无穷级数

Didnelpsun

目录

1　常数项级数

1.1　概念

级数的经典悖论为芝诺悖论。

1.1.1　基本概念

定义：给定义一个无穷数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，将其各项用加号连起来的得到的记号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 叫做**无穷级数**，简称**级数**，其中 u_n 称为该级数的**通项**。

若 u_n 是常数而不是函数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 就被称为**常数项无穷级数**，简称**常数项级数**。

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为级数的**部分和**，$\{S_n\}$ 是级数的**部分和数量**。

定义：若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，并称 S 为该收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **的和**；若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在或为 $\pm\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**。

研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛还是发散，就是研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 去掉前 m 项，得 $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} u_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots$，称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 m **项后余项**

1.1.2　性质

1. 线性性质：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，且其和分别为 S，T，则任给常数 a, b，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$ 也收敛，且其和为 $aS + bT$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n) = a\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n + b\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$。（收敛 $\pm$ 发散 $=$ 发散，发散 $\pm$ 发散 $=$ 不确定）

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则其任意 m 项后余项 $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 也收敛；若存在 m 项后余项 $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

3. 对收敛级数加括号仍然收敛，但是加括号收敛原级数不一定收敛。如果原级数加括号发散，则原级数发散。

4. 级数收敛必要条件：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明性质三：$u_n=S_n-S_{n-1}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$。极限为 0 不一定收敛。

1.2 级数敛散性判别

1.2.1 正项级数

1.2.1.1 概念

定义：若通项 $u_n\geqslant 0$，$n=1,2,\cdots$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**正项级数**。

所以和项一定是递增的，由数列极限的单调有界准则如果和有上界则极限存在。

1.2.1.2 收敛原则

定理：正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界。（某一函数在固定区间内变化率是有界的，则变化范围是有界的）

证明：必要性：由于 $u_n\geqslant 0$，$\therefore S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\geqslant 0$，且 $S_1\leqslant S_2\leqslant\cdots\leqslant S_n\leqslant\cdots$，$\{S_n\}$ 单调不减且下界为 0。当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，则 $\{S_n\}$ 必有上界。有上界下界则 $\{S_n\}$ 有界。（某一函数在固定区间内变化率是有界的，则变化范围是有界的）

充分性：由于 $\{S_n\}$ 单调不减，所以根据单调有界准则，$\{S_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

基本就是使用放缩法判断是否有界。

例题：判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性。

解：$S_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>n\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$，当 $n\to\infty$ 时 $\sqrt{n}\to\infty$，无上界所以发散。

由于收敛原则很多时候都不能方便使用，所以出现了以下几种解决方法。

1.2.1.3 比较判别法

定理：给出两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，若从某项开始有 $u_n\leqslant v_n$ 成立，则：①若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；②若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也发散。

即大的收敛小的也收敛，小的发散大的也发散。

例题：判断调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的敛散性。

解：$\because x>0$，$x>\ln(1+x)$，$\therefore \frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$。

又对于 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$。

$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2+\cdots+\ln(n+1)-\ln n=\ln(n+1)$。当 $\ln(n+1)$ 在 $n\to\infty$ 时，$S_n\to\infty$。

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 也发散。

1.2.1.4 比较判别法极限性质

是比较判别法的推论，利用极限的阶数来比较。

给出两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，$v_n\neq 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$：

1. 若 $A=0$，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛。
2. 当 $A=+\infty$，当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散。
3. 若 $0<A<+\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 具有相同敛散性。

例题：判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ 敛散性。

解：令 $\frac{1}{n}=x$，$n\to\infty$ 所以 $x\to 0^+$。当 $x\to 0^+$，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$。

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{6}\neq 0$，所以 $\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n^3}$ 具有相同敛散性。

根据 p 级数定理，$p=3>1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ 收敛。

1.2.1.5 比值判别法

也称为达朗贝尔判别法。由等比级数推断出部分级数的敛散性只与自己的参数有关，根据自己的通项的商进行比较。

定理：给出一正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则：①若 $\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；②若 $\rho>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

