

多元函数积分学

Didneipsun

目录

1	二重积分	1
1.1	交换积分次序	1
1.1.1	直角坐标系	1
1.1.2	极坐标系	1
1.2	极直互化	2
1.3	二重积分计算	2
1.3.1	交换积分次序	2
1.3.2	积分性质	2
1.3.3	切分区域	3
1.3.4	坐标轴移动	3
1.4	二重积分等式	4
1.5	二重积分求导	4
1.6	一重积分化二重积分	4
1.6.1	乘积化不等式	4
1.6.2	乘积简化计算	5

1 二重积分

1.1 交换积分次序

1.1.1 直角坐标系

例题：交换积分次序 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy$ 。

解：已知积分区域分为两个部分。将 X 型变为 Y 型。画出图形可以知道 $y \in (0, 1)$, x 的上下限由 $y = x^2$ 和 $y = \frac{1}{2}(3 - x)$ 转化为 \sqrt{y} 和 $3 - 2y$ 。

所以转换为 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$ 。

1.1.2 极坐标系

例题：对 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 交换积分次序。

解：对于极坐标的积分次序交换需要利用直角坐标系来画图了解，特别是对 r 的上下限。

对 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 变为 y 轴, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 变为 $y = -x$ 。

对 $r = 2 \cos \theta$ 变为 xy 的表达式, $r^2 = 2 \cos \theta$, 即 $x^2 + y^2 = 2x, (x-1)^2 + y^2 = 1$ 。

所以所得到的 σ 为一个圆割去一个扇形。

交换积分次序后就需要以一个长度以极点为圆心做圆, 切割 σ 。

由 σ 可知取长度 $\sqrt{2}$ 可以切分。

所以 σ 可以分为左边的 σ_1 和右边的 σ_2 。

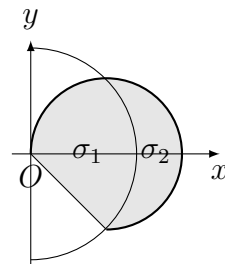
σ_1 的 $r \in [0, \sqrt{2}]$, σ_2 的 $r \in [\sqrt{2}, 2]$ 。

σ_1 的 θ 下限是 $y = -x$ 这条边, 即 $\theta = -\frac{\pi}{4}$, 上限是 $r = 2 \cos \theta$ 这个圆, 则 $\theta = \arccos \frac{r}{2}$ 。

σ_2 的 θ 界限都是 $r = 2 \cos \theta$ 这个圆, 此时 $r > 0$ 恒成立, 但是上限是上半部分 $\theta > 0$, 而下限是下半部分 $\theta < 0$, 即上限 $\theta = \arccos \frac{r}{2}$, 所以下限为 $\theta = -\arccos \frac{r}{2}$ 。

综上交换积分次序结果为:

$$\int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{r}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta + \int_{\sqrt{2}}^2 r dr \int_{-\arccos \frac{r}{2}}^{\arccos \frac{r}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta。$$



1.2 极直互化

例题：将 $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-x^2} dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^R e^{-y^2} dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2} dx$ 转换为极坐标系并计算结果。

解：首先根据积分上下限得到积分区域 $D = \left\{ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}R, 0 \leq x \leq y \right\} \cup \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}R \leq y \leq R, 0 \leq x \leq \sqrt{R^2-y^2} \right\}$, D 为一个八分之一圆的扇形。

根据 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 替换得到 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq r \leq R, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ 。

又 $e^{-y^2} \cdot e^{-x^2} = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$ 。

$$\therefore I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr。$$

1.3 二重积分计算

二重积分若是累次积分形式出现，则计算可以使用上面两种方法简便运算。

1.3.1 交换积分次序

主要用于直角坐标系。

当按照当前的积分次序无法算出时需要更换积分次序。主要是看 $f(x, y)$ 是对 x 先积分更简单还是对 y 先积分更简单。

例题：求 $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \cos^2 x dx$ 。

解：首先直接对这个式子直接计算， $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ ，原式 $= \frac{1}{2} \int_0^1 (\pi - 2y - \arcsin y) dy$ 。根本无法解出。

考虑交换积分次序，首先求 σ , $y \in [0, 1]$, $x \in [\arcsin y, \pi - \arcsin y]$ ，则 $\sin x = y$, $y = \sin(\pi - x) = \sin x$ 即 $x \in [0, \sin x]$ 。

将积分区域换成 X 型： $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, \sin x]$ 。

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2 x dx \int_0^{\sin x} dy &= \int_0^\pi \cos^2 x \sin x dx = - \int_0^\pi \cos^2 x d(\cos x) = - \frac{\cos^3 x}{3} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{3}。 \end{aligned}$$

1.3.2 积分性质

直角坐标系和极坐标系都可以使用。

若积分区域 σ 关于 $x = k_1$ 或 $y = k_2$ 对称，则当 $f(x, y)$ 含有 $x - k_1$ 或 $y - k_2$ 因式时重积分值为 0。

例题： 设 $D: x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$, 求 $\iint_D xy \, dx dy$ 。

