

# 多元函数积分学

Didnelpsun

## 目录

<b>1</b>	<b>二重积分</b>	<b>1</b>
1.1	概念 . . . . .	1
1.1.1	几何背景 . . . . .	1
1.1.2	性质 . . . . .	1
1.1.3	对称性 . . . . .	2
1.2	计算 . . . . .	2
1.2.1	直角坐标系 . . . . .	2
1.2.1.1	$X$ 区域 . . . . .	2
1.2.1.2	$Y$ 区域 . . . . .	3
1.2.1.3	区域类型选择 . . . . .	3
1.2.2	极坐标系 . . . . .	3
1.2.3	极坐标系与直角坐标系选择 . . . . .	4
1.2.4	极直互化 . . . . .	4
1.2.5	积分次序 . . . . .	5
1.2.6	二重积分处理一元积分 . . . . .	5
1.3	二重积分应用 . . . . .	6
1.3.1	体积 . . . . .	6
1.3.2	形心公式 . . . . .	6
<b>2</b>	<b>三重积分</b>	<b>6</b>
2.1	概念 . . . . .	6
2.1.1	定义 . . . . .	6
2.1.2	性质 . . . . .	6

2.1.3	对称性 . . . . .	7
2.1.3.1	普通对称性 . . . . .	7
2.1.3.2	轮换对称性 . . . . .	7
2.2	计算 . . . . .	7
2.2.1	基础方法 . . . . .	8
2.2.1.1	直角坐标系 . . . . .	8
2.2.1.1.1	先一后二法 . . . . .	8
2.2.1.1.2	先二后一法 . . . . .	8
2.2.1.2	柱面坐标系 . . . . .	9
2.2.1.3	球面坐标系 . . . . .	9
2.2.1.3.1	适用场合 . . . . .	9
2.2.1.3.2	原理 . . . . .	9
2.2.1.3.3	计算方法 . . . . .	10
2.2.1.4	对称性 . . . . .	10
2.2.1.4.1	普通对称性 . . . . .	10
2.2.1.4.2	轮换对称性 . . . . .	11
2.2.1.5	形心公式逆用 . . . . .	11
<b>3</b>	<b>第一型曲线积分</b>	<b>11</b>
3.1	概念 . . . . .	11
3.1.1	几何性质 . . . . .	11
3.1.2	定义 . . . . .	11
3.1.3	性质 . . . . .	12
3.1.4	对称性 . . . . .	12
3.2	计算 . . . . .	12
3.2.1	基础方法 . . . . .	12
3.2.1.1	平面 . . . . .	12
3.2.1.2	空间 . . . . .	13
3.2.2	技术方法 . . . . .	13
3.2.2.1	边界方程代入被积函数 . . . . .	13
3.2.2.2	对称性 . . . . .	13
3.2.2.3	形心公式逆用 . . . . .	13

<b>4</b>	<b>第一型曲面积分</b>	<b>13</b>
4.1	概念 . . . . .	13
4.1.1	几何性质 . . . . .	13
4.1.2	定义 . . . . .	13
4.1.3	性质 . . . . .	13
4.2	计算 . . . . .	14
4.2.1	二重积分法 . . . . .	14
4.2.2	技术方法 . . . . .	15
4.2.2.1	边界方程代入被积函数 . . . . .	15
4.2.2.2	对称性 . . . . .	15
4.2.2.3	形心公式逆用 . . . . .	15
<b>5</b>	<b>多元积分应用</b>	<b>15</b>
5.1	几何量 . . . . .	15
5.1.1	平面区域 . . . . .	15
5.1.2	空间区域 . . . . .	15
5.1.3	空间曲线 . . . . .	15
5.1.4	空间曲面 . . . . .	15
5.2	重心与形心 . . . . .	15
5.2.1	平面薄片 . . . . .	16
5.2.2	空间物体 . . . . .	16
5.2.3	空间曲线 . . . . .	16
5.2.4	空间曲面 . . . . .	16
5.3	转动惯量 . . . . .	16
5.3.1	平面薄片 . . . . .	16
5.3.2	空间物体 . . . . .	16
5.3.3	空间曲线 . . . . .	16
5.3.4	空间曲面 . . . . .	16
5.4	引力 . . . . .	16
5.4.1	平面薄片 . . . . .	16
5.4.2	空间物体 . . . . .	16
5.4.3	空间曲线 . . . . .	16
5.4.4	空间曲面 . . . . .	16

<b>6</b>	<b>第二型曲线积分</b>	<b>16</b>
6.1	概念 . . . . .	17
6.1.1	场的概念 . . . . .	17
6.1.2	几何性质 . . . . .	17
6.1.3	定义 . . . . .	17
6.1.4	性质 . . . . .	17
6.2	计算 . . . . .	18
6.2.1	定积分法 . . . . .	18
6.2.2	二重积分法 . . . . .	18
6.2.2.1	背景 . . . . .	18
6.2.2.2	格林公式 . . . . .	19
6.2.3	路径无关积分 . . . . .	19
<b>7</b>	<b>第二型曲面积分</b>	<b>20</b>
7.1	概念 . . . . .	20
7.1.1	向量场的通量 . . . . .	20
7.1.2	定义 . . . . .	20
7.1.3	性质 . . . . .	20
7.2	计算 . . . . .	21
7.2.1	二重积分法 . . . . .	21
7.2.2	三重积分法 . . . . .	21
7.2.2.1	背景 . . . . .	21
7.2.2.2	高斯公式 . . . . .	22
<b>8</b>	<b>空间第二型曲线积分计算</b>	<b>22</b>

# 1 二重积分

## 1.1 概念

### 1.1.1 几何背景

二重积分的几何背景就是曲顶柱体的体积。定积分用极限的思想求出了二维平面的曲边梯形的面积, 同样二重积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 。

被积函数  $f(x, y)$  作为曲顶柱体在点  $(x, y)$  处柱体微元的高, 用底面积  $d\sigma > 0$  乘上高  $f(x, y)$  就得到一个小柱体体积, 再把所有  $D$  上的柱体相加起来就是整个曲顶柱体的体积。

