

# 线性方程组

Didnelpsun

## 目录

<b>1</b>	<b>基本概念</b>	<b>1</b>
1.1	线性方程组与矩阵 . . . . .	1
1.2	矩阵乘法与线性变换 . . . . .	2
1.3	线性方程组的解 . . . . .	2
1.4	线性方程组的矩阵解表示 . . . . .	3
<b>2</b>	<b>具体线性方程</b>	<b>4</b>
2.1	齐次方程组 . . . . .	4
2.1.1	有解条件 . . . . .	4
2.1.2	解的性质 . . . . .	4
2.1.3	解的结构 . . . . .	4
2.1.4	求解过程 . . . . .	4
2.2	非齐次方程组 . . . . .	6
2.2.1	有解条件 . . . . .	6
2.2.2	解的性质 . . . . .	6
2.2.3	求解过程 . . . . .	6
2.3	克拉默法则 . . . . .	7
<b>3</b>	<b>抽象线性方程</b>	<b>7</b>
3.1	解的判定 . . . . .	7
3.2	解的性质 . . . . .	8
3.3	基础解系 . . . . .	8
3.4	系数矩阵列向量与解 . . . . .	9

4	公共解	10
5	同解方程组	10

# 1 基本概念

矩阵是根据线性方程组得到。线性方程组和向量组本质上是一致的。

## 1.1 线性方程组与矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$n$  元齐次线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$n$  元非齐次线性方程组。

$m$  是方程个数，即方程组行数， $n$  是方程未知数个数，即类似方程组的列数。

对于齐次方程， $x_1 = \cdots = x_n = 0$  一定是其解，称为其**零解**，若有一组不全为零的解，则称为其**非零解**。其一定有零解，但是不一定有非零解。

对于非齐次方程，只有  $b_1 \cdots b_n$  不全为零才是。

令**系数矩阵**  $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ，**未知数矩阵**  $x_{n \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ，**常数项矩阵**  $b_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ，**增广矩阵**  $B_{m \times (n+1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$ 。

所以  $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ 。

从而  $AX = b$  等价于  $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$ ，当  $b = O$  就是齐次线性方程。

从而矩阵可以简单表示线性方程。

## 1.2 矩阵乘法与线性变换

矩阵乘法实际上就是线性方程组的线性变换，将一个变量关于另一个变量的关系式代入原方程组，得到与另一个变量的关系。

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s \\ \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{ms}x_s \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 + \cdots + b_{1n}t_n \\ \cdots \\ x_s = b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \cdots + b_{sn}t_n \end{cases}$$

原本是线性方程分别是  $y$  与  $x$  和  $x$  与  $t$  的关系式，而如果将  $t$  关于  $x$  的关系式代入  $x$  关于  $y$  的关系式中，就会得到  $t$  关于  $y$  的关系式：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(b_{11}t_1 + \cdots + b_{1n}t_n) + \cdots + a_{1s}(b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \cdots + b_{sn}t_n) \\ \cdots \\ y_m = a_{m1}(b_{11}t_1 + \cdots + b_{1n}t_n) + \cdots + a_{ms}(b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \cdots + b_{sn}t_n) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1s}b_{s1})t_1 + \cdots + (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1s}b_{sn})t_n \\ \cdots \\ y_m = (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{ms}b_{s1})t_1 + \cdots + (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{ms}b_{sn})t_n \end{cases}$$

这可以看作上面两个线性方程组相乘，也可以将线性方程组表示为矩阵，进行相乘就得到乘积，从而了解矩阵乘积与线性方程组的关系：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}_{m \times s} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}_{s \times n}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1s}b_{s1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1s}b_{sn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{ms}b_{s1} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{ms}b_{sn} \end{pmatrix}_{m \times n}。$$

## 1.3 线性方程组的解

对于一元一次线性方程： $ax = b$ ：

- 当  $a \neq 0$  时，可以解得  $x = \frac{b}{a}$ 。
- 当  $a = 0$  时，若  $b \neq 0$  时，无解，若  $b = 0$  时，无数解。

