

# 微分方程

Didnelpsun

## 目录

<b>1</b>	<b>一阶微分方程</b>	<b>1</b>
1.1	可分离变量微分方程 . . . . .	1
1.2	多项式换元 . . . . .	1
1.3	自然齐次方程 . . . . .	1
1.4	一阶线性方程 . . . . .	2
1.5	伯努利方程 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>二阶可降阶微分方程</b>	<b>2</b>
2.1	$y'' = f(x, y')$ 型 . . . . .	2
2.2	$y'' = f(y, y')$ 型 . . . . .	3
<b>3</b>	<b>高阶线性微分方程</b>	<b>3</b>
3.1	常系数齐次线性微分方程 . . . . .	3
3.2	常系数非齐次线性微分方程 . . . . .	3
<b>4</b>	<b>微分方程概念</b>	<b>3</b>
4.1	已知微分方程的解反求系数 . . . . .	4
4.2	不解微分方程, 利用方程隐含信息 . . . . .	4
<b>5</b>	<b>欧拉方程</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>微分方程物理应用</b>	<b>4</b>
6.1	牛顿第二定律 . . . . .	4
6.2	变化率 . . . . .	4

# 1 一阶微分方程

## 1.1 可分离变量微分方程

**例题：**求  $y \sin \frac{x}{2} dx - \cos \frac{x}{2} dy = 0$  的通解。

**解：** $\frac{dy}{dx} = y \tan \frac{x}{2}$ ,  $\frac{dy}{y} = \tan \frac{x}{2} dx$ ,  $\int \frac{dy}{y} = 2 \int \tan \frac{x}{2} d\frac{x}{2}$ 。

解得  $\ln |y| = -\ln \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 + \ln C_1$  (取对数更好解),  $|y| = \frac{C_1}{\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2}$ 。

$y = \frac{\pm C_1}{\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2}$ , 令  $C = \pm C_1$ , 得  $y = \frac{C}{1 + \cos x}$ 。

注意在第一步时将  $y$  除到分母上, 本来  $y$  为任意常数, 变为  $y \neq 0$ , 所以解得最后  $C \neq 0$ , 而实际上  $y$  可以为 0, 所以  $C$  应该为任意常数。

此时解为全部解, 为通解加上  $y = 0$  的奇解。

## 1.2 多项式换元

**例题：**求微分方程  $dy = \sin(x + y + 100) dx$  的通解。

**解：**令  $u = x + y + 100$ ,  $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y + 100)$ ,  $\therefore \frac{du}{dx} = 1 + \sin u$ 。

$\frac{du}{1 + \sin u} = dx$ ,  $\int \frac{du}{1 + \sin u} = \int dx$ ,  $\int \frac{1 - \sin u}{\cos^2 u} du = x$ 。

$\int \sec^2 u - \tan u \sec u du = x$ , 即  $\tan u - \sec u = x + C$ 。代回  $u = x + y + 100$ 。

通解  $\tan(x + y + 100) - \sec(x + y + 100) = x + C$ 。

所有解:  $\tan(x + y + 100) - \sec(x + y + 100) = x + C$ ,  $x + y + 100 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ 。

## 1.3 自然齐次方程

**例题：**设  $L$  是一条平面曲线, 其上任意一点  $P(x, y)$  ( $x > 0$ ) 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在  $y$  轴上的截距, 且  $L$  经过点  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ , 求  $L$  的方程。

**解：** $(x, y)$  到坐标原点的距离为  $\sqrt{x^2 + y^2}$ 。

若  $y = y(x)$ , 则切线为  $Y - y = y'(X - x)$ , 令  $X = 0$ , 解得  $Y = y - xy'$ 。

$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$ , 解得  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$ 。

令  $\frac{y}{x} = u$ , 则  $y = ux$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$ 。代入  $y'$ :

$\frac{du}{dx}x + u = u - \sqrt{1 + u^2}$ ,  $\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{dx}{x}$ ,  $\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\int \frac{dx}{x}$ 。

$\therefore \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = -\ln x + \ln C$ ,  $u + \sqrt{1 + u^2} = \frac{C}{x}$ 。

代入  $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{C}{x}$ ,  $y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$ 。

## 1.4 一阶线性方程

形如  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 。

**例题：**求微分方程  $y' + 1 = e^{-y} \sin x$  的通解。

解：已知对  $e^{-y} \sin x$  无法处理，所以必然需要对其转换， $e^y y' + e^y = \sin x$ 。

$\therefore (e^y)' + e^y = \sin x$ , 令  $e^y = u$ ,  $u' + u = \sin x$ ,  $P(x) = 1$ ,  $Q(x) = \sin x$ 。

$e^y = u = e^{-\int dx} (\int e^{\int dx} \sin x dx + C) = e^{-x} (\int e^x \sin x dx + C)$ , 积分再现表格  
解出  $\int e^x \sin x dx$ :  $= e^{-x} \left( \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \right)$ 。

## 1.5 伯努利方程

形如  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ 。

**例题：**求  $y dx = (1 + x \ln y)x dy$  ( $y > 0$ ) 的通解。

解：将导数放到一边： $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(1 + x \ln y)x}$ , 这个算式无法处理。

而颠倒  $\frac{dx}{dy} = \frac{(1 + x \ln y)x}{y} = \frac{1}{y}x + \frac{\ln y}{y}x^2$ 。

凑伯努利方程： $x' + P(x)x = Q(x)x^n$ :  $x' - \frac{1}{y}x = \frac{\ln y}{y}x^2$ 。  $P(x) = -\frac{1}{y}$ ,

$Q(x) = \frac{\ln y}{y}$ 。

乘  $x^{-2}$  降阶： $x^{-2}x' - \frac{1}{y}x^{-1} = \frac{\ln y}{y}$ 。令  $z = x^{-1}$ ,  $\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dy}$ 。代入方程：

