多元函数微分学

Didnelpsun

目录

1　基本概念

1.1　二元函数

函数以 $f(u,v)$ 的形式来出现，需要分别对其求偏导。

例题：设 $z=e^{xy}+f(x+y,xy)$，$f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：令 $x+y$ 为 u，xy 为 v，$f(u,v)$ 对 u 求导就是 f_1'，对 v 求导就是 f_2'，求 uv 依次求导就是 f_{12}''，以此类推。

首先求一次偏导：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=ye^{xy}+f_1'+f_2'y$。

接着对 y 求偏导：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}+\dfrac{\partial f_1'}{\partial y}+\dfrac{\partial f_2'y}{\partial y}$。

$=e^{xy}+xye^{xy}+\dfrac{\partial f_1'}{\partial y}+\dfrac{\partial f_2'}{\partial y}y+f_2'\dfrac{\partial y}{\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}+\dfrac{\partial f_1'}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f_1'}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial f_2'}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}y+\dfrac{\partial f_2'}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}y+f_2'=e^{xy}+xye^{xy}+f_{11}''+f_{12}''x+f_{21}''y+f_{22}''xy+f_2'$。

又 $f(u,v)$ 具有两阶连续偏导数，所以 $f_{12}''=f_{21}''$。

即 $=e^{xy}+xye^{xy}+f_{11}''+(x+y)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$。

1.2　复合函数

函数以复合函数形式 $f(g(x,y))$ 出现，函数的变量是一个整体。

1.2.1　链式法则

若是给出相应的不等式可以通过链式法则求出对应的表达式。

例题：设 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$（$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$）有二阶连续的偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$，则求 $u(\sqrt{x^2+y^2})$。

解：这个函数是复合函数 $u=u(r)$ 和 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 而成。根据复合函数求导法则：

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$。

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{x}{r}\right)=\dfrac{x}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r}\right)=\dfrac{x}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{r-x\cdot(\partial r/\partial x)}{r^2}=\dfrac{x^2}{r^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{r^2-x^2}{r^3}$。

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{y}{r}\right)=\dfrac{y}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r}\right)=\dfrac{y}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{r-y\cdot(\partial r/\partial y)}{r^2}=\dfrac{y^2}{r^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{r^2-x^2}{r^3}$

代入不等式：$\dfrac{x^2+y^2}{r^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}r^2}+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{2r^2-x^2-y^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+u=x^2+y^2$。

代入 $x^2+y^2=r^2$：$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+u=r^2$，为二阶线性常系数微分方程。

通解为 $u=C_1\cos r+C_2\sin r+r^2-2$。

即 $u(\sqrt{x^2+y^2})=C_1\cos\sqrt{x^2+y^2}+C_2\sin\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2-2$。

1.2.2 特殊值反代

若是给出的不等式后还给出对应的特殊值，可以直接代入然后反代求出函数，而不用链式法则。

例题：设 $z=e^x+y^2+f(x+y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^3$，则求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

解：已知 $y=0$ 时，$z=e^x+f(x)=x^3$，$\therefore f(x)=x^3-e^x$，$f(x+y)=(x+y)^3-e^{x+y}$，$z=e^x+y^2+(x+y)^3-e^{x+y}$。

$\therefore\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^x+3(x+y)^2-e^{x+y}$。

1.3 积分与微分

1.3.1 积分到微分

可能一个函数是积分的形式，又包含多个变量，要求其多元微分值。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)\,\mathrm{d}t=b'(x)f[b(x)]-a'(x)f[a(x)]$。

例题：设 $z=\int_0^1|xy-t|f(t)\,\mathrm{d}t$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $z''_{xx}+z''_{yy}$。

解：首先因为 z 是一个绝对值的形式，所以根据积分的性质可以拆开积分区间去掉绝对值：$z=\int_0^{xy}(xy-t)f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{xy}^1(t-xy)f(t)\,\mathrm{d}t=xy\int_0^{xy}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{xy}tf(t)\,\mathrm{d}t+\int_{xy}^1tf(t)\,\mathrm{d}t-xy\int_{xy}^1f(t)\,\mathrm{d}t$。

