微分方程

Didnelpsun

目录

本节内容较少。

若一曲线过点 $(1,2)$，且该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $2x$，求该曲线的方程。

令所求曲线为 $\varphi(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$，且 $x=1$ 时，$y=2$。

两边积分：$\int\mathrm{d}y=y=\int 2x\,\mathrm{d}x$。所以 $y=x^2+C$。

代入 $(1,2)$，$C=1$，所以 $y=x^2+1$。

1 微分方程基本概念

1.1 微分方程构成

定义：表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，即含导数的方程就是**微分方程**。导数可能是一阶导数也可能是二阶以及以上阶数的导数。

常微分方程定义：未知函数是一元函数的微分方程。如 $y'''-y''+6y=0$，$y\,\mathrm{d}x-(x+\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}y=0$。

定义：微分方程所出现的未知函数的最高阶导数的阶数就是该微分方程的**阶**。

n 阶微分方程的形式是 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$。其中最高阶导数是必须出现的。若能从中解出最高阶导数，则可得微分方程 $y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$。

1.2 微分方程的解

微分方程的解是函数。

定义：若微分方程中的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则就是微分方程的**通解**。

如若 $y''=3$，则 $y'=3x+C_1$，$y=\dfrac{3}{2}x^2+C_1x+C_2$，此时含有两个任意常数 C_1C_2，则微分方程的阶数也为 2。

定义：确定通解中任意常数后，就得到微分方程的**特解**。

定义：当给出 $x=x_0$ 时 y_0 与 y'_0 的值，那么这些条件就是**初值条件**，如上面的 $y''=3$。

求微分方程 $y'=f(x,y)$ 满足初值条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解这样的问题，就是

一阶微分方程的初值问题，记为 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$。

微分方程的解的图形是一条曲线，叫做微分方程的**积分曲线**，初值问题的集几何意义就是求微分方程的通过某点的积分曲线。

例题：判断函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是否是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + k^2 x = 0$ 的解，若是则令其为 $k \neq 0$ 时方程的通解，求满足初值条件 $x|_{t=0} = A$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$ 时的特解。

解：判断是否为方程的解，就要将这个解代入微分方程中。微分方程中除了 x，还出现了 x''，所以需要先将 x 对 t 求两次导：

$x' = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$，$x'' = -k^2 C_1 \sin kt - k^2 C_2 \sin kt$。代入方程：

$-k^2(C_1 \sin kt + C_2 \sin kt) + k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0$，所以是解，然后求特解：

代入 $x|_{t=0} = A$，$\therefore C_1 = A$，代入 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$，$\therefore C_2 = 0$。

所以代入 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 得到特解：$x = A \cos kt$。

2 可分离变量的微分方程

对于第一节的 $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$ 可以直接求解，如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ 直接移项就可以得到通解 $x^2 + C$。

但是并不是所有都是如此，如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2$ 求积分得 $y = \int 2xy^2\,\mathrm{d}x$，这本身不能直接解，但是可以将 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2$ 先两边同乘 $\dfrac{\mathrm{d}x}{y^2}$ 得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2} = 2x\mathrm{d}x$，将 xy 分离在两端，然后两边同时积分得到 $-\dfrac{1}{y} = x^2 + C$，所以 $y = -\dfrac{1}{x^2 + C}$。

定义：形如 $y' = f(x)g(y)$ 的方程就是**变量可分离型**方程。

可以变型为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$，即将含 y 的放在一边，含 x 的放在另一边。然后对两边求积分就得到 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$，解得隐式解或隐式通解 $G(y) = F(x) + C$。最后可以将隐式解化为显式解。

例题：求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$。

解：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\,\mathrm{d}x$，$\ln|y| = x^2 + C$，$|y| = e^{x^2+C}$。

$\therefore y = \pm e^{x^2} e^C = \pm C_1 e^{x^2} = C_2 e^{x^2}$。

注意：在微分方程部分可以直接 $\ln y = x^2 + C$ 而不用管正负号，其 C 的正负号由取指后左边式子决定，如果左边为正数如 $\sqrt{u}$ 的形式则 C 也为正数，而

这个式子左边为 y，所以为任意常数。

3 可化为可分离变量型

3.1 多项式换元

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)$ 的方程，其中 a,b,c 全不为 0。

令 $u=ax+by+c$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入原方程 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+bf(u)$。

