

线性方程组

Didnelpsun

目录

1	基本概念	1
1.1	线性方程组与矩阵	1
1.2	矩阵乘法与线性变换	2
1.3	线性方程组的解	2
1.4	线性方程组的矩阵解表示	3
2	具体线性方程	4
2.1	齐次方程组	4
2.1.1	有解条件	4
2.1.2	解的性质	4
2.1.3	解的结构	4
2.1.4	求解过程	4
2.2	非齐次方程组	6
2.2.1	有解条件	6
2.2.2	解的性质	6
2.2.3	求解过程	6
2.3	克拉默法则	7
3	抽象线性方程	8
3.1	解的判定	8
3.2	解的性质	8
3.3	基础解系	9
3.4	系数矩阵列向量与解	9

4	公共解	10
4.1	待定系数法	10
4.2	矩阵法	11
5	同解方程组	11
5.1	性质	11
5.2	代入法	11

1 基本概念

矩阵是根据线性方程组得到。线性方程组和向量组本质上是一致的。

1.1 线性方程组与矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

n 元齐次线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

n 元非齐次线性方程组。

m 是方程个数，即方程组行数， n 是方程未知数个数，即类似方程组的列数。

对于齐次方程， $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 一定是其解，称为其**零解**，若有一组不全为零的解，则称为其**非零解**。其一定有零解，但是不一定有非零解。

对于非齐次方程，只有 $b_1 \cdots b_n$ 不全为零才是。

令系数矩阵 $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ，未知数矩阵 $x_{n \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ，常数项矩阵 $b_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ，增广矩阵 $B_{m \times (n+1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$ 。

所以 $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ 。

从而 $AX = b$ 等价于 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$ ，当 $b = O$ 就是齐次线性方程。

从而矩阵可以简单表示线性方程。

1.2 矩阵乘法与线性变换

矩阵乘法实际上就是线性方程组的线性变换，将一个变量关于另一个变量的关系式代入原方程组，得到与另一个变量的关系。

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s \\ \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{ms}x_s \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 + \cdots + b_{1n}t_n \\ \cdots \\ x_s = b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \cdots + b_{sn}t_n \end{cases}$$

原本是线性方程分别是 y 与 x 和 x 与 t 的关系式，而如果将 t 关于 x 的关系式代入 x 关于 y 的关系式中，就会得到 t 关于 y 的关系式：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(b_{11}t_1 + \cdots + b_{1n}t_n) + \cdots + a_{1s}(b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \cdots + b_{sn}t_n) \\ \cdots \\ y_m = a_{m1}(b_{11}t_1 + \cdots + b_{1n}t_n) + \cdots + a_{ms}(b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \cdots + b_{sn}t_n) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1s}b_{s1})t_1 + \cdots + (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1s}b_{sn})t_n \\ \cdots \\ y_m = (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{ms}b_{s1})t_1 + \cdots + (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{ms}b_{sn})t_m \end{cases}$$

这可以看作上面两个线性方程组相乘，也可以将线性方程组表示为矩阵，进行相乘就得到乘积，从而了解矩阵乘积与线性方程组的关系：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}_{m \times s} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}_{s \times n}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1s}b_{s1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1s}b_{sn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{ms}b_{s1} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{ms}b_{sn} \end{pmatrix}_{m \times n}。$$

1.3 线性方程组的解

对于一元一次线性方程： $ax = b$ ：

- 当 $a \neq 0$ 时，可以解得 $x = \frac{b}{a}$ 。
- 当 $a = 0$ 时，若 $b \neq 0$ 时，无解，若 $b = 0$ 时，无数解。

当推广到多元一次线性方程组： $Ax = b$ ，如何求出 x 这一系列的 x 的解？

从数学逻辑上看, 已知多元一次方程, 有 m 个约束方程, 有 n 个未知数, 假定 $m \leq n$ 。

当 $m < n$ 时, 就代表有更多的未知变量不能被方程约束, 从而有 $n - m$ 个自由变量, 所以就是无数解, 解组中其他解可以由自由变量来表示。无穷多解需要一个解来代表其他解, 这个解就是**基础解系**。

