

不定积分与定积分

Didnelpsun

目录

| | | |
|---------|--|---|
| 1 | 不定积分 | 1 |
| 1.1 | 基本积分 | 1 |
| 1.2 | 换元积分 | 1 |
| 1.2.1 | 第一类换元 | 1 |
| 1.2.1.1 | 聚集因式 | 1 |
| 1.2.1.2 | 积化和差 | 2 |
| 1.2.1.3 | 三角拆分 | 2 |
| 1.2.1.4 | 有理换元 | 2 |
| 1.2.1.5 | 万能公式 | 3 |
| 1.2.2 | 第二类换元 | 3 |
| 1.2.2.1 | $\sqrt{a^2 - x^2}$: $x = a \sin t (a \cos t)$ | 3 |
| 1.2.2.2 | $\sqrt{a^2 + x^2}$: $x = a \tan t$ | 4 |
| 1.2.2.3 | $\sqrt{x^2 - a^2}$: $x = a \sec t$ | 4 |
| 1.2.2.4 | 辅助换元 | 5 |
| 1.3 | 分部积分 | 5 |
| 1.3.1 | 基本分部 | 5 |
| 1.3.1.1 | 非幂函数优先 | 5 |
| 1.3.1.2 | 幂函数优先 | 6 |
| 1.3.2 | 多次分部 | 6 |
| 1.3.3 | 分部与换元 | 7 |
| 1.4 | 有理积分 | 7 |
| 1.4.1 | 高阶多项式分配 | 7 |
| 1.4.2 | 低阶多项式分解 | 7 |

| | | |
|----------|------------------------|-----------|
| 1.4.3 | 低阶多项式分配 | 8 |
| 1.4.4 | 低阶多项式因式分解与分配 | 9 |
| 1.4.5 | 有理积分与其他积分运算 | 9 |
| 2 | 定积分 | 11 |
| 2.1 | 变限积分 | 11 |
| 2.2 | 牛莱公式 | 11 |
| 2.3 | 换元积分 | 11 |
| 2.4 | 分部积分 | 11 |
| 2.5 | 反常积分 | 11 |
| 3 | 积分应用 | 11 |
| 3.1 | 面积 | 11 |
| 3.2 | 体积 | 11 |
| 3.3 | 弧长 | 11 |

1 不定积分

1.1 基本积分

例题：汽车以 20m/s 的速度行驶，刹车后匀减速行驶了 50m 停止，求刹车加速度。

已知题目含有两个变量：距离和时间，设距离为 s ，时间为 t 。

因为汽车首先按 20m/s 匀速运动，所以 $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 20$ ，最开始距离为 0，所以 $s|_{t=0} = 0$ 。

又因为是匀减速的，所以速度形如： $v = \frac{s}{t} = kt + b$ ，从而令二阶导数下 $\frac{d^2s}{dt^2} = k$ 。

$$\text{所以 } \frac{ds}{dt} = \int \frac{d^2s}{dt^2} dt = \int k dt = kt + C_1。$$

$$\text{代入 } \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 20, \text{ 所以 } C_1 = 20, \text{ 即 } \frac{ds}{dt} = kt + 20。$$

$$\text{所以 } ds = (kt + 20) dt, \text{ 从而 } s = \int (kt + 20) dt = \frac{1}{2}kt^2 + 20t + C_2。$$

$$\text{又 } s|_{t=0} = 0, \text{ 所以代入得 } C_2 = 0, \text{ 所以 } s = \frac{1}{2}kt^2 + 20t。$$

$$\text{当 } s = 50 \text{ 时停住，所以此时 } \frac{ds}{dt} = 0, \text{ 得到 } t = -\frac{20}{k}。$$

$$\text{代入 } s: 50 = \frac{1}{2}k \left(-\frac{20}{k}\right)^2 + 20 \left(-\frac{20}{k}\right), \text{ 解得 } k = -4, \text{ 即加速度为 } -4\text{m/s}^2。$$