注意：$\rho=1$ 时无法根据此判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 敛散性，如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛。

例题：判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a|^n n!}{n^n}$ 的敛散性，其中 a 为非零常数。

解：记 $u_n=\dfrac{|a|^n n!}{n^n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=|a|\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=|a|e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{n}{n+1}}=|a|e^{\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{n}{n+1}-1)}=|a|e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-n}{n+1}-1)}=|a|e^{-1}=\dfrac{|a|}{e}$。

若 $0<|a|<e$，所以收敛；若 $|a|>e$，所以发散；若 $|a|=e$，则回代得到比值 $e\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{e}{(1+\dfrac{1}{n})^n}\to 1^+$，且 $u_1=e$，$\therefore u_n>u_1>0$，所以发散。

1.2.1.6 根值判别法

也称为柯西判别法。由比值判别法类比而来。

定理：给出正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则①若 $\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；若 $\rho>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

同理 $\rho=1$ 也会失效。

例题：判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$ 的敛散性。

解：记 $u=\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^{(n\sin\frac{1}{n}-1)}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}}=e^{-\frac{1}{6}}<1$，所以收敛。

1.2.1.7 积分判别法

定理：设 $f(x)$ 是在 $[1,+\infty)$ 上单调递减且非负的连续函数，$a_n=f(n)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散。

例题：证明 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 的敛散性。

证明：令 $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$，又 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 在 $p>1$ 收敛，在 $p\leqslant 1$ 发散，所以得到原级数敛散性。

1.2.2 交错级数

1.2.2.1 概念

定义：若级数各项**正负相间**出现，则这样的级数是**交错级数**，一般写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$，其中 $u_n>0$。

1.2.2.2 莱布尼兹判别法

定义：给出一交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，$u_n>0$，$n=1,2,\cdots$，若 $\{u_n\}$ **单调不增** $u_n \geqslant u_{n+1}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}=0$，则该级数收敛。反过来则不行。

如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛，但是里面的 u_n 并不递减，由根值判别法加绝对值可知 u_n 为不递减。

例题：判断交错调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 的敛散性。

解：$\because \lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$。

且 $\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$，所以级数收敛。

例题：判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ 的敛散性，其中 a 为非零常数。

解：$\because \sin(\alpha+n\pi)=(-1)^n\sin\alpha$。$\therefore \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=$ $\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2-n\pi+n\pi})=(-1)^n\sin\left(\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)$。

记 $u_n=\sin\left(\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)$，又 $n\to\infty$ 时 $\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\to 0^+$ 且单调不增，$\sin x$ 在 $x\to 0^+$ 时也是单调函数，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 且单调不增。

所以收敛。

例题：判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(1+n)}{1+n})$ 的敛散性。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{1+n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x}=0$。

对 $\dfrac{\ln(1+n)}{1+n})$ 进行比较有些麻烦，所以令 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x})$。

$f'(x)=\dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$，当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)<0$，$\{u_n\}$ 单调减少，所以收敛。

1.2.3 任意项级数

1.2.3.1 概念

定义：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 各项可为正可为负，可为零，则这种级数就是**任意项级数**。

给任意项级数每一项加上绝对值 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}|u_n|$，就得到了正项级数，称为原级数的**绝对值级数**。

1.2.3.2 绝对收敛

定义：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为任意项级数，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ **绝对收敛**。

1.2.3.3 条件收敛

定义：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为任意项级数，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ $|u_n|$ 发散，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ **条件收敛**。

定理：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 必收敛。（绝对收敛则收敛）

定理：收敛级数的项任意加括号后所得的新级数仍收敛，且其和不变。

定理：若原级数绝对收敛，不论将其项如何排列，则所得的新级数也收敛，且其和不变。（绝对收敛的级数具有可交换性）

定理：条件收敛的级数的所有正项（或负项）构成的级数一定发散。

定理：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛。（b_n 收敛则不能得到）

例题：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下面级数必收敛的是 ()。

$A.\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\dfrac{u_n}{n}$　　$B.\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$　　$C.\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$　　$D.\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

