随机变量数字特征

Didnelpsun

目录

有时候研究随机变量，其是没有具体的概率分布的，而对于这种类型我们只用研究其数学特征就可以了。

1 一维随机变量数字特征

1.1 数学期望

1.1.1 概念

设 X 是随机变量，Y 是 X 的函数，$Y=g(X)$。

定义：若 X 是离散型随机变量，其分布列为 $p_i=P\{X=x_i\}$（$i=1,2,\cdots$），若级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ 绝对收敛，则称随机变量 X 的数学期望存在，并将级数和 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ 称为随机变量 X 的**数学期望**，记为 $E(X)$ 或 EX，即 $EX=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ip_i$，否则 X 数学期望不存在。（数学期望实际上是一种加权的合理平均值）

若级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$ 也绝对收敛，则称 $Y=g(X)$ 的数学期望 $E[g(X)]$ 存在，且 $E[g(X)]=\sum\limits_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$，否则 $g(X)$ 的数学期望不存在。

定义：若 X 是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$。若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称 X 的数学期望存在，且 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x$，否则 X 的数学期望不存在。

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称 $g(X)$ 的数学期望存在，$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$，否则 $g(X)$ 的数学期望不存在。

1.1.2 性质

- 对任意常数 a_i 和随机变量 X_i（$i=1,2,\cdots,n$）有 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_iEX_i$，其中 $Ec=c$，$E(aX+c)=aEX+c$，$E(X\pm Y)=EX\pm EY$。
- 若 XY 相互独立，则 $E(XY)=EX\cdot EY$，$E[g_1(X),g_2(Y)]=E[g_1(X)]\cdot E[g_2(Y)]$，一般若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则 $E\left(\prod\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}EX_i$，$E\left[\prod\limits_{i=1}^{n}g_i(X_i)\right]=\prod\limits_{i=1}^{n}E[g_i(X_i)]$。

1.2 方差标准差

1.2.1 概念

定义：设 X 是随机变量，若 $E[(X-EX)^2]$ 存在，则称 $E[(X-EX)^2]$ 为 X 的**方差**，记为 $D(X)$ 或 DX，即 $DX=E[(X-EX)^2]=E(X^2)-(EX)^2=EX^2-E^2X$。称 $\sqrt{DX}$ 为 X 的**标准差或均方差**，记为 $\sigma(X)$，称随机变量 $X^*=\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$ 为 X 的**标准化随机变量**，此时 $EX^*=0$，$DX^*=1$。

当 X 为离散型随机变量时 $D(X)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2p_i$，当 X 为连续型随机变量时 $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)\,\mathrm{d}x$。

1.2.2 性质

- $DX\geqslant 0$，$E(X^2)=DX+(EX)^2\geqslant(EX)^2$。
- $Dc=0$。
- $D(aX+b)=a^2DX$。
- $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)=DX+DY\pm 2E[(X-EX)(Y-EY)]$。
- 若 XY 相互独立，则 $D(aX\pm bY)=a^2DX+b^2DY$，一般若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，$g_i(x)$ 为关于 x 的连续函数，则 $D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2DX_i$，$D\left[\sum\limits_{i=1}^{n}g_i(X_i)\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}D[g_i(X_i)]$。

1.3 切比雪夫不等式

定义：若随机变量 X 的方差 DX 存在，则对任意 $\epsilon>0$，有 $P\{|X-EX|\leqslant\epsilon\}\leqslant\dfrac{DX}{\epsilon^2}$ 或 $P\{|X-EX|<\epsilon\}\geqslant 1-\dfrac{DX}{\epsilon^2}$。

$P\{|X-EX|\geqslant\epsilon\}$ 即代表变量与期望的差距大于某个值的概率，DX 就是方差，DX 越小证明波动越小，波动在 ϵ 外的概率就越小，反之同理，而 ϵ 越小，则 $\dfrac{DX}{\epsilon^2}$ 越大，则代表 X 靠近期望 EX 的概率越大，反之同理。

证明：若 X 是连续型随机变量，令 $|X-EX|\geqslant\epsilon=D$，则 $P\{|X-EX|\geqslant\epsilon\}=\int\limits_D f(x)\,\mathrm{d}x$，又该区间上 $|X-EX|\geqslant\epsilon$，$\therefore\dfrac{(X-EX)^2}{\epsilon^2}\geqslant 1$。

$$\int\limits_D f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int\limits_D\frac{(X-EX)^2}{\epsilon^2}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(X-EX)^2}{\epsilon^2}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$= \dfrac{1}{\epsilon^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(X-EX)^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{DX}{\epsilon^2}$。

可以用于估算随机变量在某范围中取值的概率，也可以证明某些收敛性问题（如数学统计章节中的一致性）。

例题： 设 XY 为随机变量，数学期望都是 2，方差分别为 1 和 4，相关系数为 0.5，尝试估计估计概率 $P\{|X-Y|\geqslant 6\}$。

解：令 $Z=X-Y$，$\therefore EZ=E(X-Y)=EX-EY=2-2=0$，所以 $P\{|X-Y|\geqslant 6\}=P\{|X-Y-0|\geqslant 6\}=P\{|Z-EZ|\geqslant 6\}\leqslant \dfrac{DZ}{6^2}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{2}$。

1.4 常用分布数字特征

分布	分布列 p_i 或概率密度 $f(x)$	期望	方差
0-1 分布 $B(1,p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$，$k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,\cdots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,\cdots$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}$，$p,k=1,\cdots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x\in R$	μ	σ^2
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\dfrac{1}{b-a}$，$a<x<b$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$，$x>0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$

