矩阵

Didnelpsun

目录

1　矩阵的幂

1.1　对应成比例

因为矩阵运算不满足交换率但是满足结合率，且一行矩阵乘一列矩阵的乘积为一个数，所以可以推出矩阵的幂的运算方法。

这个方法要求 $r(A)=1$，即对应成比例。

令 A 为 n 阶方阵，将 A 拆为 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\alpha^T\beta$，所以 $A^n=\alpha^T\beta\alpha^T\beta\cdots\alpha^T\beta$，利用结合率：$\alpha^T(\beta\alpha^T)(\beta\cdots\alpha^T)\beta$，中间一共 $n-1$ 个 $\beta\alpha^T$，$\beta\alpha^T$ 是一个数，即 $A^n=(\beta\alpha^T)^{n-1}\alpha^T\beta=(\beta\alpha^T)^{n-1}A$。

例题：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&-4&-6\\3&6&9\end{pmatrix}$，求 A^n。

解：$A=(1,-2,3)^T(1,2,3)$，所以 $A^n=((1,2,3)(1,-2,3)^T)^n(1,-2,3)^T(1,2,3)$ $=6^{n-1}A$。

若矩阵 A 的行与列都成比例，则 $A^n=[tr(A)]^{n-1}A$，$[tr(A)]=\sum a_{ii}$，即矩阵迹为对角线元素值之和。

1.2　试算归纳

对 A 进行试算，如 A^2，若 A^k 是一个数量阵，那么计算 A^n 就只用找规律就可以了。

例题：$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，求 A^n（$n\geqslant 2$）。

解：通过计算得知 $A^2=4E$，这是一个数量阵。

$\therefore A^n=\begin{cases}4^kE, & n=2k\\4^kA, & n=2k+1\end{cases}$。

1.3　拆分矩阵

将 A^n 拆分为两个矩阵 $A^n=(B+C)^n$,其中 BC 应该是可逆的,即 $BC=CB$，所以一般有一个是 E。

例题：$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 A^n。

解：$A=E+B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$。

$\therefore A^n=(E+B)^n=C_n^0E^n+C_n^1E^{n-1}B+C_n^2E^{n-2}B^2+\cdots$。

又 $B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$。

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$。

$\therefore B^4=B^5=\cdots=O$。

$\therefore A^n=(E+B)^n=C_n^0E^n+C_n^1E^{n-1}B+C_n^2E^{n-2}B^2$。

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

2　逆矩阵

2.1　定义法

找出一个矩阵 B，使得 $AB=E$，则 A 可逆，$A^{-1}=B$。

例题：A，B 均是 n 阶方阵，且 $AB=A+B$，证明 $A-E$ 可逆，并求 $(A-E)^{-1}$。

解：要证明 $A-E$，就要从 $AB=A+B$ 中尽量凑出。

$AB=A+B$ 变为 $AB-B=A$，从而提取 $(A-E)B=A$，$(A-E)BA^{-1}=E$。

但是 A^{-1} 是未知的，所以 $A-E$ 的逆矩阵不能用 BA^{-1} 来表示。

$AB-A=B$，所以提出 $A(B-E)=B$，即 $A(B-E)=B-E+E$，$(A-E)(B-E)=E$，所以 $A-E$ 的逆矩阵就是 $B-E$。

2.2 分解乘积

将 A 分解为若干个可逆矩阵的乘积。若 $A=BC$，B，C 可逆，则 A 可逆，且 $A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$。

例题：设 A，B 为同阶可逆方阵，且 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，求 $(A+B)^{-1}$。

解：已知 $A^{-1}+B^{-1}$ 可以用来表示其他式子，需要求 $A+B$ 的逆，则需要将 $A+B$ 转为其逆。

$\because A+B=A(E+A^{-1}B)=A(B^{-1}+A^{-1})B$。

$\therefore (A+B)^{-1}=B^{-1}(B^{-1}+A^{-1})^{-1}A^{-1}$。

2.3 分块矩阵

对于一些分块矩阵的逆,若 A,B 都可逆,则: $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$。