随机变量及其分布

Didnelpsun

目录

分布函数变量区域左闭右开，概率密度则不要求。

1　一维随机变量

1.1　一维随机变量分布

1.1.1　二项分布

$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$（$k=0,1,\cdots,n$，$0<p<1$），$X\sim B(n,p)$。

例题：已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，$Y$ 表示对 X 进行 3 次独立重复试验中出现事件 $\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$，求 $P\{Y=2\}$。

解：已知对 X 进行独立重复试验，表示这个进行的是伯努利试验，从而 $Y\sim B(n,p)$。又是 3 次，所以 $Y\sim B(3,p)$。

只用求出这个 p 即 $\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$ 的概率就可以了。又已知 $f(x)$。

$\therefore p=\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$。$\therefore P\{Y=2\}=B\left(3,\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{9}{64}$。

1.1.2　泊松分布

$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$（$k=0,1,\cdots,n$，$\lambda>0$），$X\sim P(\lambda)$。

例题：设一本书的各页印刷错误的个数 X 服从泊松分布。已知只有一个和只有两个印刷错误的页数相同，则随机抽查的 4 页中无印刷错误的概率 p 为?

解：$\because P\{X=1\}=P\{X=2\}$，$\therefore\dfrac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$，$\lambda=2$。

由于随机抽四页类似于伯努利试验是相互独立的，所以随机抽 4 页都无错误的概率为 $[P\{X=0\}]^4=e^{-8}$。

1.1.3　几何分布

$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$（$k=0,1,\cdots,n$，$0<p<1$），$X\sim G(p)$。

例题：袋中有 8 个球，其中 3 个白球 5 个黑球，现在任意从中取出 4 个球，若四个球中有 2 个黑球和 2 个白球则试验停止，否则将其放回袋中重新抽取直到满足条件，用 X 表示试验次数，则求 $P\{X=k\}$。

解：由于题目的停止，则说明这个题目的概率是服从几何分布的，最重要的就是求出单次满足事件概率 p。

根据组合和乘法原理，$p=\dfrac{C_3^2C_5^2}{C_8^4}=\dfrac{3}{7}$。

则 $P\{X=k\}=\left(\dfrac{4}{7}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{3}{7}$。

例题：已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0\\ 0,其他\end{cases}$，对 X 进行独立重复观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数，求 Y 的概率分布。

解：由题目直到就停止，知道 $Y\sim G(p)$。

又 $p=P\{X\geqslant 3\}=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}$

这是对几何分布的变形，首先进行 k 次试验，第 k 次成功，所以要乘 p，而因为是第 2 个成功，所以前面的 $k-1$ 次中有 $k-2$ 次失败和一次成功，所以一共 $p^2(1-k)^{k-2}$。因为前面的成功的一次在 $k-1$ 中任意一个地方就可以了，所以一共有 $k-1$ 中可能性，要考虑到排列，所以还要乘 $(k-1)$。

$\therefore P\{Y=k\}=(k-1)\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\cdot\left(\dfrac{7}{8}\right)^{k-2}$。

1.1.4 均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}，F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b\\ 1, & x\geqslant b\end{cases}，X\sim U(a,b)。$$

例题：已知随机变量 $X\sim U(a,b)$（$a>0$）且 $P\{0<X<3\}=\dfrac{1}{4}$，$P\{X>4\}=\dfrac{1}{2}$，求 X 的概率密度以及 $P\{1<X<5\}$。

解：$\because P\{X>4\}=\dfrac{1}{2}$，4 在其区间中点上，$\dfrac{a+b}{2}=4$。

$\because P\{0<X<3\}=\dfrac{1}{4}$，3 若在 a 左边则概率为 0，所以必然在右边。

$\therefore P\{a<X<3\}=\dfrac{1}{4}$，$P\{<3X<4\}=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{4-3}{b-a}=\dfrac{1}{4}$。

解得 $a=2$，$b=6$，$X\sim U(2,6)=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 2<x<6\\ 0, & 其他\end{cases}$。

$P\{1<X<5\}=\dfrac{5-2}{6-2}=\dfrac{3}{4}$。

例题：已知随机变量 X 在区间 $[0,1]$ 上服从均匀分布，在 $X=x$（$0<x<1$）的条件下随机变量 Y 在区间 $[0,x]$ 上服从均匀分布。

(1)(X,Y) 的概率密度。

解：X 在区间 $[0,1]$ 上服从均匀分布，则 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$。

