无穷级数

Didnelpsun

目录

1　常数项级数

1.1　概念

级数的经典悖论为芝诺悖论。

1.1.1　基本概念

定义：给定义一个无穷数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，将其各项用加号连起来的得到的记号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 叫做**无穷级数**，简称**级数**，其中 u_n 称为该级数的**通项**。

若 u_n 是常数而不是函数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 就被称为**常数项无穷级数**，简称**常数项级数**。

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为级数的**部分和**，$\{S_n\}$ 是级数的**部分和数量**。

定义：若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，并称 S 为该收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**和**；若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在或为 $\pm\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**。

研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛还是发散，就是研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 去掉前 m 项，得 $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} u_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots$，称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 m **项后余项**

1.1.2　性质

1. 线性性质：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，且其和分别为 S，T，则任给常数 a, b，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$ 也收敛，且其和为 $aS + bT$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n) = a\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n + b\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$。

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则其任意 m 项后余项 $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 也收敛；若存在 m 项后余项 $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

3. 级数收敛必要条件：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 首先，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明性质三：$u_n = S_n - S_{n-1}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$。极限为 0 不一定收敛。

1.2 级数敛散性判别

1.2.1 正项级数

1.2.1.1 概念

定义：若通项 $u_n \geqslant 0$，$n = 1, 2, \cdots$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**正项级数**。

1.2.1.2 收敛原则

定理：正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界。（某一函数在固定区间内变化率是有界的，则变化范围是有界的）

证明：必要性：由于 $u_n \geqslant 0$，$\therefore S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \geqslant 0$，且 $S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots$，$\{S_n\}$ 单调不减且下界为 0。当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，则 $\{S_n\}$ 必有上界。有上界下界则 $\{S_n\}$ 有界。（某一函数在固定区间内变化率是有界的，则变化范围是有界的）

充分性：由于 $\{S_n\}$ 单调不减，所以根据单调有界准则，$\{S_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

基本就是使用放缩法判断是否有界。

例题：判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性。

解：$S_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > n\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$，当 $n \to \infty$ 时 $\sqrt{n} \to \infty$，无上界所以发散。

1.2.1.3 比较判别法

定理：给出两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，若从某项开始有 $u_n \leqslant v_n$ 成立，则：①若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；②若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散。

即大的收敛小的也收敛，小的发散大的也发散。

例题：判断调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 的敛散性。

解：$\because x > 0$，$x > \ln(1 + x)$，$\therefore \dfrac{1}{n} > \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$。

又对于 $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$。

$S_n = \ln\dfrac{2}{1} + \ln\dfrac{3}{2} + \cdots + \ln\dfrac{n+1}{n} = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$。当 $\ln(n+1)$ 在 $n \to \infty$ 时，$S_n \to \infty$。

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 也发散。

定理：p 级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases} p>1,\text{收敛} \\ p\leqslant 1,\text{发散} \end{cases}$。

1.2.1.4 比较判别法极限性质

是比较判别法的推论，利用极限的阶数来比较。

给出两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，$v_n\neq 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$：

1. 若 $A=0$，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛。
2. 当 $A=+\infty$，当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散。
3. 若 $0<A<+\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 具有相同敛散性。

例题：判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ 敛散性。

解：令 $\frac{1}{n}=x$，$n\to\infty$ 所以 $x\to 0^+$。当 $x\to 0^+$，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$。

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{6}\neq 0$，所以 $\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n^3}$ 具有相同敛散性。

根据 p 级数定理，$p=3>1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ 收敛。

1.2.1.5 比值判别法

也称为达朗贝尔判别法。

定理：给出一正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则：①若 $\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；②若 $\rho>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

注意：$\rho=1$ 时无法根据此判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 敛散性，如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛。

适用于含有 a^n，$n!$，n^n 的通项。

例题：判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a|^n n!}{n^n}$ 的敛散性，其中 a 为非零常数。

解：

1.2.1.6 根值判别法

也称为柯西判别法。

定理：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

1.2.2 交错级数

1.2.2.1 概念

1.2.2.2 莱布尼兹判别法

1.2.3 任意项级数

1.2.3.1 绝对收敛

1.2.3.2 条件收敛

2 幂级数

2.1 概念与收敛域

2.1.1 概念

2.1.2 阿贝尔定理

2.1.3 收敛域

2.2 幂级数求和函数

2.2.1 概念

2.2.2 运算法则

2.2.3 性质

2.2.4 重要展开式

2.3 函数展开为幂级数

2.3.1 概念

2.3.2 求法

2.3.2.1 直接法

2.3.2.2 间接法