

# 向量

Didneipsun

## 目录

<b>1</b>	<b>线性相关性</b>	<b>1</b>
1.1	初等运算 . . . . .	1
1.2	代入重组 . . . . .	1
1.3	同乘 . . . . .	1
1.4	行列式 . . . . .	2
1.5	矩阵秩 . . . . .	2
1.5.1	线性相关性 . . . . .	3
1.5.2	线性表出 . . . . .	3
1.6	极大线性无关组 . . . . .	3
<b>2</b>	<b>等价向量组</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>向量空间</b>	<b>4</b>

# 1 线性相关性

使用行列式不等于 0 的方法最方便，但是有时候行列不同就不能这么做了。

## 1.1 初等运算

多用于选择题，给出  $n$  维线性无关向量，判断向量组是否线性无关。如果向量组初等运算为 0 就代表线性相关。

**例题：**已知  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关，则判断线性相关性： $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 。

**解：** $\alpha_1 + \alpha_2$  与  $\alpha_2 - \alpha_3$ ，共同出现了  $\alpha_2$ ，首先要消掉  $\alpha_2$ ，所以相减得到  $\alpha_1 + \alpha_3$ ，然后发现跟后面的  $\alpha_3 + \alpha_1$  一样，所以直接一减得到 0，表示线性相关。

## 1.2 代入重组

若要求线性相关的式子由其他向量构成，则将式子代入表示目标式子。

**例题：**设  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  都是  $n$  维向量， $n \geq 3$ ，且  $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_1 - 2\alpha_2, \beta_3 = 3\alpha_1 + 1 + 2\alpha_2$ ，证明向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性相关。

**证明：**若存在  $k_1, k_2, k_3$  使得  $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ 。

代入  $\alpha$  表示  $\beta$  的式子： $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_1 - 2\alpha_2) + k_3(3\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0$ 。

$\therefore (k_1 + k_2 + 3k_3)\alpha_1 + (k_1 - 2k_2 + 2k_3)\alpha_2 = 0$ 。

$\therefore k_1 + k_2 + 3k_3 = 0$ ，且  $k_1 - 2k_2 + 2k_3 = 0$  即可。

而未知数的个数大于方程个数，所以有无穷多解，从而必然有非零解，从而  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  线性相关。

## 1.3 同乘

若要求线性相关的式子存在一定的乘积关系，则可以用同乘一步步消去系数。

**例题：**设  $A$  是  $n$  阶矩阵，若存在正整数  $k$ ，使得线性方程组  $A^k x = 0$  有解向量  $\alpha$ ，且  $A^{k-1}\alpha \neq 0$ ，证明向量组  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$  线性无关。

**证明：**假设  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$  线性相关，则设存在系数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  使得  $\lambda_1\alpha + \lambda_2A\alpha + \dots + \lambda_kA^{k-1}\alpha = 0$ 。

$\therefore A^k x = 0$  的解为  $\alpha$ ， $\therefore A^k\alpha = 0$ ， $\therefore \dots = A^{k+2}\alpha = A^{k+1}\alpha = A^k\alpha = 0$ 。

左乘  $A^{k-1}$ , 得到  $\lambda_1 A^{k-1}\alpha + \lambda_2 A^k\alpha + \cdots + \lambda_k A^{2k-2}\alpha = \lambda_1 A^{k-1}\alpha = 0$ 。

$\because A^{k-1}\alpha \neq 0, \therefore \lambda_1 = 0$ , 消去  $\lambda_1$ :  $\lambda_2 A\alpha + \lambda_3 A^2\alpha + \cdots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$ 。

左乘  $A^{k-2}$ , 得到  $\lambda_2 A^{k-1}\alpha + \lambda_3 A^k\alpha + \cdots + \lambda_k A^{2k-3}\alpha = \lambda_2 A^{k-1}\alpha = 0$ 。

$\because A^{k-1}\alpha \neq 0, \therefore \lambda_2 = 0$ , 消去  $\lambda_2$ :  $\lambda_3 A^2\alpha + \lambda_4 A^3\alpha + \cdots + \lambda_k A^{k-1}\alpha = 0$ 。

同理依次左乘  $A^n$ , 所以  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ , 所以  $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$  线性无关。

## 1.4 行列式

对向量的线性相关性可以从其向量组组成的行列式来计算, 若行列式值为 0 则线性相关, 若行列式值不为 0 则线性无关。

注意这里容易失根。要仔细找出所有为 0 的因式, 不要随便降低阶数。

**例题:** 设  $a_1, a_2, \cdots, a_s$  是  $s$  个互不相同的数, 探究  $s$  个  $n$  维列向量  $\alpha_i = [1, a_i, a_i^2, \cdots, a_i^{n-1}]^T$  ( $i = 1, 2, \cdots, s$ ) 的线性相关性。

解: 当  $s > n$  时, 有  $n$  个方程  $s$  个未知数, 所以必然存在自由变量, 从而必然线性相关性。

$$\text{当 } s = n \text{ 时, } |\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \neq 0.$$

所以线性无关。

$$\text{当 } s < n \text{ 时, 对方程矩阵切割保留方形的 } s \text{ 个} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix},$$

