

随机变量数字特征

Didnelpsun

目录

1	一维随机变量数字特征	1
1.1	数学期望	1
1.1.1	概念	1
1.1.2	性质	1
1.2	方差标准差	2
1.2.1	概念	2
1.2.2	性质	2
1.3	切比雪夫不等式	2
1.4	常用分布数字特征	3
2	二维随机变量数字特征	3
2.1	数学期望	3
2.2	协方差相关系数	3
2.2.1	概念	3
2.2.2	性质	4
3	独立性与相关性	5
3.1	分布判断独立性	5
3.2	数字特征判断相关性	5
3.3	基本判别流程	6

有时候研究随机变量，其是没有具体的概率分布的，而对于这种类型我们只用研究其数学特征就可以了。

1 一维随机变量数字特征

1.1 数学期望

1.1.1 概念

设 X 是随机变量， Y 是 X 的函数， $Y = g(X)$ 。

定义：若 X 是离散型随机变量，其分布列为 $p_i = P\{X = x_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$)，若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛，则称随机变量 X 的数学期望存在，并将级数和 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 称为随机变量 X 的**数学期望**，记为 $E(X)$ 或 EX ，即 $EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ ，否则 X 数学期望不存在。（数学期望实际上是一种加权的合理平均值）

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$ 也绝对收敛，则称 $Y = g(X)$ 的数学期望 $E[g(X)]$ 存在，且 $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$ ，否则 $g(X)$ 的数学期望不存在。

定义：若 X 是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$ 。若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛，则称 X 的数学期望存在，且 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ ，否则 X 的数学期望不存在。

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$ 绝对收敛，则称 $g(X)$ 的数学期望存在， $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$ ，否则 $g(X)$ 的数学期望不存在。

1.1.2 性质

- 对任意常数 a_i 和随机变量 X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 有 $E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i EX_i$ ，其中 $Ec = c$ ， $E(aX + c) = aEX + c$ ， $E(X \pm Y) = EX \pm EY$ 。
- 若 XY 相互独立，则 $E(XY) = EX \cdot EY$ ， $E[g_1(X), g_2(Y)] = E[g_1(X)] \cdot E[g_2(Y)]$ ，一般若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立，则 $E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n EX_i$ ， $E\left[\prod_{i=1}^n g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^n E[g_i(X_i)]$ 。

1.2 方差标准差

1.2.1 概念

定义：设 X 是随机变量，若 $E[(X - EX)^2]$ 存在，则称 $E[(X - EX)^2]$ 为 X 的方差，记为 DX ，即 $DX = E[(X - EX)^2] = E(X^2) - (EX)^2$ 。称 \sqrt{DX} 为 X 的标准差或均方差，记为 $\sigma(X)$ ，称随机变量 $X^* = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}$ 为 X 的标准化随机变量，此时 $EX^* = 0$ ， $DX^* = 1$ 。

1.2.2 性质

- $DX \geq 0$ ， $E(X^2) = DX + (EX)^2 \geq (EX)^2$ 。
- $Dc = 0$ 。
- $D(aX + b) = a^2DX$ 。
- $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2Cov(X, Y)$ 。
- 若 XY 相互独立，则 $D(aX + bY) = a^2DX + b^2DY$ ，一般若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立， $g_i(x)$ 为关于 x 的连续函数，则 $D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 DX_i$ ， $D\left[\sum_{i=1}^n g_i(X_i)\right] = \sum_{i=1}^n D[g_i(X_i)]$ 。

1.3 切比雪夫不等式

定义：若随机变量 X 的方差 DX 存在，则对任意 $\epsilon > 0$ ，有 $P\{|X - EX| \leq \epsilon\} \leq \frac{DX}{\epsilon^2}$ 或 $P\{|X - EX| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\epsilon^2}$ 。

即一个变量不会离标准差太大距离。

可以用于估算随机变量在某范围中取值的概率，也可以证明某些收敛性问题（如数学统计章节中的一致性）。

例题：设 XY 为随机变量，数学期望都是 2，方差分别为 1 和 4，相关系数为 0.5，尝试估计估计概率 $P\{|X - Y| \geq 6\}$ 。

解：令 $Z = X - Y$ ， $\therefore EZ = E(X - Y) = EX - EY = 2 - 2 = 0$ ，所以 $P\{|X - Y| \geq 6\} = P\{|X - Y - 0| \geq 6\} = P\{|Z - EZ| \geq 6\} \leq \frac{DZ}{6^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ 。

1.4 常用分布数字特征

分布	分布列 p_i 或概率密度 $f(x)$	期望	方差
0-1 分布 $B(1, p)$	$P\{X = k\} = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0, 1$	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n, p)$	$P\{X = k\} = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k = 0, \dots, n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, \dots$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$P\{X = k\} = (1-p)^{k-1}, p, k = 1, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, x \in R$	μ	σ^2
均匀分布 $U(a, b)$	$f(x) = \frac{1}{b-a}, a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

