多元函数微分学

Didnelpsun

目录

1 基本概念

1.1 平面与点

1.1.1 平面点集

定义：在平面上建立直角坐标系 xOy，则平面上的点可用两个实数组的有序数组 (x,y) 表示，而二元函数 $f(x,y)$ 的定义域是 (x,y) 为元素的几何，所以 $f(x,y)$ 的定义域就是**平面上的点集**。

1.1.2 距离

定理：平面上任意两点 $M_1(x_1,y_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2)$ 之间距离定义为 $\rho(M_1,M_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

$\rho(M_1,M_2)$ 满足：

- 非负性：$\rho(M_1,M_2)\geqslant 0$。
- 对称性：$\rho(M_1,M_2)=\rho(M_2,M_1)$。
- 三角不等式：$\rho(M_1,M_3)\leqslant \rho(M_1,M_2)+\rho(M_2,M_3)$。

1.1.3 邻域

设 M_0 为平面上一点，$\delta>0$，则平面上以 M_0 为圆心，δ 为半径的圆的内部称为 M_0 的 δ **领域**，记为 $U(M_0,\delta)$。

若领域中去掉圆心 M_0，称为 M_0 的 δ **去心邻域**，记为 $\mathring{U}(M_0,\delta)$。

1.1.4 点的分类

定义：设 M 为平面上一个点，若存在 $\delta>0$，使得 $U(M,\delta)\subset E$，则 M 为点集 E 的**内点**。

定义：若存在 $\delta>0$，使得 $U(M,\delta)\cap E=\varnothing$，则 M 为点集 E 的的**外点**。

定义：若对任意 $\delta>0$，$U(M,\delta)$ 即有 E 内的点也有外的点，则 M 为点集 E 的**边界点**。

定义：E 所有边界点的集合称为 E 的**边界**，记为 ∂E。对于任意一个点集 E 与其余集 E^C 有公共边界，即 $\partial E=\partial E^C$。

1.1.5 集合

定义：设 E 为一个平面点集，若存在常数 $\delta > 0$，使得 $E \subset U(O, \delta)$，则 E 为**有界集**，否则为**无界集**。

定义：若 E 中的每个点都是 E 的内点，则 E 为**开集**，若 E 的边界点都是 E 的点，则 E 为**闭集**。若一个点集是开集，则其余集为闭集，若一个点集为闭集，则其余集为开集。

定义：若 E 中任意两点，都可用一条完全属于 E 的曲线将其两点连接，则 E 为**（道路）连通集**，连通的开集为**开区域**，一个开区域和其边界点的并集为**闭区域**，统称**区域**。

定义：若 E 内任意一条**简单闭曲线**的内部还在 E 内，则 E 为**单连通区域**，否则为**多连通区域**。

1.1.6 聚点

定义：对一个平面点集 E，M_0 为平面上一点，若对任意 $\delta > 0$，总有 $\mathring{U}(M_0, \delta) \cap E \neq \varnothing$，即 M_0 的任意邻域中都含有异于 M_0 的 E 中的点，则 M_0 为 E 的**聚点**。

定理：非空开集的内点余边界点都是这个点集的聚点，闭区域的任意一点都是其聚点。

定义：若存在 $\delta > 0$，使得 $U(M_0, \delta) \cap E = \{M_0\}$，即如果 M_0 的某一邻域与点集 E 的交集是一个孤立的点 M_0，则称 M_0 为 E 的**孤立点**。边界点要么是聚点要么是孤立点。

1.2 极限

对于一元函数的极限可用列举法，从两端逼近该点取极限，但是对于多元函数所处的邻域，逼近方向为无穷，所以不可能再通过取两个方向逼近的方式求极限。

从点集来看定义：设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0, y_0)$ 为 D 聚点。若存在常数 A，对于任意给定正数 ϵ，总存在正数 δ，使得当 $P(x, y) \in D \cap \mathring{U}(P_0, \delta)$ 时，都有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$ 成立，则常数 A 为 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$ 或 $f(x, y) \to A((x, y) \to (x_0, y_0))$。

如 $\because xy \neq 0$ 排除 xy 轴：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}。$$

从邻域来看**定义：**若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的去心邻域内有定义，且 (x,y) 以任意方式趋向 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 均趋向于 A，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y) = A$。

根据邻域的定义，由于函数 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ 在坐标轴上无定义，则极限不存在。

此时两种定义就会有两种结论，所以为了避免这种定义不同的矛盾，就只会出现哪种定义下极限存在或都不存在的函数，如 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} = 0$。

