

# 相似

Didnelpsun

## 目录

<b>1</b>	<b>特征值与特征向量</b>	<b>1</b>
1.1	代数余子式 . . . . .	1
1.2	特征值 . . . . .	1
1.2.1	对应特征向量 . . . . .	1
1.2.2	矩阵关系式 . . . . .	2
1.3	特征向量 . . . . .	2
1.3.1	实对称矩阵 . . . . .	2
1.3.2	可逆矩阵关系 . . . . .	3
1.3.3	抽象型 . . . . .	3
1.4	矩阵 . . . . .	3
1.5	行列式值 . . . . .	3
1.5.1	特征方程 . . . . .	3
1.5.2	矩阵函数 . . . . .	4
<b>2</b>	<b>相似理论</b>	<b>4</b>
2.1	判断相似对角化 . . . . .	4
2.2	反求参数 . . . . .	5
2.2.1	两个矩阵对比 . . . . .	5
2.2.2	单矩阵 . . . . .	5
2.2.3	抽象型 . . . . .	6
2.3	相似矩阵 . . . . .	6
2.3.1	具体型 . . . . .	6
2.3.2	抽象型 . . . . .	6

2.4	特殊矩阵 . . . . .	7
2.4.1	实对称矩阵 . . . . .	7
2.4.2	爪型矩阵 . . . . .	8
2.5	矩阵关系式 . . . . .	9

特征值往往与前面的内容进行混合考察。

## 1 特征值与特征向量

首先根据  $|\lambda E - A| = 0$  求出  $\lambda$ ，然后把  $\lambda$  逐个带入  $(\lambda E - A)x = 0$ ，根据齐次方程求解方法进行初等变换求出基础解系。这个基础解系就是当前特征值的特征向量。

### 1.1 代数余子式

**例题：**已知  $A$  是 3 阶方阵，特征值为 1, 2, 3，求  $|A|$  的元素  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  的代数余子式  $A_{11}, A_{22}, A_{33}$  的和  $\sum_{i=1}^3 A_{ii}$ 。

**解：**首先代数余子式的和  $A_{11}, A_{22}, A_{33}$  一般在行列式展开定理中使用，但是这里给出的不是一行或一列的代数余子式，而是主对角线上的代数余子式，这就无法使用代数余子式来表达行列式的值了。

而另一个提到代数余子式的地方就是伴随矩阵  $A^*$ ，所求的正好是伴随矩阵的迹  $tr(A^*) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ 。

又根据特征值性质，特征值的和为矩阵的迹，特征值的积为矩阵行列式的值，所以  $tr(A^*) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^*$   
$$= \sum_{i=1}^3 \frac{|A|}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_i} = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 = 2 + 3 + 6 = 11。$$

### 1.2 特征值

#### 1.2.1 对应特征向量

通过相关式子将逆矩阵转换为原矩阵。同一个向量的逆矩阵的特征值是原矩阵的特征值的倒数。

**例题：**已知  $\vec{\alpha} = (a, 1, 1)^T$  是矩阵  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$  的逆矩阵的特征向量，则求  $\vec{\alpha}$  在矩阵  $A$  中对应的特征值。

**解：**由于  $\vec{\alpha}$  是  $A^{-1}$  的特征向量，所以令此时的特征值为  $\lambda_0$ ，则定义  $\lambda_0 \vec{\alpha} = A^{-1} \vec{\alpha}$ ， $\lambda_0 A \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ 。

$$\text{即 } \lambda_0 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 即 } \lambda_0 \begin{bmatrix} -a & 2 & 2 \\ 2a & a & -2 \\ 2a & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

即根据矩阵代表的是方程组, 得到  $\lambda_0(4-a) = a, \lambda_0(3a-2) = 1, \lambda_0(2a-3) = 1$ 。

又  $\lambda_0 \neq 0, 3a-2 = 2a-3, a = -1$ , 则  $\lambda_0 = -\frac{1}{5}$ 。

所以矩阵  $A$  对应的特征值为  $-5$ 。

### 1.2.2 矩阵关系式

**例题:** 已知  $A$  为 3 阶矩阵,  $A^2 + A - 2E = 0, |A| = -2$ , 求其特征值。

**解:** 需要求  $A$  特征值, 但是  $A$  未知, 特征向量也未知, 如何求?

首先要求特征值, 就要首先设出特征方程:  $A\xi = \lambda\xi, \xi \neq 0$ 。

又  $A^2 + A - 2E = 0$ , 所以代入方程:  $(A^2 + A - 2E)\xi = (\lambda^2 + \lambda - 2)\xi = 0$ 。

$\because \xi \neq 0, \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ , 解得  $\lambda = -2$  或  $\lambda = 1$ 。

