

不定积分与定积分

Didnelpsun

目录

1	不定积分	1
1.1	基本积分	1
1.2	换元积分	1
1.2.1	第一类换元	1
1.2.1.1	聚集因式	1
1.2.1.2	积化和差	2
1.2.1.3	三角拆分	2
1.2.2	第二类换元	2
1.2.2.1	$\sqrt{a^2 - x^2}$: $x = a \sin t (a \cos t)$	2
1.2.2.2	$\sqrt{a^2 + x^2}$: $x = a \tan t$	3
1.2.2.3	$\sqrt{x^2 - a^2}$: $x = a \sec t$	3
1.2.2.4	辅助换元	4
1.3	分部积分	4
1.3.1	基本分部	4
1.3.1.1	非幂函数优先	4
1.3.1.2	幂函数优先	5
1.3.2	多次分部	5
1.3.3	分部与换元	5
1.4	有理积分	5
1.4.1	高阶多项式分配	5
1.4.2	低阶多项式分配	6

2	定积分	7
2.1	变限积分	7
2.2	牛莱公式	7
2.3	换元积分	7
2.4	分部积分	7
2.5	反常积分	7
3	积分应用	7
3.1	面积	7
3.2	体积	7
3.3	弧长	7

1 不定积分

1.1 基本积分

例题：汽车以 20m/s 的速度行驶，刹车后匀减速行驶了 50m 停止，求刹车加速度。

已知题目含有两个变量：距离和时间，设距离为 s ，时间为 t 。

因为汽车首先按 20m/s 匀速运动，所以 $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 20$ ，最开始距离为 0，所以 $s|_{t=0} = 0$ 。

又因为是匀减速的，所以速度形如： $v = \frac{s}{t} = kt + b$ ，从而令二阶导数下 $\frac{d^2s}{dt^2} = k$ 。

所以 $\frac{ds}{dt} = \int \frac{d^2s}{dt^2} dt = \int k dt = kt + C_1$ 。

代入 $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 20$ ，所以 $C_1 = 20$ ，即 $\frac{ds}{dt} = kt + 20$ 。

所以 $ds = (kt + 20) dt$ ，从而 $s = \int (kt + 20) dt = \frac{1}{2}kt^2 + 20t + C_2$ 。

又 $s|_{t=0} = 0$ ，所以代入得 $C_2 = 0$ ，所以 $s = \frac{1}{2}kt^2 + 20t$ 。

当 $s = 50$ 时停住，所以此时 $\frac{ds}{dt} = 0$ ，得到 $t = -\frac{20}{k}$ 。

代入 s ： $50 = \frac{1}{2}k \left(-\frac{20}{k}\right)^2 + 20 \left(-\frac{20}{k}\right)$ ，解得 $k = -4$ ，即加速度为 -4m/s^2 。

1.2 换元积分

1.2.1 第一类换元

1.2.1.1 聚集因式

将复杂的式子转换为简单的一个因式放到 d 后面看作一个整体，然后利用基本积分公式计算。

例题： $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}$ 。

$= \int \frac{d(\ln x)}{\ln x \ln \ln x} = \int \frac{d(\ln \ln x)}{\ln \ln x} = \ln |\ln \ln x| + C$ 。

例题： $\int \frac{10^{2 \arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 。

$= -\int 10^{2 \arccos x} d(\arccos x) = -\frac{1}{2} \int 10^{2 \arccos x} d(2 \arccos x) = -\frac{10^{2 \arccos x}}{2 \ln 10} + C$ 。

1.2.1.2 积化和差

对于两个三角函数的乘积可以使用积化和差简单计算。

$$\begin{aligned}\text{例题: } & \int \sin 2x \cos 3x \, dx. \\ &= \int \cos 3x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 5x \, dx - \frac{1}{2} \int \sin x \, dx = -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C.\end{aligned}$$

1.2.1.3 三角拆分

主要用于 $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$, 当出现 \tan^2 、 \tan^3 等与 $\sec x$ 在一起作为乘积时可以考虑拆分。

$$\begin{aligned}\text{例题: } & \int \tan^3 x \sec x \, dx. \\ &= \int (\sec^2 x - 1) \tan x \sec x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, d(\sec x) = \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C.\end{aligned}$$

1.2.2 第二类换元

使用换元法做了换元之后是要带回式子中的, 也就是说要保证反函数的存在才能代入有意义。为了保证反函数的存在, 因此要保证原函数的单调性, 所以要有一个规定的范围来使原函数保证单调。

1.2.2.1 $\sqrt{a^2 - x^2}$: $x = a \sin t (a \cos t)$

若令 $x = a \sin t$, 则根据 $\sin t \in (-1, 1)$ 得到主区间: $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