Y 在 $X=x$ 下均匀分布，则 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$。

(X,Y) 联合概率 $=$ 条件概率 $\times$ 边缘概率。

即 $f(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$。

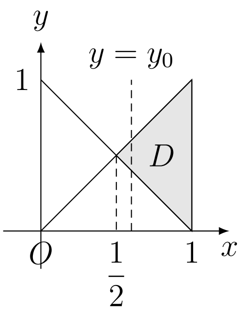
(2)Y 的概率密度。

解：首先求 Y 的边缘概率密度，就需要积 X。然后求 y 的区间，XY 的联合区间是横坐标 $[0,1]$ 到纵坐标 $[0,1]$ 的下三角形，则 $y \in [0,1]$。

然后求 Y 就在联合概率密度所规定的区间中画一条 $y=y_0$ 的线，从左先交到的是 $y=x$，所以下限就是 y，后交的是 $x=1$，所以上限为 1。最后将 y 的联合分布函数放在中间，得到 $f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_y^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\ln y, & 0<y<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$。

(3) 概率 $P\{X+Y>1\}$。

解：求 $P\{X+Y>1\}$ 就是求一个区间的概率值，即 $P\{(X,Y) \in G\} = \iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。



所以 $P\{X+Y>1\} = \iint\limits_D \dfrac{1}{x}\mathrm{d}\sigma$，$D = x+y>1 \cap 0<y<x<1$。$\iint\limits_D \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^x \dfrac{1}{x}\mathrm{d}y = 1-\ln 2$。

1.1.5 指数分布

$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$，$X \sim E(\lambda)$。

例题：已知随机变量 $X \sim E(1)$，a 为常数且大于 0，求 $P\{X \leqslant a+1 | X>a\}$。

解：$P\{X \leqslant a+1|X>a\} = \dfrac{P\{a<X \leqslant a+1\}}{P\{X>a\}} = \dfrac{\int_a^{a+1} e^{-x}\,\mathrm{d}x}{\int_a^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x} = 1-\dfrac{1}{e}$。

也可以根据指数分布的无记忆性：$P\{X \leqslant a+1|X>a\} = 1-P\{X>a+1|X>a\} = 1-P\{X>1\} = P\{X \leqslant 1\} = F(1) = 1-\dfrac{1}{e}$。

例题：随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，求 $P\{3>X>2|X>1\}$。

已知 $F(X<x)=1-e^{-\lambda x}$，则 $F(X>x)=e^{-\lambda x}$。且 $2<X<3\cap 1<X=2<X<3$。

则 $P\{3>X>2|X>1\}=\dfrac{P\{3>X>2\}}{P\{X>1\}}=\dfrac{P\{X>2\}-P\{X>3\}}{P\{X>1\}}=\dfrac{e^{-2}-e^{-3}}{e^{-1}}=e^{-1}-e^{-2}$。

1.1.6 正态分布

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$（$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$），$X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

例题：已知随机变量 $X\sim N(0,1)$，对给定的 α（$0<\alpha>1$），数 μ_α 满足 $P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，求 x。

解：$P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha$ 即表示 μ_α 为标准正态分布的上 α 分位点。

又 $P\{|X|<x\}=\alpha$，即 $-x<X<x$ 的面积为 α，所以两边的面积各为 $\dfrac{1-\alpha}{2}$，$P\{X<x\}=P\{X>x\}=\dfrac{1-\alpha}{2}$。

$\because$ 面积为 α 的下标为 α，$\therefore$ 面积为 $\dfrac{1-\alpha}{2}$ 的下标为 $\dfrac{1-\alpha}{2}$，$x=\mu_{\frac{1-\alpha}{2}}$。

1.2 一维随机变量函数分布

例题：随机变量 X 服从 $U(0,2)$，求随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y)$。

解：求概率分布密度函数，可以求出其积分概率分布函数，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$，又 $X\sim U(0,2)$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}$。

则概率分布函数就是概率密度的积分，此时已经将 Y 变为了关于 X 的积分，$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)\,\mathrm{d}x=2\displaystyle\int_0^{\sqrt{y}}\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{y}}{2}$。即 $F_Y(y)=\dfrac{\sqrt{y}}{2}$。

