

多元函数微分学

Didnelpsun

目录

1	基本概念	1
1.1	平面与点	1
1.1.1	平面点集	1
1.1.2	距离	1
1.1.3	邻域	1
1.1.4	点的分类	1
1.1.5	集合	2
1.1.6	聚点	2
1.2	极限	2
1.3	连续	3
1.4	偏导数	3
1.5	全微分	4
1.6	偏导数连续性	4
2	多元函数微分法则	5
2.1	链式求导法则	5
2.2	隐函数存在定理	7
3	多元函数极值最值	8
3.1	概念	8
3.2	无条件极值	8
3.3	条件极值与拉格朗日乘数法	9
3.3.1	闭区域边界最值	10
3.3.2	闭区域上最值	10

1 基本概念

1.1 平面与点

1.1.1 平面点集

定义：在平面上建立直角坐标系 xOy ，则平面上的点可用两个实数组的有序数组 (x, y) 表示，而二元函数 $f(x, y)$ 的定义域是 (x, y) 为元素的几何，所以 $f(x, y)$ 的定义域就是平面上的点集。

1.1.2 距离

定理：平面上任意两点 $M_1(x_1, y_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2)$ 之间距离定义为 $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。

$\rho(M_1, M_2)$ 满足：

- 非负性： $\rho(M_1, M_2) \geq 0$ 。
- 对称性： $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$ 。
- 三角不等式： $\rho(M_1, M_3) \leq \rho(M_1, M_2) + \rho(M_2, M_3)$ 。

1.1.3 邻域

设 M_0 为平面上一点， $\delta > 0$ ，则平面上以 M_0 为圆心， δ 为半径的圆的内部称为 M_0 的 δ 邻域，记为 $U(M_0, \delta)$ 。

若领域中去掉圆心 M_0 ，称为 M_0 的 δ 去心邻域，记为 $\overset{\circ}{U}(M_0, \delta)$ 。

1.1.4 点的分类

定义：设 M 为平面上一个点，若存在 $\delta > 0$ ，使得 $U(M, \delta) \subset E$ ，则 M 为点集 E 的内点。

定义：若存在 $\delta > 0$ ，使得 $U(M, \delta) \cap E = \emptyset$ ，则 M 为点集 E 的外点。

定义：若对任意 $\delta > 0$ ， $U(M, \delta)$ 既有 E 内的点也有外的点，则 M 为点集 E 的边界点。

定义： E 所有边界点的集合称为 E 的边界，记为 ∂E 。对于任意一个点集 E 与其余集 E^C 有公共边界，即 $\partial E = \partial E^C$ 。

1.1.5 集合

定义：设 E 为一个平面点集，若存在常数 $\delta > 0$ ，使得 $E \subset U(O, \delta)$ ，则 E 为有界集，否则为无界集。

定义：若 E 中的每个点都是 E 的内点，则 E 为开集，若 E 的边界点都是 E 的点，则 E 为闭集。若一个点集是开集，则其余集为闭集，若一个点集为闭集，则其余集为开集。

定义：若 E 中任意两点，都可用一条完全属于 E 的曲线将其两点连接，则 E 为（道路）连通集，连通的开集为开区域，一个开区域和其边界点的并集为闭区域，统称区域。

定义：若 E 内任意一条简单闭曲线的内部还在 E 内，则 E 为单连通区域，否则为多连通区域。

1.1.6 聚点

定义：对一个平面点集 E ， M_0 为平面上一点，若对任意 $\delta > 0$ ，总有 $\dot{U}(M_0, \delta) \cap E \neq \emptyset$ ，即 M_0 的任意邻域中都含有异于 M_0 的 E 中的点，则 M_0 为 E 的聚点。

定理：非空开集的内点余边界点都是这个点集的聚点，闭区域的任意一点都是其聚点。

定义：若存在 $\delta > 0$ ，使得 $U(M_0, \delta) \cap E = \{M_0\}$ ，即如果 M_0 的某一邻域与点集 E 的交集是一个孤立的点 M_0 ，则称 M_0 为 E 的孤立点。边界点要么是聚点要么是孤立点。

