标题

Didnelpsun

目录

1 总体与样本

1.1 总体定义

定义：研究对象的全体称为**总体**，组成总体的每一个元素称为**个体**。

1.2 样本

1.2.1 定义

定义：n 个相互独立且域总体 X 有相同概率分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所组成的整体 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为来自总体 X，容量为 n 个一个**简单随机样本**，简称**样本**。一次抽样结果的 n 个具体值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为来自样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个**观测值**或**样本值**。

在概率论中称为独立同分布，而在数理统计就称为简单随机样本。

1.2.2 分布

对于容量为 n 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 有如下定理：假设总体 X 的分布函数为 $F(x)$（概率密度为 $f(x)$，或概率分布为 $p_i = P\{X = x_i\}$），则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} F(x_i)$。

对于离散型随机变量联合分布：$F(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$。

对于连续型随机变量联合概率密度：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$。

2 统计量与分布

2.1 统计量

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自总体 X 的一个样本，$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 元函数，若 g 中不含有任何未知参数，则称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个**统计量**。若 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为样本值，则称 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**观测值**。

2.2 常用统计量

- 样本均值：$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$。
- 样本方差：$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$。
- 样本标准差：$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$。
- 样本 k 阶（原点）矩：$A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$（$k=1,2,\cdots$）。
- 样本 k 中心矩：$B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$（$k=1,2,\cdots$）。

2.3 顺序统计量

2.3.1 概念

将样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的 n 个观测量按其值从小到大的顺序排列，得到 $X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$。

随机变量 $X_{(k)}$（$k=1,2,\cdots,n$）称为**第 k 顺序统计量**，其中 $X_{(1)}$ 是最小顺序统计量，而 $X_{(n)}$ 是最大顺序统计量。

$X_{(n)}$ 的分布函数为 $F_{(n)}(x)=[F(x)]^n$，概率密度为 $f_{(n)}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)$。

证明：$F_{(n)}(x)=P\{X_{(n)}\leqslant x\}=P\{\max\{x_1,\cdots,x_n\}\leqslant x\}=P\{x_1\leqslant x,\cdots,x_n\leqslant x\}=P\{x_1\leqslant x\}\cdots P\{x_n\leqslant x\}=F_{(1)}(x)\cdots F_{(n)}(x)=[F(x)]^n$。

$X_{(1)}$ 的分布函数为 $F_{(1)}(x)=1-[1-F(x)]^n$，概率密度为 $f_{(1)}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)$。

证明：$F_{(1)}(x)=P\{X_{(1)}\leqslant x\}=P\{\min\{x_1,\cdots,x_n\}\leqslant x\}=1-P\{\min\{x_1,\cdots,x_n\}>x\}=1-P\{x_1>x,\cdots,x_n>x\}=1-P\{x_1>x\}\cdots P\{x_n>x\}=1-[1-P\{x_1\leqslant x\}]\cdots[1-P\{x_n\leqslant x\}]=1-[1-F_{(1)}(x)]\cdots[1-F_{(n)}(x)]=1-[1-F(x)]^n$。

2.3.2 性质

设总体 X 的期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 取自 X，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本的均值和方差，则：

- $EX_i=\mu$。
- $DX_i=\sigma^2$。

- $E\overline{X} = EX = \mu$。
- $D\overline{X} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{1}{n}DX = \frac{\sigma^2}{n}$。
- $E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2)\right) = E\left(\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\overline{x}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i+n\overline{x}^2\right)\right) = E\left(\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}Ex_i^2-nE\overline{x}^2\right) = \frac{n}{n-1}[(Ex_i)^2+Dx_i-(E\overline{x})^2-D\overline{x}] = \frac{n}{n-1}\left(\mu^2+\sigma^2-\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}\right) = DX = \sigma^2$。