则 $f_Y(y)=F'_Y(y)=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$。

2 二维随机变量

使用定义法则直接用二重积分的分布函数来求，使用卷积公式则使用概率密度。

2.1 二维离散型随机变量

2.2 二维连续型随机变量

2.2.1 联合概率

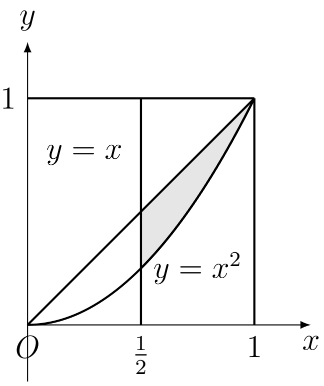
2.2.1.1 概率函数

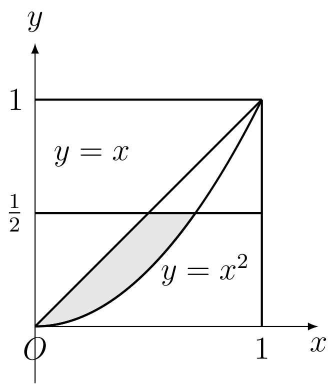
已知联合概率密度，可以求概率函数，通过二重积分的方式，图像面积即是概率。

例题：已知概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 6, & 0<x^2<y<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，

求 $P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}$，$P\left\{Y<\dfrac{1}{2}\right\}$。

解：





$$P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=6\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y=6\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-x^2)\mathrm{d}x=6\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{2}。$$

$$P\left\{Y<\frac{1}{2}\right\}=6\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x=6\int_{0}^{\frac{1}{2}}(\sqrt{y}-y)\mathrm{d}y=\sqrt{2}-\frac{3}{4}。$$

2.2.2 边缘概率

2.2.2.1 边缘概率函数

往往是已知联合概率函数 $F(x,y)$ 求边缘概率函数 $F_X(x)$、$F_Y(y)$，需要将联合概率函数中的 $x/y\to+\infty$，然后求这个函数的极限值。

例题：如果二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=$

$$\begin{cases} 1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 y}+e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda 12\max\{x,y\}}, & \lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12}>0,x>0,y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

求 XY 各自的边缘分布函数。

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\max\{x,y\}=x=+\infty$，$\lim\limits_{y\to+\infty}\max\{x,y\}=y=+\infty$。

$F_X(x)=F(x,+\infty)=1-e^{-\lambda_1 x}-0+0=1-e^{-\lambda_1 x}$，$x>0$，当其他时 $=0$。

$F_Y(y) = F(+\infty, y) = 1 - 0 - e^{-\lambda_2 y} + 0 = 1 - e^{-\lambda_2 x}$，$y > 0$，当其他时 $= 0$。

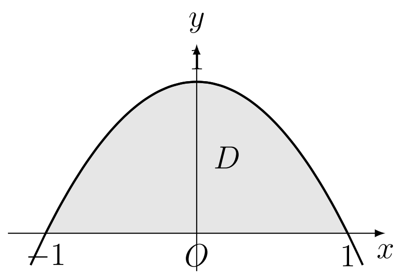
2.2.2.2 边缘概率密度

往往是已知联合概率密度 $f(x,y)$ 求边缘概率密度 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，需要将联合概率密度对另一个变量进行上下限无穷的一重积分，如果 xy 有上下限的定义域则需要画出图像取交集。

确定上下限时要注意，如果求 x 的边缘分布对 y 积分，表示 x 不动，求 y 的范围，求 y 的则反之。

例题：求 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5}{4}(x^2+y), & 0 < y < 1 - x^2 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$ 的边缘概率密度。

如果求 x 的边缘概率密度，则 y 的取值范围为最底部的 0 到函数 $1 - x^2$。如果求 y 的边缘密度，则发现 D 为对称函数，所以可以拆为左右两个部分，x 的范围是 0 到函数 $\sqrt{1-y}$。



$f_X(x) = \dfrac{5}{4}\int_0^{1-x^2} x^2 + y\,\mathrm{d}y = \dfrac{5}{4}\left(x^2 y + \dfrac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x^2} = -\dfrac{5}{8}x^4 + \dfrac{5}{8}$。

$f_Y(y) = 2\dfrac{5}{4}\int_0^{\sqrt{1-y}} x^2 + y\,\mathrm{d}x = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{x^3}{3} + yx\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-y}} = \dfrac{5}{6}(1-y)\sqrt{1-y} + \dfrac{5}{2}y\sqrt{1-y}$。

2.2.3 二维均匀分布

2.2.4 二维正态分布

概率密度为：

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

其中 $\mu_1, \mu_2 \in R$，$\sigma_1, \sigma_2 > 0$，$-1 < \rho < 1$。

2.2.4.1 正态分布性质

例题：$(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; 0)$，分布函数为 $F(x,y)$，已知 $F(\mu_1, y) = \dfrac{1}{4}$，求 y。