1.2 极限

对于一元函数的极限可用列举法，从两端逼近该点取极限，但是对于多元函数所处的邻域，逼近方向为无穷，所以不可能再通过取两个方向逼近的方式求极限。

从点集来看**定义：**设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D ， $P_0(x_0, y_0)$ 为 D 聚点。若存在常数 A ，对于任意给定正数 ϵ ，总存在正数 δ ，使得当 $P(x, y) \in D \cap \dot{U}(P_0, \delta)$ 时，都有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$ 成立，则常数 A 为 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限，记为 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ 或 $f(x, y) \rightarrow A((x, y) \rightarrow (x_0, y_0))$ 。

如 $\because xy \neq 0$ 排除 xy 轴：
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}。$$

从邻域来看**定义**：若二元函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的去心邻域内有定义，且 (x, y) 以任意方式趋向 (x_0, y_0) 时， $f(x, y)$ 均趋向于 A ，则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$ 。

根据邻域的定义，由于函数 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ 在坐标轴上无定义，则极限不存在。

此时两种定义就会有两种结论，所以为了避免这种定义不同的矛盾，就只会出现哪种定义下极限存在或都不存在的函数，如 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$ 。

从现实角度来看，点集定义是更合理的，若要求一根弯曲铁丝在某点的导数，第二种定义无法求，所以不合理。而第二种定义是从一元极限定义直接升级过来，所以有一定局限性。

1.3 连续

定义：若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ 则称 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续。

若不连续，则不讨论间断类型。

1.4 偏导数

当含有两个以及三个变量时，若求一个极限，则有多多个变量同时趋向，所以多个变量同时在变。为了运算简单，就假定只有一个变量在变，其他变量固定，从而直接降低成一元变量，只对一个变量求导，从而就是偏导数。

定义：设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z' \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ 或 $f'_x(x_0, y_0)$ 。

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}。$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}。$$

定义：若函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内的偏导数 $f'_x(x, y)$ 、 $f'_y(x, y)$ 仍具有偏导数，则其偏导数为函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数。按照求导次序不同，有如下四个二阶偏导数。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)。$$

其中 $f''_{xy}(x, y)$ 和 $f''_{yx}(x, y)$ 为混合偏导数。二阶及以上的偏导数均为高阶偏导数。

1.5 全微分

定义：若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 可表示为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ ，其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ， AB 不依赖 $\Delta x, \Delta y$ 而仅与 x, y 相关，则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微，而称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分，记为 dz 。

$$dz = A\Delta x + B\Delta y = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy。$$

判断可微的步骤：

1. 写出全增量 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 。
2. 写出线性增量 $A\Delta x + B\Delta y$ ， $A = f'_x(x_0, y_0)$ ， $B = f'_y(x_0, y_0)$ 。
3. 写出极限 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ ，若极限等于 0，则 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微，否则不可微。

1.6 偏导数连续性

对 $z = f(x, y)$ ，讨论其在某特殊点 (x_0, y_0) 处偏导数是否连续的步骤：

1. 用定义法求 $f'_x(x_0, y_0)$ ， $f'_y(x_0, y_0)$ 。（求某点偏导数）
2. 用公式法求 $f'_x(x, y)$ ， $f'_y(x, y)$ 。（求偏导函数）
3. 计算 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_x(x, y)$ ， $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_y(x, y)$ 。（偏导函数求极限）
4. 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_x(x, y) = f'_x(x_0, y_0)$ ， $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_y(x, y) = f'_y(x_0, y_0)$ 若成立则连续，否则不连续。

例题：设 $z = f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ ，则四个结论中正确的个数为 ()。

- ① $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续。 ② $f'_x(0, 0)$ ， $f'_y(0, 0)$ 存在。

③ $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续。 ③ $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微。

A.1 B.2 C.3 D.4

解: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0)$ 。所以 A 正确。

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2}} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x) \sin \frac{1}{|\Delta x|} = 0。$$