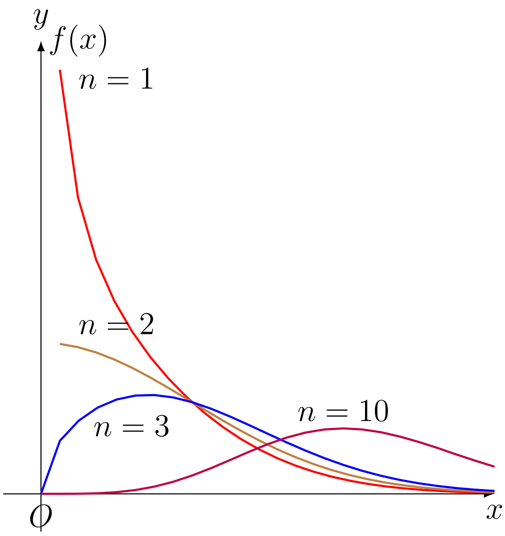
2.4 三大分布

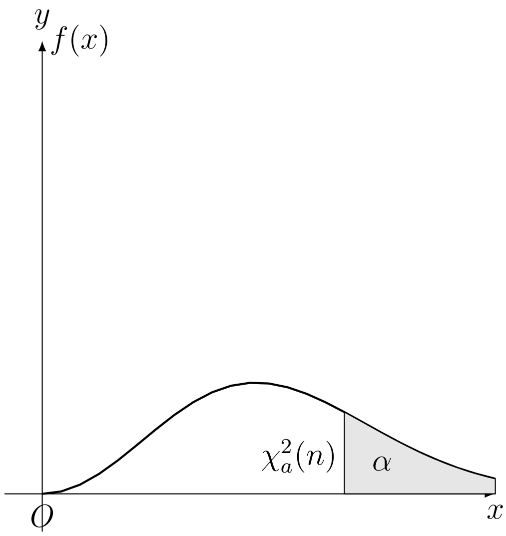
2.4.1 χ^2 分布

2.4.1.1 概念

定义：若随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都服从标准正态分布，则随机变量 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $X \sim \chi^2(n)$，特别地 $X_i^2 \sim \chi^2(1)$。

对给定的 α（$0 < \alpha < 1$）称满足 $P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha$ 的 $\chi^2_\alpha(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的**上 α 分位点**。





2.4.1.2 性质

- 若 $X_1 \sim \chi^2(n_1)$，$X_2 \sim \chi^2(n_2)$，X_1X_2 相互独立，则 $X_1+X_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$。一般，若 $X_i \sim \chi^2(n_i)$（$i = 1, 2, \cdots, m$），$X_1, X_2, \cdots, X_m$ 相互独立，则

$\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$。

- 若 $X \sim \chi^2(n)$，则 $EX = n$，$DX = 2n$。

2.4.2 t 分布

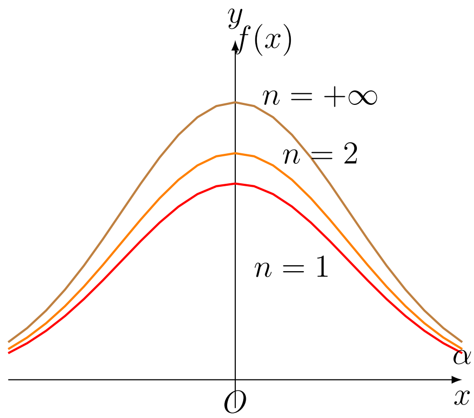
2.4.2.1 概念

也称为学生分布。

若随机变量 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，XY 相互独立，则随机变量 $t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $t \sim t(n)$。