2 二维随机变量数字特征

2.1 数学期望

定义：若 XY 为随机变量， $g(X, Y)$ 为 XY 的函数，如果 (X, Y) 为离散型随机变量，其联合分布为 $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ ($i, j = 1, 2, \dots$)，若级数 $\sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$ 绝对收敛，则 $E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$ ；如果 (X, Y) 为连续型随机变量，其概率密度为 $f(x, y)$ ，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$ 绝对收敛，则定义 $E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$ 。

2.2 协方差相关系数

2.2.1 概念

定义：若随机变量 XY 的方差存在且 $DX > 0, DY > 0$ ，则称 $E[(X - EX)(Y - EY)]$ 为随机变量 X 与 Y 的协方差，记为 $Cov(X, Y)$ ，即 $Cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E(XY - XEY - YEX + EXEY) = E(XY) - EX \cdot EY$ 。

$$\text{其中 } E(XY) = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_j P\{X = x_i, Y = y_j\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy \end{cases}.$$

从定义来看，方差 DX 就是自己的协方差 $Cov(X, X)$ 。

定义： $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 为随机变量 XY 的相关系数。若 $\rho_{XY} = 0$ ，则 XY 不相干，否则相关。

相关系数是描述随机变量 XY 之间的线性关系。相关系数为 0 不代表没有其之间没有关系，也可能存在非线性关系。

2.2.2 性质

- 对称性: $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$, $\rho_{XY} = \rho_{YX}$, $Cov(X, X) = DX$, $\rho_{XX} = 1$ 。
- 线性性: $Cov(X, c) = 0$, $Cov(aX + b, Y) = aCov(X, Y)$, $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$ 。一般 $Cov\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, Y\right) = \sum_{i=1}^n Cov(X_i, Y)$ 。
- 相关系数有界性: $|\rho_{XY}| \leq 1$ 。
- 线性关系下的相关系数: 若 $Y = aX + b$ ，则 $\rho_{XY} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$ 。

例题： 设随机变量 XY 的概率分布分别为：

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ 。

(1) 求随机变量 (X, Y) 的概率分布。

(2) 求 $Z = XY$ 的概率分布。

(3) 求 XY 的相关系数 ρ_{XY} 。

(1) 解：根据已知的题目条件可以知道对应的边缘概率分布：

$X \backslash Y$	-1	0	1	X 边缘
0				1/3
1				2/3
Y 边缘	1/3	1/3	1/3	1

又 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ ，所以 $P\{X^2 \neq Y^2\} = 0$ ，所以 $X = \pm Y$ ，解得：

$X \backslash Y$	-1	0	1	X 边缘
0	0	1/3	0	1/3
1	1/3	0	1/3	2/3
Y 边缘	1/3	1/3	1/3	1

(2) 解: $Z = XY$ 的可能取值为-1, 0, 1。所以根据表格:

$$P\{Z = -1\} = P\{X = 1, Y = -1\} = \frac{1}{3}。$$

$$P\{Z = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{3}。$$

$$P\{Z = 0\} = 1 - P\{Z = 1\} - P\{Z = -1\} = \frac{1}{3}。$$

$$(3) \text{ 解: } \rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 0。$$

3 独立性与相关性

- 独立则一定不相关，但是不相关不一定独立。
- 如果相关则一定不独立。
- 如果 (X, Y) 服从二维正态分布，则 XY 独立与 XY 不相关是充要条件。

3.1 分布判断独立性

都是通过分布情况判断独立性:

- $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)。$
- $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)。$
- $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}。$

3.2 数字特征判断相关性

通过相关系数 ρ_{XY} 来判断是否存在线性相关性。

$$\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow Cov(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = EX \cdot EY \Leftrightarrow D(X \pm Y) = DX + DY。$$

3.3 基本判别流程

当讨论随机变量 XY 的相关性独立性时：

1. 计算 $Cov(X, Y) = E(XY) - EXEY$ 判断是否为 0。
2. 当 $Cov(X, Y) \neq 0$ 时则 XY 相关不独立。
3. 当 $Cov(X, Y) = 0$ 时则 XY 不相关。
4. 若 $P(XY) = P(X)P(Y)$ 则 XY 不相关但独立，否则不相关不独立。

例题：设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 。证明 X 与 $|X|$ 不相关且不独立。

解： $Cov(X, Y) = EXY - EXEY = EX|X| - EXE|X|$ 。

其中 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|} dx = 0$, $EXY = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|} |x| dx = 0$ 。

$\therefore \rho_{XY} = 0$, 从而 XY 不相关。

令 $X \leq a$, 则 $P\{X \leq a\}$ 。而 $P\{|X| \leq a\} = P\{-a \leq X \leq a\} < P\{X \leq a\}$ 。

$\therefore P\{X \leq a, |X| \leq a\} = P\{|X| \leq a\}$, 又 $P\{X \leq a\} < 1$ 。

$\therefore P\{X \leq a, |X| \leq a\} \neq P\{|X| \leq a\} \cdot P\{X \leq a\}$, 所以不独立。