

微分方程

Didnelpsun

目录

1	一阶微分方程	1
1.1	可分离变量微分方程	1
1.1.1	交叉积分法	1
1.1.2	多项式换元法	1
1.2	一阶线性方程	1
1.2.1	交叉积分法	1
1.2.2	公式法	2
1.2.3	换元法	2
1.2.4	交换微分变量	2
1.3	伯努利方程	3
2	二阶可降阶微分方程	3
2.1	$y'' = f(x, y')$ 型	3
2.2	$y'' = f(y, y')$ 型	4
3	高阶线性微分方程	4
3.1	二阶微分方程通解	4
3.2	反推微分方程	4
3.2.1	齐次微分方程	4
3.2.2	非齐次微分方程	5
3.2.2.1	已知结构	5
3.2.2.2	未知结构	5
3.3	高阶微分方程通解	6

4	微分方程概念	6
4.1	已知微分方程的解反求系数	6
4.2	不解微分方程，利用方程隐含信息	6
5	欧拉方程	7
6	微分方程物理应用	7
6.1	牛顿第二定律	7
6.2	变化率	7

1 一阶微分方程

1.1 可分离变量微分方程

1.1.1 交叉积分法

例题：求 $y \sin \frac{x}{2} dx - \cos \frac{x}{2} dy = 0$ 的通解。

解： $\frac{dy}{dx} = y \tan \frac{x}{2}$, $\frac{dy}{y} = \tan \frac{x}{2} dx$, $\int \frac{dy}{y} = 2 \int \tan \frac{x}{2} d\frac{x}{2}$ 。

解得 $\ln |y| = -\ln \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 + \ln C_1$ (取对数更好解), $|y| = \frac{C_1}{\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2}$ 。

$$y = \frac{\pm C_1}{\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2}, \text{ 令 } C = \pm C_1, \text{ 得 } y = \frac{C}{1 + \cos x}。$$

注意在第一步时将 y 除到分母上, 本来 y 为任意常数, 变为 $y \neq 0$, 所以解得最后 $C \neq 0$, 而实际上 y 可以为 0, 所以 C 应该为任意常数。

此时解为全部解, 为通解加上 $y = 0$ 的奇解。

1.1.2 多项式换元法

x 和 y 是以和差作为一个整体形式。

例题：求微分方程 $dy = \sin(x + y + 100) dx$ 的通解。

解：令 $u = x + y + 100$, $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y + 100)$, $\therefore \frac{du}{dx} = 1 + \sin u$ 。

$$\frac{du}{1 + \sin u} = dx, \int \frac{du}{1 + \sin u} = \int dx, \int \frac{1 - \sin u}{\cos^2 u} du = x。$$

$\int \sec^2 u - \tan u \sec u du = x$, 即 $\tan u - \sec u = x + C$ 。代回 $u = x + y + 100$ ：

通解 $\tan(x + y + 100) - \sec(x + y + 100) = x + C$ 。

所有解: $\tan(x + y + 100) - \sec(x + y + 100) = x + C$, $x + y + 100 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ 。

1.2 一阶线性方程

形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 。

可以直接求也可以使用公式求。

1.2.1 交叉积分法

例题：设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y)$ ($x > 0$) 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 求 L 的方程。

解： (x, y) 到坐标原点的距离为 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 。

若 $y = y(x)$, 则切线为 $Y - y = y'(X - x)$, 令 $X = 0$, 解得 $Y = y - xy'$ 。

$$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} = y - xy', \text{ 解得 } y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}。$$

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$ 。代入 y' :

$$\frac{du}{dx}x + u = u - \sqrt{1 + u^2}, \quad \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\int \frac{dx}{x}。$$

$$\therefore \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = -\ln x + \ln C, \quad u + \sqrt{1 + u^2} = \frac{C}{x}。$$

$$\text{代入 } \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{C}{x}, \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = C。$$

