不定积分与定积分

Didnelpsun

目录

1 不定积分

1.1 基本积分

例题：汽车以 20m/s 的速度行驶，刹车后匀减速行驶了 50m 停止，求刹车加速度。

已知题目含有两个变量：距离和时间，设距离为 s，时间为 t。

因为汽车首先按 20m/s 匀速运动，所以 $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 20$，最开始距离为 0，所以 $s|_{t=0} = 0$。

又因为是匀减速的，所以速度形如：$v = \frac{s}{t} = kt + b$，从而令二阶导数下 $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = k$。

所以 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \int \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t = \int k\,\mathrm{d}t = kt + C_1$。

代入 $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 20$，所以 $C_1 = 20$，即 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = kt + 20$。

所以 $\mathrm{d}s = (kt + 20)\,\mathrm{d}t$，从而 $s = \int (kt + 20)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}kt^2 + 20t + C_2$。

又 $s|_{t=0} = 0$，所以代入得 $C_2 = 0$，所以 $s = \frac{1}{2}kt^2 + 20t$。

当 $s = 50$ 时停住，所以此时 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$，得到 $t = -\frac{20}{k}$。

代入 s：$50 = \frac{1}{2}k\left(-\frac{20}{k}\right)^2 + 20\left(-\frac{20}{k}\right)$，解得 $k = -4$，即加速度为-4m/s^2。

1.2 换元积分

1.2.1 第一类换元

1.2.1.1 聚集因式

将复杂的式子转换为简单的一个因式放到 d 后面看作一个整体，然后利用基本积分公式计算。

例题：$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$。

$= \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x\ln\ln x} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \ln|\ln\ln x| + C$。

例题：$\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$。

$= -\int 10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{2}\int 10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}(2\arccos x) = -\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10} + C$。

1.2.1.2 积化和差

对于两个三角函数的乘积可以使用积化和差简单计算。

例题： $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x \,\mathrm{d}x$。

$= \displaystyle\int \cos 3x \sin 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x) \,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{2}\int \sin 5x \,\mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{10}\cos 5x + \dfrac{1}{2}\cos x + C$。

1.2.1.3 三角拆分

主要用于 $\sec^2 - 1 = \tan^2 x$，当出现 $\tan^2$、$\tan^3$ 等与 $\sec x$ 在一起作为乘积时可以考虑拆分。

例题： $\displaystyle\int \tan^3 x \sec x \,\mathrm{d}x$。

$= \displaystyle\int (\sec^2 x - 1) \tan x \sec x \,\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1) \,\mathrm{d}(\sec x) = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$。

1.2.2 第二类换元

使用换元法做了换元之后是要带回式子中的，也就是说要保证反函数的存在才能代入有意义。为了保证反函数的存在，因此要保证原函数的单调性，所以要有一个规定的范围来使原函数保证单调。

1.2.2.1 $\sqrt{a^2 - x^2}$：$x = a\sin t(a\cos t)$

若令 $x = a\sin t$，则根据 $\sin t \in (-1,1)$ 得到主区间：$t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$。

若令 $x = a\cos t$，则根据 $\cos t \in (-1,1)$，得到主区间：$t \in (0,\pi)$。

例题： 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$。

令 $x = \sin t$（$t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$），所以 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$，$\mathrm{d}x = \cos t \,\mathrm{d}t$，$t = \arcsin x$。

因为式子 $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} > 0$，单调递减，所以不用讨论正负号。

$= \displaystyle\int \frac{\cos t}{1+\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{2\cos^2\frac{t}{2} - 1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t - \int \sec^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = t - \tan\frac{t}{2} + C$

$= t - \dfrac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} + C = t - \dfrac{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}} + C = t - \dfrac{\sin t}{1+\cos t} + C$

$= \arcsin x - \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C$。

1.2.2.2 $\sqrt{a^2+x^2}$：$x=a\tan t$

根据 $\tan t\in R$，从而得到主空间：$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$。

例题：求 $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$。

虽然本题目看着可以从分母解开平方，然后低阶分配，但是这分母是平方的式子很难分配，所以需要使用换元法。

令 $x=\tan t$，$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x^2+1=\sec^2 t$，$\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$。

因为 $(x^2+1)^2>0$，虽然 x^3+1 可能为负可能为正，但是都是单调递增的，所以不用考虑正负号。

$=\displaystyle\int\frac{\tan^3 t+1}{\sec^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\sin^3 t+\cos^3 t}{\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\sin t(1-\cos^2 t)+\cos^3 t}{\cos t}\mathrm{d}t$

$=\displaystyle\int\frac{\cos^2 t-1}{\cos t}\mathrm{d}(\cos t)+\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$

$=\displaystyle\int\cos t\,\mathrm{d}(\cos t)-\int\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}(\cos t)+\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int\cos 2t\,\mathrm{d}(2t)$

$=\displaystyle\int\cos^t-\ln\cos t+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C$（$\cos t$ 在 $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 中为正）

$\because\tan t=x$，$\therefore\sin t=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$。

$=\dfrac{1+x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\dfrac{1}{2}\arctan x+C$。