解：对于 A，取 $u_n=(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$，则原来 $\dfrac{u_n}{n}=(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$ 收敛，但是乘上 $(-1)^n$ 就不一定收敛，得到 $\dfrac{1}{n\ln n}$。

定理：广义 p 级数：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases}p>1,\text{收敛}\\ p\leqslant 1,\text{发散}\end{cases}$。（$n=1$ 无意义，从 $n=2$ 开始不影响其敛散性）

所以 A 发散。

对于 B，取 $u_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则 $u_n^2=\dfrac{1}{n}$，调和级数不收敛。

对于 C，取 $u_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，则得到 $u_{2n-1}-u_{2n}=\dfrac{1}{n}$，调和级数不收敛。

对于 D，由于 u_n 收敛，则 u_{n+1} 也收敛，所以相加也收敛，选 D。

定理：若 u_n^2 收敛，则 $\dfrac{u_n}{n}$ 绝对收敛。

证明：因为不等式 $|a||b|\leqslant\dfrac{|a|^2+|b|^2}{2}$，$\therefore 0\leqslant|u_n\dfrac{1}{n}|\leqslant\dfrac{u_n^2+\dfrac{1}{n^2}}{2}$。

且 u_n^2 收敛，则 $\dfrac{u_n^2+\dfrac{1}{n^2}}{2}$ 也收敛，根据性质得证。

2 幂级数

2.1 概念

2.1.1 定义

定义：设函数列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上，称 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ 为定义在区间 I 上的**函数项级数**，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，当 x 取确定的值 x_0 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 成为常数项级数 $\lim\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$。

定义：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_0(x)$ 的一般项 $u_0(x)$ 为 n 次幂函数，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_0(x)$ 为**幂级数**，是一种常用的函数项级数，一般形式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$，其标准形式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^x+\cdots$，其中 a_n（$n=0,1,2,\cdot$）为**幂级数的系数**。

幂级数也称为泰勒级数，与泰勒展开式一样的结构。

定义：若给定 $x_0 \in I$，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_0(x)$ 收敛，则称点 x_0 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_0(x)$ 的**收敛点**；若给定 $x_0 \in I$，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_0(x)$ 发散，则点 x_0 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_0(x)$ 的**发散点**。

2.1.2 阿贝尔定理

定义：当幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 在点 $x=x_1$（$x_1 \neq 0$）处收敛时，对于满足 $|x|<|x_1|$ 的一切 x，幂级数**绝对收敛**；当幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 在 $x=x_2$（$x_2 \neq 0$）处发散时，对于满足 $|x|>|x_2|$ 的一切 x，幂级数**发散**。

所以一定存在一个点 R，在 $|x|<|R|$ 中绝对收敛，在 $|x|>|R|$ 中发散，R 称为**收敛半径**。对于点 $\pm R$ 需要代入幂级数变成常数项级数进行计算，判别其敛散性。

2.1.3 收敛域

定义：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_0(x)$ 的所有收敛点的集合就是其**收敛域**。

2.1.3.1 具体型

收敛域的求法：

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则收敛半径 $R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & \rho\neq 0\\ +\infty, & \rho=0\\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}$。

2. 开区间 $(-R,R)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间。

3. 代入 R 判断该点的敛散性，最后组合得到收敛域。

但是这种方法有一点不方便，如若只知道 a_n 和 a_{n+2} 的关系则求 $\rho=\dfrac{1}{R}$ 比较麻烦。

收敛域的统一求法：

1. 取绝对值 $|u_0(x)|\geqslant 0$，从而可以使用正项级数的判别法。

2. 根据比值判别法或根值判别法，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\rho$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\rho$，令其小于 1，得到收敛区间 $x\in(a,b)$。

3. 单独讨论 $x=a$，$x=b$ 处的敛散性，得到收敛域。

定理：若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x=x_0$ 处条件收敛，则点 x_0 在幂级数收敛区间的端点上。

例题：求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域。

解：令 $|u_n(x)|=\left|\dfrac{x^n}{n}\right|$。由于含有 x^n，所以使用比值判别法。

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x^{n+1}|}{n+1}\dfrac{n}{|x^n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}|x|=|x|$。