1.2.2 公式法

即使用非齐次和非齐次的一阶线性微分方程式。

1.2.3 换元法

如果存在 $f(y)$, y 无法提出, 则使用换元法。典型的就 e^y 。

例题: 求微分方程 $y' + 1 = e^{-y} \sin x$ 的通解。

解: 已知对 $e^{-y} \sin x$ 无法处理, 所以必然需要对其转换, $e^y y' + e^y = \sin x$ 。

$$\therefore (e^y)' + e^y = \sin x, \quad \text{令 } e^y = u, \quad u' + u = \sin x, \quad P(x) = 1, \quad Q(x) = \sin x。$$

$$e^y = u = e^{-\int dx} \left(\int e^{\int dx} \sin x dx + C \right) = e^{-x} \left(\int e^x \sin x dx + C \right), \text{ 积分再现表格}$$

解出 $\int e^x \sin x dx$: $= e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \right)。$

例题: 求 $y' = \frac{y^2 - x}{2y(x + 1)}$ 的通解。

解: 这个式子首先分子分母等长, xy 都合在一起, 所以很难去分离出基本的微分方程。基本的微分方程式子为 $y' + P(x)y = Q(x)$, 对比可以看出里面 y^2 是不能化简的, 所以很容易想到把这个当作一个整体。

$$2y'y = \frac{y^2 - x}{x + 1}, \text{ 此时出现了 } y^2 \text{ 和 } y^2 \text{ 的导数, 令 } y^2 = u, \quad u' = \frac{u - x}{x + 1}。$$

$$\text{即 } u' - \frac{y}{x + 1} = \frac{1}{x + 1} - 1, \text{ 此时就化为了一般非齐次方程。}$$

$$\text{根据公式算出 } y = C(x + 1) - (x + 1) \ln |x + 1| - 1。$$

1.2.4 交换微分变量

当出现 $y' = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)$ 多项式的次数远高于 $f(x)$, 此时就没办法分离变量了, 可以用 $\frac{dx}{dy}$ 颠倒求导顺序。

例题: 求 $y' = \frac{y}{x + (y + 1)^2}$ 的通解。(y 不为常函数)

解: 由于 y' 对应的式子分母较复杂, 而分子较简单, 所以上下颠倒:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + (y+1)^2}{y} = \frac{x}{y} + y + \frac{1}{y} + 2. \quad x' - \frac{1}{y}x = y + \frac{1}{y} + 2.$$

$$\text{根据公式: } x = e^{\int \frac{1}{y} dy} \left[\int \left(y + \frac{1}{y} + 2 \right) e^{\int -\frac{1}{y} dy} dy + C \right] = y^2 + 2 \ln |y| y - 1 +$$

Cy 。

1.3 伯努利方程

形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ 。

例题: 求 $y dx = (1 + x \ln y)x dy$ ($y > 0$) 的通解。

解: 将导数放到一边: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(1 + x \ln y)x}$, 这个算式无法处理。

而颠倒 $\frac{dx}{dy} = \frac{(1 + x \ln y)x}{y} = \frac{1}{y}x + \frac{\ln y}{y}x^2$ 。

凑伯努利方程: $x' + P(x)x = Q(x)x^n$: $x' - \frac{1}{y}x = \frac{\ln y}{y}x^2$ 。 $P(x) = -\frac{1}{y}$,

$$Q(x) = \frac{\ln y}{y}。$$

乘 x^{-2} 降阶: $x^{-2}x' - \frac{1}{y}x^{-1} = \frac{\ln y}{y}$ 。令 $z = x^{-1}$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dy}$ 。代入方程:

$-\frac{dz}{dy} - \frac{1}{y}z = \frac{\ln y}{y}$, $\frac{dz}{dy} + \frac{1}{y}z = -\frac{\ln y}{y}$, 利用公式:

$$z = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left(\int e^{\int \frac{1}{y} dy} \cdot \left(-\frac{\ln y}{y} \right) + C \right) = \frac{1}{y} (-\int \ln y dy + C) = \frac{1}{y} (-y(\ln y - 1) + C) = -\ln y + 1 + \frac{C}{y}。$$

$$\therefore x = \frac{y}{-y \ln y + y + C}。$$

2 二阶可降阶微分方程

2.1 $y'' = f(x, y')$ 型

例题: 求 $y'' = \frac{2xy'}{1+x^2}$ 的通解。

解: 令 $y' = p$, $p' = \frac{2xp}{1+x^2}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{2xp}{1+x^2}$, $\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2}$, $\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x}{1+x^2}$ 。

$\ln |p| = \ln(1+x^2) + \ln C_1$, $p = \pm C_1(1+x^2) = C_2(1+x^2)$ 。

$$y' = C(1+x^2), \quad \therefore y = C_2 \left(x + \frac{x^3}{3} + x \right) + C。$$

2.2 $y'' = f(y, y')$ 型

3 高阶线性微分方程

3.1 二阶微分方程通解

先将常系数非齐次线性微分方程变为常系数齐次线性微分方程求解，然后加上非齐次方程的一个特解，就是非齐次方程的一个通解。

特解只能拆为和的形式而不能拆为乘商的形式，如 $Q(x) = \sin^2 x$ ，则应该拆为 $\frac{1 - \cos 2x}{2}$ 。

例题：求 $y'' - 4y' + 4y = 3xe^{2x}$ 的通解。

解：变为常系数齐次线性微分方程： $y'' - 4y' + 4y = 0$ 。

写出特征方程： $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ，从而 $(\lambda - 2)^2 = 0$ ， $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 。

从而 y 齐次方程的通解为 $(C_1 + C_2x)e^{2x}$ 。

根据特解的设置方法，所以 $k = 2$ ，设 $y^* = e^{2x}(ax + b)x^2$ 。

代回二阶方程， $a = \frac{1}{2}$ ， $b = 0$ 。通解为 $(C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^3e^{2x}$ 。

例题：微分方程 $y'' - 4y' + 3y = e^x \cos x + xe^{3x}$ 的通解。

解：首先常系数齐次线性微分方程： $y'' - 4y' + 3y = 0$ 。

特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ，解得特征值为 $\lambda_1 = 1$ ， $\lambda_2 = 3$ 。

所以该齐次方程的通解： $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$ 。

然后求特解，首先求后面 $f_2(x) = xe^{3x}$ 的特解 y_2^* 。

根据公式因为 α 为单特征根，即 $\Re = 3 = \lambda_2 \neq \lambda_1$ ，所以 $y_2^* = e^{3x}(ax + b)x$ 。

然后是求 $f_1(x) = e^x \cos x$ 的特解 y_1^* 。

其中 $P_m(x) = 1$ ， $P_n(x) = 0$ ， $l = 0$ 。所以设 $P_m(x) = A$ ， $P_n(x) = B$ 。

对 k ，自由项中 $\alpha = \beta = 1$ ，得到 $1 \pm i$ 。又 $1 \pm i \neq \lambda_1 = 1 \neq \lambda_2 = 3$ ， $k = 0$ 。

最后 $y_1^* = e^x(A \cos x + B \sin x)$ 。通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + e^x(A \cos x + B \sin x) + e^{3x}(ax + b)x$ 。

3.2 反推微分方程

3.2.1 齐次微分方程

没有给出具体的解出方法，此时往往是给出特解，然后反推微分方程的形式，这时就需要根据特解求出特征方程。

例题：计算具有特解 $y_1 = e^{-x}$ 、 $y_2 = 2xe^{-x}$ 、 $y_3 = 3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程。

解：由于是三阶，且不是一般的微分方程求特解而是逆问题，就使用特征方程解。

因为有三个特解，根据解的形式， $r = -1, -1, 1$ ，所以特征方程的形式为 $(r+1)^2(r-1) = 0$ ，即解出 $r^3 + r^2 - r - 1 = 0$ ，所以微分方程为 $y''' + y'' - y' - y = 0$ 。