当 $m = n$ 时代表约束与变量数量相等, 此时又要分三种情况。

当所有的约束条件其中存在线性相关, 即一部分约束条件可以由其他约束表示, 则代表这部分约束条件是没用的, 实际上的约束条件变少, 从而情况等于 $m < n$, 结果是无数解。

当所有的约束条件不存在线性相关, 但是一部分约束条件互相矛盾, 则约束条件下就无法解出解, 从而结果是无实数解。

当所有的约束条件不存在线性相关, 且相互之间不存在矛盾情况, 这时候才会解出一个实数解, 从而结果是有唯一实解。

若使用矩阵来解决线性方程组的问题, 其系数矩阵 $A_{m \times n}$ 。

对于 $A \neq O$, 则 $Ax = b$, 若存在一个矩阵 $B_{n \times n}$ 类似 $\frac{1}{a}$, 使得 $BAx = Bb$, 解得 $Ex = x = Bb$, 这个 B 就是 A 的逆矩阵。

对于 $A = O$ 即不可逆, 需要判断 b 是否为 0, 若不是则无实数解, 若是则无穷解, 这种判断需要用到增广矩阵, 需要用到矩阵的秩判断。

取自由变量时必须要保证取完后的矩阵行列式不为 0, 否则自由变量不能表示其他向量。

1.4 线性方程组的矩阵解表示

$$\text{已知对于线性方程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}。$$

按乘积表示为 $A_{m \times n}x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$, 然后将 A 按列分块, x 按行分块:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b, \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}。$$

这三种都是解的表示方法。

2 具体线性方程

2.1 齐次方程组

即 $Ax = 0$ 。其中 A 有 m 行 n 列。

2.1.1 有解条件

必有一个零解。

有解条件讨论是否列满秩问题，即方程组是否能约束全部变量。

对系数矩阵进行行变换，若 $r(A) = m$ ，即使行满秩若 $m < n$ 则列不满秩，那么还是无法约束所有变量；若 $r(A) = n$ ，即使行不满秩但是列满秩，所以还是能约束所有变量。

当 $r(A) = n$ 时，即 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关，则方程组有唯一零解。

当 $r(A) = r < n$ 时，即 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关，则方程具有无穷多个非零解，具有 $n - r$ 个线性无关解（自由变量）。

2.1.2 解的性质

若 $A\xi_1 = 0$, $A\xi_2 = 0$ ，则 $A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = 0$ 。

2.1.3 解的结构

基础解系**定义**：假如 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 满足：①是方程组 $Ax = 0$ 的解；②线性无关；③方程组 $Ax = 0$ 的任一解均可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表出，则称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的**基础解系**。

当 $r(A) < n$ 时讨论基础解系。

通解**定义**：设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系，则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $Ax = 0$ 的通解， k_1, k_2, \dots, k_{n-r} 为任意常数。

2.1.4 求解过程

1. 将系数矩阵 A 作为初等行变换后化为阶梯形矩阵或最简阶梯形矩阵 B ，因为初等行变换将方程组化为同解方程组，所以 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，只需解 $Bx = 0$ ，设 $r(A) = r$ 。其中 A 为 m 行 n 列， m 为约束方程组个数， n 为变量个数。

2. 在 B 中按列找到一个秩为 r 的子矩阵, 即在每排阶梯都选出一列组合成子矩阵, 则剩余列位置的未知数就是自由变量。(极大线性无关组)
3. 按基础解析定义求出 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$, 并写出通解。

例题: 求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$
 的通解。

解: 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$, 然后对其行变换, 得到:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r(A) = 3.$$

然后找子矩阵, 第一台阶选 C_1 , 第二台阶选 C_2 或 C_3 , 第三台阶选 C_4 或 C_5 , 随便找一个, 如 (C_1, C_2, C_4) 为子矩阵, 则 C_3, C_5 所代表的未知数 x_3, x_5 就是自由变量。