### 1.1.2 性质

- 求区域面积:  $\iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma = A$ , 其中  $A$  为  $D$  的面积。
- 可积函数必有界: 当  $f(x, y)$  在有界闭区间  $D$  上可积时,  $f(x, y)$  在  $D$  上必有界。
- 积分线性性质:  $k_1, k_2$  为常数, 则  $\iint_D [k_1 f(x, y) \pm k_2 g(x, y)] d\sigma = k_1 \iint_D f(x, y) d\sigma \pm k_2 \iint_D g(x, y) d\sigma$ 。
- 积分可加性: 当  $f(x, y)$  在有界闭区间  $D$  上可积时, 且  $D_1 \cup D_2 = D$ ,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$ 。
- 积分保号性: 当  $f(x, y), g(x, y)$  在有界闭区间  $D$  上可积时, 若在  $D$  上有  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$ , 特别  $\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$ 。
- 二重积分估值定理: 设  $M, m$ , 分别为  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上的最大值和最小值,  $A$  为  $D$  的面积, 则有  $mA \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA$ 。
- 二重积分中值定理: 设函数  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续,  $A$  为  $D$  的面积, 则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$  使得  $\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)A$ 。

**例题:** 设  $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ ,  $I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma$ ,  $I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 则  $(\quad)$ 。

$$A.I_3 > I_2 > I_1 \quad B.I_1 > I_2 > I_3 \quad C.I_2 > I_1 > I_3 \quad D.I_3 > I_1 > I_2$$

解: 令  $x^2 + y^2 = t$ ,  $\therefore 0 < t \leq 1$ 。所以  $1 \geq \sqrt{t} \geq t \geq t^2 \geq 0$ 。

又  $\cos x$  单调减, 所以 A。

### 1.1.3 对称性

普通对称性**定义**: 设  $D$  关于  $y$  轴对称,  $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$ , 将  $D$  分为对称的两部分  $D_1 D_2$ , 即  $I = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f(x, y) = f(-x, y) \\ 0, & f(x, y) = -f(-x, y) \end{cases}$ 。关于  $x$  轴对称也同理。

轮换对称性**定义**:  $xy$  对调后区域  $D$  不变或关于  $y = x$  对称,  $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dy dx$ 。类似积分值与积分变量无关。同理对于一元函数积分的不变性:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$ 。

**例题**: 设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,  $f(x)$  在  $D$  上的正值连续函数,  $a, b$  为常数, 求  $I = \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma$ 。

解: 由于被积函数是抽象的, 所以无法直接计算。但是由于  $D$  是圆,  $xy$  对调后  $D$  保持不败你, 所以  $D$  关于  $y = x$  对称, 根据轮换对称性:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma = \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma \\ \therefore 2I &= \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma + \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma = \iint_D (a+b) d\sigma \\ &= (a+b) \frac{\pi}{4} \\ \text{解得 } I &= \frac{a+b}{8} \pi. \end{aligned}$$

## 1.2 计算

### 1.2.1 直角坐标系

后积先定限, 先内画条线, 先交写下限, 后交写上限。

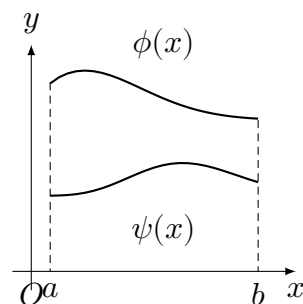
二重积分要将其变为累次积分, 由一个区域的积分变为分别对  $xy$  的积分, 要将  $f(x, y)$  拆开, 重要的就是求上下限。

#### 1.2.1.1 X 区域

$$\sigma = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \phi(x)\}.$$

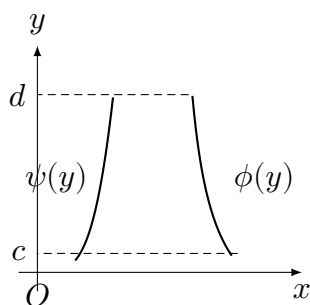
也称为上下型区域。

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x, y) dy.$$



二重积分  $X$  型即求底部为如图的图形的面包状物体体积。求体积的做法就是已知截面面积求体积。其中横截面的一边在底面  $\phi(x) - \psi(x)$ , 高为函数  $f(x, y)$ , 则横截面面积  $S(x) = \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x, y) dy$ , 得到了横截面之后再对  $x$  轴的所有横截面进行积分:  $V = \int_a^b S(x) dx$  就得到体积。

### 1.2.1.2 Y 区域



$$\sigma = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \psi(y) \leq x \leq \phi(y)\}.$$

也称为左右型区域。

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi(y)}^{\phi(y)} f(x, y) dx.$$

### 1.2.1.3 区域类型选择

若上下是两条曲线, 那么就是  $X$  型, 若左右是两条曲线, 那么就是  $Y$  型。

若同一个方向的函数有两种不同的表达式, 则从另一个方向将  $D$  按照函数分段割开求积分。

## 1.2.2 极坐标系

按积分区域与极点位置关系的不同, 将二重积分计算分为三种情况:

根据  $\theta$  按角度切割区间, 然后从极点开始按  $dr$  切割, 变成一个个类似矩形的图形。图形一边为切割半径的改变量  $dr$ , 另一条边为圆弧, 等于半径乘改变角度  $r d\theta$ , 所以最后  $d\sigma = r dr d\theta$ 。

基本上都是先积  $r$  后积  $\theta$ 。

从射线刚开始接触区域  $D$  的射线记为  $\theta = \alpha$ , 要离开区域  $D$  的射线记为  $\theta = \beta$ , 中间移动的射线为  $\theta = \theta$ 。 $\theta = \alpha$  与  $\theta = \beta$  与  $D$  相交于两点, 两点内靠近极点的  $D$  的边为内曲线, 远离极点的边为外曲线。 $\theta = \theta$  与内曲线交于  $r = r_1(\theta)$ , 与外曲线交于  $r = r_2(\theta)$ 。

