

相似

Didnelpsun

目录

1	特征值与特征向量	1
1.1	代数余子式	1
1.2	特征值	1
1.2.1	对应特征向量	1
1.2.2	矩阵关系式	2
1.3	特征向量	2
1.3.1	实对称矩阵	2
1.3.2	可逆矩阵关系	3
1.3.3	抽象型	3
1.4	行列式值	3
1.4.1	特征方程	3
1.4.2	矩阵函数	4
2	相似理论	4
2.1	判断相似对角化	4
2.2	反求参数	5
2.2.1	两个矩阵对比	5
2.2.2	单矩阵	5
2.2.3	抽象型	6
2.3	相似矩阵	6
2.3.1	抽象型	6
2.3.2	正交相似	7
2.4	矩阵关系式	7

特征值往往与前面的内容进行混合考察。

1 特征值与特征向量

首先根据 $|\lambda E - A| = 0$ 求出 λ ，然后把 λ 逐个带入 $(\lambda E - A)x = 0$ ，根据齐次方程求解方法进行初等变换求出基础解系。这个基础解系就是当前特征值的特征向量。

1.1 代数余子式

例题：已知 A 是 3 阶方阵，特征值为 1, 2, 3，求 $|A|$ 的元素 a_{11}, a_{22}, a_{33} 的代数余子式 A_{11}, A_{22}, A_{33} 的和 $\sum_{i=1}^3 A_{ii}$ 。

解：首先代数余子式的和 A_{11}, A_{22}, A_{33} 一般在行列式展开定理中使用，但是这里给出的不是一行或一列的代数余子式，而是主对角线上的代数余子式，这就无法使用代数余子式来表达行列式的值了。

而另一个提到代数余子式的地方就是伴随矩阵 A^* ，所求的正好是伴随矩阵的迹 $tr(A^*) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ 。

又根据特征值性质，特征值的和为矩阵的迹，特征值的积为矩阵行列式的值，所以 $tr(A^*) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^*$
$$= \sum_{i=1}^3 \frac{|A|}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_i} = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 = 2 + 3 + 6 = 11。$$

1.2 特征值

1.2.1 对应特征向量

通过相关式子将逆矩阵转换为原矩阵。同一个向量的逆矩阵的特征值是原矩阵的特征值的倒数。

例题：已知 $\vec{\alpha} = (a, 1, 1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，则求 $\vec{\alpha}$ 在矩阵 A 中对应的特征值。

解：由于 $\vec{\alpha}$ 是 A^{-1} 的特征向量，所以令此时的特征值为 λ_0 ，则定义 $\lambda_0 \vec{\alpha} = A^{-1} \vec{\alpha}$ ， $\lambda_0 A \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ 。

$$\text{即 } \lambda_0 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 即 } \lambda_0 \begin{bmatrix} -a & 2 & 2 \\ 2a & a & -2 \\ 2a & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

即根据矩阵代表的是方程组, 得到 $\lambda_0(4-a) = a, \lambda_0(3a-2) = 1, \lambda_0(2a-3) = 1$ 。

又 $\lambda_0 \neq 0, 3a-2 = 2a-3, a = -1$, 则 $\lambda_0 = -\frac{1}{5}$ 。

所以矩阵 A 对应的特征值为 -5 。

1.2.2 矩阵关系式

例题: 已知 A 为 3 阶矩阵, $A^2 + A - 2E = 0, |A| = -2$, 求其特征值。

解: 需要求 A 特征值, 但是 A 未知, 特征向量也未知, 如何求?

首先要求特征值, 就要首先设出特征方程: $A\xi = \lambda\xi, \xi \neq 0$ 。

又 $A^2 + A - 2E = 0$, 所以代入方程: $(A^2 + A - 2E)\xi = (\lambda^2 + \lambda - 2)\xi = 0$ 。

$\because \xi \neq 0, \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 解得 $\lambda = -2$ 或 $\lambda = 1$ 。

但是不知道这个特征值各是几重, 只知道存在这两种特征值。

又 $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$, 所以 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 。

1.3 特征向量

1.3.1 实对称矩阵

使用实对称矩阵性质, 给出其他特征向量和特征值, 即实对称矩阵的不同特征值的特征向量相互正交 ($B^T A = 0$)。

例题: 已知 A 为三阶实对称矩阵, 特征值为 $1, 3, -2$, 其中 $\alpha_1 = (1, 2, -2)^T, \alpha_2 = (4, -1, a)^T$ 分别属于特征值 $\lambda = 1, \lambda = 3$ 的特征向量。求 A 属于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量。

解: 令 A 属于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量为 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 。

