

导数与微分

Didnelpsun

目录

1	一阶导数	1
1.1	幂指数函数导数	1
1.2	分段函数导数	1
1.3	导数存在性	1
1.4	导数连续性	3
2	极限与导数	3
2.1	极限求导数	3
2.2	导数求极限	4
2.2.1	导数定义式子	4
2.2.2	定义近似式子	5
3	高阶导数	5
3.1	导数存在性	5
3.2	携带未知数的多项式求高阶导	5
3.3	反函数高阶导数	6
4	微分	7
5	隐函数与参数方程	7
5.1	隐函数应用	7
5.2	分段参数方程	8
6	导数应用	8
6.1	单调性与凹凸性	8

6.2	极值与最值	8
6.3	函数图像	8
6.4	曲率	8
6.4.1	一般计算	8
6.4.2	最值	8

1 一阶导数

1.1 幂指函数导数

形如 $f(x)^{g(x)}$ 的幂指函数求导也可以类似幂指函数的求极限方法。既可以取 e 为底的指数也可以取对数。

例题：求 $f(x) = x^{\sin x} (x > 0)$ 的导数。

取对数：

$$\therefore \ln y = \sin x \ln x$$

求导：

$$\frac{y'}{y} = \cos \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore y' = x^{\sin x} \left(\cos \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)。$$

取指数：

$$x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x}$$

求导：

$$e^{\sin x \cdot \ln x} (\sin x \cdot \ln x)' = x^{\sin x} \left(\cos \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)。$$

1.2 分段函数导数

当给出一个分段函数，要求求出该函数的导数时，最重要的就是分段点是否可导，计算分段点的导数，如果两边的导数不相等，则需要挖去该点。

例题：设 $f(x) = \begin{cases} \arctan x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(e^{x^2-1} - x) + \frac{\pi}{4}, & x > 1 \end{cases}$ ，求 $f'(x)$ 。

当 $x \leq 1$ 时， $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，当 $x > 1$ 时， $f'(x) = xe^{x^2-1} - \frac{1}{2}$ 。

然后需要查看分段点两边的导数是否一样： $f'_-(1) = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ，

$$f'_+(1) = xe^{x^2-1} - \frac{1}{2} \Big|_{x=1} = 1 \cdot e^{1-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}。$$

$\therefore f'_-(1) = f'_+(1)$ ，所以该点可导。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \leq 1 \\ xe^{x^2-1} - \frac{1}{2}, & x > 1 \end{cases}。$$

1.3 导数存在性

导数存在即可导。而该点左右导数都相等该点才可导。

可导必连续，连续不一定可导。

导数的定义： $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 或 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 。

导数的存在性：若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在，则 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 。

例题： 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+bx)}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$ ，其中 b 为某常数， $f(x)$ 在定义

域上处处可导，求 $f'(x)$ 。

首先要求出参数 b ，而定义域上可导则在分段点 $x = 0$ 处也必然可导。

而可导必连续，所以当 $x = 0$ 时 $f(x)$ 也是连续的，而连续的定义就是两边极限相等，且两边极限等于该点函数值。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x} = b = -1。从而可以完善函数与定义域。$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x}, & x < 1, x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}。$$

这样就能转换为直接求导数问题。

对于定义域的 $x < 1, x \neq 0$ 部分：

$$f'(x) = \frac{\frac{-x}{1-x} - \ln(1-x)}{x^2} = \frac{x - (x-1)\ln(1-x)}{x^2(x-1)} (x < 1, x \neq 0)。$$

然后要求分段点 $x = 0$ 处的导数。

可以由导数的定义：

根据导数的定义是某点偏移量的极限值 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ：

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1-x)}{x} - (-1)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1-x)}{x} + 1}{x} \\ &= \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{泰勒公式：} = \frac{-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}。$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} \frac{x - (x-1)\ln(1-x)}{x^2(x-1)}, & x < 1, x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}。$$

同样也可以使用导数的存在性：

$\because f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续， $\therefore x = 0$ 的空心邻域上可导。从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在。

$\therefore f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 。计算过程类似。

1.4 导数连续性

导数具有连续性与之前的函数连续性类似，不过要对函数求导数罢了。

要求导数两侧的极限并让其相等。

例题： 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ ，若 $f'(x)$ 连续，则 α 应该满足？

若导数连续，则两侧导数相等。

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0。$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-2} \left(\alpha x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)。$$

$\therefore x \rightarrow 0^+$ 时， $\sin \frac{1}{x} \in [-1, 1]$ ， $\therefore \alpha x \sin \frac{1}{x} = 0$ ， $-\cos \frac{1}{x} \in [-1, 1]$ ， $\therefore \alpha x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ 为一个不为 0 的常数。