1. 极点  $O$  在区域  $D$  外部:  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 。
2. 极点  $O$  在区域  $D$  边上:  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 。
3. 极点  $O$  在区域  $D$  内部:  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 。

### 1.2.3 极坐标系与直角坐标系选择

若给出一个二重积分:

1. 被积函数是否为  $f(x^2 + y^2)$ 、 $f\left(\frac{y}{x}\right)$ 、 $f\left(\frac{x}{y}\right)$  等形式。
2. 积分区域是否为圆或圆的一部分。
3. 如果上面两种都有, 则优先使用极坐标系, 否则优先考虑直角坐标系。

### 1.2.4 极直互化

对于极坐标系转换到直角坐标系:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ 。

**例题:** 设区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ , 计算  $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy$ 。

解: 互换积分变量:  $I = \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy = \iint_D \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}\right) dx dy$ 。

$$\therefore 2I = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \therefore I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma.$$

根据公式三转换为极坐标系:  $I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 r dr$ 。

$$\text{即 } I = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \frac{\pi R^4}{4}.$$

**例题:** 计算  $I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy$ 。

解: 根据上限  $\sqrt{1-x^2}$  和  $1-x$  所围成的图形  $D$  为第一象限的圆减去三角形。

所以转换为极坐标系时, 对于  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 对于  $r$  在  $(1-x, \sqrt{1-x^2})$ 。

下限  $x+y=1$ , 即  $r \cos \theta + r \sin \theta = 1$ , 解出  $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$ , 上限是一个圆, 所以为 1。

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 \cos \theta + \sin \theta dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta + \sin \theta - 1 d\theta = 2 - \frac{\pi}{2}.$$



### 1.2.5 积分次序

积分次序即区域类型选择的问题，目的是为了简化计算，使得积分的函数更简单。

从另一方面，也很可能是积分函数无法按此次序进行积分，所以需要更换积分顺序。

存在许多有原函数但求不出初等函数形式的原函数。如  $\frac{\sin x}{x}$ 、 $\frac{\cos x}{x}$ 、 $\frac{\tan x}{x}$ 、 $\frac{e^x}{x}$ 、 $\sin x^2$ 、 $\cos x^2$ 、 $\tan x^2$ 、 $e^{ax^2+bx+c}$ 、 $\frac{1}{\ln x}$  等。

**例题：**计算  $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$ 。

解：首先可以看出积分函数都是一样的，只是积分区域不同所以分开了，可见该函数的积分区域较复杂。

积分函数为  $\sin \frac{\pi x}{2y}$ ，若对  $y$  进行积分，则可以类比求  $\int \sin \frac{1}{x} dx$ ，这个是积分积不出来的。所以必须更换积分顺序。先积  $x$ 。

首先根据被积函数上下限得到积分区域： $\sqrt{x}$ 、 $x$ 、 $2$  围成的类三角形  $d\sigma$ 。

$$I = \iint_D \sin \frac{\pi x}{2y} d\sigma = \int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} dx = \int_1^2 \frac{2y}{\pi} \left( -\cos \frac{\pi y}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) dy = \frac{4}{\pi^3} (2 + \pi)。$$

### 1.2.6 二重积分处理一元积分

在面对有中间变量的一元积分时，可以使用二重积分。

**例题：**设  $f(x) = \int_x^1 \sin(\pi u^2) du$ ，求  $\int_0^1 f(x) dx$ 。（可以使用分部积分法）

解： $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 dx \int_x^1 \sin(\pi u^2) du$ 。又  $\sin(\pi u^2)$  无法对  $x$  积分。

换做对  $y$  积分， $d\sigma$  为  $x=0$ 、 $x=1$ 、 $u=x$  围成的三角形。交换积分次序：

$$\int_0^1 dy \int_0^u \sin(\pi u^2) dx = \int_0^1 \sin(\pi u^2) u du = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sin(\pi u^2) d(\pi u^2) = -\frac{1}{2\pi} \cos \pi u^2 \Big|_0^1 = -\frac{1}{2\pi} (-1 - 1) = \frac{1}{\pi}。$$

**例题：**利用广义二重积分求  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 。

解：根据积分值与积分变量无关的性质：

$$I^2 = \left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

$d\sigma$  是第一象限，可以看作一个广义的圆，半径无限大，转换为极坐标系。

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}。 \therefore I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}。$$

## 1.3 二重积分应用

### 1.3.1 体积

### 1.3.2 形心公式

对于直角坐标系和参数方程:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \, d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{\int x(t)y(t)x'(t) \, dt}{\int y(t)x'(t) \, dt}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \, d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{\int y(t)^t x'(t) \, dt}{\int y(t)x'(t) \, dt}.$$

## 2 三重积分

### 2.1 概念

三重积分的被积函数  $f(x, y, z)$  定义在三维空间  $\Omega$  上, 是四维空间图形体积, 非常抽象。

所以利用质量描述, 设一质量非均匀的物体, 体积密度为  $f(x, y, z)$ , 则三重积分就是以此为点密度的空间物体的质量。

#### 2.1.1 定义

**定义:** 设三元函数  $z = f(x, y, z)$  定义在有界闭区域  $\Omega$  上将区域  $\Omega$  任意分成  $n$  个子域  $\Delta v_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) 并以  $\Delta v_i$  表示第  $i$  个子域的体积。在  $\Delta v_i$  上任取一点  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$  作和  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \gamma_i \Delta v_i$ 。如果当各个子域的直径中的最大值  $\lambda$  趋于零时, 此和式的极限存在, 则称此极限为函数  $f(x, y, z)$  在区域  $\Omega$  上的三重积分, 记为  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv$ , 即  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i$ , 其中  $dv$  叫做体积元素。

其中  $\iiint$  称为三重积分号,  $f(x, y, z)$  为被积函数,  $f(x, y, z)dv$  称为被积表达式,  $dv$  称为体积元,  $x, y, z$  为积分变量,  $\Omega$  为积分区域,  $\sum f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \Delta v_i$  为积分和。