1.2 换元积分

1.2.1 第一类换元

1.2.1.1 聚集因式

将复杂的式子转换为简单的一个因式放到 d 后面看作一个整体，然后利用基本积分公式计算。

$$\text{例题：求 } \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}。$$

$$= \int \frac{d(\ln x)}{\ln x \ln \ln x} = \int \frac{d(\ln \ln x)}{\ln \ln x} = \ln |\ln \ln x| + C。$$

$$\text{例题：求 } \int \frac{10^{2 \arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx。$$

$$= - \int 10^{2 \arccos x} d(\arccos x) = -\frac{1}{2} \int 10^{2 \arccos x} d(2 \arccos x) = -\frac{10^{2 \arccos x}}{2 \ln 10} + C。$$

1.2.1.2 积化和差

对于两个三角函数的乘积可以使用积化和差简单计算。

例题： 求 $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$ 。

$$\begin{aligned} &= \int \cos 3x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 5x \, dx - \frac{1}{2} \int \sin x \, dx = -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C. \end{aligned}$$

1.2.1.3 三角拆分

主要用于 $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$ ，当出现 \tan^2 、 \tan^3 等与 $\sec x$ 在一起作为乘积时可以考虑拆分换元。

例题： $\int \tan^3 x \sec x \, dx$ 。

$$\begin{aligned} &= \int (\sec^2 x - 1) \tan x \sec x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, d(\sec x) = \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C. \end{aligned}$$

需要利用到有理积分的高阶多项式分配与低阶多项式因式分解。

1.2.1.4 有理换元

书上这个类型属于有理函数部分，我这里移动到第一类换元中。即将无理因式设为一个变量，从而提高式子的阶数，消除无理式变为有理式。

例题： 求 $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$ 。

令 $u = \sqrt[3]{x+1}$ ，从而 $x = u^3 - 1$ ， $dx = 3u^2 \, du$ 。

$$\begin{aligned} &= \int \frac{3u^2}{1+u} \, du = \int \frac{3u^2 + 3u - 3u - 3 + 3}{1+u} \, du = \int \left(3u - 3 + \frac{3}{1+u} \right) \, du \\ &= \frac{3}{2} u^2 - 3u + 3 \ln |1+u| + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3 \ln |1 + \sqrt[3]{x+1}| + C. \end{aligned}$$

例题： 求 $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$ 。

令 $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ， $x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ， $dx = d\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right) = \frac{-2u(1+u^2) - 2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}$

$$= \int u \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2} \cdot \frac{-4u}{(1+u^2)^2} \, du = \int \frac{-4u^2}{(1-u)(1+u)(1+u^2)} \, du$$

令 $\frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{Cu+D}{1+u^2} = \frac{-4u^2}{(1-u)(1+u)(1+u^2)}$ 。

通分： $A(1+u^2+u+u^3) + B(1+u^2-u-u^3) + (Cu-Cu^3+D-Du^2)$

$$= (A-B-C)u^3 + (A+B-D)u^2 + (A-B+C)u + (A+B+D) = -4u^2$$

$$\therefore A-B-C=0, A+B-D=-4, A-B+C=0, A+B+D=0。$$

$$\therefore A=B=-1, C=0, D=2。$$

$$\text{原式} = \int \left(\frac{2}{1+u^2} - \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} \right) \, du$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \arctan u + \ln |1 - u| - \ln |1 + u| + C \\
&= 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + C.
\end{aligned}$$

1.2.1.5 万能公式

同样属于有理积分的内容，但是本质还是属于三角函数的部分。

$$\text{令 } u = \tan \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, dx = \frac{2}{1+u^2} du.$$

例题：求 $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$ 。

令 $u = \tan \frac{x}{2}$ ，从而 $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ：

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{3 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \frac{1}{2+u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}$$

1.2.2 第二类换元

使用换元法做了换元之后是要带回式子中的，也就是说要保证反函数的存在才能代入有意义。为了保证反函数的存在，因此要保证原函数的单调性，所以要有一个规定的范围来使原函数保证单调。