从现实角度来看，点集定义是更合理的，若要求一根弯曲铁丝在某点的导数，第二种定义无法求，所以不合理。而第二种定义是从一元极限定义直接升级过来，所以有一定局限性。

1.3 连续

定义：若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续。

若不连续，则不讨论间断类型。

1.4 偏导数

当含有两个以及三个变量时，若求一个极限，则有多个变量同时趋向，所以多个变量同时在变。为了运算简单，就假定只有一个变量在变，其他变量固定，从而直接降低成一元变量，只对一个变量求导，从而就是偏导数。

定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to0} \dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的**偏导数**，记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z'\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f'_x(x_0,y_0)$。

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to0} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}。$$
$$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}。$$

定义：若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的偏导数 $f'_x(x,y)$、$f'_y(x,y)$ 仍具有偏导数，则其偏导数为函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**。按照求导次序不同，有如下四个二阶偏导数。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y),$$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)$。

其中 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 为**混合偏导数**。二阶以及以上的偏导数均为**高阶偏导数**。

1.5 全微分

定义：若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$AB$ 不依赖 Δx，Δy 而仅与 x,y 相关，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，而称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的**全微分**，记为 $\mathrm{d}z$。

$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$。

判断可微的步骤：

1. 写出全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$。
2. 写出线性增量 $A\Delta x+B\Delta y$，$A=f'_x(x_0,y_0)$，$B=f'_y(x_0,y_0)$。
3. 写出极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，若极限等于 0，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，否则不可微。

1.6 偏导数连续性

对 $z=f(x,y)$，讨论其在某特殊点 (x_0,y_0) 处偏导数是否连续的步骤：

1. 用定义法求 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$。（求某点偏导数）
2. 用公式法求 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$。（求偏导函数）
3. 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_x(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_y(x,y)$。（偏导函数求极限）
4. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_x(x,y)=f'_x(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f'_y(x,y)=f'_y(x_0,y_0)$ 若成立则连续，否则不连续。

例题：设 $z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则四个结论中正确的个数为 ()。

①$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续。　　②$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 存在。

③$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续。　　③$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微。

$A.1$　　$B.2$　　$C.3$　　$D.4$

解：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$。所以 A 正确。

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2}}-0}{\Delta x}=$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)\sin\dfrac{1}{|\Delta x|}=0$。同理 $f'_y(0,0)=0$。

判断连续性，首先计算偏导数值，之前计算过：$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$；然后求偏导函数 $f'_x(x,y)=2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{2x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ $=2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，同理得 $f'_y(x,y)=2y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；最后一步查看偏导函数值与偏导数值是否相等，$\because$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 震荡，所以总的来说极限值不存在，就不会等于偏导数值，同理可得函数的偏导数在该点不连续。

要求一个函数在某点可微，首先 $\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$。然后 $A\Delta x+B\Delta y=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y=0$。最后求极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ $=0$，所以在此点可微。

综上正确的结论有①②④三个，所以选 C。

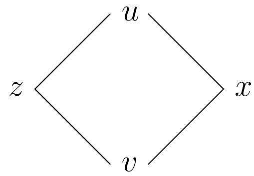
2　多元函数微分法则

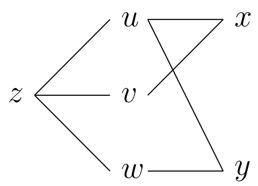
2.1　链式求导法则

主要对显函数的微分。

多元函数链式求导法则与一元函数的求导法则类似。都是从因变量从中间变量走到自变量。一条路径是一个加项，多少条从因变量到所有自变量的路就有多少个加项。每条路上由不同的路段组成，若有 n 层中间变量，则有 $n+1$ 路段，路段之间项是乘积形式，若变量只与一个变量有一条路，则是导数 d，若一个变量到多个变量有多条路，则是偏导数 ∂。

因变量 z 到 x 一共有两条路，所以两个和项。每条路都有两端，所以和项中有两个乘项。z 到 uv 两个中间变量，所以是两个偏导 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial v}$。$uv$ 都只有一条路直接连通 x，所以都是导数 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。一条路的每个路段的项相乘：$\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。最后将每条路段相加：$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。





因为因变量 z 到自变量 x,y 有较多条路径，所以分开分析。

对于 x，有 $z-u-x$，所以这条路为 $\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$，还有一条 $z-v-x$，由于 v 只与 x 连通，所以是导数，该路为 $\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。、

同理对于 y，有 $z-u-y$ 和 $z-w-y$，且 u 有两条出路，w 只有一条，所以 u 偏导，v 导数，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}$。

无论 z 对谁求导也无论求了几阶到，求导过后的新函数仍具有与原函数完全相同的复合结构。

例题：设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\because\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$，$\therefore\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot e^x\sin y+f_2'\cdot 2x$。

在求偏导时，将第一个中间变量记为 f_1 即之前的 u，第二个中间变量记为 f_2 即之前的 v。记 f 对 u 求偏导为 f_1'，对 v 求偏导为 f_2' 同理二阶导也如此，下标为求导顺序。