解：当 $\rho = 0$ 时，$F(X,Y) = \dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$
$= F_X(x)F_Y(y)$，即 XY 相互独立。

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$，$F_X(\mu_1) = P\{X \leqslant \mu_1\} = \dfrac{1}{2}$。

$F(\mu_1, y) = F_X(\mu_1)F_Y(y) = \dfrac{1}{2}F_Y(y) = \dfrac{1}{4}$，则 $F_Y(y) = \dfrac{1}{2}$，即根据性质 $y = \mu_2$。

2.2.4.2 标准正态化

$F(x) = P\{X \leqslant x\} = P\left\{\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \dfrac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$。

即将 XY 的相关系数消去。

例题：设随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $\Phi(2x+1)\cdot\Phi(2y-1)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，求 (X,Y) 的分布函数。

解：由分布函数为 $\Phi(2x+1)\Phi(2y-1)$ 是 X 的分布函数和 Y 的分布函数的乘积，所以可知 XY 相互独立。

所以根据标准化公式：$\Phi(2x+1)\cdot\Phi(2y-1) = \Phi\left(\dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}}\right)\Phi\left(\dfrac{y-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}}\right)$。

$\therefore (X,Y) \sim N\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}; 0\right)$。

2.3 二维随机变量函数分布

2.3.1 离散型

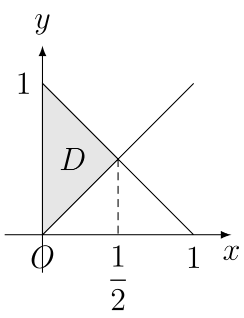
2.3.2 连续型

可以使用卷积公式法和分布函数法两种。

2.3.2.1 和的分布

例题：随机变量 (X,Y) 的概率密度函数 $f(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, \text{其他} & \end{cases}$，求 $P\{X+Y \leqslant 1\}$。

解：根据 $X+Y \leqslant 1$ 和 $0 < x < y$ 划分区域：



其中积分区域 D 如图所示，所以 $P\{X+Y \leqslant 1\} = \iint\limits_D e^{-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x} e^{-y}\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}}(e^{-x} - e^{x-1})\mathrm{d}x = 1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}$。

2.3.2.2 差的分布

例题：设 $X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(2\mu, \sigma_2^2)$，$XY$ 相互独立，已知 $P\{X-Y \geqslant 1\} = \dfrac{1}{2}$，求 μ。

解：若 $X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(2\mu, \sigma_2^2)$，则 $X-Y \sim (-\mu, \sigma_1^2 - \sigma_2^2)$。则 $X-Y$ 的均值为 $-\mu$，即其图像的对称轴为 $-\mu$。

又 $P\{X-Y \geqslant 1\} = \dfrac{1}{2}$，则 $X-Y$ 在 1 这里均分，则对称轴为 1，即 $\mu = -1$。

2.3.3 混合型

使用全概率公式根据离散变量进行概率拆分。

例题：设随机变量 X_1 和 X_2 相互独立，已知 $X_1 \sim B\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$，$X_2$ 的分布函数为 $F(x)$，求 $Y = X_1 + X_2$ 的分布函数 $F_Y(y)$。

解：已知 $X_1 \sim B\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$，$X_2$ 的分布函数为 $F(x)$，则 Y 为混合型。

则 $P\{X_1 = 0\} = C_1^0 \dfrac{3}{4}^0 \dfrac{1}{4}^1 = \dfrac{1}{4}$，$P\{X_1 = 1\} = C_1^1 \dfrac{3}{4}^1 \dfrac{1}{4}^0 = \dfrac{3}{4}$。

$F_Y(y) = P\{X_1 + X_2 \leqslant y\} = P\{X_1 + X_2 \leqslant y | X_1 = 0\}P\{X_1 = 0\} + P\{X_1 + X_2 \leqslant y | X_1 = 1\}P\{X_1 = 1\} = P\{X_2 \leqslant y | X_1 = 0\}P\{X_1 = 0\} + P\{1 + X_2 \leqslant y | X_1 = 1\}P\{X_1 = 1\}$，由相互独立性 $= \dfrac{1}{4} \cdot P\{X_2 \leqslant y\} + \dfrac{3}{4} \cdot P\{X_2 \leqslant y-1\}$。

根据分布函数定义，则 $F_Y(y) = \dfrac{1}{4} \cdot F(y) + \dfrac{3}{4} \cdot F(y-1)$。