1.2.2.1 $\sqrt{a^2 - x^2}$: $x = a \sin t (a \cos t)$

若令 $x = a \sin t$ ，则根据 $\sin t \in (-1, 1)$ 得到主区间： $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

若令 $x = a \cos t$ ，则根据 $\cos t \in (-1, 1)$ ，得到主区间： $t \in (0, \pi)$ 。

例题：求 $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-x^2}}$ 。

令 $x = \sin t (t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right))$ ，所以 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ ， $dx = \cos t dt$ ， $t = \arcsin x$ 。

因为式子 $\frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}} > 0$ ，单调递减，所以不用讨论正负号。

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\cos t}{1 + \cos t} dt = \int \frac{2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = \int dt - \int \sec^2 \frac{t}{2} dt = t - \tan \frac{t}{2} + C \\
&= t - \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} + C = t - \frac{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2}} + C = t - \frac{\sin t}{1 + \cos t} + C \\
&= \arcsin x - \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} + C.
\end{aligned}$$

1.2.2.2 $\sqrt{a^2+x^2}$: $x = a \tan t$

根据 $\tan t \in R$, 从而得到主空间: $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

例题: 求 $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2} dx$ 。

虽然本题目看着可以从分母解开平方, 然后低阶分配, 但是这分母是平方的式子很难分配, 所以需要使用换元法。

令 $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x^2+1 = \sec^2 t$, $dx = \sec^2 t dt$ 。

因为 $(x^2+1)^2 > 0$, 虽然 x^3+1 可能为负可能为正, 但是都是单调递增的, 所以不用考虑正负号。

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\tan^3 t + 1}{\sec^2 t} dt = \int \frac{\sin^3 t + \cos^3 t}{\cos t} dt = \int \frac{\sin t(1 - \cos^2 t) + \cos^3 t}{\cos t} dt \\ &= \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} d(\cos t) + \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \int \cos t d(\cos t) - \int \frac{1}{\cos t} d(\cos t) + \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{4} \int \cos 2t d(2t) \\ &= \int \cos t - \ln \cos t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C \quad (\cos t \text{ 在 } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 中为正}) \\ &\because \tan t = x, \therefore \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}。 \\ &= \frac{1+x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \arctan x + C。 \end{aligned}$$

1.2.2.3 $\sqrt{x^2-a^2}$: $x = a \sec t$

根据 $\sec t \in (-1, 1)$, 所以从而得到主空间: $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

例题: 求 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$ 。

令 $x = 3 \sec t$ 。 $\therefore \sqrt{x^2-9} = 3 \tan t$, $dx = 3 \sec t \tan t dt$ 。

因为式子 $\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$ 的分子必然为为正, 而对于分子在 0 两边的单调性不同, 所以需要对 x 进行正负区分, 又 $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, 所以:

当 $x > 3$ 时, $\sec t > 1$, 即 $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

$$\begin{aligned} &= \int 3 \tan^2 t dt = 3 \int (\sec^2 t - 1) dt \\ &= 3 \tan t - 3t + C = \sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{x} + C。 \end{aligned}$$

当 $x < -3$ 时, $\sec t < -1$, 即 $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 。

$$\begin{aligned} &= - \int 3 \tan^2 t dt = -3 \int (\sec^2 t - 1) dt \\ &= -3 \tan t + 3t + C = \sqrt{x^2-9} + 3 \arccos \frac{3}{x} + C \quad (\tan t < 0) \\ &= \sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{-x} + 3\pi + C \quad (3 \arccos \frac{3}{x} = 3\pi - 3 \arccos -\frac{3}{x}) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{x^2 - 9} - 3 \arccos \frac{3}{-x} + C。$$

$$\text{综上结果为 } \sqrt{x^2 - 9} - 3 \arccos \frac{3}{|x|} + C。$$

1.2.2.4 辅助换元

在使用换元法的时候有可能单个式子不能求出积分，而使用其他辅助式子加减在一起积分可以得到结果，从而能得到原式和辅助式子的积分结果。对于这类题目需要观察什么样的式子能让积分简单。

例题：求 $\int \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}}$ 。

令 $x = \sin t$ ，所以 $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$ ， $dx = \cos t dt$ 。

