

不定积分与定积分

Didnelpsun

目录

1	不定积分	1
1.1	基本积分	1
1.2	换元积分	1
1.2.1	第一类换元	1
1.2.1.1	聚集因式	1
1.2.1.2	积化和差	2
1.2.1.3	三角拆分	2
1.2.2	第二类换元	2
1.3	分部积分	2
1.3.1	基本分部	2
1.3.2	多次分部	2
1.4	有理积分	2
1.4.1	高阶多项式分配	2
1.4.2	低阶多项式分解	3
2	定积分	3
2.1	变限积分	3
2.2	牛莱公式	3
2.3	换元积分	3
2.4	分部积分	3
2.5	反常积分	3
3	积分应用	3
3.1	面积	3

3.2	体积	3
3.3	弧长	3

1 不定积分

1.1 基本积分

例题：汽车以 20m/s 的速度行驶，刹车后匀减速行驶了 50m 停止，求刹车加速度。

已知题目含有两个变量：距离和时间，设距离为 s ，时间为 t 。

因为汽车首先按 20m/s 匀速运动，所以 $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 20$ ，最开始距离为 0，所以 $s|_{t=0} = 0$ 。

又因为是匀减速的，所以速度形如： $v = \frac{s}{t} = kt + b$ ，从而令二阶导数下 $\frac{d^2s}{dt^2} = k$ 。

$$\text{所以 } \frac{ds}{dt} = \int \frac{d^2s}{dt^2} dt = \int k dt = kt + C_1。$$

$$\text{代入 } \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 20, \text{ 所以 } C_1 = 20, \text{ 即 } \frac{ds}{dt} = kt + 20。$$

$$\text{所以 } ds = (kt + 20) dt, \text{ 从而 } s = \int (kt + 20) dt = \frac{1}{2}kt^2 + 20t + C_2。$$

$$\text{又 } s|_{t=0} = 0, \text{ 所以代入得 } C_2 = 0, \text{ 所以 } s = \frac{1}{2}kt^2 + 20t。$$

$$\text{当 } s = 50 \text{ 时停住，所以此时 } \frac{ds}{dt} = 0, \text{ 得到 } t = -\frac{20}{k}。$$

$$\text{代入 } s: 50 = \frac{1}{2}k \left(-\frac{20}{k}\right)^2 + 20 \left(-\frac{20}{k}\right), \text{ 解得 } k = -4, \text{ 即加速度为 } -4\text{m/s}^2。$$

1.2 换元积分

1.2.1 第一类换元

1.2.1.1 聚集因式

将复杂的式子转换为简单的一个因式放到 d 后面看作一个整体，然后利用基本积分公式计算。

$$\text{例题：} \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}。$$

$$= \int \frac{d(\ln x)}{\ln x \ln \ln x} = \int \frac{d(\ln \ln x)}{\ln \ln x} = \ln |\ln \ln x| + C。$$

$$\text{例题：} \int \frac{10^{2 \arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx。$$

$$= - \int 10^{2 \arccos x} d(\arccos x) = -\frac{1}{2} \int 10^{2 \arccos x} d(2 \arccos x) = -\frac{10^{2 \arccos x}}{2 \ln 10} + C。$$

1.2.1.2 积化和差

对于两个三角函数的乘积可以使用积化和差简单计算。

$$\begin{aligned}\text{例题: } & \int \sin 2x \cos 3x \, dx. \\ &= \int \cos 3x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 5x \, dx - \frac{1}{2} \int \sin x \, dx = -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C.\end{aligned}$$

1.2.1.3 三角拆分

主要用于 $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$, 当出现 \tan^2 、 \tan^3 等与 $\sec x$ 在一起作为乘积时可以考虑拆分。

$$\begin{aligned}\text{例题: } & \int \tan^3 x \sec x \, dx. \\ &= \int (\sec^2 x - 1) \tan x \sec x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, d(\sec x) = \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C.\end{aligned}$$

1.2.2 第二类换元

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$: $x = a \sin t (a \cos t)$ 。
2. $\sqrt{a^2 + x^2}$: $x = a \tan t$ 。
3. $\sqrt{x^2 - a^2}$: $x = a \sec t$ 。

1.3 分部积分

1.3.1 基本分部

1.3.2 多次分部

1.4 有理积分

1.4.1 高阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx$, 且 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都为与 x 相关的多项式, $f(x)$ 阶数高于或等于 $g(x)$, 则 $f(x)$ 可以按照 $g(x)$ 的形式分配, 约去式子, 得到最简单的表达。

$$\begin{aligned}\text{例题: } & \int \frac{x^3}{x^2 + 9} \, dx. \\ &= \int \frac{x^3 + 9x - 9x}{x^2 + 9} \, dx = \int \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 9} \, dx - \int \frac{9x}{x^2 + 9} \, dx\end{aligned}$$

$$= \int x \, dx - \frac{9}{2} \int \frac{d(x^2 + 9)}{x^2 + 9} = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2} \ln(9 + x^2) + C。$$

1.4.2 低阶多项式分解

当不定积分式子形如 $\int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx$ ，且 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都为与 x 相关的多项式， $f(x)$ 阶数低于 $g(x)$ ，则可以分解式子：
$$\int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx = \int \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \, dx + \int \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \, dx。$$

2 定积分

2.1 变限积分

2.2 牛莱公式

2.3 换元积分

2.4 分部积分

2.5 反常积分

3 积分应用

3.1 面积

3.2 体积

3.3 弧长