$z'_x=y\int_0^{xy}f(t)\,\mathrm{d}t+xy^2f(xy)-xy^2f(xy)-xy^2f(xy)-y\int_{xy}^1f(t)\,\mathrm{d}t+xy^2f(xy)=y\int_0^{xy}f(t)\,\mathrm{d}t-y\int_{xy}^1f(t)\,\mathrm{d}t$。

$z''_{xx}=y^2f(xy)+y^2f(xy)=2y^2f(xy)$，同理根据变量对称性 $z''_{yy}=2x^2f(xy)$，$z''_{xx}+z''_{yy}=2(x^2+y^2)f(xy)$。

1.3.2 微分到积分

注意多元函数进行积分的适合多出来的常数 C 不再是常数，而是与积分变量相关的 $C(x)$，$C(y)$，因为对其中一个变量积分时，另一个变量是看作常数的。

例题：设 $z=f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，且 $f(x,0)=x$，$f(0,y)=y^2$，求 $f(x,y)$。

解：根据 $\partial x\partial y$ 的求导顺序反向积分：

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\int(x+y)\,\mathrm{d}y=xy+\dfrac{1}{2}y^2+C_1(x)$。（$x$ 看作常数）

再次积分 $z=\displaystyle\int\left(xy+\frac{1}{2}y^2+C_1(x)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\int C_1(x)\,\mathrm{d}x+C_2(y)$。（$y$ 看作常数）

又 $f(x,0)=x$，代入 $\int C_1(x)\,\mathrm{d}x+C_2(0)=x$，两边求导 $C_1(x)=1$，即 $\int C_1(x)\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x=x$，$z=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x+C_2(y)$。

又 $f(0,y)=y^2$，代入 $C_2(y)=y^2$。

$\therefore z=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x+y^2$。

1.4 全微分

1.4.1 含参数

基本上是用含参数的全微分来求参数。有多种方法。

例题：设 $(ax^2y^2-2xy^2)\mathrm{d}x+(2x^3y+bx^2y+1)\mathrm{d}y$ 是函数 $f(x,y)$ 的全微分，求参数。

解：由全微分定义可知，$f'_x=ax^2y^2-2xy^2$，$f'_y=2x^3y+bx^2y+1$。

分别对其积分：$f(x,y)=\int(ax^2y^2-2xy^2)\mathrm{d}x=\int(2x^3y+bx^2y+1)\mathrm{d}y$。

从而 $\dfrac{a}{3}x^3y^2-x^2y^2+C(y)=x^3y^2+\dfrac{b}{2}x^2y^2+y+C(x)$，解得 $a=3$，$b=-2$，$f(x)=x^3y^2-x^2y^2+y$。

1.4.2 极限定义

全微分形式：$\displaystyle\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$。

要求 $\mathrm{d}z|_{(a,b)}$，就要求 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)-f(a,b)=cx+dy+o(\rho)$，$c$ 和 d 就是 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的参数。

例题：连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，求 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}$。

解：当 $x\to 0,y\to 1$ 时 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}\to 0$，又 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，$\displaystyle\therefore\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}f(x,y)-2x+y-2=0$。

又 $f(x,y)$ 连续，则 $f(0,1)+1-2=0$，$f(0,1)=1$。将值代入，并按分子配方：

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \dfrac{f(x,y)-f(0,1)-2x+(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，即 $f(x,y)-f(0,1)=2x-(y-1)+o(\rho)$。

根据全微分的定义偏导数就是其系数，$f'_x(0,1)=2$，$f'_y(0,1)=-1$。

$\therefore \mathrm{d}z|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$。

例题：设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-a-bx-cy}{\ln(1+x^2+y^2)}=1$，其中 a,b,c 为常数，求 $\mathrm{d}f(x,y)|_{(0,0)}$。