同理 $f'_y(0, 0) = 0$ 。

判断连续性, 首先计算偏导数值, 之前计算过: $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$; 然后求偏导函数 $f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$
 $= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 同理得 $f'_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; 最后一步查看偏导函数值与偏导数值是否相等, \therefore
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 震荡, 所以总的来说
 极限值不存在, 就不会等于偏导数值, 同理可得函数的偏导数在该点不连续。

要求一个函数在某点可微, 首先 $\Delta z = f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] \sin \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ 。然后 $A\Delta x + B\Delta y = f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y = 0$ 。最后求极限 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \sin \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$, 所以在此点可微。

综上正确的结论有①②④三个, 所以选 C。

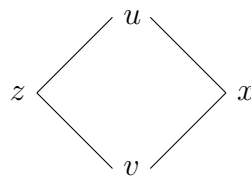
2 多元函数微分法则

2.1 链式求导法则

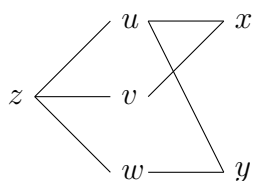
主要对显函数的微分。

多元函数链式求导法则与一元函数的求导法则类似。都是从因变量从中间变量走到自变量。一条路径是一个加项, 多少条从因变量到所有自变量的路就有多少个加项。每条路上由不同的路段组成, 若有 n 层中间变量, 则有 $n+1$ 路段, 路段之间项是乘积形式, 若变量只与一个变量有一条路, 则是导数 d , 若一个变量到多个变量有多条路, 则是偏导数 ∂ 。

因变量 z 到 x 一共有两条路，所以两个和项。每条路都有两端，所以和项中有两个乘项。 z 到 uv 两个中间变量，所以是两个偏导 $\frac{\partial z}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial v}$ 。 uv 都只有一条路直接连通 x ，所以都是导数 $\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{dv}{dx}$ 。一条路的每个路段的项相乘： $\frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}$ 。最后将每条路段相加： $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}$ 。



因为因变量 z 到自变量 x, y 有较多条路径，所以分开分析。



对于 x ，有 $z-u-x$ ，所以这条路为 $\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$ ，还有一条 $z-v-x$ ，由于 v 只与 x 连通，所以是导数，该路为 $\frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}$ ，所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}$ 。

同理对于 y ，有 $z-u-y$ 和 $z-w-y$ ，且 u 有两条出路， w 只有一条，所以 u 偏导， v 导数， $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dy}$ 。

无论 z 对谁求导也无论求了几阶到，求导过后的新函数仍具有与原函数完全相同的复合结构。

例题： 设 $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$ ，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

解： $\because \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$ ， $\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot e^x \sin y + f'_2 \cdot 2x$ 。

在求偏导时，将第一个中间变量记为 f_1 即之前的 u ，第二个中间变量记为 f_2 即之前的 v 。记 f 对 u 求偏导为 f'_1 ，对 v 求偏导为 f'_2 同理二阶导也如此，下标为求导顺序。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(f'_1 \cdot e^x \sin y)}{\partial y} + \frac{\partial(f'_2 \cdot 2x)}{\partial y}。$$

其中 $\frac{\partial(f'_1 \cdot e^x \sin y)}{\partial y} = \frac{\partial f'_1}{\partial y} \cdot e^x \sin y + f'_1 \cdot e^x \cos y$ 。所以难点就是 $\frac{\partial f'_1}{\partial y}$ 。

求导路径 $f'_1 - 1 - y$ 和 $f'_1 - 2 - y$ ： $= (f''_{11} e^x \cos y + f''_{12} 2y) \cdot e^x \sin y + f'_1 \cdot e^x \cos y$ 。

其中 $\frac{\partial(f'_2 \cdot 2x)}{\partial y} = 2x \frac{\partial f'_2}{\partial y}$ ，求导路径 $f'_2 - 1 - y$ 和 $f'_2 - 2 - y$ ： $= 2x(f''_{21} \cdot e^x \cos y + f''_{22} \cdot 2y)$ 。

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (f''_{11} e^x \cos y + f''_{12} 2y) \cdot e^x \sin y + f'_1 \cdot e^x \cos y + 2x(f''_{21} \cdot e^x \cos y + f''_{22} \cdot 2y)。$$