所以选择两个分量 $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}, \xi_{15})^T$ 和 $\xi_2 = (\xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}, \xi_{24}, \xi_{25})^T$ 作为基础解系。

因为此时选择 x_3, x_5 为自由变量, 所以 x_3 和 x_5 所对应的 $\xi_{13}, \xi_{15}, \xi_{23}, \xi_{25}$ 可以任意取, 但是为了保证秩为 2, 所以让 $\xi_{13} = 1, \xi_{15} = 0, \xi_{23} = 0, \xi_{25} = 1$ 。这四个分量组成的矩阵线性无关, 原矩阵线性无关, 延长矩阵线性无关, 从而 ξ_1 和 ξ_2 必然线性无关。

所以此时已经给定两组解, 一种是 ξ_1 的 $x_3 = 1, x_5 = 0$, 另一种是 ξ_2 的 $x_3 = 0, x_5 = 1$, 这样就只有三个未知数和三个方程, 分别代入 A 矩阵所代表的方程组中 (代入行阶梯矩阵就可以, 不用代入最简行阶梯矩阵):

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 - 1 \cdot x_5 = 0 \\ 0 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 - 1 \cdot x_5 = 0 \end{cases}, \text{ 分别代入:}$$

$$\xi_1: \begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot 1 - 3 \cdot x_4 - 1 \cdot 0 = 0 \\ 0 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot x_4 + 1 \cdot 0 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot x_4 - 1 \cdot 0 = 0 \end{cases}, \quad \xi_1 = (-1, 1, 1, 0, 0)^T.$$

$$\xi_2: \begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot 0 - 3 \cdot x_4 - 1 \cdot 1 = 0 \\ 0 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot x_4 + 1 \cdot 1 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot x_4 - 1 \cdot 1 = 0 \end{cases}, \quad \xi_2 = (7, 5, 0, 2, 6)^T.$$

所以通解为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1(-1, 1, 1, 0, 0)^T + k_2(7, 5, 0, 2, 6)^T$ 。

2.2 非齐次方程组

即 $Ax = b$, b 为不全为 0 的列向量。

2.2.1 有解条件

$A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, 其中 $\alpha_j = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}]^T$, $j = 1, 2, \dots, n$ 。

当 $r(A) \neq r([A, b])$ 时 ($r(A) + 1 = r([A, b])$), 即 b 不能被 A 线性表出, 则方程组无解。

当 $r(A) = r([A, b]) = n$ 时, 即 b 能被 A 线性表出, A 线性无关, $[A, b]$ 线性相关, 矩阵列满秩, 则方程组有唯一解。

当 $r(A) = r([A, b]) = r < n$ 时, 即 b 能被 A 线性表出, A 线性相关, 矩阵列降秩, 则方程组有无穷多解。

2.2.2 解的性质

若 η_1, η_2, η 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, ξ 是对应齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解, 则:

① $\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax = 0$ 的通解。

② $k\xi + \eta$ 是 $Ax = b$ 的解。

2.2.3 求解过程

将系数矩阵和常数项矩阵合并为一个增广矩阵, 对增广矩阵进行行变换变为阶梯形矩阵, 求出对应齐次线性方程组的通解, 最后假设一个非齐次线性方程组的特解。

1. 写出 $Ax = b$ 的导出方程组 $Ax = 0$ 并求出其通解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 。

2. 求出 $Ax = b$ 的一个特解 η 。

3. $Ax = b$ 的通解为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta$ 。

例题：求非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$
 的通解。

解：对方程组提取出增广矩阵并进行行变换：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)。$$

然后求齐次方程的通解：找两列作为子矩阵，如 x_1, x_2 ，则 x_3, x_4 作为自由变量，设两个 $\xi_1 = (\xi_{11}, \xi_{12}, 1, 0)^T$ 和 $\xi_2 = (\xi_{21}, \xi_{22}, 0, 1)^T$ 。