当推广到多元一次线性方程组： $Ax = b$ ，如何求出  $x$  一系列的  $x$  的解？

从数学逻辑上看，已知多元一次方程，有  $m$  个约束方程，有  $n$  个未知数，假定  $m \leq n$ 。

当  $m < n$  时，就代表有更多的未知变量不能被方程约束，从而有  $n - m$  个自由变量，所以就是无数解，解组中其他解可以由自由变量来表示。无穷多解需要一个解来代表其他解，这个解就是**基础解系**。

当  $m = n$  时代表约束与变量数量相等，此时又要分三种情况。

当所有的约束条件其中存在线性相关，即一部分约束条件可以由其他约束表示，则代表这部分约束条件是没用的，实际上的约束条件变少，从而情况等于  $m < n$ ，结果是无数解。

当所有的约束条件不存在线性相关，但是一部分约束条件互相矛盾，则约束条件下就无法解出解，从而结果是无实数解。

当所有的约束条件不存在线性相关，且相互之间不存在矛盾情况，这时候才会解出一个实数解，从而结果是有唯一实解。

若使用矩阵来解决线性方程组的问题，其系数矩阵  $A_{m \times n}$ 。

对于  $A \neq O$ ，则  $Ax = b$ ，若存在一个矩阵  $B_{n \times n}$  类似  $\frac{1}{a}$ ，使得  $BAx = Bb$ ，解得  $Ex = x = Bb$ ，这个  $B$  就是  $A$  的逆矩阵。

对于  $A = O$  即不可逆，需要判断  $b$  是否为 0，若不是则无实数解，若是则无穷解，这种判断需要用到增广矩阵，需要用到矩阵的秩判断。

## 1.4 线性方程组的矩阵解表示

$$\text{已知对于线性方程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}。$$

按乘积表示为  $A_{m \times n}x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$ ，然后将  $A$  按列分块， $x$  按行分块：

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b, \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}。$$

这三种都是解的表示方法。

## 2 具体线性方程

### 2.1 齐次方程组

即  $Ax = 0$ 。其中  $A$  有  $m$  行  $n$  列。

#### 2.1.1 有解条件

必有一个零解。

有解条件讨论是否列满秩问题，即方程组是否能约束全部变量。

对系数矩阵进行行变换，若  $r(A) = m$ ，即使行满秩若  $m < n$  则列不满秩，那么还是无法约束所有变量；若  $r(A) = n$ ，即使行不满秩但是列满秩，所以还是能约束所有变量。

当  $r(A) = n$  时，即  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关，则方程组有唯一零解。

当  $r(A) = r < n$  时，即  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关，则方程具有无穷多个非零解，具有  $n - r$  个线性无关解（自由变量）。

#### 2.1.2 解的性质

若  $A\xi_1 = 0$ ,  $A\xi_2 = 0$ ，则  $A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = 0$ 。

#### 2.1.3 解的结构

基础解系**定义**：假如  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  满足：①是方程组  $Ax = 0$  的解；②线性无关；③方程组  $Ax = 0$  的任一解均可由  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性表出，则称  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  为  $Ax = 0$  的**基础解系**。

当  $r(A) < n$  时讨论基础解系。

通解**定义**：设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  是  $Ax = 0$  的基础解系，则  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$  是方程组  $Ax = 0$  的通解， $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$  为任意常数。

#### 2.1.4 求解过程

1. 将系数矩阵  $A$  作为**初等行变换**后化为阶梯形矩阵或最简阶梯形矩阵  $B$ ，因为初等行变换将方程组化为同解方程组，所以  $Ax = 0$  与  $Bx = 0$  同解，只需解  $Bx = 0$ ，设  $r(A) = r$ 。其中  $A$  为  $m$  行  $n$  列， $m$  为约束方程组个数， $n$  为变量个数。

2. 在  $B$  中按列找到一个秩为  $r$  的子矩阵, 即在每排阶梯都选出一列组合成子矩阵, 则剩余列位置的未知数就是自由变量。
3. 按基础解析定义求出  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ , 并写出通解。

**例题:** 求齐次线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$
 的通解。

解: 系数矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ , 然后对其行变换, 得到:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r(A) = 3.$$

