

# 微分方程

Didnelpsun

## 目录

1	微分方程基本概念	1
2	可分离变量的微分方程	2
3	齐次方程	2
3.1	自然齐次方程 . . . . .	2
3.2	* 可化为齐次方程 . . . . .	3
4	一阶线性微分方程	4
4.1	线性方程 . . . . .	4
4.2	* 伯努利方程 . . . . .	4
5	可降阶的高阶微分方程	4
5.1	$y^{(n)} = f(x)$ 型 . . . . .	5
5.2	$y'' = f(x, y')$ 型 . . . . .	5
5.3	$y'' = f(y, y')$ 型 . . . . .	5
6	高阶线性微分方程	6

本节内容较少。

若一曲线过点  $(1, 2)$ ，且该曲线上任一点  $M(x, y)$  处的切线的斜率为  $2x$ ，求该曲线的方程。

令所求曲线为  $\varphi(x)$ ， $\frac{dy}{dx} = 2x$ ，且  $x = 1$  时， $y = 2$ 。

两边积分： $\int dy = \int 2x dx$ 。所以  $y = x^2 + C$ 。

代入  $(1, 2)$ ， $C = 1$ ，所以  $y = x^2 + 1$ 。

## 1 微分方程基本概念

表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，即含导数的方程就是微分方程。导数可能是一阶导数也可能是二阶以及以上阶数的导数。

微分方程所出现的未知函数的最高阶导数的阶数就是该微分方程的阶。

$n$  阶微分方程的形式是  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ 。其中最高阶导数是必须出现的。若能从中解出最高阶导数，则可得微分方程  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ 。

若微分方程中的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则就是微分方程的通解。

如若  $y'' = 3$ ，则  $y' = 3x + C_1$ ， $y = \frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2$ ，此时含有两个任意常数  $C_1, C_2$ ，则微分方程的阶数也为 2。

确定通解中任意常数后，就得到微分方程的特解。

当给出  $x = x_0$  时  $y_0$  与  $y'_0$  的值，那么这些条件就是初值条件，如上面的  $y'' = 3$ 。

求微分方程  $y' = f(x, y)$  满足初值条件  $y|_{x=x_0} = y_0$  的特解这样的问题，就是一阶微分方程的初值问题，记为 
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}。$$

微分方程的解的图形是一条曲线，叫做微分方程的积分曲线，初值问题的集几何意义就是求微分方程的通过某点的积分曲线。

**例题：**判断函数  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$  是否是微分方程  $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$  的解，若是则令其为  $k \neq 0$  时方程的通解，求满足初值条件  $x|_{t=0} = A$ ， $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$  时的特解。

判断是否为方程的解，就要将这个解代入微分方程中。微分方程中除了  $x$ ，还出现了  $x''$ ，所以需要先将  $x$  对  $t$  求两次导：

$x' = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$ ， $x'' = -k^2C_1 \sin kt - k^2C_2 \sin kt$ 。代入方程：

$-k^2(C_1 \sin kt + C_2 \sin kt) + k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0$ , 所以是解, 然后求特解:

代入  $x|_{t=0} = A$ ,  $\therefore C_1 = A$ , 代入  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$ ,  $\therefore C_2 = 0$ 。

所以代入  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$  得到特解:  $x = A \cos kt$ 。

## 2 可分离变量的微分方程

对于第一节的  $dy = 2x dx$  可以直接求解, 但是不是所有一阶微分方程都可以如此求通解, 如  $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$  两端直接积分就可以得到通解  $x^2 + C$ 。

但是并不是所有都是如此, 如  $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$  求积分得  $y = \int 2xy^2 dx$ , 这本身不能直接解, 但是可以将  $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$  先两边同乘  $\frac{dx}{y^2}$  得到  $\frac{dy}{y^2} = 2x dx$ , 将  $xy$  分离在两端, 然后两边同时积分得到  $-\frac{1}{y} = x^2 + C$ , 所以  $y = -\frac{1}{x^2 + C}$ 。

即若可以变型为  $g(y)dy = f(x)dx$  的一阶导数方程就是可分离变量的微分方程。即将含  $y$  的放在一边, 含  $x$  的放在另一边。

然后对两边求积分就得到  $\int g(y) dy = \int f(x) dx$ , 解得隐式解或隐式通解  $G(y) = F(x) + C$ 。

**例题:** 求微分方程  $\frac{dy}{dx} = 2xy$ 。

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx, \ln |y| = x^2 + C, |y| = e^{x^2+C}.$$

$$\therefore y = \pm e^{x^2} e^C = \pm C_1 e^{x^2} = C_2 e^{x^2}.$$

**注意:** 在微分方程部分可以直接  $\ln y = x^2 + C$  而不用管正负号, 因为正负号都会被归为常数中。

## 3 齐次方程

### 3.1 自然齐次方程

若一阶微分方程可化为  $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , 则这方程就是一个齐次方程。

如  $(xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy)dy = 0$  可以化为  $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ , 即  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}$ 。