解得 $\xi_1 = (-3, 2, 7, 0)^T$ ， $\xi_2 = (-13, 4, 0, 7)^T$ （为了得到整数通解都乘了 7）。

通解为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1(-3, 2, 7, 0)^T + k_2(-13, 4, 0, 7)^T$ 。

然后求其非齐次的特解，让两个自由变量为 0 减少计算，即 $\eta = (\eta_1, \eta_2, 0, 0)^T$ 代入方程得到 $\eta = \left(\frac{13}{7}, -\frac{4}{7}, 0, 0\right)^T$ 。

所以通解为 $k_1(-3, 2, 7, 0)^T + k_2(-13, 4, 0, 7)^T + \left(\frac{13}{7}, -\frac{4}{7}, 0, 0\right)^T$ 。

注意：通解的向量可以同乘一个数，因为其表示的是一个关系而不是具体数，但是特解不能同乘一个数，因为其表示的是一个具体的数。

2.3 克拉默法则

克拉默法则本来是矩阵中的运算法则，但是与方程组有更密切的关系，所以放到线性方程组中。

定理：若 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 的行列式 $|A| \neq 0$ ，则方程有唯一解，且 $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ ，其中 A_i 为把系数矩阵 A 的第 i 列的元素用方程组右侧的常数项代替后所得到的 n 阶矩阵。

3 抽象线性方程

3.1 解的判定

$Ax = 0$, 总有解, 至少有零解。

$A_{m \times n}x = 0$, 当 $r(A) = n$ 时, 只有零解; 当 $r(A) < n$ 时, 无穷多解。

$A_{m \times n}x = b$ 时, 当 $r(A) = r([A, b]) + 1 \neq r([A, b])$ 时, 无解; 当 $r(A) = r([A, b]) = n$ 时, 有唯一解; 当 $r(A) = r([A, b]) = r < n$ 时, 无穷多解。

当 $Ax = 0$ 只有零解时, $r(A) = n$, 当 $Ax = 0$ 有无穷多解时, $r(A) = r < n$, 都不能判定 $r(A)$ 与 $r([A, b])$ 的关系, 若以 $Ax = b$ 可能有解也可能无解。

当 $Ax = b$ 有唯一解时, $r(A) = r([A, b]) = n$, 所以 $Ax = 0$ 列满秩, 只有零解。

当 $Ax = b$ 有无穷多解时, $r(A) = r([A, b]) = r < n$, 则 $Ax = 0$ 有无穷多解。

当 A 行满秩, 则 $r(A) = r([A, b])$, 则 $Ax = \beta$ 必有解, 因为原来无关, 延长无关。

所以已知非齐次解情况能推出齐次解情况, 但是反之不能。

3.2 解的性质

非齐次通解 = 齐次的通解 + 非齐次一个特解。

例题: $r(A_{4 \times 4}) = 2$, η_1, η_2, η_3 为 $Ax = b$ 的三个解向量, 其中具有如下关系:

$$\begin{cases} \eta_1 - \eta_2 = (-1, 0, 3, -4)^T \\ \eta_1 + \eta_2 = (3, 2, 1, -2)^T \\ \eta_3 + 2\eta_2 = (5, 1, 0, 3)^T \end{cases}, \text{ 求 } Ax = b \text{ 的通解。}$$

解: $s = n - r(A) = 4 - 2 = 2$, 所以通解的基础解系中有两个分量 ξ_1 和 ξ_2 。

所以需要解 $Ax = 0$, 又存在三个解向量, 所以 $A\eta_1 = A\eta_2 = A\eta_3 = b$, 所以 $A(\eta_1 - \eta_2) = 0$, 所以 $\eta_1 - \eta_2 = (-1, 0, 3, -4)^T$ 就是其中一个解, 所以令 $\xi_1 = \eta_1 - \eta_2 = (-1, 0, 3, -4)^T$ 。