#### 2.1.2 性质

假设  $\Omega$  为空间有界闭区域。

- 空间区域体积:  $\iiint_{\Omega} 1 \, dv = \iiint_{\Omega} dv = V$ , 其中  $V$  为  $\Omega$  的体积。
- 可积函数必有界: 设  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上可积, 则在  $\Omega$  上必有界。

- 积分线性：设  $k_1, k_2$  为常数，则  $\iiint_{\Omega} [k_1 f(x, y, z) \pm k_2 g(x, y, z)] dv = k_1 \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \pm k_2 \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv$ 。
- 积分可加性：设  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上可积，且  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ ,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ，则  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$ 。
- 积分保号性：设  $f(x, y, z), g(x, y, z)$  在  $\Omega$  上可积，且在  $\Omega$  上  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ ，则有  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \leq \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv$ 。且利用不等式性质： $|\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv| \leq \iiint_{\Omega} |f(x, y, z)| dv$ 。
- 三重积分估值定理：设  $M, m$  分别为  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上的最大值和最小值， $V$  为  $\Omega$  的体积，则  $mV \leq \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \leq MV$ 。
- 三种积分中值定理：设  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上连续， $V$  为  $\Omega$  的体积，则  $\Omega$  上至少存在一点  $(\xi, \eta, \zeta)$  使得  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = f(\xi, \eta, \zeta)V$ 。

### 2.1.3 对称性

分析方法与二重积分完全一样。

#### 2.1.3.1 普通对称性

假设  $\Omega$  关于  $yOz$  面对称，则  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv, & f(x, y, z) = f(-x, y, z) \\ 0, & f(x, y, z) = -f(-x, y, z) \end{cases}$ ，其中  $\Omega_1$  为  $\Omega$  在  $yOz$  面前面的部分。

#### 2.1.3.2 轮换对称性

若把  $x$  与  $y$  对调后， $\Omega$  不变，则  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(y, x, z) dv$ ，这就是轮换对称性。其他情况类似。

在使用轮换对称性的时候需要根据题目进行轮换，特别是根据所要求的被积函数  $f(x)$ ，若  $f(x)$  中存在某些变量，则要将没有出现的变量换去。

## 2.2 计算

基本思想还是三重积分化为一重积分。

## 2.2.1 基础方法

### 2.2.1.1 直角坐标系

即  $dv = dxdydz$ , 微元是一个长方体。

#### 2.2.1.1.1 先一后二法

先  $z$  后  $xy$ , 也称为投影穿线法。先做定积分后做二重积分。相当于对底面构造垂直于底面的线, 将这个面上所有的线的体积积分起来就得到这个总体积, 所以先一后二法要求底面是固定的微元。

适用场合:  $\Omega$  有下曲面  $z = z_1(x, y)$ 、上曲面  $z = z_2(x, y)$ , 无侧面或侧面为柱面。

如二重积分: 后积先定限, 限内画条线, 先交写下限, 后交写上限。

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

**例题:** 计算三重积分  $I = \iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$ , 其中  $\Omega$  是由平面  $x=0, y=0, z=0$  及  $x+y+z=1$  所围成的四面体。

解: 根据图形, 已知是一个四面体, 所以下底面是一个  $1 \times 1$  的等腰直角三角形  $D_{xy}$ , 上曲面为一个等边三角形  $z = 1 - x - y$ , 有两个侧柱面。

$$\begin{aligned} \text{则先将 } I \text{ 消去 } z, \text{ 再计算 } xy: I &= \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\ &= \iint_{D_{xy}} d\sigma \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \right) \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( -\frac{1}{4}x + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{4} \right) dx \\ &= \left( -\frac{1}{8}x^2 + \ln(1+x) - \frac{1}{4}x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( \ln 2 - \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

#### 2.2.1.1.2 先二后一法

先  $xy$  后  $z$ , 也称为定限截面法。先做二重积分后做定积分。相当于对体积进行平行于地面的切割为圆柱体, 将所有在这个高上的圆柱体积分起来就得到这个总面积, 所以先二后一要求高是固定的微元。

适用场合:  $\Omega$  是旋转体, 上面和下面都是平面, 中间为曲面, 旋转曲面方程为  $\Sigma: z = z(x, y)$ 。

后积先定限, 限内截个面限。

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) d\sigma.$$

### 2.2.1.2 柱面坐标系

若二重积分部分  $\iint_{D_{xy}} d\sigma$  适用于极坐标系 (即与圆相关), 使用极坐标系表示, 令  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , 便有  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$ . 这就是柱面坐标系下三重积分的计算。

适用场合: 被积函数含有  $x^2 + y^2$ , 积分区域为圆或部分圆。

即一个定积分加上一个极坐标系下的二重积分。

**例题:** 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$ , 其中  $\Omega$  是  $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周形成的

曲面与平面  $z = 8$  所围成的区域。

解: 已知平面曲线绕  $z$  轴旋转, 首先求这个旋转曲面。

首先令  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  在该曲线上, 即得到两个方程:  $y_1^2 = 2z_1$ ,  $x_1 = 0$ 。

取在旋转轴  $z$  轴上一点  $P_0(0, 0, 0)$ , 对于纬圆上任一点  $P(x, y, z)$ , 其中  $|P_0 P_1| = |PP_0|$ , 即  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。

且向量  $\overrightarrow{PP_1}$  垂直于旋转轴  $z$  轴, 所以  $(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) \perp (0, 0, 1)$ ,  $z_1 - z = 0$ ,  $z_1 = z$ 。

代入方程所以  $x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2$ , 再代入  $y_1^2 = 2z$ ,  $x_1 = 0$ , 得到  $2z = x^2 + y^2$ 。

旋转曲面为  $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ 。且于  $z = 8$  所得一个旋转体。

因为选择体上下都是平面, 侧面是曲面, 所以使用先二后一法。其中  $D$ :  $x^2 + y^2 \leq 2z$ 。

$$I = \int_0^8 dz \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^2 r dr = \frac{1024}{3} \pi.$$

### 2.2.1.3 球面坐标系

#### 2.2.1.3.1 适用场合

被积函数含有  $x^2 + y^2 + z^2$  或  $x^2 + y^2$ , 积分区域为球或球的部分, 锥或锥的部分。

#### 2.2.1.3.2 原理

利用三族面对  $\Omega$  进行切割:

1. 首先用  $r = r_0$  从原点开始向外做球体进行切割, 求半径为  $r_0$ , 增量为  $dr$ 。  
 $r_0 \in [0, +\infty)$ 。
2. 然后用  $\phi = \phi_0$  从  $z$  轴为中心, 原点为定点, 做半顶角为  $\phi_0$  的圆锥面进行切割, 增量为  $d\phi$ 。 $\phi_0 \in [0, \pi]$ 。
3. 最后用  $\theta = \theta_0$  以  $z$  为轴做半平面, 与  $xOz$  夹角为  $\theta_0$ , 增量为  $d\theta$ 。 $\theta \in [0, 2\pi]$ 。

首先在极坐标系中, 弧长等于弧度乘半径, 所以微元的由  $\phi$  确定的一边为  $r d\phi$ , 对于  $\theta$  确定的一边, 首先需要根据勾股定理得到弧长  $r \sin \phi$ , 然后乘  $d\theta$  得到微元边长  $r \sin \phi d\theta$ , 最后乘上  $dr$ , 从而得到微元就是三边相乘:  $r d\phi r \sin \phi d\theta dr$ 。

对  $xyz$ , 由  $\phi$  推出的一个直角三角形的斜边为  $r$ , 半顶角为  $\phi$ , 所以  $z$  轴的直角边为  $z = r \cos \phi$ , 又  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , 所以  $x^2 + y^2 = r^2 - z^2 = r^2 \sin^2 \phi$ , 又  $xOy$  夹角为  $\theta$ , 所以  $x = r \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = r \sin \phi \sin \theta$ 。

### 2.2.1.3.3 计算方法

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) r^2 \sin \phi d\theta d\phi dr$$

令  $x = r \cos \theta \sin \phi$ 、 $y = r \sin \theta \sin \phi$ 、 $z = r \cos \phi$ , 判断  $xOy$  面的与正方向夹角  $\phi$ ,  $xOz$  面的与正方向夹角  $\theta$ 。

**例题:** 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$ , 其中  $\Omega$  是半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $y \geq 0$ ) 与  $xOz$  面所围成的区域。

**解:** 根据图形是一个右半球, 所以  $\theta$  是  $x$  正轴到负轴一共  $\pi$ ,  $\phi$  到正轴到负轴一共  $\pi$ ,  $r$  从原点到最外面一共  $a$ 。  $f(x) = x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \phi$ 。

$$\therefore I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^a (r^2 \sin^2 \phi) r^2 \sin \phi dr$$

### 2.2.1.4 对称性

#### 2.2.1.4.1 普通对称性

**例题:** 计算  $\iiint_{\Omega} e^{|z|} dv$ , 其中  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 。

**解:** 已知  $\Omega$  为一个半径为 1 的球体。且球体球心在原点, 利用普通对称性代入:  $f(x, y, z) dv = e^{|z|} dv = dm = f(x, y, -z) dv = e^{|z|} dv = dm$ , 所以对于  $f(x, y, z)$ , 在球体上下积分相同。

$$\therefore \iiint_{\Omega} e^{|z|} dv = 2 \iiint_{\Omega_1} e^z dv, \text{ 其中 } \Omega_1 \text{ 为上半球体, 即 } \Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0.$$

由于  $f(x) = e^z$ , 只包含  $z$  的变量, 所以使用先二后一法更简单。

由于截面是一个圆, 所以令  $z = z$ , 代入方程得到面积:  $D: x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$ 。  
所以这个圆的半径的平方就是  $r^2 = 1 - z^2$ , 面积为  $\pi r^2 = \pi(1 - z^2)$ 。

$$= 2 \int_0^1 dz \iint_D e^z d\sigma = 2 \int_0^1 e^z \cdot \pi(1 - z^2) dz = 2\pi。$$

#### 2.2.1.4.2 轮换对称性

**例题:** 设  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ , 求  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ 。

**解:** 利用轮换对称性可知  $\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ 。

$$\therefore I = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz。$$

#### 2.2.1.5 形心公式逆用

由  $\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x dv}{\iiint_{\Omega} dv}$  推出  $\iiint_{\Omega} x dv = \bar{x} \cdot V$ , 其中  $V$  是  $\Omega$  的体积。

## 3 第一型曲线积分

是由定积分推广而来。即对弧长曲线积分。

### 3.1 概念

用于计算密度不均匀的不规则形状细线质量。

#### 3.1.1 几何性质

$L$  是在  $xOy$  上的曲线段,  $f(x, y)$  在  $L$  上有界, 将  $L$  分割为多个线段  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ , 假如取该线段某点  $\forall(\xi_i, \eta_i) \in \Delta S_i$ , 则该线段的质量可以近似为  $\Delta m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$ , 所以整体线的质量  $m \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$ 。  $\lambda = \max\{\Delta S_1, \dots, \Delta S_n\}$ , 若极限  $m = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$  存在, 称该极限为  $f(x, y)$  在  $L$  上对弧长的曲线积分  $\int_L f(x, y) ds$ 。

#### 3.1.2 定义

第一类曲线积分为  $\int_L f(x, y) ds$ 。

### 3.1.3 性质

- $\int_L 1 \, ds = l$ 。
- $\int_L f(x, y) \, ds = \int_{L_1} f(x, y) \, ds + \int_{L_2} f(x, y) \, ds$ 。
- $\int_L (k_1 f(x, y)) \, ds \pm \int_L (k_2 f(x, y)) \, ds = k_1 \int_L f(x, y) \, ds \pm k_2 \int_L f(x, y) \, ds$ 。

