

相似

Didneipsun

目录

1	特征值与特征向量	1
1.1	迹	1
1.2	逆矩阵	1
1.3	抽象型	2
2	相似理论	2
3	判断相似对角化	2

特征值往往与前面的内容进行混合考察。

1 特征值与特征向量

1.1 迹

例题：已知 A 是 3 阶方阵，特征值为 1, 2, 3，求 $|A|$ 的元素 a_{11}, a_{22}, a_{33} 的代数余子式 A_{11}, A_{22}, A_{33} 的和 $\sum_{i=1}^3 A_{ii}$ 。

解：首先代数余子式的和 A_{11}, A_{22}, A_{33} 一般在行列式展开定理中使用，但是这里给出的不是一行或一列的代数余子式，而是主对角线上的代数余子式，这就无法使用代数余子式来表达行列式的值了。

而另一个提到代数余子式的地方就是伴随矩阵 A^* ，所求的正好是伴随矩阵的迹 $tr(A^*) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ 。

又根据特征值性质，特征值的和为矩阵的迹，特征值的积为矩阵行列式的值，所以 $tr(A^*) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^*$

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{|A|}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_i} = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 = 2 + 3 + 6 = 11。$$

1.2 逆矩阵

通过相关式子将逆矩阵转换为原矩阵。同一个向量的逆矩阵的特征值是原矩阵的特征值的倒数。

例题：已知 $\vec{\alpha} = (a, 1, 1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，则求 $\vec{\alpha}$ 在矩阵 A 中对应的特征值。

解：由于 $\vec{\alpha}$ 是 A^{-1} 的特征向量，所以令此时的特征值为 λ_0 ，则定义 $\lambda_0 \vec{\alpha} = A^{-1} \vec{\alpha}$ ， $\lambda_0 A \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ 。

$$\text{即 } \lambda_0 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 即 } \lambda_0 \begin{bmatrix} -a & 2 & 2 \\ 2a & a & -2 \\ 2a & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

即根据矩阵代表的是方程组，得到 $\lambda_0(4-a) = a$ ， $\lambda_0(3a-2) = 1$ ， $\lambda_0(2a-3) = 1$ 。

又 $\lambda_0 \neq 0$ ， $3a-2 = 2a-3$ ， $a = -1$ ，则 $\lambda_0 = -\frac{1}{5}$ 。

所以矩阵 A 对应的特征值为 -5 。

1.3 抽象型

题目只会给对应的式子，来求对应的特征向量或特征值。需要记住特征值的关系式然后与给出的式子上靠拢，不会很复杂。

例题：已知 A 为三阶矩阵，且矩阵 A 各行元素之和均为 5，则求 A 必然存在的特征向量。

解：由于是抽象型，所以没有实际的数据，就不能求出固定的特征值， $\lambda\xi = A\xi$ 。

2 相似理论

3 判断相似对角化

可以使用相似对角化的四个条件，但是最基本的使用还是 A 有 n 个无关的特征向量 ξ 。