当 $t \to \infty$ 时，t 分布就是标准正态分布。其是偶函数，所以 $Et = 0$。

t 分布用于根据小样本来估计呈正态分布且方差未知的总体的均值。



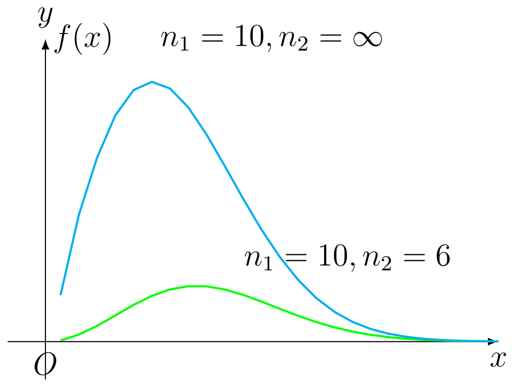
2.4.2.2 性质

由 t 分布的概率密度 $f(x)$ 图形的对称性可知 $P\{t > -t_\alpha(n)\} = P\{t > t_{1-\alpha}(n)\}$，所以 $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$。

2.4.3 F 分布

2.4.3.1 概念

若随机变量 $X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布，记为 $F \sim F(n_1, n_2)$，其中 n_1 为第一自由度，n_2 为第二自由度。



2.4.3.2 性质

- 若 $F \sim F(n_1, n_2)$，则 $\dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$。
- $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha}(n_2, n_1)$。

证明性质二：记 $F \sim F(n_2, n_1)$。
$\therefore P\{F > F_\alpha(n_2, n_1)\} = \alpha$，$P\{F \leqslant F_\alpha(n_2, n_1)\} = 1-\alpha$。
取倒数：$P\left\{\dfrac{1}{F} \geqslant \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}\right\} = 1-\alpha$。
又根据性质 1：$\dfrac{1}{F} \sim F(n_1, n_2)$，$P\{\dfrac{1}{F} \geqslant F_{1-\alpha}(n_1, n_2)\} = 1-\alpha$。
即 $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha}(n_2, n_1)$。

2.5 正态总体下结论

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$，S^2 分别是样本的均值和方差，则：

1. $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，即 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$。
2. $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$。$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$。
3. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$（$\mu$ 未知时，在 2 中用 $\overline{X}$ 代替 μ）。
4. $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$（$\sigma$ 未知时在 1 中用 S 代替 σ）。
   进一步有 $\dfrac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$。

3 参数点估计

3.1 概念

定义： 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，其中 θ 为一个未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的一个样本。由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 作为参数 θ 的估计，称统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 θ 的**估计量**，一般记为 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$。

如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是样本的一个观察值，将其代入估计量 $\hat{\theta}$ 中得到值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，并且此值作为未知参数 θ 的参数值，统计值称这个值为未知参数 θ 的**估计值**。

建立一个适当的统计量作为未知参数 θ 的估计量并以相应的观察值作为未知参数估计值的问题，就是参数 θ 的**点估计问题**。

3.2 方法

3.2.1 矩估计法

使用替换思想，用样本距来估计总体距。

1. 写出总体 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$，其中 μ 含有参数 θ。
2. 写出样本 k 阶矩 $A_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X^k$，$A_k$ 只与样本有关。
3. 令总体 k 阶矩 = 样本 k 阶矩，即 $E(X^k) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X^k$，就得到了 θ 的方程。

例题： 来自总体的 X 的简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，总体 X 的概率分布为 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2\theta & \theta & 1-3\theta \end{pmatrix}$，其中 $0 < \theta < \dfrac{1}{3}$，求参数 θ 的矩估计量。

解：令 $\overline{X} = EX$，即 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = (-1)2\theta + 0\theta + 2(1-3\theta) = 2 - 8\theta$。

所以 $\hat{\theta} = \dfrac{2-\overline{X}}{8}$。

例题： 来自总体的 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} (1+\theta)x^{\theta}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，其中 $\theta > -1$ 为未知参数，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本容量为 n 的简单随机样本，求 θ 的矩估计量。

解：令 $\overline{X}=EX$，$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x(1+\theta)x^\theta\,\mathrm{d}x=(1+\theta)\left.\dfrac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\right|_0^1=\dfrac{1+\theta}{2+\theta}$。