然后根据所给出的 η 进行凑, $A(\eta_1 + \eta_2) = 2b = A(3, 2, 1, -2)^T$, $A(\eta_3 + 2\eta_2) = 3b = A(5, 1, 0, 3)^T$ 。所以 $3A(\eta_1 + \eta_2) - 2A(\eta_3 + 2\eta_2) = 0$, 所以 $A(3(\eta_1 + \eta_2) - 2(\eta_3 + 2\eta_2)) = 0$, 所以令 $\xi_2 = 3(\eta_1 + \eta_2) - 2(\eta_3 + 2\eta_2) = (-1, 4, 3, -12)^T$ 。

最后找一个特解, $\because A(\eta_1 + \eta_2) = 2b, \therefore A\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right) = b, \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, -1\right)^T$ 就是一个特解。

所以通解为 $k_1(-1, 0, 3, -4)^T + k_2(-1, 4, 3, -12)^T + \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, -1\right)^T$

3.3 基础解系

对于 $A_{m \times n}x = 0$, $r(A) = r$, 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 满足: ① $A\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, s$; ② $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关; ③ $s = n - r$, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为 $Ax = 0$ 的基础解系。

例题: 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 则下列向量组也是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系的是 ()。

- A. $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$ B. $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 + \xi_1$
 C. $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3, \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3, 2\xi_1 + 3\xi_2$ D. $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

解: 需要判断基础解系是否线性无关, 需要对应的行列式值非 0。

对于 D: $(\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, 所以 D

线性无关, 从而为基础解系。

例题: 设 $\xi_1 = [1, -2, 3, 1]^T$, $\xi_2 = [2, 0, 5, -2]^T$ 是齐次线性方程组 $A_{3 \times 4}x = 0$ 的解, 且 $r(A) = 2$, 则下列向量中是其解向量的是 ()。

- A. $\alpha_1 = [1, -2, 3, 2]^T$ B. $\alpha_2 = [0, 0.5, -2]^T$
 C. $\alpha_3 = [-1, -6, -1, 7]^T$ D. $\alpha_4 = [1, 6, 1, 6]^T$

解: 若 ξ_1 和 ξ_2 为 $Ax = 0$ 的基, 所以 ξ_1 和 ξ_2 应该能表示其解向量。

所以将 ξ_1 和 ξ_2 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 分别联立为矩阵, 进行初等行变换, 查看是否有解, 即新增广矩阵必须秩为 2。

ABD 选项增广矩阵的秩都为 3, 所以不能表示, 而只有 C 的为 2, 所以 C 可以表示。

3.4 系数矩阵列向量与解

对于齐次方程而言, 其解是让 A 的线性组合为零向量时线性组合的系数, 对于非齐次而言解是 b 由 A 线性表出的表出系数。

所以方程的解就是描述列向量组之间数量关心的系数。

例题: 已知 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是四维列向量, 且 $\alpha_1 = 2\alpha_2 + \alpha_3$, $r(A) = 3$, 若 $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通

解。

解: $\because \alpha_1 = 2\alpha_2 + \alpha_3, 1\alpha_1 - 2\alpha_2 - 1\alpha_3 + 0\alpha_4 = 0$, 即 $A(1, -2, -1, 0)^T = 0$ 。

又 $r(A_{4 \times 4}) = 4, s = n - r(A) = 4 - 3 = 1, \therefore \xi = (1, -2, -1, 0)^T$ 。

所以特解为 β 的系数: $(1, 2, 3, 4)^T$, 通解为 $k(1, -2, -1, 0)^T + (1, 2, 3, 4)^T$ 。

4 公共解

4.1 待定系数法

1. 求两个方程组解的交集部分。可以联立两个方程求解。
2. 求出 $A_{m \times n}x = 0$ 的通解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s$, 这些 k 本来是独立的, 然后代入 $B_{m \times n}x = 0$, 求出 $k_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 之间的关系, 再代回 $A_{m \times n}x = 0$ 的通解中就得到公共解。
3. 给出 $A_{m \times n}x = 0$ 的通解与 $B_{m \times n}x = 0$ 的通解联立: $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s = l_1\eta_1 + l_2\eta_2 + \cdots + l_s\eta_s = 0$, 能解出 k_i 和 l_i 。