然后找子矩阵, 第一台阶选  $C_1$ , 第二台阶选  $C_2$  或  $C_3$ , 第三台阶选  $C_4$  或  $C_5$ , 随便找一个, 如  $(C_1, C_2, C_4)$  为子矩阵, 则  $C_3, C_5$  所代表的未知数  $x_3, x_5$  就是自由变量。

所以选择两个分量  $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}, \xi_{15})^T$  和  $\xi_2 = (\xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}, \xi_{24}, \xi_{25})^T$  作为基础解系。

因为此时选择  $x_3, x_5$  为自由变量, 所以  $x_3$  和  $x_5$  所对应的  $\xi_{13}, \xi_{15}, \xi_{23}, \xi_{25}$  可以任意取, 但是为了保证秩为 2, 所以让  $\xi_{13} = 1, \xi_{15} = 0, \xi_{23} = 0, \xi_{25} = 1$ 。这四个分量组成的矩阵线性无关, 原矩阵线性无关, 延长矩阵线性无关, 从而  $\xi_1$  和  $\xi_2$  必然线性无关。

所以此时已经给定两组解, 一种是  $\xi_1$  的  $x_3 = 1, x_5 = 0$ , 另一种是  $\xi_2$  的  $x_3 = 0, x_5 = 1$ , 这样就只有三个未知数和三个方程, 分别代入  $A$  矩阵所代表的方程组中 (代入行阶梯矩阵就可以, 不用代入最简行阶梯矩阵):

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 - 1 \cdot x_5 = 0 \\ 0 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 - 1 \cdot x_5 = 0 \end{cases}, \text{ 分别代入:}$$

$$\xi_1: \begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot 1 - 3 \cdot x_4 - 1 \cdot 0 = 0 \\ 0 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot x_4 + 1 \cdot 0 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot x_4 - 1 \cdot 0 = 0 \end{cases}, \quad \xi_1 = (-1, 1, 1, 0, 0)^T.$$

$$\xi_2: \begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot 0 - 3 \cdot x_4 - 1 \cdot 1 = 0 \\ 0 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot x_4 + 1 \cdot 1 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot x_4 - 1 \cdot 1 = 0 \end{cases}, \quad \xi_2 = (7, 5, 0, 2, 6)^T.$$

所以通解为  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1(-1, 1, 1, 0, 0)^T + k_2(7, 5, 0, 2, 6)^T$ 。

## 2.2 非齐次方程组

即  $Ax = b$ ,  $b$  为不全为 0 的列向量。

### 2.2.1 有解条件

$A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ , 其中  $\alpha_j = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}]^T$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ 。

当  $r(A) \neq r([A, b])$  时 ( $r(A) + 1 = r([A, b])$ ), 即  $b$  不能被  $A$  线性表出, 则方程组无解。

当  $r(A) = r([A, b]) = n$  时, 即  $b$  能被  $A$  线性表出,  $A$  线性无关,  $[A, b]$  线性相关, 矩阵列满秩, 则方程组有唯一解。

当  $r(A) = r([A, b]) = r < n$  时, 即  $b$  能被  $A$  线性表出,  $A$  线性相关, 矩阵列降秩, 则方程组有无穷多解。

### 2.2.2 解的性质

若  $\eta_1, \eta_2, \eta$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解,  $\xi$  是对应齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解, 则:

①  $\eta_1 - \eta_2$  是  $Ax = 0$  的通解。

②  $k\xi + \eta$  是  $Ax = b$  的解。

### 2.2.3 求解过程

将系数矩阵和常数项矩阵合并为一个增广矩阵, 对增广矩阵进行行变换变为阶梯形矩阵, 求出对应齐次线性方程组的通解, 最后假设一个非齐次线性方程组的特解。

1. 写出  $Ax = b$  的导出方程组  $Ax = 0$  并求出其通解  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 。