解决齐次方程问题的过程: 令  $u = \frac{y}{x}$ ;  $y = xu$ ;  $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 。

代入微分方程:  $u+x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$ ,  $\therefore x\frac{du}{dx} = \varphi(u)-u$ , 分离变量:  $\frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x}$ ,  
求积分  $\int \frac{du}{\varphi(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$ 。最后求出积分再用  $\frac{y}{x}$  替代  $u$ 。

若是方程可以变为齐次方程, 则  $x$  和  $y$  的幂应该是对称的, 可以尝试除以一个  $x^a$  来变为  $\frac{y^a}{x^a}$  形式。

**例题:** 求  $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$ 。

得到  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ 。

然后将这个等式化为  $\frac{y}{x}$  的形式, 分子分母同时除以  $x^2$ :  $\frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy - x^2}{x^2}} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$ 。

从而到第三步:  $u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1}$ ,  $\therefore x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1} - u = \frac{u}{u-1}$ 。

$\therefore \frac{u-1}{u} du = \frac{dx}{x}$ ,  $\therefore \int \frac{u-1}{u} du = \int \frac{dx}{x}$ ,  $u - \ln u = \ln x + C$ ,  $\ln xu = u + C$ 。

代入  $u = \frac{y}{x}$ , 得到  $\ln y = \frac{y}{x} + C$ , 所以得到  $y = Ce^{\frac{y}{x}}$ 。

### 3.2 \* 可化为齐次方程

对于自然齐次方程, 其形式如  $\frac{dy}{dx} = \frac{A_1x + B_1y}{A_2x + B_2y}$ , 则可以除以  $x$  得到齐次方程。

而对于形式如  $\frac{dy}{dx} = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}$ , 则因为有常数项, 所以不能直接除以  $x$ 。

所以想尝试消去常数项。令  $x = X + h$ ,  $y = Y + k$ 。

$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{A_1X + B_1Y + A_1h + B_1k + C_1}{A_2X + B_2Y + A_2h + B_2k + C_2}$ , 当取一个合适的  $h$  和  $k$  时常数项  $A_1h + B_1k + C_1 = A_2h + B_2k + C_2 = 0$ , 从而能化为齐次方程。

若  $\frac{A_2}{A_1} \neq \frac{B_2}{B_1}$ , 则可以解得:

$$\begin{cases} k = \frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_2B_1 - A_1B_2} \\ h = \frac{A_1B_1C_2 - A_2B_1C_1 + A_1A_2B_1C_1 - A_1^2B_2C_1}{A_1^2B_2 - A_1A_2B_1} \end{cases}$$

若  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1}$ , 即关系式对应成比例。

令  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \lambda$ ,  $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\lambda(A_1x + B_1y) + C_2}$ 。

又令  $A_1x + B_1y = v$ ,  $\therefore \frac{dv}{dx} = A_1 + B_1 \frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dx} = A_1 + B_1 \frac{v + C_1}{\lambda v + C_2}$

$= \frac{(A_1\lambda + B_1)v + A_1C_2 + B_1C_1}{\lambda v + C_2}$ 。此时未知数只有  $v$ , 所以可以按照可分离

变量来处理。

## 4 一阶线性微分方程

### 4.1 线性方程

形如  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$  就是一阶线性方程。因为其对未知函数  $y$  与其导数都是一次方程。

若  $Q(x) \equiv 0$ , 则是齐次一阶线性微分方程, 可化为  $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$ ,  $\ln y = \int P(x)dx + C'$ ,  $y = e^{-\int P(x)dx} \cdot e^{C'}$ ,  $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ 。

若  $Q(x) \neq 0$ , 则是非齐次一阶线性微分方程, 令  $y = ue^{-\int P(x)dx}$ , 求  $u$  这个关于  $x$  的函数的具体值, 这就是**常数变易法**。代入  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ , 得到  $u'e^{-\int P(x)dx} - ue^{-\int P(x)dx}P(x) + P(x)ue^{-\int P(x)dx} = Q(x)$ , 得到  $u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$ , 从而得到  $u'$ , 再对  $u'$  积分得到  $u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$ 。从而代入  $y = ue^{-\int P(x)dx}$ , 得到  $y = e^{-\int P(x)dx} \left( \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \right)$ 。非齐次通解就是其齐次通解加上一个非齐次的特解。

**例题:** 求  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$ 。

不能直接做, 因为不能分离出  $y$ 。

可以两边求倒数:  $\frac{dx}{dy} - x = y$ , 颠倒  $xy$ , 得到  $\frac{dy}{dx} - y = x$ 。就可以按照公式来求。

或令  $x+y=u$ , 所以  $y=u-x$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$ ,  $\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{u}$ ,  $\frac{u}{1+u}du = dx$ 。

### 4.2 \* 伯努利方程

形如  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$  就是伯努利方程。若  $y=0$  则是齐次方程, 若  $y=1$  则是一阶线性方程。

