无穷级数

Didnelpsun

目录

1 常数项级数

1.1 正项级数

1.1.1 放缩法

即根据收敛准则来进行判断。如果要判断原级数收敛，则辅助级数应该是对其放大，判断原级数发散，则辅助级数应该是对其缩小。

1.1.2 比较判别法

都需要找到一个好的级数进行比较。常用的只有两个：

p 级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases} p>1,\text{收敛} \\ p\leqslant 1,\text{发散} \end{cases}$。

等比级数（几何级数）：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}q^{n-1}\begin{cases} |q|<1,\text{收敛} \\ |q|\geqslant 1,\text{发散} \end{cases}$。

1.1.3 比值判别法

适用于含有 a^n，$n!$，n^n 的通项。主要是 $n!$。

例题：判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$。

解：利用比值判别法，令 $a_n=\frac{n!}{n^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$，注意这里幂也为变量，不是等于 1 而是上下同时除以 n^n，$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$，根据两个重要极限得到 $=\frac{1}{e}<1$，所以收敛。

1.1.4 根值判别法

适用于含有 a^n，n^n 的通项。

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

1.1.5 积分判别法

例题：判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 的敛散性。

解：因为 $\frac{1}{n\ln n}<\frac{1}{n}$，调和级数发散，所以比较判别法找不到一个较好的辅助级数。同理根据级数形式比值和根值判别法都无法使用。

令 $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$，$a_n=f(n)$，在 $[2,+\infty)$ 上 $\frac{1}{n\ln n}$ 单调减且非负。

级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 与 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ 同敛散。
$=\ln\ln x|_2^{+\infty}=+\infty$，所以原级数发散。

1.2 交错级数

2 幂级数

2.1 收敛域

2.1.1 基本方法

使用比值或根值法进行求解。

例题：求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径。

解：

比值法：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}-(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{e^n-(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e+(\frac{-1}{e})^n}{1-(\frac{-1}{e})^n}。$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0 & |x|<1\\ \infty & |x|\geqslant 1\end{cases}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-1}{e}\right)^n=0$，原式 $=e$。$R=\dfrac{1}{e}$。

根值法：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e\sqrt[n]{1-(-\frac{-1}{e})^n}}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}}，又 \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1。$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e\sqrt[n]{1-0}}{1\cdot 1}=e，所以 R=\frac{1}{e}。$$

2.1.2 缺项变换

例题：求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径。

解: 由于分母都是幂函数,所以使用根值法: $=\lim\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3^n+(-2)^n}}$

$$=\lim_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1+(-\frac{2}{3})^n}}=\frac{1}{3}。$$

所以 $R=3$。注意这里是错误的，因为之前求收敛域时都是 x^n，而这里是 x^{2n-1}，只有奇数次项，所以幂级数的一半都没有了。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n}\approx\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x^2)^n$，当前已知收敛半径为 3，即 $|x^2|<3$，即 $|x|<\sqrt{3}$。

2.1.3 收敛域变换

例题：已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域。

解：根据阿贝尔定理，已知在 $x=0$ 处收敛，且中心点在 $x=-2$，则收敛区间为 $(-4,0)$，在 $x=-4$ 处发散，则 $x<-4$，$x>0$ 处发散。

然后确定两端端点敛散性，$x=0$ 处收敛则收敛域包括 $x=0$，$x=-4$ 处发散则收敛域不包括 $x=-4$，得到收敛域 $(-4,0]$。

对于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的中心点为 $x=3$，则根据相对位置收敛域为 $(1,5]$。

2.1.4 常数项级数变换

可以代入特殊点确定收敛点，将幂级数转换为常数项级数。

例题：若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 条件收敛，求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的收敛区间。

解：已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 而言在 $x=2$ 处条件收敛，即得到以中心点 $x=1$ 的收敛区间 $(0,2)$。

2.2 函数展开

2.2.1 因式分解

例题：将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开为 $x-1$ 的幂级数并指出收敛区间。

解：$\dfrac{1}{x^2-3x-4}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+1}\right)$。

$\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{(x-1)-3}=-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^n$，$\left|\dfrac{x-1}{3}\right|<1$，$x\in(-2,4)$。

$\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{(x-1)+2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x-1}{2}\right)^n$，$\left|-\dfrac{x-1}{2}\right|<1$，$x\in(-1,3)$。

所以其幂级数就是其加和，收敛区间为 $(-2,4)\cap(-1,3)=(-1,3)$。

2.3 级数求和

即对展开式进行逆运算，根据幂级数展开式反推原幂级数。

可以利用展开式求和函数，但是很多展开式的通项都不是公式中的，就需要对通项进行变形。

2.3.1 先导后积

n 在分母上，先导后积。使用变限积分：$\int_{x_0}^{x} S'(t)\,\mathrm{d}t = S(x) - S(x_0)$，即 $S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^{x} S'(t)\,\mathrm{d}t$。一般选择 x_0 为展开点。

例题： 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ 的和函数。

解：已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$，而这里求和是 $\dfrac{x^n}{n}$，所以需要对其进行转换。

对 $\dfrac{x^n}{n}$ 求导就得到了 x^{n-1} 消去了分母的 n，所以使用先导后积的方法。

记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$，则 $x^n = (x-0)^n$，取 $x_0 = 0$。

$\therefore S(x) = S(0) + \displaystyle\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\right)_t' \mathrm{d}t = 0 + \int_0^x (\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1})\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = -\ln(1-x)$。收敛域为 $[-1,1)$。

2.3.2 先积后导

n 在分子上，先积后导。$(\int S(x)\,\mathrm{d}x)' = S(x)$。

例题： 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数。

解：记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = x(\int \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\,\mathrm{d}x)' = x(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n)' = x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{x}{(1-x)^2}$。收敛域为 $[-1,1]$。

例题： 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的和函数。

解：$(n+1)(n+3)$ 的形式可以推出 $(n+1)(n+2)$ 是求两次导的结果，而这里是 $(n+1)(n+3)$，所以拆开：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)'' + \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)' = \left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)'' + \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{3-x}{(1-x)^3}$，$x \in (-1,1)$。

3 傅里叶级数