$\because x + \sqrt{1 - x^2}$ 可能为正可能为负，正负时单调性不同，所以令 $x + \sqrt{1 - x^2} = 0$ ，即 $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，从而 $t \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) \cup (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 。

$$\therefore = \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \quad (t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}))。$$

这时你会发现使用积化和差、万能公式、倍角公式都无法解出这个积分，所以这时候就需要另外一个辅助积分式子加上或减去这个式子，从而让和以及差更容易解出积分。这里根据式子特点让辅助式子分子为 $\sin t$ ：

$$\text{令 } I_1 = \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt, \quad I_2 = \int \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt。$$

$$I_1 + I_2 = \int \frac{\sin t + \cos t}{\sin t + \cos t} dt = \int dt = t。$$

$$I_1 - I_2 = \int \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt = \int \frac{d(\sin t + \cos t)}{\sin t + \cos t} = \ln |\sin t + \cos t| + C。$$

$$\text{所以 } I_1 = \frac{1}{2}(\arcsin x + \ln |x + \sqrt{1 - x^2}|) + C。$$

同理 $t \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 也得到同样结果。

1.3 分部积分

因为分部积分法使用 $\int u dv = uv - \int v du$ ，所以基本上用于两项乘积形式的积分式子。

1.3.1 基本分部

1.3.1.1 非幂函数优先

当幂函数与一些微分后能降低幂函数幂次的函数在一起时，先对非幂函数优先分部积分，结果与幂函数相乘可以消去幂次，以达到降低幂次的作用。

如 $\int x^n \ln x dx$ ， $\int x^n \arctan x dx$ ， $\int x^n \arcsin x dx$ 。

例题：求 $\int x^2 \arctan x \, dx$ 。

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \int \arctan x \, d(x^3) = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int x^3 d(\arctan x) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x+x^3-x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int x \, dx + \frac{1}{6} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

1.3.1.2 幂函数优先

当幂函数与三角函数在一起微分时，因为三角函数无论如何积分都不会被消去，所以应该优先消去幂函数部分，从而降低幂次。

如 $\int x^a \sin x \, dx$, $\int x^a \cos x \, dx$ 。

例题：求 $\int x \tan^2 x \, dx$ 。

$$= \int x(\sec^2 x - 1) \, dx = \int x \, d(\tan x) - \frac{x^2}{2} = x \tan x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

1.3.2 多次分部

对于一部分通过微分形式不会发生变化的函数，所以需要多次积分，然后利用等式求出目标值。

如： $\int e^x \sin x \, dx$, $\int e^x \cos x \, dx$ 。

例题：求 $\int e^x \sin^2 x \, dx$ 。

$$\begin{aligned} &= \sin^2 x \cdot e^x - \int e^x d(\sin^2 x) = \sin^2 x \cdot e^x - \int e^x \cdot \sin 2x \, dx \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \int \sin 2x \, d(e^x) = \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + \int e^x d(\sin 2x) \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2 \int e^x \cdot \cos 2x \, dx \quad (①) \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2 \int \cos 2x \, d(e^x) \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x - 2 \int e^x d(\cos 2x) \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4 \int e^x \cdot \sin 2x \, dx \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4 \int \sin 2x \, d(e^x) \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4 \sin 2x \cdot e^x - 4 \int e^x d(\sin 2x) \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4 \sin 2x \cdot e^x - 8 \int e^x \cdot \cos 2x \, dx \quad (②) \\ \text{然后①=②: } &\int e^x \cdot \cos 2x \, dx = \frac{e^x(\cos 2x + 2 \sin 2x)}{5} + C \\ \text{代入①: } &= \frac{e^x(5 \sin^2 x - 5 \sin 2x + 2 \cos 2x + 4 \sin 2x)}{5} + C \\ &= \frac{e^x(5 \sin^2 x - \sin 2x + 2 \cos 2x)}{5} + C = e^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{1}{10} \cos 2x \right) + C \end{aligned}$$