变形:  $y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$ , 又令  $y^{1-n} = z$ ,  $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ , 从而  $\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}$ , 代入  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$  得到  $\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$ , 从而  $\frac{dz}{dx} = (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ , 将  $(1-n)P(x)$  当作  $P(x)$ ,  $(1-n)Q(x)$  当中  $Q(x)$  代入得到  $z$  的关系式, 再求  $y$ 。

## 5 可降阶的高阶微分方程

高阶微分方程即含二阶以及二阶以上的微分方程, 需要将其降为一阶微分方程。

### 5.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型

右边是只包含  $x$  的函数。

直接对函数不断求积分就可以了。连续积分  $n$  次，会得到一个含有  $n$  个任意常数的通解。

**例题：**求  $y''' = e^{2x} - \cos x$ 。

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1, \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2, \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

### 5.2 $y'' = f(x, y')$ 型

即存在  $y''$ ,  $y'$  和  $x$  但是没有  $y$ 。

所以令  $y' = p$ ,  $y'' = p'$ , 代入:  $p' = f(x, p)$ , 代入  $p = \varphi(x, C_1)$ , 所以  $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$ , 对其积分:  $y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$ 。

**例题：**求  $(1+x^2)y'' = 2xy'$ , 满足初值条件  $y|_{x=0} = 1$ ,  $y'|_{x=0} = 3$  的特解。

令  $y' = p$ ,  $y'' = p'$ , 所以  $(1+x^2)p' = 2xp$ 。

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2}dx, \quad \ln p = \ln(1+x^2) + C', \quad p = C(1+x^2), \quad \text{所以 } y' = 3(1+x^2),$$
$$y = x^3 + 3x + 1.$$

### 5.3 $y'' = f(y, y')$ 型

即存在  $y''$ ,  $y'$  和  $y$  但是没有  $x$ 。

$$\text{所以令 } y' = p, \quad y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

设其通解为  $y' = p = \varphi(y, C_1)$ 。

$$\text{分离变量并积分, 得到通解为 } \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

**例题：**求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解。

$$\text{令 } y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}, \quad \text{代入 } yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0.$$

$$\text{若 } p \neq 0, \quad y \neq 0, \quad \text{则 } yp \frac{dp}{dy}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}, \quad p = Cy.$$

若  $p = 0$ , 则  $y' = 0$ , 则  $y$  是一个常数。

所以综上  $y = C_2 e^{C_1 y}$ 。

## 6 高阶线性微分方程

第一部分是一阶微分方程，分为可分离变量微分方程、齐次微分方程、一阶齐次线性微分方程、一阶非齐次线性微分方程。

第二部分是可降阶的高阶微分方程，分为三种。

第三部分就是本节的高阶线性微分方程， $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$  就是  $n$  阶齐次线性微分方程， $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$  就是  $n$  阶非齐次线性微分方程

若  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  为两个函数，当  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  不成比例，则称  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  线性无关，否则  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  线性相关。

**定理：**若  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  为  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$  的解，则  $y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$  也为其解。

证明：因为  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  为解，所以代入方程：

$$\varphi_1'' + a(x)\varphi_1' + b(x)\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2'' + a(x)\varphi_2' + b(x)\varphi_2 = 0$$

$$\text{从而 } (C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)'' + a(x)(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)' + b(x)(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = C_1(\varphi_1'' + a(x)\varphi_1' + b(x)\varphi_1) + C_2(\varphi_2'' + a(x)\varphi_2' + b(x)\varphi_2) = 0。$$

所以得证。

**定理：**若  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  分别为  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$  与  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$  的解，则  $y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$  为  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$  的解。

证明： $\varphi_1'' + a(x)\varphi_1' + b(x)\varphi_1 = 0$ ， $\varphi_2'' + a(x)\varphi_2' + b(x)\varphi_2 = f(x)$ ，代入  $y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ ：

$$(\varphi_1 + \varphi_2)'' + a(x)(\varphi_1 + \varphi_2)' + b(x)(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1'' + a(x)\varphi_1' + b(x)\varphi_1) + (\varphi_2'' + a(x)\varphi_2' + b(x)\varphi_2) = f(x)。$$

所以得证。

**定理：**若  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  为  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$  的解，则  $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$  为  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$  的解。

证明： $\varphi_1'' + a(x)\varphi_1' + b(x)\varphi_1 = f(x)$ ， $\varphi_2'' + a(x)\varphi_2' + b(x)\varphi_2 = f(x)$ ，代入  $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ ：

$$\begin{aligned} & (\varphi_2 - \varphi_1)'' + a(x)(\varphi_2 - \varphi_1)' + b(x)(\varphi_2 - \varphi_1) \\ & (\varphi_2'' + a(x)\varphi_2' + b(x)\varphi_2) - (\varphi_1'' + a(x)\varphi_1' + b(x)\varphi_1) \\ & f(x) - f(x) = 0, \text{ 所以得证。} \end{aligned}$$