但是不知道这个特征值各是几重, 只知道存在这两种特征值。

又  $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$ , 所以  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 。

## 1.3 特征向量

### 1.3.1 实对称矩阵

使用实对称矩阵性质, 给出其他特征向量和特征值, 即实对称矩阵的不同特征值的特征向量相互正交 ( $B^T A = 0$ )。

**例题:** 已知  $A$  为三阶实对称矩阵, 特征值为  $1, 3, -2$ , 其中  $\alpha_1 = (1, 2, -2)^T, \alpha_2 = (4, -1, a)^T$  分别属于特征值  $\lambda = 1, \lambda = 3$  的特征向量。求  $A$  属于特征值  $\lambda = -2$  的特征向量。

**解:** 令  $A$  属于特征值  $\lambda = -2$  的特征向量为  $(x_1, x_2, x_3)^T$ 。

根据实对称矩阵的正交性质。

$$\alpha_1^T \alpha_2 = 4 - 2 - 2a = 0, \alpha_2^T \alpha_3 = 4x_1 - x_2 + ax_3 = 0, \alpha_3^T \alpha_1 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

$a = 1, 4x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ , 解得基础解系  $(0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, k, k)^T (k \neq 0)$ 。

### 1.3.2 可逆矩阵关系

使用可逆矩阵相似对角化的性质。若  $A \sim B$ ，则  $P^{-1}AP = B$ 。 $B$  为纯量阵。且  $B$  的迹为  $A$  的特征值。 $P$  为特征向量。

**例题：**已知  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ ， $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  可逆，求  $A$  关于特征值  $\lambda = 1$  的特征向量。

**解：**根据  $P^{-1}AP = \Lambda$ ，所以  $P$  为特征向量， $1, 1, -1$  为特征值。

所以  $A$  关于  $\lambda = 1$  的特征向量为  $\alpha_1$  或  $\alpha_2$ 。而某一特征值的全部特征向量构成特征向量空间，所以  $\lambda = 1$  的特征向量为  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 。

### 1.3.3 抽象型

题目只会给对应的式子，来求对应的特征向量。需要记住特征值的关系式然后与给出的式子上靠拢，不会很复杂。

**例题：**已知  $A$  为三阶矩阵，且矩阵  $A$  各行元素之和均为 5，则求  $A$  必然存在的特征向量。

**解：**由于是抽象型，所以没有实际的数据，就不能求出固定的特征值， $\lambda\xi = A\xi$ 。

又矩阵  $A$  各行元素之和均为 5，所以转换为方程组：

$$\begin{cases} A_{11} + A_{12} + A_{13} = 5 \\ A_{21} + A_{22} + A_{23} = 5 \\ A_{31} + A_{32} + A_{33} = 5 \end{cases}, \text{ 转为矩阵: } \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

即  $\xi = (1, 1, 1)^T$ 。

## 1.4 矩阵

即根据  $A = PAP^{-1}$  的特征向量矩阵和特征值矩阵来反求矩阵。

## 1.5 行列式值

一般会给出特征值，求  $A$  的行列式值。

### 1.5.1 特征方程

题目要求  $|f(A) - E|$  的形式，即求  $f(A)$  的特征值。

**例题：**设  $A$  为三阶矩阵，已知  $-3E + A$  不可逆， $|2E + A| = 0$ ， $(E - A)x = 0$  有非零解，求  $|A^* - E|$ 。

解：前三个条件都是为了指明  $|-3E + A| = |3E - A| = 0$ ， $|-2E - A| = 0$ ， $|E - A| = 0$ ，即得到  $A$  的三个特征值  $\lambda_1 = 3$ 、 $\lambda_2 = -2$ 、 $\lambda_3 = 1$ 。

求  $|A^* - E|$  即求  $A^*$  的特征值，然后再乘起来，即得到行列式的值。

又  $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ ，所以  $A^* = \frac{|A|}{A}$ 。

$|A|$  等于特征值的乘积  $-6$ ，对应的特征值即为  $\mu_1 = \frac{-6}{3} = -2$ ， $\mu_2 = \frac{-6}{-2} = 3$ ， $\mu_3 = \frac{-6}{1} = -6$ 。