解得 $\hat\theta=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$。

3.2.2 最大似然估计

3.2.2.1 定义

对未知参数 θ 进行估计时，在该参数可能取值的范围 I 内选取，使得样本获得次观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的概率最大的参数值 $\hat\theta$ 作为 θ 的估计，这样的 $\hat\theta$ 最有利于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的出现。

设总体 X 是离散型，其概率分布为 $P\{X=x\}=p(x;\theta)$，$\theta\in I$，θ 为未知参数，$X_1,X_2\cdots,X_n$ 为 X 的一个样本，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的概率为 $P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=\prod\limits_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$。显然这个概率值为 θ 的函数，记为 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$。称 $L(\theta)$ 为样本的**似然函数**。

定义：若存在 $\hat\theta\in I$，使得 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat\theta)=\max\limits_{\theta\in I}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$，则称 $\hat\theta=\hat\theta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为参数 θ 的**最大似然估计**，对应的统计量 $\hat\theta(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为参数 θ 的**最大似然估计量**。

同理若总体 X 为连续型随机变量，其概率密度为 $f(x;\theta)$，$\theta\in I$，则样本的**似然函数**为 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$.

定义：若存在 $\hat\theta\in I$，使得 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\max\limits_{\theta\in I}\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$，则称 $\hat\theta=\hat\theta(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为参数 θ 的**最大似然估计**，对应的统计量 $\hat\theta(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为参数 θ 的**最大似然估计量**。

3.2.2.2 步骤

1. 写出样本的似然函数。$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$。

2. 如果 $p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 或 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 关于 θ_i 可微，则令 $\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_i}=0$ 或 $\dfrac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta_i}=0$。由于 $L(\theta)$ 是乘积形式，且 $\ln x$ 单调增，所以 $L(\theta)$ 域

$\ln L(\theta)$ 在同一 θ 处取极值，所以更多采用后面一种对数似然方程组来解。求得 θ_i 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$（$i=1,2,\cdots,k$）。

3. 如果 $p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 或 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 不可微，或似然方程组无解，则应由定义用其他方法求 $\hat{\theta}$，如当 $L(\theta)$ 为 θ 的单调函数时，$\hat{\theta}$ 为 θ 的取值上限或下限。

即将概率密度或概率分布连乘，然后取对数，再求导令其为 0 解出 $\hat{\theta}$。

例题：设总体 X 的概率分布为：

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\int\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 为未知参数，从总体 X 中抽取容量为 8 的一组样本，其样本值为 3，1，3，0，3，1，2，3。求 θ 的矩估计值和最大似然估计值。

解：首先将所有的概率相乘：$L(\theta)l=(1-2\theta)^4[2\theta(1-\theta)]^2\cdot\theta^2\cdot\theta^2=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$。

对其求对数：$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$。

对其求导：$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{6}{\theta}-\dfrac{2}{1-\theta}-\dfrac{8}{1-2\theta}=0$。解得 $\theta=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$。

$0<\theta<\dfrac{1}{2}$，舍去正值，得到 $\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$。

例题：来自总体的 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}(1+\theta)x^\theta, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 $\theta>-1$ 为未知参数，设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本容量为 n 的简单随机样本，求 θ 的最大似然估计量。

解：这是上面的矩估计的题目的延申。

首先 $L(\theta)=(1+\theta)x_1^\theta\cdot(1+\theta)x_2^\theta\cdots=(1+\theta)\cdot\prod\limits_{i=1}^n x_i^\theta$。

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln(1+\theta)+\theta\sum\limits_{i=1}^n\ln x_i$

对其求导：$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{n}{1+\theta}+\sum\limits_{i=1}^n\ln x_i=0$，解得 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^n\ln x_i}-1$。

最大似然估计量为 $-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^n\ln X_i}-1$。

注意：估计值用小写 x，估计量用大写 X。

3.3 估计量平均标准

不同的估计法所产生的估计量有所差异，需要有一套标准来评判估计量。

3.3.1 无偏性

定义：若参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 对一切 n 及 $\theta\in I$，有 $E\hat{\theta}=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**无偏估计量**。