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-2} \left(\alpha x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0。$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-2} = 0。$$

$$\therefore \alpha - 2 > 0, \text{ 从而 } \alpha > 2。$$

2 极限与导数

导数的定义由极限产生，所以其之间是可以互相转换的，当求一个导数时可以寻找是否能求出其极限。

2.1 极限求导数

在导数这一章中的极限不会直接给出极限，而是会给出导数或函数的相关定义，来求极限，再根据导数定义转换为导数。同时要注意这里不止会有导数定义，还会有函数等性质。

例题： 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x = 0$ 的某个邻域内满足关系式： $f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + o(x)$ ，且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程。

因为这是个函数等式，而我们最后要求的是一个导数，所以先尝试对其直接求极限，令 $x \rightarrow 0$ ：

$$f(1) - 3f(1) = 0, \text{ 从而得到了一个函数值 } f(1) = 0。$$

然后再对这个式子思考，等式右边为 $8x$ ，而除以 x 就变成了 8，而再对其求极限，右边就彻底变成了一个常数 8：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{x} = 8. \text{ 对式子左边进行变形:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x}.$$

令 $t = \sin x$:

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - 3f(1-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} + 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1-t) - f(1)}{-t}.$$

因为 $t \rightarrow 0$, 所以 $1-t$ 和 $1+t$ 都是 $t=1$ 时的导数 $f'(x)$ 的定义: $= 4f'(1) = 8$,

从而 $f'(1) = 2$ 。

由 $f(x)$ 的周期为 5, 所以 $f(6) = f(1) = 0$, $f'(6) = f'(1) = 2$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在 $(6, f(6))$ 即 $(6, 0)$ 处的切线方程为 $y - 0 = 2(x - 6)$ 即 $2x - y - 12 = 0$ 。

15. 当正在高度 H 水平飞行的飞机开始向机场跑道下降时, 如图 2-16 所示从飞机到北场的水平地面距离为 L . 假设飞机下降的路径为三次函数

数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图形, 其中 $y|_{x=L} = H, y|_{x=0} = 0$. 试

确定飞机的降落路径.

16. 甲船以 6 km/h 的速率向东行驶, 乙船以 8 km/h

的速率向南行驶在中午十二点整, 乙船位于甲船之北

L01

16 km 处问下午一点整两船相离的速率为多少?

2.2 导数求极限

题目会给出对应的导数以及相关条件, 并要求求一个极限, 这个极限式子并不是个随机的式子, 而一个是与导数定义相关的极限式子, 所需要的就是将极限式子转换为导数定义的相关式子。

2.2.1 导数定义式子

有时极限式子可以直接转换为导数定义式子, 先稍微变换就可以代入导数。

例题: 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的可导函数, 且是偶函数, $f'(-2) = -1$, 求

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 - 2 \sin h) - f(5)}{h}.$$

根据导数与函数的基本性质, 原函数为偶函数, 则其导函数为奇函数, 所以

$$f'(5) = f'(2) = -f'(-2) = 1.$$

然后需要转换目标的极限式子, 因为目标式子倒过来的式子类似于导数定义的 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 结构。所以我们可以先求其倒数式子:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 - 2 \sin h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5 - 2 \sin h) - f(5)}{-2 \sin h} \cdot \frac{-2 \sin h}{h}$$

$$= -2f'(5) = -2 \times 1 = -2$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(5 - 2 \sin h) - f(5)} = -\frac{1}{2}。$$

2.2.2 定义近似式子

有时候极限式子不为导数定义的近似式子，这时候就需要先根据求极限的计算方式简化目标极限式子。

例题： 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导且 $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$, 则数列极限 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{\frac{1}{n}}{1 - \cos \frac{1}{n}}}$ 。

设 $\frac{1}{n} = x$, 则:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{\frac{x}{1 - \cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos x} \ln f(x)} = e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{x}} = e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}}$$

$$= e^{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}} = e^{2f'(0)} = e^6。$$

3 高阶导数

3.1 导数存在性

3.2 携带未知数的多项式求高阶导

当所需要的求导的式子为一个多项式的时候，这个求导必然是有规律的。

当所求高阶导数的 x 值为一个常数时，那么这个常数值代入求导的式子必然是会消去一部分的，最常用的常数为 $x = 0$ 。

例题： 已知 $f(x) = x^2(x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2$, 求 $f''(0)$ 。

因为式子中带有未知数 n , 所以结果很可能会带有 n 。

而这个式子项数为 $n+1$ 项, 所以求导结果必然很大, 所以一定会消去一部分。

又求导的自变量 $x = 0$, 而 0 代入很多式子都会被消去, 所以这就是个突破口。

因为求导是求二阶导数, 所以很可能这种求导是消去一部分而不是得到一个规律, 因为阶数太低很难看出规律。

首先对 $f(x)$ 求一阶导数 (需要记住乘积的导数为各项求导的和):

$$f'(x) = 2x(x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2$$

$$+ x^2 2(x+1)(x+2)^2 \cdots (x+n)^2$$

$$+x^2(x+1)^2 2(x+2) \cdots (x+n)^2$$

...