$-\frac{dz}{dy} - \frac{1}{y}z = \frac{\ln y}{y}$ ,  $\frac{dz}{dy} + \frac{1}{y}z = -\frac{\ln y}{y}$ , 利用公式：

$z = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left( \int e^{\int \frac{1}{y} dy} \cdot \left( \frac{\ln y}{y} \right) + C \right) = \frac{1}{y} (-\int \ln y dy + C) = \frac{1}{y} (-y(\ln y - 1) + C) = -\ln y + 1 + \frac{C}{y}$ 。

$\therefore x = \frac{y}{-y \ln y + y + C}$ 。

## 2 二阶可降阶微分方程

### 2.1 $y'' = f(x, y')$ 型

**例题：**求  $y'' = \frac{2xy'}{1+x^2}$  的通解。

解：令  $y' = p$ ,  $p' = \frac{2xp}{1+x^2}$ ,  $\frac{dp}{dx} = \frac{2xp}{1+x^2}$ ,  $\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2}$ ,  $\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x}{1+x^2}$ 。

$$\ln |p| = \ln(1+x^2) + \ln C_1, \quad p = \pm C_1(1+x^2) = C_2(1+x^2).$$

$$y' = C(1+x^2), \quad \therefore y = C_2 \left( x + \frac{x^3}{3} + x \right) + C.$$

## 2.2 $y'' = f(y, y')$ 型

# 3 高阶线性微分方程

## 3.1 常系数齐次线性微分方程

## 3.2 常系数非齐次线性微分方程

先将常系数非齐次线性微分方程变为常系数齐次线性微分方程求解，然后加上非齐次方程的一个特解，就是非齐次方程的一个通解。

**例题：**求  $y'' - 4y' + 4y = 3xe^{2x}$  的通解。

**解：**变为常系数齐次线性微分方程： $y'' - 4y' + 4y = 0$ 。

写出特征方程： $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ，从而  $(\lambda - 2)^2 = 0$ ， $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 。

从而  $y$  齐次方程的通解为  $(C_1 + C_2x)e^{2x}$ 。

根据特解的设置方法，所以  $k = 2$ ，设  $y^* = e^{2x}(ax + b)x^2$ 。

代回二阶方程， $a = \frac{1}{2}$ ， $b = 0$ 。通解为  $(C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^3e^{2x}$ 。

**例题：**微分方程  $y'' - 4y' + 3y = e^x \cos x + xe^{3x}$  的通解。

**解：**首先常系数齐次线性微分方程： $y'' - 4y' + 3y = 0$ 。

特征方程为  $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ，解得特征值为  $\lambda_1 = 1$ ， $\lambda_2 = 3$ 。

所以该齐次方程的通解： $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$ 。

然后求特解，首先求后面  $f_2(x) = xe^{3x}$  的特解  $y_2^*$ 。

根据公式因为  $\alpha$  为单特征根，即  $\alpha = 3 = \lambda_2 \neq \lambda_1$ ，所以  $y_2^* = e^{3x}(ax + b)x$ 。

然后是求  $f_1(x) = e^x \cos x$  的特解  $y_1^*$ 。

其中  $P_m(x) = 1$ ， $P_n(x) = 0$ ， $l = 0$ 。所以设  $P_m(x) = A$ ， $P_n(x) = B$ 。

对  $k$ ，自由项中  $\alpha = \beta = 1$ ，得到  $1 \pm i$ 。又  $1 \pm i \neq \lambda_1 = 1 \neq \lambda_2 = 3$ ， $k = 0$ 。

最后  $y_1^* = e^x(A \cos x + B \sin x)$ 。通解为  $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + e^x(A \cos x + B \sin x) + e^{3x}(ax + b)x$ 。

# 4 微分方程概念

对于有些方程并不需要求解后才能解决问题。

## 4.1 已知微分方程的解反求系数

**例题：** 设  $y_1, y_2$  为一阶非齐次线性微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的两个特解，若常数  $\lambda, \mu$  使得  $\lambda y_1 + \mu y_2$  是该方程的解， $\lambda y_1 - \mu y_2$  是该方程对应的齐次方程的解，则 ( )。

$$A. \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2} \quad B. \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2} \quad C. \lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3} \quad D. \lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$$

## 4.2 不解微分方程，利用方程隐含信息

$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  反映了未知函数及其各阶导数之间的关系。

**例题：** 设  $y = f(x)$  是方程  $y'' - 2y' + 4y = 0$  的一个解，若  $f(x_0) > 0$ ，且  $f'(x_0) = 0$ ，则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  ( )。

A. 取得最大值      B. 取得最小值      C. 某个邻域内单调增加      D. 某个邻域内单调减少

**解：** 因为  $y = f(x)$  是方程  $y'' - 2y' + 4y = 0$  的一个解，所以直接代入  $x_0$ ： $y''(x_0) - 2y'(x_0) + 4y(x_0) = 0$ 。又  $f'(x_0) = 0$ 。

$y''(x_0) = -4y(x_0) < 0$ ，所以该点为极大值点。

# 5 欧拉方程

## 6 微分方程物理应用

### 6.1 牛顿第二定律

$$F = ma, \text{ 物体质量 } m, \text{ 力 } f, \text{ 加速度 } a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}。$$

### 6.2 变化率

考的可能性较大，提法多为  $t$  时刻某量  $y$  对  $t$  的变化率与  $t$  时刻某量成正比。

如冷却定律， $k$  时刻物体温度  $T(t)$  对时间的变化率与  $t$  时刻物体与介质的温差  $T - T_0$  成正比，应写为  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$ 。