多元函数微分学

Didnelpsun

目录

1 基本概念

1.1 复合函数

函数以复合函数形式 $f(g(x,y))$ 出现，函数的变量是一个整体。

1.1.1 链式法则

若是给出相应的不等式可以通过链式法则求出对应的表达式。

例题：设 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$（$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$）有二阶连续的偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$，则求 $u(\sqrt{x^2+y^2})$。

解：这个函数是复合函数 $u=u(r)$ 和 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 而成。根据复合函数求导法则：

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\dfrac{x}{r}$。

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\dfrac{x}{r}\right)=\dfrac{x}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r}\right)=$。

1.1.2 特殊值反代

若是给出的不等式后还给出对应的特殊值，可以直接代入然后反代求出函数，而不用链式法则。

例题：设 $z=e^x+y^2+f(x+y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^3$，则求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

解：已知 $y=0$ 时，$z=e^x+f(x)=x^3$，$\therefore f(x)=x^3-e^x$，$f(x+y)=(x+y)^3-e^{x+y}$，$z=e^x+y^2+(x+y)^3-e^{x+y}$。

$\therefore \dfrac{\partial z}{\partial x}=e^x+3(x+y)^2-e^{x+y}$。

2 二元函数

函数以 $f(u,v)$ 的形式来出现，需要分别对其求偏导。

2.1 链式法则

例题：设 $z=e^{xy}+f(x+y,xy)$，$f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：令 $x+y$ 为 u，xy 为 v，$f(u,v)$ 对 u 求导就是 f_1'，对 v 求导就是 f_2'，求 uv 依次求导就是 f_{12}''，以此类推。

首先求一次偏导：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=ye^{xy}+f_1'+f_2'y$。

接着对 y 求偏导：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + \dfrac{\partial f_1'}{\partial y} + \dfrac{\partial f_2' y}{\partial y}$。

$= e^{xy} + xye^{xy} + \dfrac{\partial f_1'}{\partial y} + \dfrac{\partial f_2'}{\partial y} y + f_2' \dfrac{\partial y}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + \dfrac{\partial f_1'}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f_1'}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial f_2'}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} y + \dfrac{\partial f_2'}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} y + f_2' = e^{xy} + xye^{xy} + f_{11}'' + f_{12}'' x + f_{21}'' y + f_{22}'' xy + f_2'$。

又 $f(u, v)$ 具有两阶连续偏导数，所以 $f_{12}'' = f_{21}''$。

即 $= e^{xy} + xye^{xy} + f_{11}'' + (x+y) f_{12}'' + xy f_{22}'' + f_2'$。

3 多元函数微分应用

3.1 空间曲线的切线与法平面

3.1.1 参数方程

设空间曲线 $\mathit{\Gamma}$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$ 给出，其中 $\phi(t), \psi(t), \omega(t)$ 均可导，$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 $\mathit{\Omega}$ 上的点，且当 $t = t_0$ 时，$\phi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$，$\omega'(t_0)$ 均不为 0，则：

- 曲线 $\mathit{\Gamma}$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切向量为 $\vec{\tau} = (\phi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$。
- 曲线 $\mathit{\Gamma}$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x - x_0}{\phi'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$。
- 曲线 $\mathit{\Gamma}$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法平面（过 P_0 且与切线垂直的平面）方程为 $\phi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$。

3.1.2 交面式方程

设空间曲线 $\mathit{\Gamma}$ 由交面方程 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 给出，则：

- 曲线 $\mathit{\Gamma}$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切向量为
$\vec{\tau} = \left(\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}_{P_0}, \begin{vmatrix} F_z' & F_x' \\ G_z' & G_x' \end{vmatrix}_{P_0}, \begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix}_{P_0} \right)$。
- 曲线 $\mathit{\Gamma}$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为
$\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}_{P_0}}, \dfrac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z' & F_x' \\ G_z' & G_x' \end{vmatrix}_{P_0}}, \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix}_{P_0}}$。

- 曲线 Γ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面方程为 $\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}_{P_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z' & F_x' \\ G_z' & G_x' \end{vmatrix}_{P_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{vmatrix}_{P_0}(z-z_0)=0$。

3.2 空间曲面的切平面与法线

3.2.1 隐式

设空间曲面 Σ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 Σ 上的点，则：

- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(F_x'(x_0,y_0,z_0),F_y'(x_0,y_0,z_0),F_z'(x_0,y_0,z_0))$ 且法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0}$。
- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为 $F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$。

3.2.2 显式

设空间曲面 Σ 由方程 $z=f(x,y)$ 给出，令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，假定法向量的方向向下，即其余 z 轴正向所成的角为钝角，即 z 为-1，则：

- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0),-1)$，且法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$。
- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为 $f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$。

若是反之成锐角，则将里面所有的-1 都换成 1。

若用 α,β,γ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量的方向角，并这里假定法向量的方向是向上的，即其余 z 轴正向所成的角 γ 为锐角，则法向量**方向余弦**为 $\cos\alpha=\dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，其中 $f_x=f_x'(x_0,y_0)$，$f_y=f_y'(x_0,y_0)$。

例题：设直线 $L\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于 $(1,-2,5)$，求 ab 的值。

解：L 在 π 上且与曲面相切，则 π 为 L 的切平面。设曲面方程 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$。

曲面法向量为 $\vec{n} = \{F'_x, F'_y, F'_z\} = \{2x, 2y, -1\}$，代入 $(1, -2, 5)$，则法向量为 $\{2, -4, -1\}$。

又点法式：$\pi : 2(x-1) - 4(y+2) - (z-5) = 0$，即 $2x - 4y - z - 5 = 0$。

联立直线方程，得到：$(5+a)x + 4b + ab - 2 = 0$，又 x 是任意的。

解得 $a = -5, b = -2$。