若令 $x = a \cos t$, 则根据 $\cos t \in (-1, 1)$, 得到主区间: $t \in (0, \pi)$ 。

$$\text{例题: 求 } \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

令 $x = \sin t (t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right))$, 所以 $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$, $dx = \cos t \, dt$, $t = \arcsin x$ 。

因为式子 $\frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} > 0$, 单调递减, 所以不用讨论正负号。

$$\begin{aligned}&= \int \frac{\cos t}{1 + \cos t} dt = \int \frac{2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = \int dt - \int \sec^2 \frac{t}{2} dt = t - \tan \frac{t}{2} + C \\ &= t - \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} + C = t - \frac{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2}} + C = t - \frac{\sin t}{1 + \cos t} + C \\ &= \arcsin x - \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + C.\end{aligned}$$

1.2.2.2 $\sqrt{a^2+x^2}$: $x = a \tan t$

根据 $\tan t \in R$, 从而得到主空间: $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

例题: 求 $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2} dx$ 。

虽然本题目看着可以从分母解开平方, 然后低阶分配, 但是这分母是平方的式子很难分配, 所以需要使用换元法。

令 $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x^2+1 = \sec^2 t$, $dx = \sec^2 t dt$ 。

因为 $(x^2+1)^2 > 0$, 虽然 x^3+1 可能为负可能为正, 但是都是单调递增的, 所以不用考虑正负号。

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\tan^3 t + 1}{\sec^2 t} dt = \int \frac{\sin^3 t + \cos^3 t}{\cos t} dt = \int \frac{\sin t(1 - \cos^2 t) + \cos^3 t}{\cos t} dt \\ &= \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} d(\cos t) + \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \int \cos t d(\cos t) - \int \frac{1}{\cos t} d(\cos t) + \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{4} \int \cos 2t d(2t) \\ &= \int \cos t - \ln |\cos t| + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C \quad (\cos t \text{ 在 } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 中为正}) \\ &\because \tan t = x, \therefore \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}。 \\ &= \frac{1+x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \arctan x + C。 \end{aligned}$$

1.2.2.3 $\sqrt{x^2-a^2}$: $x = a \sec t$

根据 $\sec t \in (-1, 1)$, 所以从而得到主空间: $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

例题: 求 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$ 。

令 $x = 3 \sec t$ 。 $\therefore \sqrt{x^2-9} = 3 \tan t$, $dx = 3 \sec t \tan t dt$ 。

因为式子 $\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$ 的分子必然为正, 而对于分子在 0 两边的单调性不同, 所以需要对 x 进行正负区分, 又 $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, 所以:

当 $x > 3$ 时, $\sec t > 1$, 即 $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

$$\begin{aligned} &= \int 3 \tan^2 t dt = 3 \int (\sec^2 t - 1) dt \\ &= 3 \tan t - 3t + C = \sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{x} + C。 \end{aligned}$$

当 $x < -3$ 时, $\sec t < -1$, 即 $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 。

$$\begin{aligned} &= - \int 3 \tan^2 t dt = -3 \int (\sec^2 t - 1) dt \\ &= -3 \tan t + 3t + C = \sqrt{x^2-9} + 3 \arccos \frac{3}{x} + C \quad (\tan t < 0) \\ &= \sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{-x} + 3\pi + C \quad (3 \arccos \frac{3}{x} = 3\pi - 3 \arccos -\frac{3}{x}) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{x^2 - 9} - 3 \arccos \frac{3}{-x} + C。$$

$$\text{综上结果为 } \sqrt{x^2 - 9} - 3 \arccos \frac{3}{|x|} + C。$$

1.2.2.4 辅助换元

在使用换元法的时候有可能单个式子不能求出积分，而使用其他辅助式子加减在一起积分可以得到结果，从而能得到原式和辅助式子的积分结果。对于这类题目需要观察什么样的式子能让积分简单。

例题：求 $\int \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}}$ 。

令 $x = \sin t$ ，所以 $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$ ， $dx = \cos t dt$ 。

$\because x + \sqrt{1 - x^2}$ 可能为正可能为负，正负时单调性不同，所以令 $x + \sqrt{1 - x^2} = 0$ ，即 $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，从而 $t \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) \cup (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 。

$$\therefore = \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \quad (t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}))。$$