令其小于 1，即 $|x|<1$，$-1<x<1$。

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛。当 $x=1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散。

所以 x 收敛域为 $[-1,1)$。

2.1.3.2 抽象型

定理：根据阿贝尔定理，已知 $\lim\limits_{n=0}^{\infty}a_0(x-x_0)^n$ 在某点 x_1（$x_1\neq x_0$）的敛散性，确定该幂级数的收敛半径可分为三种情况：

1. 若在 x_1 处收敛，则收敛半径 $R\geqslant|x_1-x_0|$。

2. 若在 x_1 处发散，则收敛半径 $R\leqslant|x_1-x_0|$。

3. 注意：若在 x_1 处条件收敛，则 $R=|x_1-x_0|$。

定理：已知 $\sum a_n(x-x_1)^n$ 的敛散性，讨论 $\sum b_n(x-x_2)^m$ 的敛散性：

1. $(x-x_1)^n$ 与 $(x-x_2)^m$ 的转换一般通过初等变形来完成，包括①平移收敛区间；②提出或乘以因式 $(x-x_0)^k$ 等。

2. a_n 与 b_n 的转换一般通过微积分变形来完成，包括①对级数逐项求导；②对级数逐项积分等。

3. 以下三种情况，级数收敛半径不变，收敛域要具体代入点讨论：

   (a) 对级数提出或乘以因式 $(x-x_0)^k$ 或进行平移等，收敛半径不变。

   (b) 对级数逐项求导，收敛半径不变，收敛域可能缩小。

   (c) 对级数逐项积分，收敛半径不变，收敛域可能扩大。

例题：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 在点 $x=1$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 在点 $x=2$ 处 ()。

$A.$ 绝对收敛　　$B.$ 条件收敛　　$C.$ 发散　　$D.$ 敛散性不确定

解：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-(-1))^n$，所以 $x_0=-1$。

又 $x=1$ 处条件收敛，所以 $R=1-(-1)=2$。从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 的收敛区间为 $(-3,1)$。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 要转换为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$，则首先中心点要从-1 移动到 1，$a_n(x+1)^n \to a_n(x-1)^n$，由于平移不改变收敛半径，所以 $a_n(x-1)^n$ 收敛区间为 $(1,3)$。

然后要将 $a_n(x-1)^n$ 变为 $na_n(x-1)^n$，需要进行求导得到 $na_n(x-1)^{n-1}$，求导收敛半径不变，所以收敛区间依然为 $(1,3)$。最后还要乘上 $(x-1)$ 得到 $na_n(x-1)^n$ 就是所求，收敛区间依然为 $(1,3)$。

而在 $x=2$ 在收敛区间内，必然绝对收敛，所以选 A。

2.2 函数展开为幂级数

2.2.1 概念

定义：若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在任意阶导数，则称 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**泰勒级数**，则 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$。

当 $x_0=0$ 时，称 $f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$ 为函数 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**，若收敛，则 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$。

都是函数展开成幂级数。

定理：已知 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处任意阶可导，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 (x_0-R,x_0+R) 上收敛于 $f(x)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 等价。其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 在 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$ 中的余项。

2.2.2　重要展开式

x 的取值指其幂指数的收敛域。第七个幂函数问题较复杂，收敛区间与 α 取值有关。

1. $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^n}{n!}+\cdots$，$-\infty<x<+\infty$。
2. $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots$，$-1<x<1$。
3. $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$，$-1<x<1$。
4. $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots, -1<x\leqslant 1$。
5. $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2x+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$，$-\infty<x<+\infty$。
6. $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$，$-\infty<x<+\infty$。
7. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots$，
$$\begin{cases} x\in(-1,1), \text{当}\alpha\leqslant -1 \\ x\in(-1,1], \text{当}-1<\alpha<0 \\ x\in[-1,1], \text{当}\alpha>0 \end{cases}。$$