对应  $A^* - E$  的特征值为  $-3$ ， $2$ ， $-6$ ，所以最后的行列式值为  $42$ 。

### 1.5.2 矩阵函数

题目要求  $|f(A)|$  的形式，即求  $f(A)$  的特征值，然后求其乘积就是矩阵方程的行列式值。

## 2 相似理论

$P^{-1}AP = \Lambda$ ， $P$  为特征向量组， $\Lambda$  为特征值矩阵。

### 2.1 判断相似对角化

可以使用相似对角化的四个条件，但是最基本的使用还是  $A$  有  $n$  个无关的特征向量  $\xi$ 。

判断以下条件即可相似对角化：

1. 实对称矩阵，即所有元素关于主对角线对称。
2. 特征值都是实单根，即  $n$  个不同特征值，不存在重根。
3. 特征值存在  $t$  重根，相同特征值对应  $t$  个线性无关的特征向量。（如果小于  $n$  则不相似）

一般都是第三种情况，判断存在重根后要使用  $[\lambda E - A]$ ，然后计算  $r(E - A)$ ，然后  $s$  自由变量值即无关特征向量值  $= n - r$ ，如果  $s = t$  则可以相似对角化，如果  $s < t$  则不可以。

## 2.2 反求参数

常用方法:

- 若  $A \sim B$ , 则  $|A| = |B|$ ,  $r(A) = r(B)$ ,  $tr(A) = tr(B)$ ,  $\lambda_A = \lambda_B$ , 通过等式计算参数。
- 若  $\xi$  是  $A$  属于特征值  $\lambda$  的特征向量, 则有  $A\xi = \lambda\xi$ , 建立若干等式或方程组来计算参数。
- 若  $\lambda$  是  $A$  的特征值, 则与  $|\lambda E - A| = 0$ , 通过该等式计算参数。

### 2.2.1 两个矩阵对比

两个矩阵相似的前提是可以相似对角化, 如果存在  $n$  重根而没有  $n$  个线性无关的特征向量则必然不相似。

**例题:** 已知  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & y & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ , 且  $A \sim B$ , 求参数。

首先可以利用迹相等, 则  $2+0+x = 2+y-1$ , 行列式值相等, 则  $-2 = -2y$ , 解得  $x = 0$ ,  $y = 1$ 。

### 2.2.2 单矩阵

1. 利用  $|\lambda E - A| = 0$  求出特征值。判断得到  $n$  阶矩阵有  $m$  个不同特征值。 $(m \leq n)$
2. 利用  $[\lambda E - A]$  计算秩。利用  $s = n - r$  (自由变量的个数 = 未知数个数-矩阵秩) 公式反解出秩  $r$ , 并以此解出未知数。

**例题:** 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  和对角矩阵相似, 求  $a$ 。

解: 由于  $A$  是对角矩阵, 所以特征值为其迹  $\lambda = (3, 2, 3)$ 。特征值有二重根。

已知  $A \sim \Lambda$ ,  $\lambda = 3$  有两个线性无关的特征向量。即  $(3E - A)x = 0$  有两个线性无关的解 (自由变量)。即  $r(3E - A) = 1$ 。

$$3E - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \therefore a = -2.$$

### 2.2.3 抽象型

首先要计算其特征值，再根据特征值反代特征方程，根据向量的构成判定秩的大小。

**例题：**已知  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  相似于对角矩阵，求  $xy$  关系式。

**解：**已知相似，即  $P^{-1}AP = \Lambda$ ，则需要求  $A$  的特征值和特征向量。

根据特征关系式  $|E\lambda - A| = 0$ ，即 
$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda - 1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$
，即有特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ， $\lambda_3 = -1$ 。

此时有二重特征值，所以应该有两个线性无关的特征向量，即对于  $(E - A)x = 0$  有两个线性无关的解向量，所以该矩阵的秩为  $3 - 2 = 1$ 。

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 1 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x - y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

所以当  $r(E - A) = 1$  时  $x + y = 0$ 。

## 2.3 相似矩阵

### 2.3.1 具体型

$$|\lambda E - A| = 0 \text{ 或 } (\lambda E - A)x = 0。$$

### 2.3.2 抽象型

定义  $A\alpha = \lambda\alpha$ 。

**例题：**设  $A$  是三阶矩阵， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是三维线性无关的列向量，且  $A\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ ， $A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$ ， $A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ ，求  $A$  相似的矩阵。

**解：** $A \sim \Lambda$ ，则  $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$



$$\text{记 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

又  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是三维线性无关的列向量,  $\therefore |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$ , 所以  $P$  可逆。

$$\therefore AP = PB, P^{-1}AP = B, A \sim B.$$

## 2.4 特殊矩阵

### 2.4.1 实对称矩阵

根据实对称矩阵不同特征值的特征向量必然相互正交的性质求解。

一般会给出特征值 (全部) 和对应的特征向量 (部分)。

$Q^{-1}AQ = P$ 。其中  $Q$  为特征向量矩阵, 一般都是正交的, 而  $P$  为对应的特征值矩阵。

首先要利用不同特征值的特征向量正交的性质, 把所有的特征向量都求出来。

然后矩阵  $Q$  就是所有特征向量的拼合。如果要求原矩阵  $A$ , 则利用  $A\xi = \lambda\xi$ , 推出  $AQ = PQ$ , 从而  $A = PQQ^{-1}$ 。

