

# 向量代数与空间解析几何

Didnelpsun

## 目录

<b>1</b>	<b>向量代数</b>	<b>1</b>
1.1	向量及其表达形式 . . . . .	1
1.2	向量运算 . . . . .	1
1.2.1	数量积 . . . . .	1
1.2.2	向量积 . . . . .	1
1.2.3	混合积 . . . . .	2
1.3	向量方向角与方向余项 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>空间解析几何</b>	<b>2</b>
2.1	平面方程 . . . . .	2
2.2	直线方程 . . . . .	3
2.3	位置关系 . . . . .	3
2.3.1	点到平面距离 . . . . .	3
2.3.2	直线关系 . . . . .	3
2.3.3	平面关系 . . . . .	3
2.3.4	直线与平面关系 . . . . .	4
2.4	空间曲线 . . . . .	4
2.4.1	表达式 . . . . .	4
2.4.2	空间曲线在坐标面投影 . . . . .	4
2.5	空间曲面 . . . . .	4
2.5.1	曲面方程 . . . . .	4
2.5.2	二次曲面 . . . . .	4
2.5.3	柱面 . . . . .	5
2.5.4	旋转曲面 . . . . .	5

<b>3 场论初步</b>	<b>6</b>
3.1 方向导数 . . . . .	6
3.2 梯度 . . . . .	6
3.3 方向导数与梯度关系 . . . . .	6
3.4 散度 . . . . .	6
3.5 旋度 . . . . .	6

该部分的内容服务于后面的多元函数积分学。

## 1 向量代数

### 1.1 向量及其表达形式

**定义：**既有方向又有大小的向量称为**向量**。

向量的相等性体现在大小和方向，与空间位置无关。

向量表达形式为  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ 。

### 1.2 向量运算

设  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ ,  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  均不是零向量。

#### 1.2.1 数量积

称为内积或点积。

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ 。
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ , 则  $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$ , 其中  $\theta$  为  $\vec{a}, \vec{b}$  夹角。
- $a \perp b \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ 。
- $Prj_b \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$  称  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  上的投影。

#### 1.2.2 向量积

也称为外积、叉积。

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ , 其中  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ , 用右手规则确定方向（转向角不超过  $\pi$ ），其中  $\theta$  为  $\vec{a}, \vec{b}$  夹角。
- $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ 或 } \pi \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ 。

### 1.2.3 混合积

$$\bullet [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$\bullet \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{三向量共面}.$$

## 1.3 向量方向角与方向余项

- $\vec{a}$  与  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴正向的夹角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  为  $\vec{a}$  的方向角。
- $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  称为  $\vec{a}$  的方向余弦, 且  $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$ 。
- $\vec{a}^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  称为向量  $\vec{a}$  的单位向量 (表示方向的向量)。
- 任意向量  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (r \cos \alpha, r \cos \beta, r \cos \gamma) = r(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ,  
 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  称为  $\vec{r}$  的方向余弦,  $r$  为  $\vec{r}$  的模,  $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$   
 $\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

## 2 空间解析几何

### 2.1 平面方程

假设平面的法向量  $\vec{n} = (A, B, C)$ 。

- 一般式:  $Ax + By + Cz + D = 0$ 。
- 点法式:  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 。
- 三点式:  $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$  (平面过不共线的三点)。
- 截距式:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  (平面过  $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$  三点)。

## 2.2 直线方程

假设直线的方向向量  $\vec{\tau} = (l, m, n)$ 。

- 一般式: 
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{cases}$$
, 其中  $\vec{n}_1$  不平行于  $\vec{n}_2$ 。(两个平面的交线, 该直线方向向量  $\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ )
- 点向式 (标准式、对称式):  $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ 。(直线上一点与方向向量成比例)
- 参数式: 
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$
,  $M(x_0, y_0, z_0)$  为直线上已知点,  $t$  为参数。
- 两点式:  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ 。(直线过不同的两点)

## 2.3 位置关系

### 2.3.1 点到平面距离

点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的距离为  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 。

### 2.3.2 直线关系

设  $\vec{\tau}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ ,  $\vec{\tau}_2 = (l_2, m_2, n_2)$  分别为直线  $L_1, L_2$  的方向向量。

- $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{\tau}_1 \perp \vec{\tau}_2 \Leftrightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ 。
- $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \vec{\tau}_1 // \vec{\tau}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ 。

### 2.3.3 平面关系

设平面  $\pi_1, \pi_2$  的法向量分别为  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ,  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ 。