根据实对称矩阵的正交性质。

$$\alpha_1^T \alpha_2 = 4 - 2 - 2a = 0, \alpha_2^T \alpha_3 = 4x_1 - x_2 + ax_3 = 0, \alpha_3^T \alpha_1 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

$a = 1, 4x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$, 解得基础解系 $(0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, k, k)^T (k \neq 0)$ 。

1.3.2 可逆矩阵关系

使用可逆矩阵相似对角化的性质。若 $A \sim B$ ，则 $P^{-1}AP = B$ 。 B 为纯量阵。且 B 的迹为 A 的特征值。 P 为特征向量。

例题：已知 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ ， $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆，求 A 关于特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量。

解：根据 $P^{-1}AP = \Lambda$ ，所以 P 为特征向量， $1, 1, -1$ 为特征值。

所以 A 关于 $\lambda = 1$ 的特征向量为 α_1 或 α_2 。而某一特征值的全部特征向量构成特征向量空间，所以 $\lambda = 1$ 的特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 。

1.3.3 抽象型

题目只会给对应的式子，来求对应的特征向量。需要记住特征值的关系式然后与给出的式子上靠拢，不会很复杂。

例题：已知 A 为三阶矩阵，且矩阵 A 各行元素之和均为 5，则求 A 必然存在的特征向量。

解：由于是抽象型，所以没有实际的数据，就不能求出固定的特征值， $\lambda\xi = A\xi$ 。

又矩阵 A 各行元素之和均为 5，所以转换为方程组：

$$\begin{cases} A_{11} + A_{12} + A_{13} = 5 \\ A_{21} + A_{22} + A_{23} = 5 \\ A_{31} + A_{32} + A_{33} = 5 \end{cases}, \text{ 转为矩阵: } \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

即 $\xi = (1, 1, 1)^T$ 。

1.4 矩阵

即根据 $A = PAP^{-1}$ 的特征向量矩阵和特征值矩阵来反求矩阵。

1.5 行列式值

一般会给出特征值，求 A 的行列式值。

1.5.1 特征方程

题目要求 $|f(A) - E|$ 的形式，即求 $f(A)$ 的特征值。

例题：设 A 为三阶矩阵，已知 $-3E + A$ 不可逆， $|2E + A| = 0$ ， $(E - A)x = 0$ 有非零解，求 $|A^* - E|$ 。

解：前三个条件都是为了指明 $|-3E + A| = |3E - A| = 0$ ， $|-2E - A| = 0$ ， $|E - A| = 0$ ，即得到 A 的三个特征值 $\lambda_1 = 3$ 、 $\lambda_2 = -2$ 、 $\lambda_3 = 1$ 。

求 $|A^* - E|$ 即求 A^* 的特征值，然后再乘起来，即得到行列式的值。

又 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ ，所以 $A^* = \frac{|A|}{A}$ 。

$|A|$ 等于特征值的乘积 -6 ，对应的特征值即为 $\mu_1 = \frac{-6}{3} = -2$ ， $\mu_2 = \frac{-6}{-2} = 3$ ， $\mu_3 = \frac{-6}{1} = -6$ 。

对应 $A^* - E$ 的特征值为 -3 ， 2 ， -6 ，所以最后的行列式值为 42 。

1.5.2 矩阵函数

题目要求 $|f(A)|$ 的形式，即求 $f(A)$ 的特征值，然后求其乘积就是矩阵方程的行列式值。

2 相似理论

$P^{-1}AP = \Lambda$ ， P 为特征向量组， Λ 为特征值矩阵。

2.1 判断相似对角化

可以使用相似对角化的四个条件，但是最基本的使用还是 A 有 n 个无关的特征向量 ξ 。

判断以下条件即可相似对角化：

1. 实对称矩阵，即所有元素关于主对角线对称。
2. 特征值都是实单根，即 n 个不同特征值，不存在重根。
3. 特征值存在 t 重根，相同特征值对应 t 个线性无关的特征向量。（如果小于 n 则不相似）

一般都是第三种情况，判断存在重根后要使用 $[\lambda E - A]$ ，然后计算 $r(E - A)$ ，然后 s 自由变量值即无关特征向量值 $= n - r$ ，如果 $s = t$ 则可以相似对角化，如果 $s < t$ 则不可以。

2.2 反求参数

常用方法:

- 若 $A \sim B$, 则 $|A| = |B|$, $r(A) = r(B)$, $tr(A) = tr(B)$, $\lambda_A = \lambda_B$, 通过等式计算参数。
- 若 ξ 是 A 属于特征值 λ 的特征向量, 则有 $A\xi = \lambda\xi$, 建立若干等式或方程组来计算参数。
- 若 λ 是 A 的特征值, 则与 $|\lambda E - A| = 0$, 通过该等式计算参数。