**例题:** 已知  $A$  是三阶实对称矩阵, 若正交矩阵  $Q$  使得  $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ,

如果  $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$  和  $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$  是矩阵  $A$  属于特征值  $\lambda = 3$  的特征向量, 求  $Q$ 。

**解:** 首先由正交矩阵就可以知道各特征值正交。令  $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ 。对应的  $\lambda_3 = 6$ 。

$\alpha_3^T \alpha_1 = x_1 - x_3 = 0$ ,  $\alpha_3^T \alpha_2 = x_2 + x_3 = 0$ , 求  $\lambda_3$  的特征值, 则不如令  $x_3 = 1$ , 则解得  $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$ 。

这样  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 还需要将  $Q$  正交单位化。可知  $\alpha_3$  根据正交规律求出来, 一定是正交的, 而  $\alpha_1^T \alpha_2 = -1 \neq 0$  所以需要正交。

令  $\beta_1 = \alpha_1 = (1, 0, -1)^T$ ,  $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = (0, 1, 1)^T + \frac{1}{2}(1, 0, -1)^T = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})^T$ 。

最后对整个  $Q$  进行单位化:  $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$ ,  $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$ ,  $\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$ 。

### 2.4.2 爪型矩阵

即类似于爪形行列式, 且列数较大, 不可能直接计算, 所以就需要把常数项提出来。

**例题:** 设  $n$  ( $n \geq 2$ ) 阶矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$ 。求可逆矩阵  $P$  与对

角矩阵  $\Lambda$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 并求  $r(A^*)$ 。

解: 矩阵  $A$  是个爪形, 直接使用  $|\lambda E - A| = 0$  计算特征值非常复杂, 所以对其化简:

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & & & \\ & a-1 & & \\ & & \cdots & \\ & & & a-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = (a-1)E + B.$$

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-n & \lambda-n & \cdots & \lambda-n \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-n & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ 所以 } \lambda_1 = n, \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

从而  $A$  的特征值为  $n+a-1, a-1, \cdots, a-1$ 。

所以根据特征值  $(nE - B)x = 0$ ,  $x_1 = (1, 1, \cdots, 1)^T$ ,  $(0E - B)x = 0$ ,  $x_2 = (1, -1, 0, \cdots, 0)^T$ ,  $x_3 = (1, 0, -1, \cdots, 0)^T$ ,  $\cdots$ ,  $x_n = (1, 0, 0, \cdots, -1)^T$ 。

根据特征值和特征向量的性质,  $x_i$  也是  $A$  的特征向量。

令  $P = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ , 则  $P^{-1}AP = \text{diag}(n+(a-1), a-1, \cdots, a-1)$ 。

因为  $A \sim \Lambda$ , 所以  $|A| = |\Lambda| = (n+a-1)(a-1)^{n-1}$ , 所以:

$$r(A) = \begin{cases} n, & a \neq 1-n, a \neq 1 \\ n-1, & a = 1-n \\ 1, & a = 1 \end{cases}, \text{ 所以 } r(A^*) = \begin{cases} n, & a \neq 1-n, a \neq 1 \\ 1, & a = 1-n \\ 0, & a = 1 \end{cases}。$$

## 2.5 矩阵关系式

若有可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 则:

$P$  即是  $A$  特征向量的拼合。

- $A = P\Lambda P^{-1}$ 。
- $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$ 。
- $f(A) = Pf(\Lambda)P^{-1}$ 。

**例题:** 已知  $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$  相似于对角矩阵, 求  $A^{100}$ 。

解: 首先  $A \sim \Lambda$ , 所以  $A$  能相似对角化。

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -x & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -3 & 6 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = 0。 \lambda_1 = \lambda_2 = 3,$$

$$\lambda_3 = -1。$$

所以对于  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$  时, 需要  $s = 2$ , 从而  $r(A) = 1$ , 对应成比例。

$$\text{代入 } 3: (3E - A)x = 0, \begin{pmatrix} 1 & -x & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = 0, \text{ 所以 } \frac{-1}{3} = \frac{-x}{6}, x = 2。$$

解得  $\xi_1 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\xi_2 = (2, 1, 0)^T$ ,  $\xi_3 = (1, 0, -3)^T$ 。

令  $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , 所以  $A = P\Lambda P^{-1}$ ,  $A^{100} = P\Lambda^{100}P^{-1}$ 。