二次型

Didnelpsun

目录

1　二次型

即最基本的将二次型式子变为矩阵形式。

1.1　配方法

1.2　矩阵乘法

由于二次型是 X^TAX 的形式，所以最后的左右两边都存在所有的 x_i，所以可以依次把 x_i 缺的项进行补齐 x_n 与其他所有 x_i 乘积的和的形式。

例题：将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$ 化为矩阵。

解：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3=2x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2=2x_1^2-x_1x_2+x_1x_3+2x_2^2-x_1x_2-x_2x_3+2x_3^2+x_1x_3-x_2x_3=x_1(2x_1-x_2+x_3)+x_2(-x_1+2x_2-x_3)+x_3(x_1-x_2+2x_3)$

$$=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}2x_1-x_2+x_3\\-x_1+2x_2-x_3\\x_1-x_2+2x_3\end{bmatrix}=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}。$$

即 $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$。

2　标准形

即将二次型式子变为平方形式，再变量更换，变成矩阵形式。

2.1　初等变换法

$f(x)=X^TAX$，线性变换 $X=CY$，$C^TAC=\Lambda$，又 C 可逆，$\therefore C=P_1P_2\cdots P_s$，$EP_1P_2\cdots P_s=C$，$\therefore (P_1P_2\cdots P_s)^TAP_1P_2\cdots P_3=\Lambda$，

1. 对 A,E 做同样的初等列变换。
2. 对 A 做相应的初等行变换。（交换 i,j 列就要交换 i,j 行）。一套行列变换后 Λ 为对称矩阵。
3. A 化成对角矩阵时，E 化成的就是 C。

$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}$，对整个列变换，只对 A 行变换。

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.2 可逆线性变换法

即配方法，求可逆线性变换。

1. 如果二次型有平方项，则首先从 x_1 开始往后不断配方，让最后的式子全部以平方加和的形式，从而不会有混合项。
2. 如果二次型没有平方项，则首先令 $x_1 = y_1 + y_2$，$x_2 = y_1 - y_2$，$x_i = y_i$ 等然后带入 $f(x)$ 强行出现平方项，然后配方，成功后再用 z_i 替换。
3. 如果总的完全平方项数小于变量个数，则令多余的 x_i 为 y_i，系数为 0。

2.2.1 平方项

即依次对存在 x_i 的式子进行整合配方。从 x_1 开始，后面含 x_1 的都提到一起配方，然后依次按这个方法进行配方。

例题：将 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2$ 化为标准形并求出作的可逆线性变换。

解：首先对 x_1 进行配方，因为有 x_1 因子的式子有 $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$。

所以将 x_1,x_2,x_3 全部配在一起：$(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$。

所以 $f(x)=(x_1+x_2+x_3)^2-2x_2^2-4x_2x_3-2x_3^2$，然后继续配 x_2。

因为还有 $-2x_2^2-4x_2x_3$，所以配成 $-2(x_2+x_3)^2$，正好全部配完了。

$\therefore f(x)=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_2+x_3)^2$。

令 $y_1=x_1+x_2+x_3$，$y_2=x_2+x_3$，补 $y_3=x_3$，$\therefore f=y_1^2-2y_2^2$。

$(y_1,y_2,y_3)^T=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)^T$，此时是 $y=Dx$，但是我们要求的是 $x=Cy$，所以 $C=D^{-1}$，所以 D^{-1} 才是作出的可逆线性变换。

所以得到的线性变换为 $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$。

这样方法还要重新求逆，比较麻烦。实际上我们要求的是 $x=Cy$，即用 y 来表示 x，从而直接将 y 来表示 x 就可以了。

首先 $y_3=x_3$，所以 $x_2=y_2-x_3=y_2-y_3$，$x_1=y_1-x_2-x_3=y_1-y_2+y_3-y_3=y_1-y_2$，综上 $x_1=y_1-y_2$，$x_2=y_2-y_3$，$x_3=y_3$，也得到同样结果。

2.2.2 无平方项

例题：将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$ 化为规范形，并求所用的可逆线性变换。

解：因为二次型中没有平方项式子，而如果进行配方一定会出现平方，就会产生冲突，所以希望把 x 代换称有平方的式子。

令 $x_1=y_1+y_2$，$x_2=y_1-y_2$，$x_3=y_3$，代入二次型中。

$f=y_1^2-y_2^2+y_1y_3+y_2y_3-y_1y_3-+y_2y_3=y_1^2-y_2^2+2y_2y_3=y_1^2-y_2^2+2y_2y_3$。