解： 本题目使用直角坐标系和极坐标系都不好做。所以需要利用积分性质，对 D 进行平移等操作。

利用平移，由于 $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$, 令 $x = 1 + r \cos \theta$, $y = 1 + r \sin \theta$, 则利用极坐标, $r \in [0, \sqrt{2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} ((1+r \cos \theta)(1+r \sin \theta)r) dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (1+r \sin \theta + r \cos \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta)r dr$, 又将 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 对 θ 在 $[0, 2\pi]$ 进行积分全部为 0, 所以直接把后面的全消掉, 变为 $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr = 2\pi$ 。

1.3.3 切分区域

主要用于直角坐标系转为极坐标系。

将不规则的区域划分为圆域。

例题： 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 求 $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 。

解： 由 $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 知道可以使用极坐标系来表示, 但是 D 是一个正方形, 无法用圆来简单表示。

又 D 可以从 $y = x$ 切割为两个部分, 所以令下三角形为 D_1 , $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \iint_{D_1} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 。

所以 $0 \leq y$ 和 $y = x$ 可以确定 $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $0 \leq x \leq 1$ 可以确定 r 上界为 $x = 1$, 即 $r \cos \theta = 1$, 即 $r = \frac{1}{\cos \theta}$, 确定 $r \in [0, \frac{1}{\cos \theta}]$ 。

所以 $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos \theta} = 2 \ln(\sec \theta + \tan \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \ln(1 + \sqrt{2})$ 。

即对二重积分求导, 需要将二重积分化为一重积分。

1.3.4 坐标轴移动

主要用于直角坐标系转为极坐标系。

面对 D 为一个圆的部分区域, 而圆心不在原点, 则可以坐标轴移动让圆心到原点上, 从而方便积分, 本质就是换元。

例题： 设积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x + 2y\}$, 求 $\iint_D (x^2 + xy + y^2) d\sigma$ 。

解： D 为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq \sqrt{2}$, 即圆心在 $(1, 1)$ 的圆, 极坐标系无法表示, 所以必须平移坐标轴。

1.4 二重积分等式

例题：设 $f(x, y)$ 为连续函数，且 $f(x, y) = \frac{1}{\pi} \sqrt{x^2 + y^2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) d\sigma + y^2$ ，求 $f(x, y)$ 。

解：∵ $f(x, y)$ 为连续函数，所以其在区间上可积且是一个常数。

令 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) d\sigma = A$ 。对 $f(x, y) = \frac{A}{\pi} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2$ 两边积分：

$$A = \frac{A}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y^2 d\sigma, \text{ 令 } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta:$$

$$A = \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr + \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{2A}{3} + \frac{\pi}{4}. A = \frac{3}{4}\pi.$$

则代入原式 $f(x, y) = \frac{3}{4} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2$ 。

1.5 二重积分求导

1.6 一重积分化二重积分

对于一重积分的计算或证明可能比较有难度，如两个关于 x 的函数的一重积分乘积计算，可以将其中一个 x 当作 y ，从而将一重积分的乘积变为二重积分。

1.6.1 乘积化不等式

例题： $f(x)$ 为恒大于 0 的连续函数，证明 $\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$ 。

解：首先观察这个式子，右边是积分上下限的差的乘积，左边是两个积分的乘积，看上去貌似没什么关系，而且积分式子给出的是一个未定式 $f(x)$ ，所以不能直接求左边值再比较大小，他们之间一定存在着某种关系。

式子左边的两个函数互为倒数，所以应该要尝试将这两个式子乘在一起利用基本不等式计算，即将一重积分乘积变为二重积分。

对于一重积分而言只是一个自变量，对于二重积分而言就变成了两个自变量，需要令其中一个 $f(x)$ 变为 y ，所以 xy 的积分区域都是一样的 $[a, b]$ ，所以设 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ 。

$$I = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(y)} dy = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)} dx dy.$$

$$I = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \int_a^b f(y) dy \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)} dx dy.$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \frac{1}{2} \left[\iint_D \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right] dx dy \right] \geq \frac{1}{2} \iint_D 2 \sqrt{\frac{f(x)}{f(y)} \cdot \frac{f(y)}{f(x)}} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D 2 dx dy = (b-a)^2. \end{aligned}$$

1.6.2 乘积简化计算

例题：求 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 。

解：对于这个一重积分首先看到 e^{x^2} ，肯定会想到将其幂次降低。使用分部积分法对 e^{x^2} 求导这个幂次不会降低，使用换元法 $x = \sqrt{t}$ 会得到 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 从而无法处理，所以这些都不能计算，那么该怎么办？

看到 x^2 就能想到 $x^2 + y^2$ 的形式，这样就是一个极坐标系的二重积分，所以尝试将一重积分变成二重积分，即再乘一个以 y 为自变量的原式。

设 $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ ，显然 $I > 0$ ，将 x 换成 y ：

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

$$= \iint_{\substack{0 \leq x \leq +\infty \\ 0 \leq y \leq +\infty}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \text{ 令 } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta:$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^{+\infty} e^{-r^2} d(-r^2) = -\frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$