3.2 自然齐次方程

若一阶微分方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，则这方程就是一个齐次方程。

也可能出现 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$。

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$ 变为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$（$u$ 不是一个常数而是一个关于 x 的函数，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\neq u$），从而原方程变为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\varphi(u)$，即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$。

如 $(xy-y^2)\mathrm{d}x-(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$ 可以化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{xy-y^2}{x^2-2xy}$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$。

解决齐次方程问题的过程：令 $u=\dfrac{y}{x}$；$y=xu$；$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。

代入微分方程：$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$，$\therefore x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)-u$，分离变量：$\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，求积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$。最后求出积分再用 $\dfrac{y}{x}$ 替代 u。

若是方程可以变为齐次方程，则 x 和 y 的幂应该是对称的，可以尝试除以一个 x^a 来变为 $\dfrac{y^a}{x^a}$ 形式。

例题：求 $y^2+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解：得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$。

然后将这个等式化为 $\dfrac{y}{x}$ 的形式，分子分母同时除以 x^2：$\dfrac{\dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{xy-x^2}{x^2}}=\dfrac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{\dfrac{y}{x}-1}$。

从而到第三步：$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u^2}{u-1}$，$\therefore x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u^2}{u-1}-u=\dfrac{u}{u-1}$。

$\therefore \dfrac{u-1}{u}\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，$\therefore \displaystyle\int\frac{u-1}{u}\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，$u-\ln u=\ln x+C$，$\ln xu=u+C$。

代入 $u=\dfrac{y}{x}$，得到 $\ln y=\dfrac{y}{x}+C$，所以得到 $y=Ce^{\frac{y}{x}}$。

3.3 可化为齐次方程

对于自然齐次方程，其形式如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{A_1x+B_1y}{A_2x+B_2y}$，则可以除以 x 得到齐次方程。

而对于形式如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}$，则因为有常数项，所以不能直接除以 x。

所以想尝试消去常数项。令 $x=X+h$，$y=Y+k$。

$\therefore\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\dfrac{A_1X+B_1Y+A_1h+B_1k+C_1}{A_2X+B_2Y+A_2h+B_2k+C_2}$，当取一个合适的 h 和 k 时常数项 $A_1h+B_1k+C_1=A_2h+B_2k+C_2=0$，从而能化为齐次方程。

若 $\dfrac{A_2}{A_1}\neq\dfrac{B_2}{B_1}$，则可以解得：

$$\begin{cases}k=\dfrac{A_1C_2-A_2C_1}{A_2B_1-A_1B_2}\\h=\dfrac{A_1B_1C_2-A_2B_1C_1+A_1A_2B_1C_1-A_1^2B_2C_1}{A_1^2B_2-A_1A_2B_1}\end{cases}.$$

若 $\dfrac{A_2}{A_1}=\dfrac{B_2}{B_1}$，即关系式对应成比例。

令 $\dfrac{A_2}{A_1}=\dfrac{B_2}{B_1}=\lambda$，$\therefore\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\lambda(A_1x+B_1y)+C_2}$。

又令 $A_1x+B_1y=v$，$\therefore\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=A_1+B_1\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=A_1+B_1\dfrac{v+C_1}{\lambda v+C_2}$ $=\dfrac{(A_1\lambda+B_1)v+A_1C_2+B_1C_1}{\lambda v+C_2}$。此时未知数只有 v，所以可以按照可分离变量来处理。

4 一阶线性微分方程

4.1 线性方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 就是一阶线性方程。因为其对未知函数 y 与其导数都是一次方程。

若 $Q(x)\equiv 0$，则是一阶齐次线性微分方程，可化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\,\mathrm{d}x$，$\ln y=\int P(x)\,\mathrm{d}x+C'$，$y=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\cdot e^{C'}$，$y=Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$。

若 $Q(x)\neq 0$，则是一阶非齐次线性微分方程，令 $y=C(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$，$C(x)$ 为关于 x 的具体函数，这是**常数变易法**。

代入 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$，得到 $C(x)'e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}-C(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}P(x)+P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}=Q(x)$，$C(x)'e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}=Q(x)$，从而得到 $C(x)'$，再对 $C(x)'$ 积分得到 $C(x)=\displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C$。从而代入 $y=C(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$，得到定理：$y=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}(\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C)$。非齐次通解就是其齐次通解加上一个非齐次的特解。

例题：求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+y}$。

解：不能直接做，因为不能分离出 y。

可以两边求倒数：$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y$，颠倒 xy，得到 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=x$。就可以按照公式来求。

或令 $x+y=u$，所以 $y=u-x$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u}{u}$，$\frac{u}{1+u}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$。