$$+x^2(x+1)^2(x+2)^2 \cdots 2(x+n)$$

原式子一共 1 项，一阶导数后变为 $n+1$ 项和，然后求二阶导数，会变为 $(n+1)^2$ 项和。这时候我们应该回头看目标求的式子为 $f''(0)$ ，而根据式子，只要乘积项中含有 x 项，那么这一整个项就都为 0。

一阶导数中除一项每个项都含有 x^2 ，所以求二阶导数的时候， x^2 会变为 $2x$ 在 $x=0$ 处二阶导数为 0，所以求二阶导数的时候一次导数的第一项后面 n 项在 $x=0$ 处都是 0，可以不用考虑。

而一阶导数的第一项只有对第一个 x 求导时会消去这个 x 变为 $2(x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2$ ，其他的 n 项二阶导数仍然含有 x 的项，所以结果也为 0。

所以求 $f''(0)$ 时，只有对一阶导数的第一项的第一个 x 求导所得到的导数项不为 0，其他都是 0，所以最后 $f''(0) = 2(x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2 = 2(n!)^2$ 。

3.3 反函数高阶导数

已知一阶导数的时候，反函数的导数为原函数导数的倒数 ($g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$)。

因为原函数的一阶导数是 $\frac{dy}{dx}$ ，而反函数就是对原函数的 xy 对调，所以其反函数的一阶导数为 $\frac{dx}{dy}$ 。

当求反函数的高阶导数时需要将分子分母同时除以 dx 。

例题：已知 $y = x + e^x$ ，求其反函数的二阶导数。

$y = x + e^x$ 的反函数的一阶导数为 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + e^x}$ 。

$$\text{所以二阶导数为 } \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{1}{1+e^x}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{1}{1+e^x}\right)}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^3}。$$

例题：已知 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ ，求 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 和 $\frac{d^3x}{dy^3}$ 。

其实就是求 $\frac{d^2x}{dy^2}$ 和 $\frac{d^3x}{dy^3}$ ， $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ 这个条件只是让我们用 y' 来表示结果而已。

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\frac{dx}{dy}}{dy} = \frac{d\frac{dx}{dy}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{-\frac{y''}{(y')^2}}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}。$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{d \frac{d^2x}{d^2y}}{\frac{d^2y}{dy}} = \frac{d \frac{d^2x}{d^2y}}{\frac{dx}{dy}} = \frac{-\frac{y'''y' - 3(y'')^2}{(y')^4}}{y'} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}。$$

4 微分

5 隐函数与参数方程

隐函数与参数方程求导基本上只用记住：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}。$$

5.1 隐函数应用

对于隐函数的应用题，最重要的是找到等价于 dx 和 dy 的两个相关变量。最简单的就是根据题目最后面的所求问题所涉及的变量设置其为变量和因变量。

例题：落在平静水面上的石头，产生同心波纹。若最外一圈波半径的增大速率总是 6m/s ，问在 2s 末扰动水面面积增大的速率为多少？

首先根据题目最后的要求的是面积，所以肯定要设一个面积变量，随时间变动而改变，所以也一定会设一个时间变量，同时还给出一个条件是半径增大速度，所以也会有一个半径的变量。同时要求的是面积增大速率，正好跟另外两个变量相关，时间跟半径和面积都相关，所以时间就是中间变量。

从而设最外一圈波的半径为 $r = r(t)$ ，圆的面积 $S = S(t)$ 。根据 S 和 r 的公式 $S = \pi r^2$ ，因为求的是随时间变化的速率，所以其两端分别对 t 求导，得：

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}。当 t = 2 时，r = 6 \times 2 = 12，代入上式得：$$

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=2} = 2\pi \cdot 12 \cdot 6 = 144\pi。$$

5.2 分段参数方程

例题：已知 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 确定，求其一阶导数与二阶导数。

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dt}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{1}{t}。$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{t^3}。$$

6 导数应用

6.1 单调性与凹凸性

6.2 极值与最值

6.3 函数图像

6.4 曲率

曲率公式: $k = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}。$

6.4.1 一般计算

例题: 求 $y = \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 对应的曲率

$$y' = \cos x, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}。$$

$$y'' = -\sin x, \quad y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

$$\therefore k = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}。$$

所以 $y = \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 的点 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 的曲率为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}。$

6.4.2 最值

例题: 求 $y = x^2 - 4x + 11$ 曲率最大值所在的点。

简单得 $y' = 2x - 4, \quad y'' = 2。$

曲率为 $\frac{2}{[1 + (2x - 4)^2]^{\frac{3}{2}}}。$

当 $2x - 4 = 0$ 时即在 $(2, 7)$ 时曲率最大为 2。