其中第 1、3、5 都是直接的公式，其他公式是根据其推出的。

2.2.3 求法

2.2.3.1 直接法

逐个计算 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 并代入，但是一般很麻烦。

2.2.3.2 间接法

利用已知的七个幂级数展开式，通过变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分和待定系数等得到。

例题：求函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开。

解：$f'(x)=(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1-(-x^2)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$，$|-x^2|<1$。

已经求得求导后的函数的幂级数展开，所以求原函数的幂级数展开只需要积分，利用先导后积公式：$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$。

求导的级数要求 $|x|<1$，代入 $x=\pm1$ 到最后结果得到两个交错级数，所以收敛域其实为 $[-1,1]$（可以不写）。

2.3 幂级数求和函数

2.3.1 概念

定义：在收敛域上，记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，并称 $S(x)$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**和函数**。

2.3.2 运算法则

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b（$R_a\neq R_b$），则：

- $k\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}ka_n x^n$，$|x|<R$，$k$ 为常数。
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$，$|x|<R=\min\{R_a,R_b\}$。
- $(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n)\cdot(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb)x^n$。

实际运算中，可能运算法则要求的起始 n 值不同，a_nb_n 不为不包含 x 的常数，x^n 的幂次不同，恒等变形方法如下：

1. 通项，下标一起变化：$\sum\limits_{n=k}^{\infty}a_n x^n=\sum\limits_{n=k+l}^{\infty}a_{n-l}x^{n-l}$，其中 l 为整数。

2. 只变下标，只变通项：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_{k+l-1} x^{k+l-1} + \sum\limits_{n=k+l}^{\infty} a_n x^n$。

3. 只变通项，不变下标：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^l \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-l}$。

如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{2n+2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n} = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n} = a_0 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^{2n}$。

2.3.3 性质

收敛域的扩大和缩小在于其端点是否通过求导或积分变得可取了。

- 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(n)$ 在其收敛区间 I 上连续，且如果幂级数在收敛区间的端点 $x = \pm R$ 处收敛，则和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R]$ 或 $[-R, R)$ 上连续。
- 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积，且有逐项积分公式 $\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$（$x \in I$），逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同收敛半径，但是收敛域可能扩大。
- 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导，且有逐项求导公式 $S'(x) = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$（$|x| < R$），逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同收敛半径，但是收敛域可能缩小。

3 傅里叶级数

3.1 * 三角级数

定义： 将正弦函数 $A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ 按三角公式变形得到 $A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t$，令 $\dfrac{a_0}{2} = A_0$，$a_n = A \sin\varphi_n$，$b_n = A_n \cos\varphi_n$，$\omega = \dfrac{\pi}{l}$，则 $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\dfrac{n\pi t}{l} + b_n \sin\dfrac{n\pi t}{l} \right)$。这个级数就是**三角级数**。

3.2 函数展开为傅里叶级数

定义：设 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续或只有有限个第一类间断点，且至多只有有限个真正的极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛，记起和函数为 $S(x)$，有 $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x+b_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x\right)$。

$a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$，$b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$。

其中三角函数也可以展开为幂级数，所以最后都能通过幂级数展开。

例题：将 $f(x)=1-x^2$（$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$）展开为傅里叶级数。

解：$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x+b_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x\right)$。

其中 $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(1-x^2)\,\mathrm{d}x=2-\dfrac{2}{3}\pi^2$。

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}(\int\limits_{0}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x)=\dfrac{4}{n^2}(-1)^{n+1}$。

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-x^2)\sin nx\,\mathrm{d}x=0$（奇函数乘偶函数为奇函数，且上下限对称）

$f(x)\sim S(x)=1-\dfrac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2}(-1)^{n+1}\cos nx$。

定义：当 $f(x)$ 是偶函数，则 $\sin$ 被消去，$f(x)\sim S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x$，称为**余弦级数**。

定义：当 $f(x)$ 是奇函数，则 $\cos$ 被消去，$f(x)\sim S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x$，称为**正弦级数**。

若 $f(x)$ 因为定义区间不对称导致无奇偶性，则补充定义域，使其称为奇偶函数。

迪利克雷定理定义：$f(x)\sim S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{为连续点}\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{为间断点}\\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & x=\pm l\end{cases}$