1.3.3 分部与换元

分部积分法和换元积分法经常一起使用。

例题：求 $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$ 。

令 $\sqrt[3]{x} = u$ ，从而 $x = u^3$ ， $dx = 3u^2 du$ 。

$$\begin{aligned} &= 3 \int e^u u^2 du = 3 \int u^2 d(e^u) = 3u^2 e^u - 3 \int e^u d(u^2) = 3u^2 e^u - 6 \int e^u u du \\ &= 3u^2 e^u - 6 \int u d(e^u) = 3u^2 e^u - 6ue^u + 6 \int e^u du = 3u^2 e^u - 6ue^u + 6e^u + C \\ &= 3e^u(u^2 - 2u + 2) + C = 3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 2) + C. \end{aligned}$$

例题：求 $\int e^{\sqrt{3x+9}} dx$ 。

令 $\sqrt{3x+9} = u$ ，从而 $x = \frac{1}{3}(u^2 - 9)$ ， $dx = \frac{2}{3}u du$ ：

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3} \int u e^u du = \frac{2}{3} \int u d(e^u) = \frac{2}{3} u e^u - \int \frac{2}{3} e^u du = \frac{2}{3} u e^u - \frac{2}{3} e^u + C \\ &= \frac{2}{3} e^{\sqrt{3x+9}} (\sqrt{3x+9} - 1) + C. \end{aligned}$$

1.4 有理积分

1.4.1 高阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ ，且 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都为与 x 相关的多项式， $f(x)$ 阶数高于或等于 $g(x)$ ，则 $f(x)$ 可以按照 $g(x)$ 的形式分配，约去式子，得到最简单的表达。

例题： $\int \frac{x^3}{x^2+9} dx$ 。

$$\begin{aligned} &= \int \frac{x^3 + 9x - 9x}{x^2 + 9} dx = \int \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 9} dx - \int \frac{9x}{x^2 + 9} dx \\ &= \int x dx - \frac{9}{2} \int \frac{d(x^2 + 9)}{x^2 + 9} = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2} \ln(9 + x^2) + C. \end{aligned}$$

1.4.2 低阶多项式分解

当不定积分式子形如 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ ，且 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都为与 x 相关的多项式， $f(x)$ 阶数低于 $g(x)$ ，且 $g(x)$ 可以因式分解为 $g(x) = g_1(x)g_2(x)\cdots$ 时，先因式分解再进行运算。

因式分解时需要注意两点：一点是分解后的式子的分子最高阶要低于分母最高阶数一阶；二是当分母中出现某一因式有大于等于二的幂次时，需要把其分解为从一阶到其当前阶数的因式相加，但是阶数跟一阶因式的分子阶数一样，否则就缺一个不等式而求不出来。

虽然分母可以因式分解，但是整个式子不一定能因式分解，特别是某个因子的阶数高于一阶，所以若不能因式分解则可以考虑低阶多项式分配的方式。

例题：求 $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$ 。

$$\text{令 } \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}。$$

$$\text{通分：} = A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2$$

$$= A(x^2-1) + B(x-1) + C(x^2+2x+1)$$

$$= (A+C)x^2 + (B+2C)x + (C-A-B) = x^2+1。$$

$$\text{从而 } A+C=1, B+2C=0, C-A-B=1。$$

$$\text{所以 } A=C=\frac{1}{2}, B=-1, \text{ 所以 } \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x-1)}。$$

$$\therefore = \int \left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x-1)} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C。$$

1.4.3 低阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ ，且 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都为与 x 相关的多项式， $f(x)$ 阶数低于 $g(x)$ ，且 $g(x)$ 不能因式分解为 $g(x) = g_1(x)g_2(x)\cdots$ 时，则可以分配式子： $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = a_1 \int \frac{d(f_1(x))}{g_1(x)} + a_2 \int \frac{d(f_2(x))}{g_2(x)} + \cdots$ ，将积分式子组合成积分结果为分式的函数，如 $\ln x$ 、 $\arcsin x$ 、 $\arctan x$ 等。