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial(f_1'\cdot e^x\sin y)}{\partial y}+\dfrac{\partial(f_2'\cdot 2x)}{\partial y}$。

其中 $\dfrac{\partial(f_1'\cdot e^x\sin y)}{\partial y}=\dfrac{\partial f_1'}{\partial y}\cdot e^x\sin y+f_1'\cdot e^x\cos y$。所以难点就是 $\dfrac{\partial f_1'}{\partial y}$。

求导路径 $f_1'-1-y$ 和 $f_1'-2-y$：$=(f_{11}''e^x\cos y+f_{12}''2y)\cdot e^x\sin y+f_1'\cdot e^x\cos y$。

其中 $\dfrac{\partial(f_2'\cdot 2x)}{\partial y}=2x\dfrac{\partial f_2'}{\partial y}$，求导路径 $f_2'-1-y$ 和 $f_2'-2-y$：$=2x(f_{21}''\cdot e^x\cos y+f_{22}''\cdot 2y)$。

$\therefore\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(f_{11}''e^x\cos y+f_{12}''2y)\cdot e^x\sin y+f_1'\cdot e^x\cos y+2x(f_{21}''\cdot e^x\cos y+f_{22}''\cdot 2y)$。

若 f 具有二阶连续偏导数，所以可以交换求导顺序，$f_{12}''=f_{21}''$。

化简：$=f_1'e^x\cos y+f_{11}''e^{2x}\sin y\cos y+2e^xf_{12}''(y\sin y+x\cos y)+4f_{22}''xy$。

2.2 隐函数存在定理

主要对隐函数的微分。隐函数的最大问题就是变量纠缠在一起，而公式法所得到的式子中变量都是独立的。

若对每个 $x\in D$ 对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数为**单值函数**。若给定一个对应法则，按法则对 x 总有 y 与之对应，但是 y 不唯一，此时就不是函数，而确定一个**多值函数**。

只要满足着定义域的条件下，形如 $y=f(x)$ 的函数就是**显函数**，如 $y=\sin x$。由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数为**隐函数**，如 $x+y^3-1=0$ 显式表示为 $y=\sqrt[3]{1-x}$。

定义：设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，$F(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，满足 $y_0=f(x_0)$。

定义：二元隐函数求导公式：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$。

因为 $y=y(x)$，所以对 $F(x,y)$ 进行求导：$F'_x\cdot 1+F'_y\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，就解出隐函数求导公式，$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$ 是定理关键。

如给出一个圆的方程 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$，$F'_x=2x$，$F'_y=2y$，$F(0,1)=0$，$F'_y(0,1)=2\neq 0$。所以在 $(0,1)$ 和 $(0,-1)$ 是单值的，从而能确定一个连续导数的隐函数，而在 $(\pm 1,0)$ 的邻域内不存在，因为其切线是竖直的。

定义：设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，$F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $z=f(x,y)$，满足 $z_0=f(x_0,y_0)$。

定义：三元隐函数求导公式：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$。

因为 x 是 x 的函数，y 是 y 的函数，z 是 xy 的函数。所以 $F'_x\cdot 1+F'_z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$。同理 $F'_y\cdot 1+F'_z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 也可得。

例题：设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数，求 $\mathrm{d}z$。

解：$\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$。其中 $F'_x=-1+e^{z-y-x}-xe^{z-y-x}$，$F'_y=-1-xe^{z-y-z}$，$F'_z=1+xe^{z-y-x}$。

直接代入：$\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=-\dfrac{F'_x}{F'_z}-\dfrac{F'_y}{F'_z}=\dfrac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}+1$。

例题：已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\,\mathrm{d}x+\sin y\,\mathrm{d}y$ 且 $f(1,0)=2$，

求 $f(x,y)$。

解：$\because \mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x + \sin y\,\mathrm{d}y$，$\therefore \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin y$。

对偏导进行积分：$f(x,y) = x^2 + \varphi(y)$，$\dfrac{\partial(x^2+\varphi(y))}{\partial y} = \varphi'(y) = \sin y$。

又 $\varphi(y) = -\cos y + C$，$f(x,y) = x^2 - \cos y + C$，代入 $f(1,0) = 2$。

$C = 2$，$f(x,y) = x^2 - \cos y + 2$。

3 多元函数极值最值

3.1 概念

定义：若存在 (x_0,y_0) 的某个邻域，使得在该邻域内的任意一点 (x,y) 均有 $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$ 或 $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$ 成立，则称 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的**广义的极大值点/极小值点**，$f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的**广义的极大值/极小值**。

定义：若存在 (x_0,y_0) 的某个去心邻域，使得在该邻域内的任意一点 (x,y) 均有 $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ 或 $f(x,y) > f(x_0,y_0)$ 成立，则称 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的**真正的极大值点/极小值点**，$f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的**真正的极大值/极小值**。