解：根据全微分的定义，分母应该是根号的形式，所以对于极限使用等价无穷小替换 $\ln(x+1)\sim x$，$\ln(1+x^2+y^2)=x^2+y^2$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-a-bx-cy}{x^2+y^2}=1$。

又 $(x,y)\to 0$ 时 $x^2+y^2\to 0$，$\therefore f(x,y)-a-bx-cy\to 0$。

又 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，$f(0,0)=a$。根据极限和无穷小的关系将其代回：

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)-bx-cy}{x^2+y^2}=1+o(1)$。

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)-f(0,0)-bx-cy=x^2+y^2+o(1)\cdot(x^2+y^2)=o(\rho)$。

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)-f(0,0)=bx+cy+o(\rho)$。

即 $f'_x(0,0)=b$，$f'_y(0,0)=c$。$\mathrm{d}f(x,y)|_{(0,0)}=b\mathrm{d}x+c\mathrm{d}y$。

1.4.3 隐函数

二元隐函数求导公式：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$。

三元隐函数求导公式：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$。

例题：设 $f(x,y,z)=e^x+y^2z$，其中 $z=z(x,y)$ 由 $x+y+z+xyz=0$ 确定，求 $f'_x(0,1,-1)$。

解：$f'_x(x,y,z)=e^x+y^2z'_x$。

又 $x+y+z+xyz=0$ 对 x 求导：$1+z'_x+yz+xyz'_x=0$，代入 $(0,1,-1)$，$1+z'_x-1=0$，$z'_x=0$。代入 $f'_x(x,y,z)=e^0=1$。

2 多元函数微分应用

2.1 空间曲线的切线与法平面

2.1.1 参数方程

设空间曲线 $\varGamma$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ 给出，其中 $\phi(t),\psi(t),\omega(t)$ 均可导，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 $\varOmega$ 上的点，且当 $t=t_0$ 时，$\phi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$，$\omega'(t_0)$ 均不为 0，则：

- 曲线 $\varGamma$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为 $\vec{\tau}=(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$。
- 曲线 $\varGamma$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\phi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$。
- 曲线 $\varGamma$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面（过 P_0 且与切线垂直的平面）方程为 $\phi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$。

2.1.2 交面式方程

设空间曲线 $\varGamma$ 由交面方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 给出，则：

- 曲线 $\varGamma$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为
$\vec{\tau}=\left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0},\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0},\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0}\right)$。
- 曲线 $\varGamma$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为
$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}},\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0}},\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0}}$。
- 曲线 $\varGamma$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面方程为
$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0}(z-z_0)=0$。

2.2 空间曲面的切平面与法线

2.2.1 隐式

设空间曲面 $\varSigma$ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 $\varSigma$ 上的点，则：

- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),$ $F'_z(x_0,y_0,z_0))$ 且法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0}$。
- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为 $F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y$ $(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$。

2.2.2 显式

设空间曲面 Σ 由方程 $z=f(x,y)$ 给出，令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，假定法向量的方向向下，即其余 z 轴正向所成的角为钝角，即 z 为-1，则：

- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1)$，且法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$。
- 曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为 $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)$ $(y-y_0)-(z-z_0)=0$。

若是反之成锐角，则将里面所有的-1 都换成 1。

若用 α,β,γ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量的方向角，并这里假定法向量的方向是向上的，即其余 z 轴正向所成的角 γ 为锐角，则法向量**方向余弦**为 $\cos\alpha=\dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$，其中 $f_x=f'_x(x_0,y_0)$，$f_y=f'_y(x_0,y_0)$。

例题：设直线 $L\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于 $(1,-2,5)$，求 ab 的值。

解：L 在 π 上且与曲面相切，则 π 为 L 的切平面。设曲面方程 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$。

曲面法向量为 $\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}=\{2x,2y,-1\}$，代入 $(1,-2,5)$，则法向量为 $\{2,-4,-1\}$。

又点法式：$\pi:2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$，即 $2x-4y-z-5=0$。

联立直线方程，得到：$(5+a)x+4b+ab-2=0$，又 x 是任意的。

解得 $a=-5,b=-2$。