2 二维随机变量数字特征

2.1 数学期望

定义： 若 XY 为随机变量，$g(X,Y)$ 为 XY 的函数，如果 (X,Y) 为离散型随机变量，其联合分布为 $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_i\}$（$i,j=1,2,\cdots$），若级数 $\sum\limits_i\sum\limits_j g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则 $E[g(X,Y)]=\sum\limits_i\sum\limits_j g(x_i,y_j)p_{ij}$；如果 (X,Y) 为连

续型随机变量，其概率密度为 $f(x,y)$，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，则定义 $E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

2.2 协方差相关系数

2.2.1 概念

定义： 若随机变量 XY 的方差存在且 $DX>0$，$DY>0$，则称 $E[(X-EX)(Y-EY)]$ 为随机变量 X 与 Y 的**协方差**，记为 $Cov(X,Y)$，即 $Cov(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] = E(XY-XEY-YEX+EXEY) = E(XY)-EX\cdot EY$。

其中 $E(XY) = \begin{cases} \sum\limits_i\sum\limits_j x_iy_jP\{X=x_i,Y=y_j\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{cases}$。

从定义来看，方差 DX 就是自己的协方差 $Cov(X,X)$。

协方差也可以标准化，已知 $X^*=\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$，$Y^*=\dfrac{Y-EY}{\sqrt{DY}}$，则 $Cov(X^*,Y^*)$
$= Cov(\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}},\dfrac{Y-EY}{\sqrt{DY}}) = \dfrac{Cov(X-EX,Y-EY)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$
$= \dfrac{Cov(X,Y)-Cov(X,EY)-Cov(EX,Y)+Cov(EX,EY)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}$。

定义： $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 为随机变量 XY 的**相关系数**。若 $\rho_{XY}=0$，则 XY 不相干，否则相关。

相关系数是描述随机变量 XY 之间的线性关系，绝对值越靠近 1 则越线性相关。相关系数为 0 不代表没有其之间没有关系，也可能存在非线性关系。

2.2.2 性质

- 对称性：$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$，$\rho_{XY}=\rho_{YX}$，$Cov(X,X)=DX$，$\rho_{XX}=1$。
- 线性性：$Cov(X,c)=0$，$Cov(aX+b,Y)=aCov(X,Y)$，$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$。一般 $Cov\left(\sum\limits_{i=1}^n a_iX_i,Y\right)=\sum\limits_{i=1}^n Cov(X_i,Y)$。
- 若 XY 相互独立，则 $Cov(X,Y)=0$。$D(\sum X)=\sum DX$。
- $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)$。
- 相关系数有界性：$|\rho_{XY}|\leqslant 1$。
- 线性关系下的相关系数：若 $Y=aX+b$，则 $\rho_{XY}=\begin{cases} 1, & a>0 \\ -1, & a<0 \end{cases}$。

例题：设随机变量 XY 的概率分布分别为：

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$。

(1) 求随机变量 (X, Y) 的概率分布。

(2) 求 $Z = XY$ 的概率分布。

(3) 求 XY 的相关系数 ρ_{XY}。

(1) 解：根据已知的题目条件可以知道对应的边缘概率分布：

X \ Y	-1	0	1	X 边缘
0				1/3
1				2/3
Y 边缘	1/3	1/3	1/3	1

又 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$，所以 $P\{X^2 \neq Y^2\} = 0$，所以 $X = \pm Y$，解得：

X \ Y	-1	0	1	X 边缘
0	0	1/3	0	1/3
1	1/3	0	1/3	2/3
Y 边缘	1/3	1/3	1/3	1

(2) 解：$Z = XY$ 的可能取值为-1，0，1。所以根据表格：

$P\{Z = -1\} = P\{X = 1, Y = -1\} = \dfrac{1}{3}$。

$P\{Z = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = \dfrac{1}{3}$。

$P\{Z = 0\} = 1 - P\{Z = 1\} - P\{Z = -1\} = \dfrac{1}{3}$。

(3) 解：$\rho = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \dfrac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 0$。

3 独立性与相关性

相关性是线性相关性。

- 独立则一定不相关，但是不相关不一定独立。

- 如果相关则一定不独立。
- 如果 (X,Y) 服从二维正态分布，则 XY 独立与 XY 不相关是充要条件。

3.1 分布判断独立性

都是通过分布情况判断独立性：

- $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$。
- $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$。
- $P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$。

3.2 数字特征判断相关性

通过相关系数 ρ_{XY} 来判断是否存在线性相关性。

$\rho_{XY}=0\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0\Leftrightarrow E(XY)=EX\cdot EY\Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY$。

3.3 基本判别流程

当讨论随机变量 XY 的相关性独立性时：

1. 计算 $Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY$ 判断是否为 0。
2. 当 $Cov(X,Y)\neq 0$ 时则 XY 相关不独立。
3. 当 $Cov(X,Y)=0$ 时则 XY 不相关。
4. 若 $P(XY)=P(X)P(Y)$ 则 XY 不相关但独立，否则不相关不独立。

例题：设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$，$x\in(-\infty,+\infty)$。证明 X 与 $|X|$ 不相关且不独立。

解：$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=EX|X|-EXE|X|$。

其中 $EX=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x=0$，$EXY=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}|x|\,\mathrm{d}x=0$。

$\therefore\rho_{XY}=0$，从而 XY 不相关。

令 $X\leqslant a$，则 $P\{X\leqslant a\}$。而 $P\{|X|\leqslant a\}=P\{-a\leqslant X\leqslant a\}<P\{X\leqslant a\}$。

$\therefore P\{X\leqslant a,|X|\leqslant a\}=P\{|X|\leqslant a\}$，又 $P\{X\leqslant a\}<1$。

$\therefore P\{X\leqslant a,|X|\leqslant a\}\neq P\{|X|\leqslant a\}\cdot P\{|X|\leqslant a\}$，所以不独立。