定理：一阶线性方程时，$\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|=\ln x$。

证明：令 $p=\frac{1}{x}$，$\int p\,\mathrm{d}x=\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|$。

根据公式 $y=e^{-\ln|x|}(\int e^{\ln|x|}Q(x)\,\mathrm{d}x+C)=\frac{1}{|x|}(\int|x|Q(x)\,\mathrm{d}x+C)=\frac{1}{\pm x}(\int(\pm x)Q(x)\,\mathrm{d}x+C)=\frac{1}{x}(\int xQ(x)\,\mathrm{d}x\pm C)=\frac{1}{x}(\int xQ(x)\,\mathrm{d}x+D)$。

4.2 伯努利方程

形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n$ 就是伯努利方程。若 $y=1$ 则是可分离变量方程，若 $y=0$ 则是一阶线性方程。

变形：$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$，又令 $y^{1-n}=z$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，从而 $\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n$ 得到 $\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+P(x)z=Q(x)$，从而 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$，将 $(1-n)P(x)$ 当作 $P(x)$，$(1-n)Q(x)$ 当中 $Q(x)$ 代入得到 z 的关系式，再利用上面线性方程的公式求 y。

5 可降阶的高阶微分方程

高阶微分方程即含二阶以及二阶以上的微分方程，需要将其降为一阶微分方程。

5.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型

右边是只包含 x 的函数。

直接对函数不断求积分就可以了。连续积分 n 次，会得到一个含有 n 个任意常数的通解。这种方程没有特定出题考的意义。

例题：求 $y''' = e^{2x} - \cos x$。

解：$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1$，$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$，$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$。

5.2 $y'' = f(x, y')$ 型

即存在 y''，y' 和 x 但是没有 y。

所以令 $y' = p$，$y'' = p'$，代入：$p' = f(x, p)$，代入 $p = \varphi(x, C_1)$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, C_1)$，对其积分：$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$。

例题：求 $(1+x^2)y'' = 2xy'$，满足初值条件 $y|_{x=0} = 1$，$y'|_{x=0} = 3$ 的特解。

解：令 $y' = p$，$y'' = p'$，所以 $(1+x^2)p' = 2xp$。

$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$，$\ln p = \ln(1+x^2) + C'$，$p = C(1+x^2)$，所以 $y' = 3(1+x^2)$，$y = x^3 + 3x + 1$。

5.3 $y'' = f(y, y')$ 型

即存在 y''，y' 和 y 但是没有 x。

所以令 $y' = p$，$y'' = p' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$。

设其通解为 $y' = p = \varphi(y, C_1)$。

分离变量并积分，得到通解为 $\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$。

例题：求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解。

解：令 $y' = p$，$y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$。

若 $p \neq 0$，$y \neq 0$，则 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$，$p = Cy$。

若 $p = 0$，则 $y' = 0$，则 y 是一个常数。

所以综上 $y = C_2 e^{C_1 y}$。

6 高阶线性微分方程

第一部分是一阶微分方程，分为可分离变量微分方程、齐次微分方程、一阶齐次线性微分方程、一阶非齐次线性微分方程。

第二部分是可降阶的高阶微分方程，分为三种。

第三部分就是本节的高阶线性微分方程，$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 就是 n 阶齐次线性微分方程，$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ 就是 n 阶非齐次线性微分方程

6.1 概念

定义：方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 称为**二阶变系数线性微分方程**，其中 $P(x)$，$Q(x)$ 为系数函数，$f(x)$ 为自由项，都是已知的连续方程。

当 $f(x)\equiv 0$ 时，$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 为**齐次方程**。

当 $f(x)$ 不恒为 0 时，$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 为**非齐次方程**。

定义：方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 称为**二阶常系数线性微分方程**，其中 p，q 为常数，$f(x)$ 为自由项，都是已知的连续方程。

当 $f(x)\equiv 0$ 时，$y''+py'+qy=0$ 为**齐次方程**。

当 $f(x)$ 不恒为 0 时，$y''+py'+qy=f(x)$ 为**非齐次方程**。

考试基本上只考常系数线性微分方程。

6.2 解的结构

若 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 为两个函数，当 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 不成比例，则称 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 线性无关，否则 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 线性相关。

定理：若 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 的解，则 $y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)$ 也为其解。

证明：因为 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 为解，所以代入方程：

$\varphi_1''+a(x)\varphi_1'+b(x)\varphi_1=0$，$\varphi_2''+a(x)\varphi_2'+b(x)\varphi_2=0$