若 f 具有二阶连续偏导数，所以可以交换求导顺序， $f''_{12} = f''_{21}$ 。

化简： $= f'_1 e^x \cos y + f''_{11} e^{2x} \sin y \cos y + 2e^x f''_{12} (y \sin y + x \cos y) + 4f''_{22} xy$ 。

2.2 隐函数存在定理

主要对隐函数的微分。隐函数的最大问题就是变量纠缠在一起，而公式法所得到的式子中变量都是独立的。

若对每个 $x \in D$ 对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数为**单值函数**。若给定一个对应法则，按法则对 x 总有 y 与之对应，但是 y 不唯一，此时就不是函数，而确定一个**多值函数**。

只要满足着定义域的条件下，形如 $y = f(x)$ 的函数就是**显函数**，如 $y = \sin x$ 。由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的函数为**隐函数**，如 $x + y^3 - 1 = 0$ 显式表示为 $y = \sqrt[3]{1-x}$ 。

定义：设函数 $F(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数， $F(x_0, y_0) = 0$ ， $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ，则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y = f(x)$ ，满足 $y_0 = f(x_0)$ 。

定义：二元隐函数求导公式： $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ 。

因为 $y = y(x)$ ，所以对 $F(x, y)$ 进行求导： $F'_x \cdot 1 + F'_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ ，就解出隐函数求导公式， $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ 是定理关键。

如给出一个圆的方程 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ， $F'_x = 2x$ ， $F'_y = 2y$ ， $F(0, 1) = 0$ ， $F'_y(0, 1) = 2 \neq 0$ 。所以在 $(0, 1)$ 和 $(0, -1)$ 是单值的，从而能确定一个连续导数的隐函数，而在 $(\pm 1, 0)$ 的邻域内不存在，因为其切线是竖直的。

定义：设函数 $F(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数， $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ， $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ，则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $z = f(x, y)$ ，满足 $z_0 = f(x_0, y_0)$ 。

定义：三元隐函数求导公式： $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$ 。

因为 x 是 x 的函数， y 是 y 的函数， z 是 xy 的函数。所以 $F'_x \cdot 1 + F'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ，解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$ 。同理 $F'_y \cdot 1 + F'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 也可得。

例题：设 $z = f(x, y)$ 是由方程 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$ 所确定的二元函数，求 dz 。

解： $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ 。其中 $F'_x = -1 + e^{z-y-x} - xe^{z-y-x}$ ， $F'_y = -1 - xe^{z-y-x}$ ， $F'_z = 1 + xe^{z-y-x}$ 。

直接代入： $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{F'_x}{F'_z} - \frac{F'_y}{F'_z} = \frac{1 + (x-1)e^{z-y-x}}{1 + xe^{z-y-x}} + 1$ 。

例题：已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2x dx + \sin y dy$ 且 $f(1, 0) = 2$ ，

求 $f(x, y)$ 。

解: $\because dz = 2x dx + \sin y dy, \therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = \sin y$ 。

对偏导进行积分: $f(x, y) = x^2 + \varphi(y), \frac{\partial(x^2 + \varphi(y))}{\partial y} = \varphi'(y) = \sin y$ 。

又 $\varphi(y) = -\cos y + C, f(x, y) = x^2 - \cos y + C$, 代入 $f(1, 0) = 2$ 。

$C = 2, f(x, y) = x^2 - \cos y + 2$ 。

3 多元函数极值最值

3.1 概念

定义: 若存在 (x_0, y_0) 的某个邻域, 使得在该邻域内的任意一点 (x, y) 均有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ 或 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ 成立, 则称 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的广义的极大值点/极小值点, $f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的广义的极大值/极小值。

定义: 若存在 (x_0, y_0) 的某个去心邻域, 使得在该邻域内的任意一点 (x, y) 均有 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ 或 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ 成立, 则称 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的真正的极大值点/极小值点, $f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的真正的极大值/极小值。

定义: 设 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 定义域内一点, 若对于 $f(x, y)$ 的定义域内任意一点 (x, y) 均有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ 或 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ 成立, 则称 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的广义的最大值点/最小值点, $f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的广义的最大值/最小值。