1.2.2.3 $\sqrt{x^2-a^2}$：$x=a\sec t$

根据 $\sec t\in(-1,1)$，所以从而得到主空间：$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$。

例题：求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x$。

令 $x=3\sec t$。$\therefore\sqrt{x^2-9}=3\tan t$，$\mathrm{d}x=3\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$。

因为式子 $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}$ 的分子必然为为正，而对于分子在 0 两边的单调性不同，所以需要对 x 进行正负区分，又 $x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$，所以：

当 $x>3$ 时，$\sec t>1$，即 $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。

$=\displaystyle\int 3\tan^2 t\,\mathrm{d}t=3\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t$

$=3\tan t-3t+C=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\dfrac{3}{x}+C$。

当 $x<-3$ 时，$\sec t<-1$，即 $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$。

$=\displaystyle-\int 3\tan^2 t\,\mathrm{d}t=-3\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t$

$=-3\tan t+3t+C=\sqrt{x^2-9}+3\arccos\dfrac{3}{x}+C$（$\tan t<0$）

$=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\dfrac{3}{-x}+3\pi+C$（$3\arccos\dfrac{3}{x}=3\pi-3\arccos-\dfrac{3}{x}$）

$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\dfrac{3}{-x} + C$。

综上结果为 $\sqrt{x^2-9} - 3\arccos\dfrac{3}{|x|} + C$。

1.2.2.4 辅助换元

在使用换元法的时候有可能单个式子不能求出积分，而使用其他辅助式子加减在一起积分可以得到结果，从而能得到原式和辅助式子的积分结果。对于这类题目需要观察什么样的式子能让积分简单。

例题：求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$。

令 $x = \sin t$，所以 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$，$\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$。

$\because x+\sqrt{1-x^2}$ 可能为正可能为负，正负时单调性不同，所以令 $x+\sqrt{1-x^2} = 0$，即 $\sin t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，从而 $t \in (-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}) \cup (-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2})$。

$\therefore = \displaystyle\int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t$（$t \in (-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2})$）。

这时你会发现使用积化和差、万能公式、倍角公式都无法解出这个积分，所以这时候就需要另外一个辅助积分式子加上或减去这个式子，从而让和以及差更容易解出积分。这里根据式子特点让辅助式子分子为 $\sin t$：

令 $I_1 = \displaystyle\int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t$，$I_2 = \displaystyle\int \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t$。

$I_1 + I_2 = \displaystyle\int \frac{\sin t + \cos t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t$。

$I_1 - I_2 = \displaystyle\int \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(\sin t + \cos t)}{\sin t + \cos t} = \ln|\sin t + \cos t| + C$。

所以 $I_1 = \dfrac{1}{2}(\arcsin x + \ln|x+\sqrt{1-x^2}|) + C$。

同理 $t \in (-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4})$ 也得到同样结果。

1.3 分部积分

因为分部积分法使用 $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$，所以基本上用于两项乘积形式的积分式子。

1.3.1 基本分部

1.3.1.1 非幂函数优先

当幂函数与一些微分后能降低幂函数幂次的函数在一起时，先对非幂函数优先分部积分，结果与幂函数相乘可以消去幂次，以达到降低幂次的作用。

如 $\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x$，$\int x^n \arctan x\,\mathrm{d}x$，$\int x^n \arcsin x\,\mathrm{d}x$。

例题：求 $\int x^2 \arctan x\,\mathrm{d}x$。

$= \dfrac{1}{3}\int \arctan x\,\mathrm{d}(x^3) = \dfrac{1}{3}x^3\arctan x - \dfrac{1}{3}\int x^3\,\mathrm{d}(\arctan x)$

$= \dfrac{1}{3}x^3\arctan x - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \dfrac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}x^3\arctan x - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \dfrac{x+x^3-x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{3}x^3\arctan x - \dfrac{1}{3}\int x\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{6}\displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}$

$= \dfrac{1}{3}x^3\arctan x - \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$。

1.3.1.2 幂函数优先

当幂函数与三角函数在一起微分时，因为三角函数无论如何积分都不会被消去，所以应该优先消去幂函数部分，从而降低幂次。

如 $\int x^a \sin x\,\mathrm{d}x$，$\int x^a \cos x\,\mathrm{d}x$。

例题：求 $\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x$。

$= \int x(\sec^2 - 1)\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\tan x) - \dfrac{x^2}{2} = x\tan x + \ln|\cos x| - \dfrac{x^2}{2} + C$。

1.3.2 多次分部

对于一部分通过微分形式不会发生变化的函数，所以需要多次积分，然后利用等式求出目标值。

如：$\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$，$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$。

例题：求 $\int e^x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$。

$= \sin^2 x\cdot e^x - \int e^x\,\mathrm{d}(\sin^2 x) = \sin^2 x\cdot e^x - \int e^x\cdot\sin 2x\,\mathrm{d}x$

$= \sin^2 x\cdot e^x - \int \sin 2x\,\mathrm{d}(e^x) = \sin^2 x\cdot e^x - \sin 2x\cdot e^x + \int e^x\,\mathrm{d}(\sin 2x)$

