多元函数微分学

Didnelpsun

目录

1　基本概念

1.1　复合函数

函数以复合函数形式 $f(g(x,y))$ 出现，函数的变量是一个整体。

1.1.1　链式法则

若是给出相应的不等式可以通过链式法则求出对应的表达式。

例题： 设 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$（$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$）有二阶连续的偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$，则求 $u(\sqrt{x^2+y^2})$。

解：这个函数是复合函数 $u=u(r)$ 和 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 而成。根据复合函数求导法则：

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$。

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{x}{r}\right)=\dfrac{x}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r}\right)=\dfrac{x}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{r-x\cdot(\partial r/\partial x)}{r^2}=\dfrac{x^2}{r^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{r^2-x^2}{r^3}$。

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{y}{r}\right)=\dfrac{y}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r}\right)=\dfrac{y}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{r-y\cdot(\partial r/\partial y)}{r^2}=\dfrac{y^2}{r^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{r^2-x^2}{r^3}$

代入不等式：$\dfrac{x^2+y^2}{r^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{2r^2-x^2-y^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+u=x^2+y^2$。

代入 $x^2+y^2=r^2$：$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+u=r^2$，为二阶线性常系数微分方程。

通解为 $u=C_1\cos r+C_2\sin r+r^2-2$。

即 $u(\sqrt{x^2+y^2})=C_1\cos\sqrt{x^2+y^2}+C_2\sin\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2-2$。

1.1.2　特殊值反代

若是给出的不等式后还给出对应的特殊值，可以直接代入然后反代求出函数，而不用链式法则。

例题： 设 $z=e^x+y^2+f(x+y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^3$，则求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

解：已知 $y=0$ 时，$z=e^x+f(x)=x^3$，$\therefore f(x)=x^3-e^x$，$f(x+y)=(x+y)^3-e^{x+y}$，$z=e^x+y^2+(x+y)^3-e^{x+y}$。

$\therefore\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^x+3(x+y)^2-e^{x+y}$。

2 二元函数

函数以 $f(u,v)$ 的形式来出现，需要分别对其求偏导。

2.1 链式法则

例题：设 $z=e^{xy}+f(x+y,xy)$，$f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：令 $x+y$ 为 u，xy 为 v，$f(u,v)$ 对 u 求导就是 f_1'，对 v 求导就是 f_2'，求 uv 依次求导就是 f_{12}''，以此类推。

首先求一次偏导：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=ye^{xy}+f_1'+f_2'y$。

接着对 y 求偏导：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}+\dfrac{\partial f_1'}{\partial y}+\dfrac{\partial f_2'y}{\partial y}$。

$=e^{xy}+xye^{xy}+\dfrac{\partial f_1'}{\partial y}+\dfrac{\partial f_2'}{\partial y}y+f_2'\dfrac{\partial y}{\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}+\dfrac{\partial f_1'}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f_1'}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial f_2'}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}y+\dfrac{\partial f_2'}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}y+f_2'=e^{xy}+xye^{xy}+f_{11}''+f_{12}''x+f_{21}''y+f_{22}''xy+f_2'$。

又 $f(u,v)$ 具有两阶连续偏导数，所以 $f_{12}''=f_{21}''$。

即 $=e^{xy}+xye^{xy}+f_{11}''+(x+y)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$。

3 多元函数微分应用

3.1 空间曲线的切线与法平面

3.1.1 参数方程

设空间曲线 Γ 由参数方程 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ 给出，其中 $\phi(t),\psi(t),\omega(t)$ 均可导，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 Ω 上的点，且当 $t=t_0$ 时，$\phi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$，$\omega'(t_0)$ 均不为 0，则：

- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为 $\vec{\tau}=(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$。
- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\phi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$。
- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面（过 P_0 且与切线垂直的平面）方程为 $\phi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$。

3.1.2 交面式方程

设空间曲线 Γ 由交面方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 给出，则：

- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为
$\vec{\tau}=\left(\left|\begin{matrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{matrix}\right|_{P_0}, \left|\begin{matrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{matrix}\right|_{P_0}, \left|\begin{matrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{matrix}\right|_{P_0}\right)$。
- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为
$\dfrac{x-x_0}{\left|\begin{matrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{matrix}\right|_{P_0}}, \dfrac{y-y_0}{\left|\begin{matrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{matrix}\right|_{P_0}}, \dfrac{z-z_0}{\left|\begin{matrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{matrix}\right|_{P_0}}$。
- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面方程为
$\left|\begin{matrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{matrix}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left|\begin{matrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{matrix}\right|_{P_0}(y-y_0)+\left|\begin{matrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{matrix}\right|_{P_0}(z-z_0)=0$。

3.2 空间曲面的切平面与法线

3.2.1 隐式

设空间曲面 Σ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 Σ 上的点，则：

- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),$ $F'_z(x_0,y_0,z_0))$ 且法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0}$。
- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为 $F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y$ $(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$。

3.2.2 显式

设空间曲面 Σ 由方程 $z=f(x,y)$ 给出，令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，假定法向量的方向向下，即其余 z 轴正向所成的角为钝角，即 z 为-1，则：

- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1)$，且法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$。
- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为 $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)$ $(y-y_0)-(z-z_0)=0$。

若是反之成锐角，则将里面所有的-1 都换成 1。

若用 α,β,γ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量的方向角，并这里假定法向量的方向是向上的，即其余 z 轴正向所成的角 γ 为锐角，则法向量**方向余弦**为 $\cos\alpha=\dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，其中 $f_x=f'_x(x_0,y_0)$，$f_y=f'_y(x_0,y_0)$。

例题：设直线 $L\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于 $(1,-2,5)$，求 ab 的值。

解：L 在 π 上且与曲面相切，则 π 为 L 的切平面。设曲面方程 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$。

曲面法向量为 $\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}=\{2x,2y,-1\}$，代入 $(1,-2,5)$，则法向量为 $\{2,-4,-1\}$。

又点法式：$\pi:2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$，即 $2x-4y-z-5=0$。

联立直线方程，得到：$(5+a)x+4b+ab-2=0$，又 x 是任意的。

解得 $a=-5,b=-2$。