先看到 e^{x^2}，肯定会想到将其幂次降低。使用分部积分法对 e^{e^2} 求导这个幂次不会降低，使用换元法 $x=\sqrt{t}$ 会得到 $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ 从而无法处理，所以这些都不能计算，那么该怎么办？

看到 x^2 就能想到 x^2+y^2 的形式，这样就是一个极坐标系的二重积分，所以尝试将一重积分变成二重积分，即再乘一个以 y 为自变量的原式。

设 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$，显然 $I>0$，将 x 换成 y：

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant+\infty\\0\leqslant y\leqslant+\infty}}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$，令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$：

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{+\infty}e^{-r^2}\,\mathrm{d}(-r^2)=-\frac{\pi}{4}e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}。$$

$$\therefore I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}。$$