相似

Didnelpsun

目录

主要包括特征值与特征向量，相似矩阵，对角矩阵。

这里的矩阵都是指方阵。

1 特征值与特征向量

1.1 定义

设 A 是 n 阶矩阵，λ 是一个数，若存在 n 维非零列向量 $\xi \neq 0$，使得 $A\xi = \lambda\xi$，则 λ 是 A 的特征值，ξ 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

1.2 性质

1.2.1 特征值性质

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，λ_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）是 A 的特征值，则：

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^{n} = tr(A)$。主对角线元素和即矩阵的迹。
2. $\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$。

1.2.2 特征向量性质

1. k 重特征值 λ 至多只有 k 个线性无关的特征向量。
2. 若 ξ_1 和 ξ_2 是 A 的属于不同特征值 λ_1 和 λ_2 的特征向量，则 ξ_1 和 ξ_2 线性无关。
3. 若 ξ_1 和 ξ_2 是 A 的属于同特征值 λ 的特征向量，则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$（$k_1 k_2$ 不同时为 0）仍是 A 的属于特征值 λ 的特征向量。

证明性质二：利用定义法，首先 $A\xi_1 = \lambda_1\xi_1$，$A\xi_2 = \lambda_2\xi_2$。

要证明两个特征向量线性无关，则证明 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0$ 时 $k_1 = k_2 = 0$。

$Ak_1\xi_1 + Ak_2\xi_2 = k_1\lambda_1\xi_1 + k_2\lambda_1\xi_2 = 0$。又 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = \lambda_1 k_1\xi_1 + \lambda_1 k_2\xi_2 = 0$，

两式相减：$k_2(\lambda_2 - \lambda_1)\xi_2 = 0$，且 $\lambda_1 \neq \Lambda_2$，$\xi_2 \neq 0$，$\therefore k_2 = 0$。

代入 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0$，即 $k_1\xi_1 = 0$，又 $\xi_1 \neq 0$，$\therefore k_1 = 0$。

1.3 运算

$\because \lambda\xi - A\xi = 0$，$\therefore (\lambda E - A)\xi = 0$，又 $\xi \neq 0$，$\therefore (\lambda E - A)x = 0$ 有非零解。

从而 $\lambda E - A$ 所表示的方阵线性相关，为降秩，从而 $|\lambda E - A| = 0$。

$|\lambda E - A| = 0$ 也称为特征方程或是特征多项式，解出的 λ_i 就是特征值。

将 λ_i 代回原方程，所有非零的解就是 ξ。

1.3.1 具体型

若矩阵 A 为对角线矩阵，则特征值为对角线上元素。

注意：特征向量因为要求不为 0，所以需要 $k \neq 0$。

注意：得到多重特征值时要全部写出，$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$。

例题：求 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda_2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 2 & \Lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda - 4\lambda - 4(\lambda - 2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$。

$\therefore \lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda = 4$。

当计算 $|\lambda E - A|$ 时往往难点就是从多项式中解出 λ，对于 $f(\lambda) = a_k\lambda^k + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$，可以使用试根法：

1. 若 $a_0 = 0$，$\lambda = 0$ 就是其根。
2. 若 $a_k + \cdots + a_1 + a_0 = 0$，$\lambda = 1$ 就是其根。
3. 若 $a_0 + a_2 + \cdots + a_{2k} = a_1 + a_3 \cdots + a_{2k-1}$，$\lambda = -1$ 就是其根。
4. 若 $a_k = 1$，且系数都是整数，则有理根是整数，且均为 a_0 的因子。

对于第四个，如 $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$，2 的因子为 ± 1 和 ± 2，分别代入得到一根为 2。

1.3.2 抽象型

1. 利用定义，寻找 $A\xi = \lambda\xi$，$\xi \neq 0$，λ 是 A 的特征值，ξ 是 A 属于 λ 的特征向量。

2. 根据 $|\lambda E - A| = 0$ 计算出对应的 λ 值，再计算 ξ 的值。

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$	A^T
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	λ^{-1}	$\|A\|/\lambda$	λ	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$	无关

例题：设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^T = A$（此时 A 就是幂等矩阵）。

(1) 求 A 的特征值可能的取值。

(2) 证明 $E + A$ 是可逆矩阵。

(1) 解：$\because A^2 = A$，$\therefore f(A) = A^2 - A = 0$，$f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = 0$，$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 1$。

值得注意的是这里求的 λ 是可能的取值，因为不同的矩阵特征值不同，只有通过 $|\lambda E - A| = 0$ 的值才是真实的特征值。

2 相似

2.1 矩阵相似

2.1.1 定义

2.1.2 性质

2.2 相似对角化

2.2.1 定义

2.2.2 对角化条件

2.2.3 步骤

2.3 应用

2.4 相似对角化

2.5 反向问题

2.5.1 参数

2.5.2 矩阵

2.6 幂与函数