多元函数积分学

Didnelpsun

目录

1　二重积分

1.1　交换积分次序

1.1.1　直角坐标系

例题：交换积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$。

解：已知积分区域分为两个部分。将 X 型变为 Y 型。画出图形可以知道 $y \in (0,1)$，x 的上下限由 $y = x^2$ 和 $y = \dfrac{1}{2}(3-x)$ 转化为 $\sqrt{y}$ 和 $3-2y$。

所以转换为 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$。

1.1.2　极坐标系

1.2　极直互化

例题：将 $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{-y^2}\mathrm{d}y \int_0^y e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{R} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 转换为极坐标系并计算结果。

解：首先根据积分上下限得到积分区域 $D = \left\{0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}R, 0 \leqslant x \leqslant y\right\} \cup \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}R \leqslant y \leqslant R, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{R^2-y^2}\right\}$，$D$ 为一个八分之一圆的扇形。

根据 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ 替换得到 $D = \left\{(x,y)\middle| 0 \leqslant r \leqslant R, \dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$。

又 $e^{-y^2} \cdot e^{-x^2} = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$。

$\therefore I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^R e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r$。