3.2.2 非齐次微分方程

3.2.2.1 已知结构

如果给出一个微分方程的具体形式，而携带参数，可以直接求导然后代入微分方程。

例题： $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^3$ 为二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解，求对应参数。

解：直接代入法：直接求导 $y' = e^{2x} + e^x(x + \frac{2}{3})$ ， $y'' = 2e^{2x} + e^x(x + \frac{5}{3})$ 。

直接代入，解得 $a = -3$ ， $b = 2$ ， $c = -1$ 。

例题： $y = e^{2x} + (x+1)e^x$ 为二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解，求对应参数和通解。

解：解结构法：由于是二阶非齐次方程，所以必然是两个通解加一个特解。

展开解 $y = e^{2x} + xe^x + e^x$ 。

由于已知解，所以 $r = 1$ 、 $r = 2$ ，且非齐次为 ce^x ，所以 e^{2x} 为齐次方程的一个通解，非齐次方程的特解必然是在 xe^x 和 e^x 之中。

由于 $r = 1$ ， xe^x 和 e^x 的幂次都是 1，而其中一个 $r = 1$ ，根据解的结构 $Ae^{rx}x^k$ ，为单值根，所以 $k = 1$ ，所以特解必然存在 x^k ，所以 xe^x 为特解， e^x 为通解。

所以特征方程为 $(r-1)(r-2) = 0$ ，对应 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 。然后直接代入求出 c 。

3.2.2.2 未知结构

例题：已知二阶非齐次线性方程具有三个特解 $y_1 = x - (x^2 + 1)$ 、 $y_2 = 3e^x - (x^2 + 1)$ 、 $y_3 = 2x - e^x - (x^2 + 1)$ ，求 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解。

解：非齐次，即 $y'' + py' + qy = f(x)$ 。由于是二阶所以有两个无关的特解。

所以 $y_1 - y_2$ ， $y_1 - y_3$ 为其齐次方程的两个通解（线性无关）。

通解为齐次方程通解加上非齐次一个特解: $y = C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_1 - y_3) + y_1$ 。

然后代入, 解出 $y = e^x - x^2 - x - 1$ 。

3.3 高阶微分方程通解

如果是三阶以及以上阶的微分方程, 使用特征方程来解决。

由于三阶以以上的微分方程没有给出特解的形式, 所以如果是高阶线性方程必然是齐次方程, 直接根据特征方程得出特征值。

例题: 求三阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解。

解: 得出特征方程 $r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0$, 即 $r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0, (r-2)(r^2+1) = 0$, 解得 $r = 2, \pm i$, 即得通解为 $C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$ 。

4 微分方程概念

对于有些方程并不需要求解后才能解决问题。

4.1 已知微分方程的解反求系数

例题: 设 y_1, y_2 为一阶非齐次线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使得 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则 ()。

$$A. \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2} \quad B. \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2} \quad C. \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3} \quad \lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$$

4.2 不解微分方程, 利用方程隐含信息

$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ 反映了未知函数及其各阶导数之间的关系。

例题: 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 若 $f(x_0) > 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 $x_0()$ 。

A. 取得最大值 B. 取得最小值 C. 某个邻域内单调增加 D. 某个邻域内单调减少

解: 因为 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 所以直接代入 x_0 : $y''(x_0) - 2y'(x_0) + 4y(x_0) = 0$ 。又 $f'(x_0) = 0$ 。

$y''(x_0) = -4y(x_0) < 0$, 所以该点为极大值点。

5 欧拉方程

6 微分方程物理应用

6.1 牛顿第二定律

$$F = ma, \text{ 物体质量 } m, \text{ 力 } f, \text{ 加速度 } a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

6.2 变化率

考的可能性较大，提法多为 t 时刻某量 y 对 t 的变化率与 t 时刻某量成正比。

如冷却定律， k 时刻物体温度 $T(t)$ 对时间的变化率与 t 时刻物体与介质的温差 $T - T_0$ 成正比，应写为 $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$ 。