行列式

Didnelpsun

目录

1 逆序

逆序一般只会考一个数列的逆序数，一般以自然数从小到大为标准次序。

对于逆序数的计算一般是数，假设一共有 n 项，则需要依次从 i 向后判断各项与当前项的大小，最后相加。

1.1 有穷排列

对于给出几个数字的有限排列，只需要直接计算即可。

例题：求 2413 的逆序数。

解：2 的逆序有 21 一个。4 的逆序与 41、43 两个。1 无逆序数，所以一共逆序数为 3。

1.2 无穷排列

例题：求 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$ 的逆序数。

解：这个序列分为两个部分，第一个是前面的 $13\cdots(2n-1)$ 部分，这个部分无逆序。

第二个部分是后面的 $(2n)(2n-2)\cdots 2$，这个序列是全部逆序的，所以考虑其第二个内部一共有 n 个数，从前往后依次有 $n,(n-1),\cdots,1$ 个逆序，所以逆序数为 $\dfrac{n(n-1)}{2}$。

然后是考虑第二个部分对于第一个部分的逆序。$2n-2$ 对 $2n-1$ 产生一个逆序，到最后的 2 对前面的 $3\cdots(2n-1)$ 都产生了逆序一共 $n-1$ 个，所以一共 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个逆序。

所以最后一共加起来与 $n(n-1)$ 个逆序。

2 因式项

需要求出带有某些因子的因式项，其实就是对顺序的排列组合，若已经给出某些因式，则因式项的其他因子就必须是其他数值。

且还要考虑因式项的正负号，即选择的值序列的逆序数。

例题：写出四阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的因式项。

解：因为是四阶行列式，且含有 $a_{11}a_{23}$，所以余下来的 $a_{3?}$ 和 $a_{4?}$ 中的 ? 只有 2 和 4 可选。

若是 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，则列坐标序列为 1324，从而逆序数为 1，所以该项为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$。

若是 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$，则列坐标序列为 1342，从而逆序数为 2，所以该项为 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$。

$\therefore -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$。

3 行列式

包含直接计算行列式的值和已知行列式值计算参数值两种体型，基本上求解方式一致。

证明行列式值与计算行列式值的题型不同的是，其行列式的值是固定给出的，一方面虽然约束了解题思路，一方面也给出了解题的方向，需要结果与给定值“靠近”。

3.1 基本行列式与计算

3.1.1 主对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdots a_{nn}$$

3.1.2 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & \iddots & a_{2n} \\ & \iddots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \iddots & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & \iddots & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}\cdots a_{n1}$$

3.1.3 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j)$$

3.1.4 分块行列式

也称为拉普拉斯展开式，设 A 为 m 阶矩阵，B 为 n 阶矩阵：

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|。$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A|\cdot|B|。$$

3.1.5 基本行列式计算

基本的计算方式是对角线法则计算与行列式展开两种方法。若符合基本特殊行列式的可以按照公式。

但是对于一般的高阶行列式而言计算方式如下：

- 通过行列式的对换让一行或一列只有一个元素不为 0，进行行列式展开不断降阶，最后变成第三阶的时候使用对角线法则。
- 通过行列式的对换从上往下让行列式变成上三角行列式，对角线相乘就得到结果。

例题：计算 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$。

直接按第一列展开：

$$= a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

3.2 提取公因式

可以提取某一行或某一列的公因式。

例题：证明 $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$。

证明：因为是证明题，而结果是 $(a-b)$ 的变形，所以我们需要不断提取出 $a-b$ 的形式。

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & a-b & 2b \\ a(a-b) & b(a-b) & b^2 \end{vmatrix} = -(a-b)^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2b \\ a & b & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(a-b)^2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = -(a-b)^2(b-a) = (a-b)^3。$$

例题：证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$。

证明：这个形式看起来像范德蒙德行列式，但是根据后面的结果，发现这无法通过范德蒙德行列式的公式来计算，所以按照一般方法相减得到因子：

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ a^2-a^2 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ a^4-a^4 & b^4-a^2b^2 & c^4-a^2c^2 & d^4-a^2d^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b+a)(b-a) & c^2(c+a)(c-a) & d^2(d+a)(d-a) \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c & d \\ 0 & b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c^2+ac-ab-b^2) & d(d^2+ad-ab-b^2) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(a+b+c)(c-b) & d(a+b+d)(d-b) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c(a+b+c)(c-b) & d(a+b+d)(d-b) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c(a+b+c) & d(a+b+d) \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(c(a+b+c)-d(a+b+d)) \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(ca+cb+c^2-da-db-d^2) \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(a(c-d)+b(c-d)+(c+d)(c-d)) \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(c-d)(a+b+c+d)。
\end{aligned}
$$

3.3 转换三角行列式

通过行变换或列变换将行列式转换三角行列式，然后就可以根据对角线乘积得到结果。

例题：计算$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$。

解：$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 16$。

3.4 成比例为 0

当行列式行列变换后某一行或某一列与另一行或列成比例，则整个行列式值为 0。

例题：计算 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$。

解：$=\begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -7 & -7 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & -9 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -7 & -7 & -5 \\ 0 & -10 & -9 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 5 \\ 0 & -10 & -9 & -8 \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 5 \\ 0 & -10 & -9 & -8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 2 \end{vmatrix} = 0$。

3.5 拆项

若行列式某一行或一列是有两个值构成，则可以把其拆开，其他部分行列不变。

例题：证明 $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$。

证明：首先因为上下因式的系数是 ab，所以无论怎么样减都无法消去多余的 xy 或 z 得到结果的行列式中只有单个因子的情况，所以只能拆项，从第一个项开始拆：

$$= a\begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix} = a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

3.6 行列乘积为定值

当行列式每一行或每一列相乘都为一个固定的值，可以把每行或每列的公因子提出来来简化计算。

例题：计算 $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$。

解：$= adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} = abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4abcdef$。

3.7 行列加和为定值

当行列式每一行或每一列相加都为一个固定的值，可以把第二行开始的各行都加到第一行，再提取公因式。

例题：计算 $\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$。

解：$= \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$= (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & x-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-a \end{vmatrix}$$

$= (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$。

例题：计算 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$。

解：$= (1+a_1+a_2+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

$$= (1+a_1+a_2+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1+a_1+a_2+\cdots+a_n)。$$

3.8 X 型矩阵

例题：计算 $\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}_{2n}$。

解：将其 $2n$ 行不断与 $2n-1\cdots 2$ 行对换，再将其 $2n$ 列不断与 $2n-1\cdots 2$ 列对换，一共对换 $2(2n-2)$ 次，一定是一个偶数：

$$
= \begin{vmatrix}
a & b & 0 & & & \cdots & & 0 \\
c & d & 0 & & & \cdots & & 0 \\
0 & 0 & a & & & & & b \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \iddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & a & b & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & c & d & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \iddots & & & \ddots & \\
0 & 0 & c & & & & & d
\end{vmatrix}_{2n}
$$
，根据分块行列式的计算方式：

$D_{2n} = D_2 D_{2(n-1)} = (ad-bc)D_{2(n-1)}$，所以不断递推可以得到结果为 $(ad-bc)^n$。

4 代数余子式

已知某一行或列展开就是每一行或列的元素乘对应的代数余子式，就可以得到整个矩阵的值。若是求某一行或某一列的代数余子式的值，将其系数代入矩阵求就可以了。

例题：设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，$D$ 的 (i,j) 元的代数余子式设为 A_{ij}，求 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$。

解：$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 8 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24$。