- $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ 。
- $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ 。

### 2.3.4 直线与平面关系

设直线  $L$  的方向向量为  $\tau = (l, m, n)$ , 平面  $\pi$  的法向量为  $\vec{n} = (A, B, C)$ 。

- $L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{\tau} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ 。
- $L // \pi \Leftrightarrow \vec{\tau} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0$ 。

## 2.4 空间曲线

### 2.4.1 表达式

- 一般式:  $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ , 表示两个曲面的交线。
- 参数方程:  $\Gamma: \begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$ 。

### 2.4.2 空间曲线在坐标面投影

如求曲线  $\Omega$  在  $xOy$  平面上的投影曲线, 讲  $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  中的  $z$  消去, 得到  $\varphi(x, y) = 0$ , 则曲线  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影曲线包含于  $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 。

## 2.5 空间曲面

### 2.5.1 曲面方程

隐式表达式:  $F(x, y, z) = 0$ , 显式表达式:  $z = z(x, y)$ 。

### 2.5.2 二次曲面

- 球面:  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 。
- 椭球面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 。
- 单叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 。
- 双叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 。

- 椭圆抛物面:  $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$  ( $p, q > 0$ )。 (常考旋转抛物面  $x^2 + y^2 = z$ )
- 椭圆锥面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 。 (常考旋转锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ )
- 双曲抛物面 (马鞍面):  $-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$  ( $p, q > 0$ )。 (可能考  $z = xy$ )

### 2.5.3 柱面

空间解析几何中一般认为缺少变量的方程为柱面。

是动直线沿定曲线平行移动所形成的曲面。

- 椭圆柱面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (当  $a = b$  为圆柱面)。
- 双曲柱面:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。
- 抛物柱面:  $y = ax^2$ 。

### 2.5.4 旋转曲面

绕某轴转, 其就不变, 把另外一个字母写成另外两个字母的平方和的开方。

是曲线  $\Gamma$  绕一条定直线旋转一周所形成的曲面。

给定一条直线  $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ , 其方向向量为  $\vec{\tau}(l, m, n)$ , 上有一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 。

现在给定一条曲线  $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 。

在  $\Gamma$  上找一点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , 然后再讲  $P_1$  绕  $L$  旋转一周得到一个纬圆, 去纬圆上一点  $P(x, y, z)$ , 则  $P$  为旋转曲面上任意一点。

因为  $P_1$  在曲线  $\Gamma$  上, 所以  $F(x_1, y_1, z_1) = 0$ ,  $G(x_1, y_1, z_1) = 0$ 。

同一个纬圆到  $L$  上的  $P_0$  距离相等, 既  $|\overrightarrow{P_1P_0}| = |\overrightarrow{PP_0}|$ , 即  $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ 。

每一个纬圆的平面与旋转中心  $L$  的方向向量  $\vec{\tau}$  垂直, 而  $P_1P$  在平面上, 所以该连线向量  $\overrightarrow{P_1P} \perp \vec{\tau}$ , 即  $l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0$ 。

为了得到旋转曲面面积, 需要消去  $x_1, y_1, z_1$ , 得到  $H(x, y, z) = 0$ 。

例题: 求曲线  $L: \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转一周所形成的曲面方程。

解: 令  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  在曲线上, 所以  $x_1 - y_1 + 2z_1 - 1 = 0, x_1 - 3y_1 - 2z_1 + 1 = 0$ 。

然后任意一点  $P(x, y, z)$  到  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的距离与  $P_1$  到  $P_0$  距离相同, 取  $P_0(0, 0, 0)$ , 则  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。

两条连线垂直  $y$  轴, 即  $\overrightarrow{P_1P} \perp (0, 1, 0)$ , 即  $y = y_1$ 。

消去  $x_1, y_1, z_1$ , 根据  $y = y_1$ , 所以  $x_1^2 + z_1^2 = x^2 + z^2$ 。

根据交线方程解得  $x_1 = 2y, z_1 = \frac{1}{2}(1 - y)$ 。

再代入得到  $x^2 + z^2 = (2y)^2 + \frac{1}{4}(1 - y)^2$ , 解得  $x^2 - \frac{17}{4}y^2 + z^2 + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} = 0$ 。

## 3 场论初步

### 3.1 方向导数

### 3.2 梯度

### 3.3 方向导数与梯度关系

### 3.4 散度

### 3.5 旋度