例题：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，为使 $D=k\sum\lim\limits_{i=1}^{n}-1(X_{i+1}-X_i)^2$ 称为总体方差 σ^2 的无偏估计量，求 k。

解：已知总体方差为 σ^2，所以代入：

$ED=\sigma^2=kE(\sum\lim\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2)=kE(\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}^2-2X_iX_{i+1}+X_i^2))$。

已知样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$。所以为什么样本方差要除以 $n-1$ 而不是 n？可以利用无偏性来证明。

证明：根据方差 $DX_i=EX_i^2-E^2X_i$，从而 $EX_i^2=DX_i+E^2X_i=\sigma^2+\mu^2$，类似 $D\overline{X}=E(\overline{X}^2)-(E\overline{X})^2$，$D\overline{X}=D\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}DX_i=\dfrac{1}{n^2}n\sigma^2=\dfrac{\sigma^2}{n}$。

$\therefore E(\overline{X}^2)=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\dfrac{\sigma^2}{n}+\mu^2$。

所以对样本方差求期望：$ES^2=E\left(\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)\right)=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\right)=\dfrac{1}{n-1}\left(n(\sigma^2+\mu^2)-n\left(\dfrac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right)=\sigma^2$。

3.3.2 有效性

也称为最小方差性。只有同样的无偏性才能比较有效性。

定义：设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量，若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ **有效**。

$EX_i^2=EX_{i+1}^2=(EX_{i+1})^2+DX_{i+1}=\mu^2+\sigma^2$，$2EX_iE_{i+1}=2(EX_i)^2=2\mu^2$。

代入：$=k\sum\limits_{i=1}^{n-1}(2\mu^2+2\sigma^2-2\mu^2)=2k\sigma^2(n-1)=\sigma$。解得 $k=\dfrac{1}{2(n-1)}$。

3.3.3 一致性

也称为相合性。

定义：设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为未知参数 θ 的估计量，若对任意 $\epsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\epsilon\}=1$，即 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta(n\to\infty)$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**一致估计量**（**相合估计量**）。

4 参数区间估计与假设检验

区间估计和假设检验都是基于小概率事件基本上不可能发生的情况。

4.1 区间估计

区间估计是根据样本估计总体期望 μ 所在的区间。有两个参数，一个是区间长度，一个是落入概率。

4.1.1 概念

定义：已知从总体 X 中取出一部分样本 X_n，则这些样本的平均值 $\overline{X}$ 不一定等于 X 的期望即应该的平均值 μ，但是其之间的差距应该不大，即差距较小的概率较大，从而表示为 $P(|\overline{X}-\mu|<\Delta)=1-\alpha$，$\alpha$ 为**显著性水平**，其一般是一个较小的正数。而 $1-\alpha$ 称为**置信度**或**置信水平**。

定义：$I=I(T,\theta)$，T 为已知常量，θ 为未知参数，其分布 F 已知且与 θ 无关，则 I 为**枢轴变量**。给定 $1-\alpha$，确定 F 上的上 $\dfrac{\alpha}{2}$ 分位数 $Z-\frac{\alpha}{2}$，上 $1-\dfrac{\alpha}{2}$ 分位数 $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$，则 $P\{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\leqslant I(T,\theta)\leqslant Z_{\frac{\alpha}{2}}=1-\alpha$。

即 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 是参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计，则区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 包含参数 θ 的概率为 $1-\alpha$。

4.1.2 正态总体均值的置信空间

4.1.2.1 估计 μ 而 σ 已知

假设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（若不服从正态分布就用中心极限定理来解决）。则 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<\dfrac{\Delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$。记 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=Z$，则 $Z\sim N(0,1)$。

其中置信区间为 $(\mu-\Delta,\mu+\Delta)$。

$\therefore P\left(|Z|<\dfrac{\Delta}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$，从而中间面积为 $1-\alpha$，得到两端面积 $\dfrac{\alpha}{2}$。