这种方法可以求出公共解, 不过比较麻烦。

如果已经给出原方程的基础解系而没有给出矩阵, 则这个方法解出公共解较好。

例题: 已知线性方程组 $A = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, B = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, 求方程组的公共解。

解: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 。

两个秩都为 2, 选择前两个分量为基子矩阵, 后两个为通解分量。

$\xi_1 = (0, 0, 1, 0)^T, \xi_2 = (-1, 1, 0, 1)^T, \eta_1 = (0, 1, 1, 0)^T, \eta_2 = (-1, -1, 0, 1)^T$ 。

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1(0, 0, 1, 0)^T + k_2(-1, 1, 0, 1)^T = (-k_2, k_2, k_1, k_2)^T$ 。

$l_1\eta_1 + l_2\eta_2 = l_1(0, 1, 1, 0)^T + l_2(-1, -1, 0, 1)^T = (-l_2, l_1 - l_2, l_1, l_2)^T$ 。

令 $(-k_2, k_2, k_1, k_2)^T = (-l_2, l_1 - l_2, l_1, l_2)^T$, 所以解得 $2k_2 = k_1$ 。

公共解为 $(-k_2, k_2, 2k_2, k_2)^T = k_2(-1, 1, 2, 1)^T$ 。

4.2 矩阵法

要求 A 和 B 的非零公共解，即求联立矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 的非零解。对这个矩阵求出基础解系。

如果直接给出矩阵，则这种方法可以不用求出基础解系就能得到公共解。

5 同解方程组

5.1 性质

若 $A_{m \times n} x = 0$ 和 $B_{s \times n} x = 0$ 有完全相同的解，就是同解方程组。

$\therefore r(A) = r(B) = r([A, B]^T)$ 。

A 与 $A^T A$ 同解。

5.2 代入法

先求一个方程组的通解，然后把这个通解代入到第二个方程组中，不用管 k 的取值（因为 k 为任意数，所以直接令其为 0）直接求出对应参数。

例题：线性方程组 $A = \begin{cases} x_1 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ ，在其基础上加一个方程 $B = \begin{cases} x_1 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_4 + ax_2 + bx_3 + 13x_4 = 0 \end{cases}$ ， ab 满足什么条件， AB 是同解方程组。

解： B 在 A 的基础上增加一个方程，即多增加了约束，从而 B 的解一定为 A 的解的子集。所以只要 A 的解也满足 B 的解就是同解方程组。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ ， $s = n - r = 4 - 3 = 1$ ， $\xi = (-3, -5, 1, 0)^T$ ， $k\xi = k(-3, -5, 1, 0)^T = (-3k, -5k, k, 0)^T$ 。

所以这个对于 B 而言必然满足前三行，若要整体满足，就也要满足 B 的第四行，所以直接代入第四行： $4(-3k) + a(-5k) + bk + 0 = k(-12 - 5a + b) = 0$ 。

又 k 为任意数，所以 $-12 - 5a + b = 0$ ，即 $b = 5a + 12$ 。

例题：设 A 为 n 阶实矩阵， A^T 是 A 的转置矩阵，证明方程组 $\Lambda: Ax = 0$ 和 $\Upsilon: A^T Ax = 0$ 是同解方程组。

证明：若 γ 为 Λ 的唯一解，则 $A\gamma = 0$ ，则 $A^T A\gamma = A^T 0 = 0$ ， $\therefore \gamma$ 也为 Υ 的解。

若 η 为 Υ 的唯一解，则 $A^T A\eta = 0$ ， $\eta^T A^T A\eta = (A\eta)^T A\eta = \|A\eta\|^2 = 0$ ，所以 $A\eta = 0$ ，从而 η 也为 Λ 的解。

所以同解，所以其两个矩阵的基解等价。

定理： $r(A) = r(A^T) = r(A^T A) = r(AA^T)$ 。