相似

Didnelpsun

目录

特征值往往与前面的内容进行混合考察。

1 特征值与特征向量

1.1 迹

例题：已知 A 是 3 阶方阵，特征值为 1，2，3，求 $|A|$ 的元素 a_{11}, a_{22}, a_{33} 的代数余子式 A_{11}, A_{22}, A_{33} 的和 $\sum\limits_{i=1}^{3} A_{ii}$。

解：首先代数余子式的和 A_{11}, A_{22}, A_{33} 一般在行列式展开定理中使用，但是这里给出的不是一行或一列的代数余子式，而是主对角线上的代数余子式，这就无法使用代数余子式来表达行列式的值了。

而另一个提到代数余子式的地方就是伴随矩阵 A^*，所求的正好是伴随矩阵的迹 $tr(A^*) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$。

又根据特征值性质，特征值的和为矩阵的迹，特征值的积为矩阵行列式的值，所以 $tr(A^*) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^*$
$= \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{|A|}{\lambda_i} = \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\lambda_i} = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 = 2 + 3 + 6 = 11$。

1.2 逆矩阵

通过相关式子将逆矩阵转换为原矩阵。同一个向量的逆矩阵的特征值是原矩阵的特征值的倒数。

例题：已知 $\overrightarrow{\alpha} = (a, 1, 1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，则求 $\overrightarrow{\alpha}$ 在矩阵 A 中对应的特征值。

解：由于 $\overrightarrow{\alpha}$ 是 A^{-1} 的特征向量，所以令此时的特征值为 λ_0，则定义 $\lambda_0\overrightarrow{\alpha} = A^{-1}\overrightarrow{\alpha}$，$\lambda_0 A\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha}$。

即 $\lambda_0 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，即 $\lambda_0 \begin{bmatrix} -a & 2 & 2 \\ 2a & a & -2 \\ 2a & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$。

即根据矩阵代表的是方程组，得到 $\lambda_0(4-a) = a$，$\lambda_0(3a-2) = 1$，$\lambda_0(2a-3) = 1$。

又 $\lambda_0 \neq 0$，$3a - 2 = 2a - 3$，$a = -1$，则 $\lambda_0 = -\dfrac{1}{5}$。

所以矩阵 A 对应的特征值为 -5。

1.3 抽象型

题目只会给对应的式子，来求对应的特征向量或特征值。需要记住特征值的关系式然后与给出的式子上靠拢，不会很复杂。

例题： 已知 A 为三阶矩阵，且矩阵 A 各行元素之和均为 5，则求 A 必然存在的特征向量。

解：由于是抽象型，所以没有实际的数据，就不能求出固定的特征值，$\lambda\xi = A\xi$。

又矩阵 A 各行元素之和均为 5，所以转换为方程组：

$$\begin{cases} A_{11} + A_{12} + A_{13} = 5 \\ A_{21} + A_{22} + A_{23} = 5 \\ A_{31} + A_{32} + A_{33} = 5 \end{cases}，转为矩阵：\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

即 $\xi = (1, 1, 1)^T$。

1.4 可逆矩阵

使用可逆矩阵相似对角化的性质。若 $A \sim B$，则 $P^{-1}AP = B$。B 为纯量阵。且 B 的迹为 A 的特征值。P 为特征向量。

例题： 已知 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$，$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆，求 A 关于特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量。

解：根据 $P^{-1}AP = \Lambda$，所以 P 为特征向量，$1, 1, -1$ 为特征值。

1.5 实对称矩阵

实对称矩阵的不同特征值的特征向量相互正交（$A^T A = 0$）。

例题： 已知 A 为三阶实对称矩阵，特征值为 $1, 3\ -2$，其中 $\alpha_1 = (1, 2, -2)^T$，$\alpha_2 = (4, -1, a)^T$ 分别属于特征值 $\lambda = 1$，$\lambda = 3$ 的特征向量。求 A 属于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量。

2　相似理论

3　判断相似对角化

可以使用相似对角化的四个条件，但是最基本的使用还是 A 有 n 个无关的特征向量 ξ。