2. 求出  $Ax = b$  的一个特解  $\eta$ 。

3.  $Ax = b$  的通解为  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta$ 。

**例题：**求非齐次线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$
 的通解。

解：对方程组提取出增广矩阵并进行行变换：

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)。$$

然后求齐次方程的通解：找两列作为子矩阵，如  $x_1, x_2$ ，则  $x_3, x_4$  作为自由变量，设两个  $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}, 1, 0)^T$  和  $\xi_2 = (\xi_{21}, \xi_{22}, 0, 1)^T$ 。

解得  $\xi_1 = (-3, 2, 7, 0)^T$ ， $\xi_2 = (-13, 4, 0, 7)^T$ （为了得到整数通解都乘了 7）。

通解为  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1(-3, 2, 7, 0)^T + k_2(-13, 4, 0, 7)^T$ 。

然后求其非齐次的特解，让两个自由变量为 0 减少计算，即  $\eta = (\eta_1, \eta_2, 0, 0)^T$  代入方程得到  $\eta = \left(\frac{13}{7}, -\frac{4}{7}, 0, 0\right)^T$ 。

所以通解为  $k_1(-3, 2, 7, 0)^T + k_2(-13, 4, 0, 7)^T + \left(\frac{13}{7}, -\frac{4}{7}, 0, 0\right)^T$ 。

**注意：**通解的向量可以同乘一个数，因为其表示的是一个关系而不是具体数，但是特解不能同乘一个数，因为其表示的是一个具体的数。

## 2.3 克拉默法则

克拉默法则本来是矩阵中的运算法则，但是与方程组有更密切的关系，所以放到线性方程组中。

**定理：**若  $Ax = b$  的系数矩阵  $A$  的行列式  $|A| \neq 0$ ，则方程有唯一解，且  $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ ，其中  $A_i$  为把系数矩阵  $A$  的第  $i$  列的元素用方程组右侧的常数项代替后所得到的  $n$  阶矩阵。

### 3 抽象线性方程

#### 3.1 解的判定

$Ax = 0$ , 总有解, 至少有零解。

$A_{m \times n}x = 0$ , 当  $r(A) = n$  时, 只有零解; 当  $r(A) < n$  时, 无穷多解。

$A_{m \times n}x = b$  时, 当  $r(A) = r([A, b]) + 1 \neq r([A, b])$  时, 无解; 当  $r(A) = r([A, b]) = n$  时, 有唯一解; 当  $r(A) = r([A, b]) = r < n$  时, 无穷多解。

当  $Ax = 0$  只有零解时,  $r(A) = n$ , 当  $Ax = 0$  有无穷多解时,  $r(A) = r < n$ , 都不能判定  $r(A)$  与  $r([A, b])$  的关系, 若以  $Ax = b$  可能有解也可能无解。

当  $Ax = b$  有唯一解时,  $r(A) = r([A, b]) = n$ , 所以  $Ax = 0$  列满秩, 只有零解。

当  $Ax = b$  有无穷多解时,  $r(A) = r([A, b]) = r < n$ , 则  $Ax = 0$  有无穷多解。

当  $A$  行满秩, 则  $r(A) = r([A, b])$ , 则  $Ax = \beta$  必有解, 因为原来无关, 延长无关。

所以已知非齐次解情况能推出齐次解情况, 但是反之不能。

#### 3.2 解的性质

非齐次通解 = 齐次的通解 + 非齐次一个特解。

**例题:**  $r(A_{4 \times 4}) = 2$ ,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  为  $Ax = b$  的三个解向量, 其中具有如下关系:

$$\begin{cases} \eta_1 - \eta_2 = (-1, 0, 3, -4)^T \\ \eta_1 + \eta_2 = (3, 2, 1, -2)^T \\ \eta_3 + 2\eta_2 = (5, 1, 0, 3)^T \end{cases}, \text{ 求 } Ax = b \text{ 的通解。}$$

解:  $s = n - r(A) = 4 - 2 = 2$ , 所以通解的基础解系中有两个分量  $\xi_1$  和  $\xi_2$ 。

所以需要解  $Ax = 0$ , 又存在三个解向量, 所以  $A\eta_1 = A\eta_2 = A\eta_3 = b$ , 所以  $A(\eta_1 - \eta_2) = 0$ , 所以  $\eta_1 - \eta_2 = (-1, 0, 3, -4)^T$  就是其中一个解, 所以令  $\xi_1 = \eta_1 - \eta_2 = (-1, 0, 3, -4)^T$ 。