定义：设 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 定义域内一点，若对于 $f(x,y)$ 的定义域内任意一点 (x,y) 均有 $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$ 或 $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$ 成立，则称 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的**广义的最大值点/最小值点**，$f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的**广义的最大值/最小值**。

定义：设 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 定义域内一点，若对于 $f(x,y)$ 的定义域内任意一个异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y) 均有 $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ 或 $f(x,y) > f(x_0,y_0)$ 成立，则称 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的**真正的最大值点/最小值点**，$f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的**真正的最大值/最小值**。

定义：函数的一阶导数为 0 的点（驻点也称为稳定点，临界点）。对于多元函数，驻点是所有一阶偏导数都为零的点。

极值点不一定是驻点：只有可导的极值点才可能是驻点；驻点也不一定是极值点：只有驻点两端变号才能成为极值点。

定理：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极大/极小值，则 $f(x,y_0)$ 在 $x = x_0$ 取得极大/极小值，$f(x_0,y)$ 在 $y = y_0$ 取得极大/极小值。

3.2 无条件极值

定理：二元函数取极值的必要条件：设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 一阶偏导数存在且取极值，则 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$。三元及以上可以类推。

定理：二元函数取极值的充分条件：若对函数求二阶偏导 $\begin{cases} f''_{xx}(x_0,y_0)=A \\ f''_{xy}(x_0,y_0)=B \\ f''_{yy}(x_0,y_0)=C \end{cases}$，

则 $\Delta=B^2-AC=\begin{cases} <0\Rightarrow 极值 \begin{cases} A<0\Rightarrow 极大值 \\ A>0\Rightarrow 极小值 \end{cases} \\ >0\Rightarrow 非极值 \\ =0\Rightarrow 方法失效，使用定义法 \end{cases}$。只适用于二元函数极值。

例题：求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ 的极值。

解：$f'_x=4x^3-2(x+y)=0$，$f'_y=4y^3-2(x+y)=0$，解得 $x=y=-1,0,1$。

$f''_{xx}=12x^2-2$，$f''_{xy}=-2$，$f''_{yy}=12y^2-2$。各自代入：

$P_1:A_1=10,B_1=-2,C_1=10,\Delta=B_1^2-A_1C_1=-96<0,A_1>0$，极小。

同理 $P3$ 也是极小值点。极小值为-2。

$P2:A_2=-2,B_2=-2,C_2=-2,\Delta_2=B_2^2-A_2C_2=0$。该方法失效。

取 $y=x$ 的路径，$f(x,y)=f(x,x)=2x^4-4x^2=2x^2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})<0$。

取 $y=-x$ 的路径，$f(x,y)=f(x,-x)=2x^4>0$。而 $f(0,0)=0$。

所以不同的路径上有大于该值的也有小于该值的，所以该点不为极值点。

3.3 条件极值与拉格朗日乘数法

求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在一组条件函数 $\varphi_1(x,y,z)=0,\varphi_2(x,y,z)=0,\cdots,\varphi_n(x,y,z)=0$ 下的最值，则：

1. 构造辅助函数带 λ_i：$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z)+\lambda_n\varphi_n(x,y,z)$，其中 $\lambda_i\varphi_i$ 为**拉格朗日乘数**。

2. 对函数依次对 x,y,z,λ_i 求偏导并令为 0：$F'_x=f'_x+\lambda_1\varphi'_{1x}+\lambda_2\varphi'_{2x}+\cdots+\lambda_n\varphi'_{nx}=0$，$F'_y=f'_y+\lambda_1\varphi'_{1y}+\lambda_2\varphi'_{2y}+\cdots+\lambda_n\varphi'_{ny}=0$，$F'_z=f'_z+\lambda_1\varphi'_{1z}+\lambda_2\varphi'_{2z}+\cdots+\lambda_n\varphi'_{nz}=0$，$F'_{\lambda_i}=\varphi_i(x,y,z)=0$。一共 $3+n$ 个方程。

3. 解上述方程组得备选点 P_i，$i=1,2,\cdots,n$，并求 $f(P_i)$ 并取其最大值 $m_{\max}$ 和最小值 $u_{\min}$。

例题：求函数 $u = xyz$ 在约束条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$（$x>0, y>0, z>0, a>0$）下的最小值。

解：令 $F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)$。

令 $F'_x = yz + -\frac{\lambda}{x^2} = 0$，$F'_y = xz + -\frac{\lambda}{y^2} = 0$，$F'_z = xy + -\frac{\lambda}{z^2} = 0$，$F'_\lambda = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a} = 0$。

解得 $x = y = z = 3a$，从而最小值为 $u_{\min} = 27a^3$。