不定积分与定积分

Didnelpsun

目录

1　不定积分

1.1　基本积分

例题：汽车以 20m/s 的速度行驶，刹车后匀减速行驶了 50m 停止，求刹车加速度。

已知题目含有两个变量：距离和时间，设距离为 s，时间为 t。

因为汽车首先按 20m/s 匀速运动，所以 $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 20$，最开始距离为 0，所以 $s|_{t=0} = 0$。

又因为是匀减速的，所以速度形如：$v = \frac{s}{t} = kt + b$，从而令二阶导数下 $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = k$。

所以 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \int \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t = \int k\,\mathrm{d}t = kt + C_1$。

代入 $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 20$，所以 $C_1 = 20$，即 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = kt + 20$。

所以 $\mathrm{d}s = (kt+20)\,\mathrm{d}t$，从而 $s = \int (kt+20)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}kt^2 + 20t + C_2$。

又 $s|_{t=0} = 0$，所以代入得 $C_2 = 0$，所以 $s = \frac{1}{2}kt^2 + 20t$。

当 $s = 50$ 时停住，所以此时 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$，得到 $t = -\frac{20}{k}$。

代入 s：$50 = \frac{1}{2}k\left(-\frac{20}{k}\right)^2 + 20\left(-\frac{20}{k}\right)$，解得 $k = -4$，即加速度为-4m/s^2。

1.2　换元积分

1.2.1　第一类换元

1.2.1.1　聚集因式

将复杂的式子转换为简单的一个因式放到 d 后面看作一个整体，然后利用基本积分公式计算。

例题：$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x \ln\ln x}$。

$= \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x \ln\ln x} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln\ln x)}{\ln\ln x} = \ln|\ln\ln x| + C$。

例题：$\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$。

$= -\int 10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{2}\int 10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}(2\arccos x) = -\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10} + C$。

1.2.1.2　积化和差

对于两个三角函数的乘积可以使用积化和差简单计算。

例题： $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x \,\mathrm{d}x$。

$\displaystyle= \int \cos 3x \sin 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x)\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\int \sin 5x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$。

1.2.1.3　三角拆分

主要用于 $\sec^2 - 1 = \tan^2 x$，当出现 $\tan^2$、$\tan^3$ 等与 $\sec x$ 在一起作为乘积时可以考虑拆分。

例题： $\displaystyle\int \tan^3 x \sec x \,\mathrm{d}x$。

$\displaystyle= \int (\sec^2 x - 1)\tan x \sec x \,\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}(\sec x) = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$。

1.2.2　第二类换元

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$：$x = a\sin t(a\cos t)$。
2. $\sqrt{a^2 + x^2}$：$x = a\tan t$。
3. $\sqrt{x^2 - a^2}$：$x = a\sec t$。

1.3　分部积分

1.3.1　基本分部

1.3.2　多次分部

1.4　有理积分

1.4.1　高阶多项式分配

当不定积分式子形如 $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$，且 $f(x)$、$g(x)$ 都为与 x 相关的多项式，$f(x)$ 阶数高于或等于 $g(x)$，则 $f(x)$ 可以按照 $g(x)$ 的形式分配，约去式子，得到最简单的表达。

例题： $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$。

$\displaystyle= \int \frac{x^3 + 9x - 9x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3+9x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x - \int \frac{9x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

$$= \int x \,\mathrm{d}x - \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln(9+x^2) + C。$$

1.4.2 低阶多项式分解

当不定积分式子形如 $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$，且 $f(x)$、$g(x)$ 都为与 x 相关的多项式，$f(x)$ 阶数低于 $g(x)$，则可以分解式子：$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{f_2(x)}{g_2(x)}\,\mathrm{d}x$。

2 定积分

2.1 变限积分

2.2 牛莱公式

2.3 换元积分

2.4 分部积分

2.5 反常积分

3 积分应用

3.1 面积

3.2 体积

3.3 弧长