### 3.1.4 对称性

- $L$  关于  $y$  轴对称, 右边部分为  $L_1$ , 若  $f(-x, y) = -f(x, y)$ , 则  $\int_L f(x, y) \, ds = 0$ , 若  $f(-x, y) = f(x, y)$ , 则  $\int_L f(x, y) \, ds = 2 \int_{L_1} f(x, y) \, ds$ 。
- $L$  关于  $x$  轴对称, 上边部分为  $L_1$ , 若  $f(x, -y) = -f(x, y)$ , 则  $\int_L f(x, y) \, ds = 0$ , 若  $f(x, -y) = f(x, y)$ , 则  $\int_L f(x, y) \, ds = 2 \int_{L_1} f(x, y) \, ds$ 。
- $L$  关于  $y = x$  对称, 则  $\int_L f(x, y) \, ds = \int_L f(y, x) \, ds$ 。

## 3.2 计算

### 3.2.1 基础方法

即化为定积分。一投（投影）二代（代入关系方程）三计算（ $ds$  转换为  $dx$  等）。

- $L: y = g(x) \quad (a \leq x \leq b)$ ,  $\int_L f(x, y) \, ds = \int_a^b f[x, g(x)] \sqrt{1 + g'^2(x)} \, dx$ 。
- $L: \begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$ ,  $\int_L f(x, y) \, ds = \int_\alpha^\beta f[\phi(t), \psi(t)] \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt$ 。

#### 3.2.1.1 平面

**例题：**计算  $\oint_{\Gamma} |y| \, ds$ , 其中  $\Gamma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  与平面  $x = y$  的交线。

**解：**根据普通对称性, 对于  $|y|$  而言, 其他象限的函数值都与第一象限区域的函数相等。令第一象限区域为  $\Gamma_1$ :

$$\therefore \oint_{\Gamma} |y| \, ds = 4 \oint_{\Gamma_1} y \, ds$$

根据交线方程进行联立, 得到  $x = \cos t$ ,  $y = \cos t$ ,  $z = \sqrt{2} \sin t$ 。

对于  $\Gamma_1$ , 其角度为  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $y = \cos t$ 。



$$\begin{aligned} \text{又 } ds &= \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}, \text{ 所以 } dt = \sqrt{2} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sqrt{2} dt = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

### 3.2.1.2 空间

## 3.2.2 技术方法

### 3.2.2.1 边界方程代入被积函数

### 3.2.2.2 对称性

### 3.2.2.3 形心公式逆用

## 4 第一型曲面积分

$ds$  为面微分。即对面积曲面积分。

## 4.1 概念

### 4.1.1 几何性质

若一块厚度不计的物体  $\Sigma$  在空间中，对  $\Sigma$  取面积微元  $\forall ds \in \Sigma$ ，此时面积微元的面密度认定为均匀，其质量  $dm = \rho(x, y, z)ds$ 。所以总质量  $m = \iint_{\Sigma} dm = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) ds$ 。

### 4.1.2 定义

$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds$  为  $f(x, y, z)$  在曲面  $\Sigma$  上的面积的曲面积分。

### 4.1.3 性质

- $\iint_{\Sigma} 1 ds = \sigma$ 。
- $\Sigma$  关于  $xOy$  对称，上部为  $\Sigma_1$ ，如果  $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ ，则  $\iint_{\Sigma} = 0$ ，如果  $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$ ，则  $\iint_{\Sigma} = 2 \iint_{\Sigma_1}$ 。

## 4.2 计算

### 4.2.1 二重积分法

还是一投二代三计算。

1. 对  $\Sigma$  作图。
2. 查看图形的奇偶性和对称性, 如果对称则消去对应  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的奇数次项。  
如果图形关于  $xOy$  对称, 则出现  $z$  的奇数次项就去掉; 同理关于  $yOz$  存在  $x$  的奇数次项就去掉,  $xOz$  存在  $y$  的奇数次项就去掉。

3. 查看是否可以将题目中的常数项式子对  $I$  化简。

4. 投影, 如将  $\Sigma$  投影到  $xOy$  平面,  $z = \psi(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$ 。

5. 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} d\sigma$ 。

6. 代入  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds = \iint_{D_{xy}} f[x, y, \psi(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} d\sigma$ 。

**例题:**  $I = \iint_{\Sigma} (xy^2 + z) ds$ 。  $\Sigma: z = x^2 + y^2, z \leq 1$ 。

解: 已知  $\Sigma$  是一个开口向  $z$  轴正方向的抛物面。不关于  $z$  轴对称, 关于  $x$  轴和  $y$  轴对称。 $I$  中存在  $x$  的奇数次项  $xy^2$  则去掉, 由于不存在  $y$  的奇数次项则跳过。

$\therefore I = \iint_{\Sigma} z ds$ 。所以  $\Sigma$  对  $xOy$  投影最好, 为一个单位圆。

所以投影为单位圆  $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$ 。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \quad ds = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma。$$

$$I = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} d\sigma = \int_0^2 \pi d\theta \int_0^1 r^3 \sqrt{1 + 4r^2} dr = \pi \int_0^1 r^2 \sqrt{1 + 4r^2} d(r^2)。$$

$$\begin{aligned} \text{令 } r^2 = t, \quad I &= \pi \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t} dt。 \text{ 令 } \sqrt{1 + 4t} = u, \quad = \pi \int_1^{\sqrt{5}} \frac{u^2 - 1}{4} u \frac{u}{2} du = \\ \frac{\pi}{8} \int_1^{\sqrt{5}} (u^4 - u^2) du &= \frac{\pi}{8} \left( \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{10}{3} \sqrt{5} + \frac{2}{15}。 \end{aligned}$$

**例题:** 设曲面  $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$ , 求  $\iint_{\Sigma} (x + |y|) ds$ 。

解: 曲面  $\Sigma$  是一个正八面体。又普通对称性得  $\iint_{\Sigma} x ds = 0$ 。

令第一卦限为  $\Sigma_1$ , 所以根据普通对称性  $\iint_{\Sigma} |y| ds = 8 \iint_{\Sigma_1} y ds$

因为  $x + y + z = 1$  和  $ds = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$  交换  $xy$  保持不变。

根据轮换对称性  $\iint_{\Sigma_1} y ds = \iint_{\Sigma_1} x ds$ 。

且对于  $x + y + z = 1$  和用  $xz$  替换  $y$  (把微元曲面投到不同的坐标轴平面):