2.2.1 两个矩阵对比

两个矩阵相似的前提是可以相似对角化, 如果存在 n 重根而没有 n 个线性无关的特征向量则必然不相似。

例题: 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & y & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, 且 $A \sim B$, 求参数。

首先可以利用迹相等, 则 $2+0+x = 2+y-1$, 行列式值相等, 则 $-2 = -2y$, 解得 $x = 0$, $y = 1$ 。

2.2.2 单矩阵

1. 利用 $|\lambda E - A| = 0$ 求出特征值。判断得到 n 阶矩阵有 m 个不同特征值。($m \leq n$)
2. 利用 $[\lambda E - A]$ 计算秩。利用 $s = n - r$ (自由变量的个数 = 未知数个数 - 矩阵秩) 公式反解出秩 r , 并以此解出未知数。

例题: 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 和对角矩阵相似, 求 a 。

解: 由于 A 是对角矩阵, 所以特征值为其迹 $\lambda = (3, 2, 3)$ 。特征值有二重根。

已知 $A \sim \Lambda$, $\lambda = 3$ 有两个线性无关的特征向量。即 $(3E - A)x = 0$ 有两个线性无关的解 (自由变量)。即 $r(3E - A) = 1$ 。

$$3E - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \therefore a = -2.$$

2.2.3 抽象型

首先要计算其特征值, 再根据特征值反代特征方程, 根据向量的构成判定秩的大小。

例题: 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵, 求 xy 关系式。

解: 已知相似, 即 $P^{-1}AP = \Lambda$, 则需要求 A 的特征值和特征向量。

根据特征关系式 $|E\lambda - A| = 0$, 即
$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda - 1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0,$$
 即有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ 。

此时有二重特征值, 所以应该有两个线性无关的特征向量, 即对于 $(E - A)x = 0$ 有两个线性无关的解向量, 所以该矩阵的秩为 $3 - 2 = 1$ 。

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 1 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x - y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

所以当 $r(E - A) = 1$ 时 $x + y = 0$ 。

2.3 相似矩阵

2.3.1 抽象型

例题: 设 A 是三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维线性无关的列向量, 且 $A\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, 求 A 相似的矩阵。

解: $A \sim \Lambda$, 则 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

$$\text{记 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

又 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维线性无关的列向量, $\therefore |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$, 所以 P 可逆。

$\therefore AP = PB, P^{-1}AP = B, A \sim B$ 。

2.3.2 正交相似

例题: 已知 A 是三阶实对称矩阵, 若正交矩阵 Q 使得 $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$,

如果 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$ 和 $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$ 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量, 求 Q 。

解: 首先由正交矩阵就可以知道各特征值正交。令 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ 。对应的 $\lambda_3 = 6$ 。

$\alpha_3^T \alpha_1 = x_1 - x_3 = 0$, $\alpha_3^T \alpha_2 = x_2 + x_3 = 0$, 求 λ_3 的特征值, 则不如令 $x_3 = 1$, 则解得 $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$ 。

这样 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 还需要将 Q 正交单位化。可知 α_3 根据正交规律求出来, 一定是正交的, 而 $\alpha_1^T \alpha_2 = -1 \neq 0$ 所以需要正交。

令 $\beta_1 = \alpha_1 = (1, 0, -1)^T$, $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = (0, 1, 1)^T + \frac{1}{2}(1, 0, -1)^T = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})^T$ 。

最后对整个 Q 进行单位化: $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$, $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, $\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T$ 。

2.4 矩阵关系式

若有可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 则:

P 即是 A 特征向量的拼合。

- $A = P\Lambda P^{-1}$ 。
- $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$ 。
- $f(A) = Pf(\Lambda)P^{-1}$ 。

例题: 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵, 求 A^{100} 。

解: 首先 $A \sim \Lambda$, 所以 A 能相似对角化。

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -x & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -3 & 6 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = 0. \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3,$$

$\lambda_3 = -1$ 。

所以对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 时，需要 $s = 2$ ，从而 $r(A) = 1$ ，对应成比例。

$$\text{代入 } 3: (3E - A)x = 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & -x & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{所以 } \frac{-1}{3} = \frac{-x}{6}, \quad x = 2.$$

解得 $\xi_1 = (1, 0, 1)^T$, $\xi_2 = (2, 1, 0)^T$, $\xi_3 = (1, 0, -3)^T$ 。

令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ，所以 $A = P\Lambda P^{-1}$, $A^{100} = P\Lambda^{100}P^{-1}$ 。