然后根据所给出的  $\eta$  进行凑,  $A(\eta_1 + \eta_2) = 2b = A(3, 2, 1, -2)^T$ ,  $A(\eta_3 + 2\eta_2) = 3b = A(5, 1, 0, 3)^T$ 。所以  $3A(\eta_1 + \eta_2) - 2A(\eta_3 + 2\eta_2) = 0$ , 所以  $A(3(\eta_1 + \eta_2) - 2(\eta_3 + 2\eta_2)) = 0$ , 所以令  $\xi_2 = 3(\eta_1 + \eta_2) - 2(\eta_3 + 2\eta_2) = (-1, 4, 3, -12)^T$ 。

最后找一个特解,  $\because A(\eta_1 + \eta_2) = 2b$ ,  $\therefore A\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) = b$ ,  $\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, -1\right)^T$  就是一个特解。

所以通解为  $k_1(-1, 0, 3, -4)^T + k_2(-1, 4, 3, -12)^T + \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, -1\right)^T$

### 3.3 基础解系

对于  $A_{m \times n}x = 0$ ,  $r(A) = r$ , 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  满足: ①  $A\alpha_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ; ②  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关; ③  $s = n - r$ , 则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  为  $Ax = 0$  的基础解系。

**例题:** 设  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  是方程组  $Ax = 0$  的基础解系, 则下列向量组也是方程组  $Ax = 0$  的基础解系的是 ()。

- A.  $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$       B.  $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 + \xi_1$   
 C.  $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3, \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3, 2\xi_1 + 3\xi_2$       D.  $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

解: 需要判断基础解系是否线性无关, 需要对应的行列式值非 0。

对于 D:  $(\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ , 所以 D

线性无关, 从而为基础解系。

**例题:** 设  $\xi_1 = [1, -2, 3, 1]^T$ ,  $\xi_2 = [2, 0, 5, -2]^T$  是齐次线性方程组  $A_{3 \times 4}x = 0$  的解, 且  $r(A) = 2$ , 则下列向量中是其解向量的是 ()。

- A.  $\alpha_1 = [1, -2, 3, 2]^T$       B.  $\alpha_2 = [0, 0.5, -2]^T$   
 C.  $\alpha_3 = [-1, -6, -1, 7]^T$       D.  $\alpha_4 = [1, 6, 1, 6]^T$

解: 若  $\xi_1$  和  $\xi_2$  为  $Ax = 0$  的基, 所以  $\xi_1$  和  $\xi_2$  应该能表示其解向量。

所以将  $\xi_1$  和  $\xi_2$  与  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  分别联立为矩阵, 进行初等行变换, 查看是否有解, 即新增广矩阵必须秩为 2。

ABD 选项增广矩阵的秩都为 3, 所以不能表示, 而只有 C 的为 2, 所以 C 可以表示。

### 3.4 系数矩阵列向量与解

对于齐次方程而言, 其解是让 A 的线性组合为零向量时线性组合的系数, 对于非齐次而言解是 b 由 A 线性表出的表出系数。

所以方程的解就是描述列向量组之间数量关心的系数。

**例题:** 已知  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ , 其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是四维列向量, 且  $\alpha_1 = 2\alpha_2 + \alpha_3$ ,  $r(A) = 3$ , 若  $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4$ , 求线性方程组  $Ax = \beta$  的通

解。

解:  $\because \alpha_1 = 2\alpha_2 + \alpha_3, 1\alpha_1 - 2\alpha_2 - 1\alpha_3 + 0\alpha_4 = 0$ , 即  $A(1, -2, -1, 0)^T = 0$ 。

又  $r(A_{4 \times 4}) = 4, s = n - r(A) = 4 - 3 = 1, \therefore \xi = (1, -2, -1, 0)^T$ 。

所以特解为  $\beta$  的系数:  $(1, 2, 3, 4)^T$ , 通解为  $k(1, -2, -1, 0)^T + (1, 2, 3, 4)^T$ 。