定义: 设 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 定义域内一点, 若对于 $f(x, y)$ 的定义域内任意一个异于 (x_0, y_0) 的点 (x, y) 均有 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ 或 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ 成立, 则称 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的真正的最大值点/最小值点, $f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的真正的最大值/最小值。

3.2 无条件极值

定理: 二元函数取极值的必要条件: 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 一阶偏导数存在且取极值, 则 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$ 。三元及以上可以类推。

定理: 二元函数取极值的充分条件: 若对函数求二阶偏导
$$\begin{cases} f''_{xx}(x_0, y_0) = A \\ f''_{xy}(x_0, y_0) = B \\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C \end{cases},$$

则 $\Delta = B^2 - AC = \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{极值} \begin{cases} A < 0 \Rightarrow \text{极大值} \\ A > 0 \Rightarrow \text{极小值} \end{cases} \\ > 0 \Rightarrow \text{非极值} \\ = 0 \Rightarrow \text{方法失效, 使用定义法} \end{cases}$ 。只适用于二元函数极值。

例题：求函数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$ 的极值。

解： $f'_x = 4x^3 - 2(x + y) = 0$, $f'_y = 4y^3 - 2(x + y) = 0$, 解得 $x = y = -1, 0, 1$ 。

$f''_{xx} = 12x^2 - 2$, $f''_{xy} = -2$, $f''_{yy} = 12y^2 - 2$ 。各自代入：

$P_1 : A_1 = 10, B_1 = -2, C_1 = 10, \Delta = B_1^2 - A_1 C_1 = -96 < 0, A_1 > 0$, 极小。

同理 P_3 也是极小值点。极小值为-2。

$P_2 : A_2 = -2, B_2 = -2, C_2 = -2, \Delta_2 = B_2^2 - A_2 C_2 = 0$ 。该方法失效。

取 $y = x$ 的路径, $f(x, y) = f(x, x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) < 0$ 。

取 $y = -x$ 的路径, $f(x, y) = f(x, -x) = 2x^4 > 0$ 。而 $f(0, 0) = 0$ 。

所以不同的路径上有大于该值的也有小于该值的, 所以该点不为极值点。

3.3 条件极值与拉格朗日乘数法

求目标函数 $u = f(x, y, z)$ 在一组条件函数 $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0, \dots, \varphi_n(x, y, z) = 0$ 下的最值, 则:

1. 构造辅助函数带 λ_i : $F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z) + \dots + \lambda_n \varphi_n(x, y, z)$, 其中 $\lambda_i \varphi_i$ 为拉格朗日乘数。
2. 对函数依次对 x, y, z, λ_i 求偏导并令为 0: $F'_x = f'_x + \lambda_1 \varphi'_{1x} + \lambda_2 \varphi'_{2x} + \dots + \lambda_n \varphi'_{nx} = 0$, $F'_y = f'_y + \lambda_1 \varphi'_{1y} + \lambda_2 \varphi'_{2y} + \dots + \lambda_n \varphi'_{ny} = 0$, $F'_z = f'_z + \lambda_1 \varphi'_{1z} + \lambda_2 \varphi'_{2z} + \dots + \lambda_n \varphi'_{nz} = 0$, $F'_{\lambda_i} = \varphi_i(x, y, z) = 0$ 。一共 $3 + n$ 个方程。
3. 解上述方程组得备选点 $P_i, i = 1, 2, \dots, n$, 并求 $f(P_i)$ 并取其最大值 m_{\max} 和最小值 u_{\min} 。

例题：求函数 $u = xyz$ 在约束条件 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0)$ 下的最小值。

解：令 $F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{a} \right)$ 。

令 $F'_x = yz + \lambda \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0$, $F'_y = xz + \lambda \left(-\frac{1}{y^2} \right) = 0$, $F'_z = xy + \lambda \left(-\frac{1}{z^2} \right) = 0$, $F'_\lambda = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{a} = 0$ 。

解得 $x = y = z = 3a$, 从而最小值为 $u_{\min} = 27a^3$ 。