此时由没有平方项就变成了有平方项，所以就能进行配方。

$=y_1^2-(y_2-y_3)^2+y_3^2$，继续之前的步骤，进行换元：

令 $z_1=y_1$，$z_2=y_2-y_3$，$z_3=y_3$，$f=z_1^2-z_2^2+z_3^2$ 得到标准形。

对于 x 与 y：$(x_1,x_2,x_3)^T=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}(y_1,y_2,y_3)^T$。$y$ 作为过渡变量。

将 y 转换为 z：$(z_1,z_2,z_3)^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}(y_1,y_2,y_3)^T$，我们需要 $x=Cz$。

$(x_1,x_2,x_3)^T=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}(z_1,z_2,z_3)^T$，从而得到 $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$。

2.3 正交变换法

即求正交变换。

例题： 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 使用正交变换法化为标准形，并求所作的正交变换。

已知将二次型通过矩阵表示：$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}(x_1,x_2,x_3)^T$。

这个矩阵跟第五章相似的实对称矩阵相似对角化的例题的矩阵一样。

所以直接结果：$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$，$\eta_1'=\dfrac{\sqrt{5}}{5}(-2,1,0)^T$，$\eta_2'=\dfrac{\sqrt{5}}{15}(2,4,5)^T$，$\eta_3'=\dfrac{1}{3}(1,2,-2)^T$。

第五步：$f(x)=g(y)=y^T\Lambda y=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&10\end{pmatrix}(y_1,y_2,y_3)^T=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$

3 规范形

由于只有少部分二次型能转换为规范形，所以基本上都是选择题考察。

3.1 惯性定理

多用于规范形的判断。

例题：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 的规范形为 ()。

$A.f=z_1^2$　　$B.f=z_1^2-z_2^2$　　$C.f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$　　$D.f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$

解：

已知 f 的二次型矩阵表示 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{bmatrix}$，根据特征方程 $|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-9)=0$，$\lambda_1=9$，$\lambda_2=\lambda_3=0$，所以根据特征值符号，正惯性系数 $p=1$，负惯性系数 $q=0$，所以选择 A。

4　合同

4.1　合同判断

合同基于二次型，所以只有对称矩阵才能讨论是否合同。

二次型的合同只有两种判断方式：

1. 秩相同，正（负）惯性系数相同。

2. 正负惯性系数都相同。

例题：设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，与 A 合同的是 ()。

$A.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $B.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ $C.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ $D.\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

解：从四个选项，由于是常量矩阵，所以由对角线元素的正负号可以得出这四个的惯性系数分别为 $(3,0)$、$(2,1)$、$(1,2)$、$(0,3)$（前面为正惯性系数，后面为负惯性系数）。

且每个选项的秩都是 3。

4.1.1　配方法

即将二次型配方为标准型，然后求该矩阵的秩和惯性系数。

解：经过配方 $f=(x_1+2x_2)^2-3x_2^2+x_3^2$，由于有三个平方项，所以矩阵秩为 3，正惯性系数为 2，与 B 相同。

4.1.2 特征值法

即根据特征方程进行正交变换得到正负惯性系数。

解：求 A 的特征值，得到 $\lambda_1=1$、$\lambda_2=3$、$\lambda_3=-1$，所以正交变换后标准形为 $y_1^2+3y_2^2-y_3^2$，惯性系数与 B 相同。

4.2 可逆矩阵

已知 $A\simeq\Lambda$，则 $C^TAC=\Lambda$。即 $f=x^TAx=y^T\Lambda y$，得到 $x=Cy$。

例题：已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-4&0\\0&0&\frac{1}{9}\end{bmatrix}$ 合同于 $\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，求 $C^TAC=\Lambda$ 中的 C。

解：已知 A，则可得二次型 $f=x^TAx=[x_1,x_2,x_3]A[x_1,x_2,x_3]^T=x_1^2-4x_2^2+\frac{1}{9}x_3^2$，规范化让这个二次型与 Λ 转换的二次型相等，由于正负惯性系数相同，平方必然是正数，所以符号对齐，令 $x_1^2=y_1^2$、$4x_2^2=y_3^2$、$\frac{1}{9}x_3^2=y_2^2$。

解得 $x_1=y_1$，$x_2=\frac{1}{2}y_3$，$x_3=3y_2$，即 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&&\frac{1}{2}\\&3&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$。

所以 $x=Cy$，解得 $C=\begin{bmatrix}1&&\\&&\frac{1}{2}\\&3&\end{bmatrix}$，此时 $f=x^TAx=y^TC^TACy=y^T\Lambda y$。

5 正定二次型

5.1 具体型

1. 顺序主子式全部大于 0。

2. 特征值全部大于 0。

3. 配方化为全平方和的标准型，正惯性指数 $p=n$（未知数个数）。

4. 矩阵乘法配方为完全平方和，内积 D^TD 不等于 0。

5.2 抽象型