## 4 公共解

1. 求两个方程组解的交集部分。可以联立两个方程求解。
2. 求出  $A_{m \times n}x = 0$  的通解  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s$ , 这些  $k$  本来是独立的, 然后代入  $B_{m \times n}x = 0$ , 求出  $k_i (i = 1, 2, \cdots, s)$  之间的关系, 再代回  $A_{m \times n}x = 0$  的通解中就得到公共解。
3. 给出  $A_{m \times n}x = 0$  的通解与  $B_{m \times n}x = 0$  的通解联立:  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s = l_1\eta_1 + l_2\eta_2 + \cdots + l_s\eta_s = 0$ , 能解出  $k_i$  和  $l_i$ 。

**例题:** 已知线性方程组  $A = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, B = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ , 求方程组的公共解。

解:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 。

两个秩都为 2, 选择前两个分量为基子矩阵, 后两个为通解分量。

$$\xi_1 = (0, 0, 1, 0)^T, \xi_2 = (-1, 1, 0, 1)^T, \eta_1 = (0, 1, 1, 0)^T, \eta_2 = (-1, -1, 0, 1)^T。$$

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1(0, 0, 1, 0)^T + k_2(-1, 1, 0, 1)^T = (-k_2, k_2, k_1, k_2)^T。$$

$$l_1\eta_1 + l_2\eta_2 = l_1(0, 1, 1, 0)^T + l_2(-1, -1, 0, 1)^T = (-l_2, l_1 - l_2, l_1, l_2)^T。$$

$$\text{令 } (-k_2, k_2, k_1, k_2)^T = (-l_2, l_1 - l_2, l_1, l_2)^T, \text{ 所以解得 } 2k_2 = k_1。$$

$$\text{公共解为 } (-k_2, k_2, 2k_2, k_2)^T = k_2(-1, 1, 2, 1)^T。$$

## 5 同解方程组

若  $A_{m \times n}x = 0$  和  $B_{s \times n}x = 0$  有完全相同的解, 就是同解方程组。

$$\therefore r(A) = r(B) = r([A, B]^T)。$$

**例题：**线性方程组  $A = \begin{cases} x_1 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ ，在其基础上加一个方

$$\text{程 } B = \begin{cases} x_1 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_4 + ax_2 + bx_3 + 13x_4 = 0 \end{cases}, \text{ } ab \text{ 满足什么条件, } AB \text{ 是同解方程组。}$$

解： $B$  在  $A$  的基础上增加一个方程，即多增加了约束，从而  $B$  的解一定为  $A$  的解的子集。所以只要  $A$  的解也满足  $B$  的解就是同解方程组。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, s = n - r = 4 - 3 = 1, \xi = (-3, -5, 1, 0)^T, \\ k\xi = k(-3, -5, 1, 0)^T = (-3k, -5k, k, 0)^T.$$

所以这个对于  $B$  而言必然满足前三行，若要整体满足，就也要满足  $B$  的第四行，所以直接代入第四行： $4(-3k) + a(-5k) + bk + 0 = k(-12 - 5a + b) = 0$ 。

又  $k$  为任意数，所以  $-12 - 5a + b = 0$ ，即  $b = 5a + 12$ 。

**例题：**设  $A$  为  $n$  阶实矩阵， $A^T$  是  $A$  的转置矩阵，证明方程组  $\Lambda: Ax = 0$  和  $\Upsilon: A^T Ax = 0$  是同解方程组。

证明：若  $\gamma$  为  $\Lambda$  的唯一解，则  $A\gamma = 0$ ，则  $A^T A\gamma = A^T 0 = 0$ ， $\therefore \gamma$  也为  $\Upsilon$  的解。

若  $\eta$  为  $\Upsilon$  的唯一解，则  $A^T A\eta = 0$ ， $\eta^T A^T A\eta = (A\eta)^T A\eta = \|A\eta\|^2 = 0$ ，所以  $A\eta = 0$ ，从而  $\eta$  也为  $\Lambda$  的解。

所以同解，所以其两个矩阵的基解等价。

**定理：** $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$ 。