上面因为范德蒙德行列式已经不等于 0, 即上面的方阵线性无关, 原来无关延长无关, 所以整个方程都线性无关。

綜上当  $s > n$  时线性相关,  $s \leq n$  时线性无关。

## 1.5 矩阵秩

当向量的个数与维数不同时就不能使用行列式去分析, 而只能用矩阵的秩来分析。当矩阵满秩则线性无关, 当矩阵降秩则线性相关。

### 1.5.1 线性相关性

当谈到多个向量是否线性相关时可以将向量组组成矩阵，判断其秩。满秩就是线性无关，降秩就是线性相关。

### 1.5.2 线性表出

当谈到向量是否能被其他向量线性表出时，要将这些向量全部组成一起，判断能否被其他向量表出的向量放在最右边，然后判断增广矩阵的秩。

1. 若  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta)$ ，则  $\beta$  无法被  $\alpha$  线性表出。
2. 若  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta) < r$ ，则  $\beta$  可以被  $\alpha$  无穷线性表出。表达式为基础解系。
3. 若  $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta) = r$ ，则  $\beta$  可以被  $\alpha$  惟一线性表出。表达式为将矩阵化为单位矩阵后  $\beta$  所在就是  $\alpha$  的系数。

**例题：**已知  $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$ ， $\alpha_2 = (2, 3, a)^T$ ， $\alpha_3 = (1, a+2, -2)^T$ ， $\beta = (1, 3, 0)^T$ ，若  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示，且表示法不唯一，求  $a$ 。

**解：**设  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ ，由  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示，且表示法不唯一可知  $Ax = \beta$  有无穷解，即  $r(A) = r(A|\beta) < 3$ 。

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 2a - 3 & a - 3 \end{bmatrix}。$$

$\therefore a = 3。$

## 1.6 极大线性无关组

极大线性无关组一般与向量组秩在一起使用。一般解出极大线性无关组与秩，还要用极大线性无关组表示出其余的向量，基本步骤：

1. 将向量组拼接为矩阵  $A$ ，对  $A$  进行初等行变换，化为最简行阶梯形矩阵，确定矩阵秩  $r(A)$ 。
2. 在最简行阶梯矩阵中按列找出一个秩为  $r(A)$  的子矩阵，即在每个台阶上找一列列向量，找  $r(A)$  列构成一个新矩阵，其就是一个极大线性无关组。
3. 将其余向量依次与极大线性无关组进行对比解出表示方法。

**注意：**求向量组的秩可以进行初等变换，包括行变换和列变换。但是求极大线性无关组时最好只使用行变换，因为列变换会改变方程的解。从而解方程组只能做行变换。

## 2 等价向量组

$r(A) = r(B) = r(A|B)$ ，所以需要计算三个向量组构成的矩阵的秩就可以了。

**例题：**设向量组  $\alpha$ :  $\alpha_1 = [1, 0, 2]^T$ ,  $\alpha_2 = [0, 1, 1]^T$ ,  $\alpha_3 = [2, -1, a+4]^T$ , 向量组  $\beta$ :  $\beta_1 = [1, 2, 4]^T$ ,  $\beta_2 = [1, -1, a+2]^T$ ,  $\beta_3 = [3, 3, 10]^T$ 。

$$\text{矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & a+4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & a+2 & 10 \end{pmatrix}。$$

(1)  $AB$  是否等价。

(2) 向量组  $AB$  是否等价。

$$(1) \text{ 解: 化简 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

若  $a \neq -1$ , 则  $r(A) = 3$ , 且  $a \neq 0$ , 则  $r(B) = 3$ , 此时  $AB$  等价。

若  $a = -1$ , 则  $r(A) = 2$ ,  $r(B) = 3$ ,  $AB$  不等价。

若  $a = 0$ , 则  $r(B) = 2$ ,  $r(A) = 2$ ,  $AB$  不等价。

(2) 解: 因为向量组  $\alpha$  拼接在一起就是  $A$ ,  $\beta$  拼接在一起就是  $B$ , 所以  $r(\alpha) = r(A)$ ,  $r(\beta) = r(B)$ ,  $r(\alpha|\beta) = r(A|B)$ 。

$$\text{将 } AB \text{ 拼在一起做行变换, 得到 } (A|B) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & a+1 & 1 \end{array} \right)。$$

若  $a \neq -1 \neq 0$ , 则  $r(A) = r(B) = r(A|B)$ 。向量组等价。

若  $a = -1$  或  $a = 0$ , 则  $r(A) \neq r(B)$ , 所以不等价。

## 3 向量空间

**例题：**设  $R^3$  中有两个基  $A$ :  $\alpha_1 = [1, 1, 0]^T$ ,  $\alpha_2 = [0, 1, 1]^T$ ,  $\alpha_3 = [1, 0, 1]^T$ , 基  $B$ :  $\beta_1 = [1, 0, 0]^T$ ,  $\beta_2 = [1, 1, 0]^T$ ,  $\beta_3 = [1, 1, 1]^T$ 。

(1) 求基  $B$  到基  $A$  的过渡矩阵。

(2) 已知  $\xi$  在基  $B$  下的坐标为  $[1, 0, 2]^T$ ，求  $\xi$  在基  $A$  下的坐标。

(1) 解：过渡矩阵为  $A = BC$ ，即  $B^{-1}A = C$ 。

(2) 解：令在基  $A$  下的坐标为  $(x_1, x_2, x_3)^T$ 。

$\therefore \xi = A(x_1, x_2, x_3)^T = B(1, 0, 2)^T$ ， $(x_1, x_2, x_3)^T = A^{-1}B(1, 0, 2)^T$ 。