例题：求 $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx$ 。

因为 x^2+2x+3 不能因式分解，所以考虑将分子按照分母形式进行分配。优先对高阶的 x 进行分配。

首先因为分子最高阶为 x 只比分母最高阶 x^2 低一阶，所以考虑将 $x-1$ 分配到微分号内。

$$\begin{aligned} & \because d(x^2+2x+3) = 2x+2, \text{ 而现在是 } x-1, \text{ 所以:} \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx - 2 \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} \\ & - \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - \sqrt{2} \int \frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} \\ & = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - \sqrt{2} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C。 \end{aligned}$$

1.4.4 低阶多项式因式分解与分配

有时候一个式子需要同时用到因式分解和分配两种方式。

例题： 求 $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - x} dx$ 。

$$= \int \frac{x^5 - x^3 + x^4 - x^2 + x^3 - x + x^2 + x - 8}{x^3 - x} dx$$

$$= \int x^2 dx + \int x dx + \int dx + \int \frac{x^2 + x - 8}{x^3 - x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^2 + x - 8}{x^3 - x} dx$$

令 $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{x^2 + x - 8}{x^3 - x}$ 。

$\therefore (A+B+C)x^2 + (C-B)x - A = x^2 + x - 8$ 。 $A=8, B=-4, C=-3$ 。

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{8}{x} dx - \int \frac{4}{x+1} dx - \int \frac{3}{x-1} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 8 \ln |x| - 4 \ln |x+1| - 3 \ln |x-1| + C。$$

1.4.5 有理积分与其他积分运算

换元积分法可以与有理积分、分部积分共同使用。

例题： 求 $\int \frac{-x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} dx$ 。

首先根据因式分解： $\frac{-x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + x + 1)^2}$ 。

$\therefore Ax^3 + (A+B)x^2 + (A+B+C)x + (B+D) = -x^2 - 2$ 。

解得： $A=0, B=D=-1, C=1$ 。

$$= \int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} dx - \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx - \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$\because x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2, \therefore$ 令 $u = x + \frac{1}{2}, a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ：

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx = \int \frac{1}{(u^2+a^2)^2} du = \int \frac{1}{\left(a^2 \left(\left(\frac{u}{a}\right)^2 + 1\right)\right)^2} du, \text{使用第二类}$$

换元法（三角换元）： $\frac{u}{a} = \tan t, u = a \tan t, du = a \sec^2 t dt, t = \arctan \frac{u}{a}$ 。

$$\therefore \int \frac{a \sec^2 t}{a^4 \sec^4 t} dt = \frac{1}{a^3} \int \frac{dt}{\sec^2 t} = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{a^3} \int (1 + \cos 2t) dt$$

$$= \frac{1}{a^3} \int dt + \frac{1}{2a^3} \int \cos 2t d(2t) = \frac{t}{a^3} + \frac{\sin 2t}{2a^3} = \frac{\arctan \frac{u}{a}}{a^3} + \frac{\sin t \cos t}{a^3}$$

$\because \tan t = \frac{u}{a}, \therefore \tan^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} = \frac{u^2}{a^2}$

$$\begin{aligned}
&\therefore \sin t = \frac{u}{\sqrt{a^2 + u^2}}, \quad \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}}, \quad \frac{\sin t \cos t}{a^3} = \frac{u}{a^2(a^2 + u^2)} \\
&\therefore \text{原式} = -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx \\
&= -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\arctan \frac{u}{a}}{a^3} + \frac{u}{a^2(a^2 + u^2)} \right) + C \\
&= -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\
&\quad - \frac{3}{2} \left(\frac{\arctan \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} + \frac{x + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \right)} \right) + C \\
&= -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\
&\quad - \frac{3}{2} \left(\frac{\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}} + \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}(x^2 + x + 1)} \right) + C \\
&= -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} + C \\
&= -\frac{4x+3}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{6}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

2 定积分

2.1 变限积分

2.2 牛莱公式

2.3 换元积分

2.4 分部积分

2.5 反常积分

3 积分应用

3.1 面积

3.2 体积

3.3 弧长