$= \sin^2 x\cdot e^x - \sin 2x\cdot e^x + 2\int e^x\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x$ （①）

$= \sin^2 x\cdot e^x - \sin 2x\cdot e^x + 2\int \cos 2x\,\mathrm{d}(e^x)$

$= \sin^2 x\cdot e^x - \sin 2x\cdot e^x + 2e^x\cos 2x - 2\int e^x\,\mathrm{d}(\cos 2x)$

$= \sin^2 x\cdot e^x - \sin 2x\cdot e^x + 2e^x\cos 2x + 4\int e^x\cdot\sin 2x\,\mathrm{d}x$

$= \sin^2 x\cdot e^x - \sin 2x\cdot e^x + 2e^x\cos 2x + 4\int \sin 2x\,\mathrm{d}(e^x)$

$= \sin^2 x\cdot e^x - \sin 2x\cdot e^x + 2e^x\cos 2x + 4\sin 2x\cdot e^x - 4\int e^x\,\mathrm{d}(\sin 2x)$

$= \sin^2 x\cdot e^x - \sin 2x\cdot e^x + 2e^x\cos 2x + 4\sin 2x\cdot e^x - 8\int e^x\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x$ （②）

然后①=②：$\int e^x\cdot\cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)}{5} + C$

代入①：$= \dfrac{e^x(5\sin^2 x - 5\sin 2x + 2\cos 2x + 4\sin 2x)}{5} + C$

$= \dfrac{e^x(5\sin^2 x - \sin 2x + 2\cos 2x)}{5} + C = e^x\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5}\sin 2x - \dfrac{1}{10}\cos 2x\right) + C$

1.3.3 分部与换元

分部积分法和换元积分法经常一起使用。

例题： 求 $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$。

令 $\sqrt[3]{x}=u$，从而 $x=u^3$，$\mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$。

$=3\int e^u u^2\,\mathrm{d}u=3\int u^2\,\mathrm{d}(e^u)=3u^2e^u-3\int e^u\,\mathrm{d}(u^2)=3u^2e^u-6\int e^u u\,\mathrm{d}u$

$=3u^2e^u-6\int u\,\mathrm{d}(e^u)=3u^2e^u-6ue^u+6\int e^u\,\mathrm{d}u=3u^2e^u-6ue^u+6e^u+C$

$=3e^u(u^2-2u+2)+C=3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+2)+C$。

例题： 求 $\int e^{\sqrt{3x+9}}\,\mathrm{d}x$。

令 $\sqrt{3x+9}=u$，从而 $x=\dfrac{1}{3}(u^2-9)$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}u\,\mathrm{d}u$：

$=\dfrac{2}{3}\displaystyle\int ue^u\,\mathrm{d}u=\dfrac{2}{3}\int u\,\mathrm{d}(e^u)=\dfrac{2}{3}ue^u-\int\dfrac{2}{3}e^u\,\mathrm{d}u=\dfrac{2}{3}ue^u-\dfrac{2}{3}e^u+C$

$=\dfrac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}}(\sqrt{3x+9}-1)+C$。

1.4 有理积分

1.4.1 高阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\displaystyle\int\frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$，且 $f(x)$、$g(x)$ 都为与 x 相关的多项式，$f(x)$ 阶数高于或等于 $g(x)$，则 $f(x)$ 可以按照 $g(x)$ 的形式分配，约去式子，得到最简单的表达。

例题： $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$。

$$=\int\frac{x^3+9x-9x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^3+9x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x-\int\frac{9x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int x\,\mathrm{d}x-\frac{9}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+9)}{x^2+9}=\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln(9+x^2)+C。$$

1.4.2 低阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\displaystyle\int\frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$，且 $f(x)$、$g(x)$ 都为与 x 相关的多项式，$f(x)$ 阶数低于 $g(x)$，且 $g(x)$ 不能因式分解为 $g(x)=g_1(x)g_2(x)\cdots$ 时，则可以分解式子：$\displaystyle\int\frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x=a_1\int\frac{\mathrm{d}(f_1(x))}{g_1(x)}+a_2\int\frac{\mathrm{d}(f_2(x))}{g_2(x)}+\cdots$，将积分式子组合成积分结果为分式的函数，如 $\ln x$、$\arcsin x$、$\arctan x$ 等。

例题： 求 $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$。

因为 x^2+2x+3 不能因式分解，所以考虑将分子按照分母形式进行分配。优先对高阶的 x 进行分配。

首先因为分子最高阶为 x 只比分母最高阶 x^2 低一阶，所以考虑将 $x-1$ 分配到微分号内。

$\because \mathrm{d}(x^2+2x+3)=2x+2$，而现在是 $x-1$，所以：

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}$$

$$-\int\frac{1}{\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2x+3)-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C。$$

2　定积分

2.1　变限积分

2.2　牛莱公式

2.3　换元积分

2.4　分部积分

2.5　反常积分

3　积分应用

3.1　面积

3.2　体积

3.3　弧长