得到上 α 分位数 $Z_{\frac{\alpha}{2}}$，$\therefore\dfrac{\Delta}{\sigma/\sqrt{n}}=Z_{\frac{\alpha}{2}}$，解得 $\Delta=Z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$。

代入：解得 $\mu\in(\overline{X}-\Delta,\overline{X}+\Delta)=(\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$。

这个 μ 所处的区间就是**置信区间**，区间上限就是**置信上限**，区间下限就是**置信下限**。

4.1.2.2 估计 μ 而 σ 未知

当 σ 未知的时候就无法求出置信区间了，所以根据正态总体下的结论，用样本方差 S 代替方差 σ，且 $\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$。

所以 $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < \dfrac{\Delta}{S/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$，令 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = t$，所以 $t \sim t(n-1)$。

可得上 α 分位点 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，所以 $\dfrac{\Delta}{S/\sqrt{n}} = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，解得 $\Delta = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$。

代入：解得 $\mu \in (\overline{X}-\Delta, \overline{X}+\Delta) = \mu \in (\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}})$。

综上：求置信空间的关键是求 Δ：

参数	条件	置信区间
μ	σ 已知	$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
	σ 未知	$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$
σ	μ 未知	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

4.2 假设检验

已经有了对期望 μ 的假设，对这个假设进行检验。若所处的区间在拒绝域中，就拒绝原假设。

4.2.1 思想

已经有了假设样本期望为 $\mu = \mu_0$。则 $P(|\overline{X}-\mu_0| < \Delta) = 1-\alpha$，所以取对立事件 $P(|\overline{X}-\mu_0| \geqslant \Delta) = \alpha$，这是一个小概率事件。若对这个小概率事件发生了，则否定原假设。

若 σ 已知，则 $\Delta = Z_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$，则区间 $(-\infty, \mu_0-\Delta] \cup [\mu_0+\Delta, +\infty)$ 称为**拒绝域**，即小概率发生的区间。

若 σ 未知，则 $\Delta = t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$，拒绝域一样。

设 θ 为总体位置参数，θ_0 为已知常数，则假设检验类型：

类型		H_0	H_1
双边检验		$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$
单边检验	右边	$\theta \leqslant \theta_0$	$\theta > \theta_0$
	左边	$\theta \geqslant \theta_0$	$\theta < \theta_0$

4.2.2 正态总体下的六大检验与拒绝域

4.3 两类错误

显著性水平 α 实际上是犯第一类错误的概率的上界。

类型	第一类错误	第二类错误
含义	若 H_0 为真，否定 H_0（弃真）	若 H_0 为假，接受 H_0（存伪）
发生概率	$\alpha = P\{拒绝H_0 \| H_0为真\}$	$\beta = P\{接受H_0 \| H_0为假\}$ $= P\{接受H_0 \| H_1为真\}$
说明	仅控制犯第一类错误的概率 的检验称为显著性检验， 概率为显著性水平	当样本容量固定， 则 α 和 β 中任意一个减少， 则另一个必然增大， 若要同时增大， 则只能增大样本容量

检验参数	条件	原假设 H_0	备择假设 H_1	检验法与统计量	拒绝域
μ	$\sigma = \sigma_0$	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	U 检验 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\|u\| \geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$
		$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$u \geqslant u_\alpha$
		$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$u \leqslant u_\alpha$
	σ 未知	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	T 检验 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\|t\| \geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
		$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$t \geqslant t_\alpha(n-1)$
		$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$t \leqslant t_\alpha(n-1)$
μ	μ 已知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	χ^2 检验 $\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ $\sim \chi^2(n)$	$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ $\chi^2 \geqslant \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$
		$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha(n)$
		$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}(n)$
	μ 未知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	χ^2 检验 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ $\sim \chi^2(n-1)$	$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $\chi^2 \geqslant \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
		$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha(n-1)$
		$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 \leqslant \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$