从而 $(C_1\varphi_1+C_2\varphi_2)''+a(x)(C_1\varphi_1+C_2\varphi_2)'+b(x)(C_1\varphi_1+C_2\varphi_2)=C_1(\varphi_1''+a(x)\varphi_1'+b(x)\varphi_1)+C_2(\varphi_2''+a(x)\varphi_2'+b(x)\varphi_2)=0$。

所以得证。

定理：若 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 分别为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 与 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ 的解，则 $y=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ 的解。

证明：$\varphi_1''+a(x)\varphi_1'+b(x)\varphi_1=0$，$\varphi_2''+a(x)\varphi_2'+b(x)\varphi_2=f(x)$，代入 $y=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$：

$(\varphi_1+\varphi_2)''+a(x)(\varphi_1+\varphi_2)'+b(x)(\varphi_1+\varphi_2)=(\varphi_1''+a(x)\varphi_1'+b(x)\varphi_1)+(\varphi_2''+a(x)\varphi_2'+b(x)\varphi_2)=f(x)$。

所以得证。

定理：若 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ 的解，则 $y=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 的解。

证明：$\varphi_1''+a(x)\varphi_1'+b(x)\varphi_1=f(x)$，$\varphi_2''+a(x)\varphi_2'+b(x)\varphi_2=f(x)$，代入 $y=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$：

$(\varphi_2-\varphi_1)''+a(x)(\varphi_2-\varphi_1)'+b(x)(\varphi_2-\varphi_1)$

$(\varphi_2''+a(x)\varphi_2'+b(x)\varphi_2)-(\varphi_1''+a(x)\varphi_1'+b(x)\varphi_1)$

$f(x)-f(x)=0$，所以得证。

定理：若 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 分别为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_1(x)$ 与 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_2(x)$ 的解，则 $y=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ 为 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的解。

6.3 二阶常系数齐次线性微分方程的通解

可以根据高阶微分方程的解的结构得到二阶的通解。

对于 $y''+py'+qy=0$，其对应的特征方程为 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，求其特征根，有三种情况（$\lambda_1\lambda_2$ 为任意常数）：

1. 若 $p^2-4q>0$，设 λ_1,λ_2 是特征方程的两个不等实根，即 $\lambda_1\neq\lambda_2$，其通解为 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$。
2. 若 $p^2-4q=0$，设 λ_1,λ_2 是特征方程的两个相等实根，即二重根，令 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$，其通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$。
3. 若 $p^2-4q<0$，设 $\alpha\pm\beta i$ 是特征方程的一对共轭复根，$\lambda_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{4q-p^2}i}{2}$ $=-\dfrac{p}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}i$，记为 $\alpha\pm\beta i$，其通解为 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$。

6.4 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

设 $P_n(x)$，$P_m(x)$ 分别为 x 的 n 次 m 次多项式。

1. 当自由项 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ 时，特解设为 $y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k$，其中 $e^{\alpha x}$ 照抄，

$Q_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式，且 $k = \begin{cases} 0, & \alpha\text{不是特征根} \\ 1 & \alpha\text{是单特征根} \\ 2, & \alpha\text{是二重特征根} \end{cases}$ 。

2. 当自由项 $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$ 时，特解设为 $y^* = e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k$，其中 $e^{\alpha x}$ 照抄，$l = \max\{m, n\}$，$Q_l^{(1)}$、$Q_l^{(2)}$ 为 x 的两个不同的 l 次多项式，且 $k = \begin{cases} 0, & \alpha \pm \beta i\text{不是特征根} \\ 1 & \alpha \pm \beta i\text{是特征根} \end{cases}$ 。

7　欧拉方程

7.1　概念

定义： 形如 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + px\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + qy = f(x)$ 的方程称为**欧拉方程**，其中 pq 为常数，$f(x)$ 为已知函数。

7.2　解法

使用换元法。

当 $x > 0$ 时，令 $x = e^t$，则 $t = \ln x$，$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$，方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + (p-1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + qy = f(e^t)$，解出结果，组后用 $t = \ln x$ 回代。

当 $x < 0$ 是，令 $x = -e^t$，同理可得。

例题： 求欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0$（$x > 0$）的通解。

解：可以直接利用公式，变为 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = 0$

即 $y'' + 3y' + 2y = 0$，特征方程 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$，$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$。

$\therefore y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$。代入 $x = e^t$，$y = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x^2}$。