这时你会发现使用积化和差、万能公式、倍角公式都无法解出这个积分，所以这时候就需要另外一个辅助积分式子加上或减去这个式子，从而让和以及差更容易解出积分。这里根据式子特点让辅助式子分子为 $\sin t$ ：

$$\text{令 } I_1 = \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt, \quad I_2 = \int \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt。$$

$$I_1 + I_2 = \int \frac{\sin t + \cos t}{\sin t + \cos t} dt = \int dt = t。$$

$$I_1 - I_2 = \int \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt = \int \frac{d(\sin t + \cos t)}{\sin t + \cos t} = \ln |\sin t + \cos t| + C。$$

$$\text{所以 } I_1 = \frac{1}{2}(\arcsin x + \ln |x + \sqrt{1 - x^2}|) + C。$$

同理 $t \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 也得到同样结果。

1.3 分部积分

因为分部积分法使用 $\int u dv = uv - \int v du$ ，所以基本上用于两项乘积形式的积分式子。

1.3.1 基本分部

1.3.1.1 非幂函数优先

当幂函数与一些微分后能降低幂函数幂次的函数在一起时，先对非幂函数优先分部积分，结果与幂函数相乘可以消去幂次，以达到降低幂次的作用。

如 $\int x^n \ln x dx$ ， $\int x^n \arctan x dx$ ， $\int x^n \arcsin x dx$ 。

例题：求 $\int x^2 \arctan x \, dx$ 。

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \int \arctan x \, d(x^3) = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int x^3 d(\arctan x) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x+x^3-x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int x \, dx + \frac{1}{6} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

1.3.1.2 幂函数优先

当幂函数与三角函数在一起微分时，因为三角函数无论如何积分都不会被消去，所以应该优先消去幂函数部分，从而降低幂次。

例题：求 $\int x \tan^2 x \, dx$ 。

$$= \int x(\sec^2 - 1) \, dx = \int x \, d(\tan x) - \frac{x^2}{2} = x \tan x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

1.3.2 多次分部

1.3.3 分部与换元

分部积分法和换元积分法经常一起使用。

例题：求 $\int e^{\sqrt[3]{x}} \, dx$ 。

令 $\sqrt[3]{x} = u$ ，从而 $x = u^3$ ， $dx = 3u^2 \, du$ 。

$$\begin{aligned} &= 3 \int e^u u^2 \, du = 3 \int u^2 d(e^u) = 3u^2 e^u - 3 \int e^u d(u^2) = 3u^2 e^u - 6 \int e^u u \, du \\ &= 3u^2 e^u - 6 \int u d(e^u) = 3u^2 e^u - 6ue^u + 6 \int e^u \, du = 3u^2 e^u - 6ue^u + 6e^u + C \\ &= 3e^u(u^2 - 2u + 2) + C = 3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 2) + C. \end{aligned}$$

1.4 有理积分

1.4.1 高阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx$ ，且 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都为与 x 相关的多项式， $f(x)$ 阶数高于或等于 $g(x)$ ，则 $f(x)$ 可以按照 $g(x)$ 的形式分配，约去式子，得到最简单的表达。

例题： $\int \frac{x^3}{x^2+9} \, dx$ 。

$$\begin{aligned} &= \int \frac{x^3+9x-9x}{x^2+9} \, dx = \int \frac{x^3+9x}{x^2+9} \, dx - \int \frac{9x}{x^2+9} \, dx \\ &= \int x \, dx - \frac{9}{2} \int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2} \ln(9+x^2) + C. \end{aligned}$$

1.4.2 低阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$, 且 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都为与 x 相关的多项式, $f(x)$ 阶数低于 $g(x)$, 且 $g(x)$ 不能因式分解为 $g(x) = g_1(x)g_2(x)\cdots$ 时, 则可以分解式子: $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = a_1 \int \frac{d(f_1(x))}{g_1(x)} + a_2 \int \frac{d(f_2(x))}{g_2(x)} + \cdots$, 将积分式子组合成积分结果为分式的函数, 如 $\ln x$ 、 $\arcsin x$ 、 $\arctan x$ 等。

例题: 求 $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx$ 。

因为 x^2+2x+3 不能因式分解, 所以考虑将分子按照分母形式进行分配。优先对高阶的 x 进行分配。

首先因为分子最高阶为 x 只比分母最高阶 x^2 低一阶, 所以考虑将 $x-1$ 分配到微分号内。

$$\begin{aligned} & \because d(x^2+2x+3) = 2x+2, \text{ 而现在是 } x-1, \text{ 所以:} \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx - 2 \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} \\ & - \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - \sqrt{2} \int \frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \\ & = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - \sqrt{2} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

2 定积分

2.1 变限积分

2.2 牛莱公式

2.3 换元积分

2.4 分部积分

2.5 反常积分

3 积分应用

3.1 面积

3.2 体积

3.3 弧长