$ds = \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz$  交换  $xz$  保持不变。

根据轮换对称性  $\iint_{\Sigma_1} y ds = \iint_{\Sigma_1} x ds = \iint_{\Sigma_1} z ds$ 。

$$\therefore 8 \iint_{\Sigma_1} y ds = \frac{8}{3} \iint_{\Sigma_1} (x + y + z) ds = \frac{8}{3} \iint_{\Sigma_1} ds = \frac{8}{3} S_{\Sigma_1} = \frac{8}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3} \sqrt{3}。$$

## 4.2.2 技术方法

### 4.2.2.1 边界方程代入被积函数

### 4.2.2.2 对称性

### 4.2.2.3 形心公式逆用

# 5 多元积分应用

包括二重积分、三重积分、一型曲线积分、一型曲面积分四个部分。

## 5.1 几何量

### 5.1.1 平面区域

### 5.1.2 空间区域

### 5.1.3 空间曲线

### 5.1.4 空间曲面

是考试的重点。

## 5.2 重心与形心

当密度  $\rho$  为一个固定常数时重心就是形心。

### 5.2.1 平面薄片

### 5.2.2 空间物体

是考试的重点。

例题：设空间物体  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ ，求  $\Omega$  的形心的竖坐标  $\bar{z}$ 。

### 5.2.3 空间曲线

### 5.2.4 空间曲面

## 5.3 转动惯量

可能会考到。

### 5.3.1 平面薄片

### 5.3.2 空间物体

### 5.3.3 空间曲线

### 5.3.4 空间曲面

## 5.4 引力

考的可能性很小。

### 5.4.1 平面薄片

### 5.4.2 空间物体

### 5.4.3 空间曲线

### 5.4.4 空间曲面

## 6 第二型曲线积分

第二型与第一型的差别就是第二型具有物理意义是有向的，而第一型具有几何意义是无向的。即对坐标曲线积分。

## 6.1 概念

### 6.1.1 场的概念

**定义：**就是空间区域  $\Omega$  上的一种对应法则。

数量场就是对应数量没有方向。向量场就是有数量也有方向。

### 6.1.2 几何性质

对于双理想状态，对一个物体沿直线且均匀力道，则其功为  $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$  ( $\vec{F}$  为力向量， $\overrightarrow{AB}$  为物体移动向量)。

而对于双不理想状态，对一个物体沿曲线且变动力道做功，则无法得出结论。

令曲线为  $L$ ，对  $L$  进行切分为微元  $\forall \overrightarrow{ds} \in L$ ，则  $\overrightarrow{ds} = \{dx, dy\}$ 。设变力  $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ ，则功的微元为  $d\omega = \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ，所以对整体功进行积分  $\omega = \int_L d\omega = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 。

令曲线为  $L$ ，对  $L$  进行切分为微元  $\forall \overrightarrow{ds} \in L$ ，则  $\overrightarrow{ds} = \{dx, dy, dz\}$ 。设变力  $\vec{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ ，则功的微元为  $d\omega = \vec{F} \cdot \overrightarrow{ds} = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ ，所以对整体功进行积分  $\omega = \int_L d\omega = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ 。

### 6.1.3 定义

对于二维，对坐标的曲线积分为  $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ ，其中  $\int_L P(x, y)dx$  为  $P(x, y)$  在有向曲线段  $L$  上对坐标  $x$  求积分， $\int_L Q(x, y)dy$  为  $Q(x, y)$  在有向曲线段  $L$  上对坐标  $y$  求积分。

对于三维，对坐标的曲线积分为  $\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ ，同理如二维的定义。

### 6.1.4 性质

- $\int_{L^-} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 。
- $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\cos\beta)ds$ 。(利用方向余弦将第二类曲线积分化成第一类曲线积分)

## 6.2 计算

对于不封闭曲线使用定积分法，对于封闭曲线或封闭曲线部分使用二重积分法。

### 6.2.1 定积分法

由于第二类曲线积分积分值可正可负，所以只需要关心其起点  $x = a$ ，其终点  $x = b$ 。

- $L: y = g(x)$  ( $x$  起于  $x = a$  终于  $x = b$ )， $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b P[x, g(x)] dx + Q[x, g(x)]g'(x) dx$ 。
- $L: \begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$  ( $t$  起于  $\alpha$  终于  $\beta$ )， $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_\alpha^\beta P[\phi(t), \psi(t)]\phi'(t) dt + Q[\phi(t), \psi(t)]\psi'(t) dt$ 。

### 6.2.2 二重积分法

是考试的重点，基本上都会考到，非常重要。

#### 6.2.2.1 背景

复平面上的一个区域  $G$ ，如果在其中任做一条简单闭曲线，而闭曲线的内部总属于  $G$ ，就称  $G$  为单连通区域。一个区域如果不是单连通区域，就称为多连通区域。即形象地说一块完整的凸图形即单连通，中间存在洞的或凹图形为多连通。

对于单连通区域，边界的正方向为逆时针方向，对于多连通区域，外边界的正方向是逆时针，内边界的正方向是顺时针。

在定积分中，使用牛顿-莱布尼茨公式，将  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ，即将代表  $[a, b]$  范围积分域的积分值变为代表两点边界差值的函数值。在二重积分中，积分区域为一个连通域，其面积的积分就是二重积分，其周长的积分就是曲线积分，那么是否有这么一种方法，将域的关系转换为边界的关系，即是否存在一种方法将二重积分和曲线积分联系起来。

所以这个方法就是将曲线积分转换为二重积分，这个工具就是格林公式。

### 6.2.2.2 格林公式

条件:

- $D$  为连通区域,  $L$  为  $D$  的正向边界。(如果  $D$  不是个完整的区域则添加线段, 如果  $L$  为反向边界则添加负号)
- $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$  在  $D$  上连续可偏导。

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma.$$

### 6.2.3 路径无关积分

对于第二类曲线积分  $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ , 其积分值可能与路径  $L$  相关, 也可能与路径  $L$  无关。

若  $D$  为单连通区域,  $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$  在  $D$  上连续可偏导, 以下命题等价:

1.  $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  与路径无关。
2.  $\forall C \in D$  ( $C$  为闭区域),  $\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 。
3. 柯西黎曼条件:  $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$ 。(最合适)
4.  $\exists u(x, y)$ , 使得  $du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 。即  $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ 。

则根据这些条件简化计算, 若满足柯西黎曼条件:

1. 求曲线积分:  $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y) dy$  (先水平后垂直)。
2. 能找到  $u$ , 求曲线积分: 有  $du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ , 则  $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} du = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0)$ 。
3. 求全微分对应  $u$  表达式: 则  $u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x_1, y) dy$  (先水平后垂直)。

**例题:** 已知  $\psi(x)$  可导,  $\psi(0) = 2$ ,  $\int_L xy^2 dx + \psi(x)y dy$  与路径无关, 求  $\psi(x)$ , 并计算  $I = \int_{(1,2)}^{(2,3)} xy^2 dx + \psi(x)y dy$ 。

解: 已知  $P = xy^2, y = \psi(x)y$ 。由于曲线积分与路径无关, 所以  $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$ , 所以  $\psi'(x)y \equiv 2xy, \psi'(x) = 2x, \psi(x) = x^2 + C$ , 又  $\psi(0) = 2, C = 2, \psi(x) = x^2 + 2$ 。

所以  $I = \int_{(1,2)}^{(2,3)} xy^2 dx + (x^2 + 2)y dy$ 。

方法一:  $I = \int_1^2 x \cdot 2^2 dx + \int_2^3 (2^2 + 2)y dy = 2x^2|_1^2 + 3y^2|_2^3 = 6 + 15 = 21$ 。

方法二:  $I = \int_{(1,2)}^{(2,3)} (xy^2 dx + x^2y dy) + 2y dy = \int_{(1,2)}^{(2,3)} d(\frac{1}{2}x^2y^2 + y^2) = (\frac{1}{2}x^2y^2 + y^2)|_{(1,2)}^{(2,3)} = 27 - 6 = 21$ 。

## 7 第二型曲面积分

与第二型曲线积分一样, 是有方向的。即对坐标曲面积分。

### 7.1 概念

#### 7.1.1 向量场的通量

令一个不可压缩的向量场  $\vec{v} = \{P, Q, R\}$ , 向量场中有一个面  $\Sigma$ , 有不规则方向的流体流入或流出这个面, 现在要求单位时间内流入指定侧的流量。

取一块有侧的面  $\forall d\vec{s} \in \Sigma$ , 从  $x$  轴正方向部分将  $d\vec{s}$  向  $yOz$  面的投影记为  $dydz$ 。

当  $\cos \alpha \geq 0$  即方向余弦非负的情况下,  $dydz = ds_{yOz}$  即就等于投影面积; 当  $\cos \alpha < 0$  即方向余弦为负的情况下,  $dydz = -ds_{yOz}$  即就等于负投影面积。实际上  $dydz = ds \cdot \cos \alpha$ 。同理其他两个方向也是如此。

所以对  $d\vec{s}$  进行三轴投影, 得到  $d\vec{s} = \{dydz, dzdx, dxdy\}$

所以  $d\vec{s}$  单位时间内流入指定侧的流量  $d\phi = \vec{v} \cdot d\vec{s} = P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$ 。

从而总流量为  $\iint_{\Sigma} d\phi = \iint_{\Sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$ 。

#### 7.1.2 定义

$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$  为在  $\Sigma$  上的曲面积分。其中  $\iint_{\Sigma} P(x, y, z)dydz$  为  $P(x, y, z)$  在有侧曲面  $\Sigma$  上对坐标  $y, z$  的曲面积分。

#### 7.1.3 性质

- $\iint_{\Sigma^-} = -\iint_{\Sigma^+}$ 。



- $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma$ 。(曲面积分转为曲线积分)
- 若积分曲面对称：被积函数关于相应变量为奇函数，积分为半区间的 2 倍；若为偶函数，则积分等于 0。(与一般奇偶性正好相反)

对于奇偶性的解释：因为是第二型的曲面积分，会分前后左右上下，分别代表正负，所以被积函数为偶函数时如果是相反方向，就正好被减去了（两个积的结果相同，方向相反，可以考虑磁通量一边进，一边出），奇函数两边想减因为方向不同，所以-为正相加，即为两倍。第一型曲面积分物理意义来源于对给定密度函数的空间曲面，计算该曲面的质量。第二型曲面积分物理意义来源对于给定的空间曲面和流体的流速，计算单位时间流经曲面的总流量。

## 7.2 计算

### 7.2.1 二重积分法

曲面积分的二重积分法较复杂。将积分化为不同面的投影。为什么会带一个正负号？因为前面的  $dx dy dz$  表示投影，其值可正可负，而后面的  $dx dy dz$  表示面积，必然为正。

- $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz$ ：用  $yz$  表示  $x$ ： $\Sigma : x = \phi(y, z)$ ,  $(y, z) \in D_{yz}$ ,  
 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P[\phi(y, z), y, z] dydz$ 。前正后负。
- $\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dzdx$ ：用  $xz$  表示  $y$ ： $\Sigma : y = \phi(z, x)$ ,  $(z, x) \in D_{zx}$ ,  
 $\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dzdx = \pm \iint_{D_{zx}} Q[x, \phi(z, x), z] dzdx$ 。右正左负。
- $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy$ ：用  $xy$  表示  $z$ ： $\Sigma : z = \phi(x, y)$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$ ,  
 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, \phi(x, y)] dxdy$ 。上正下负。

### 7.2.2 三重积分法

是考试的重点，基本上都会考到。非常重要。

#### 7.2.2.1 背景

牛顿莱布尼兹公式将定积分转换为函数值差，格林公式将曲线积分转换为二重积分，高斯公式就是将曲面积分转换为三重积分。

### 7.2.2.2 高斯公式

条件:

- $\Omega$  为几何体,  $\Sigma$  为  $\Omega$  的外表面。(如果不封闭则补全, 如果是内表面就添加负号)
- $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$  在  $\Omega$  上连续可偏导。

$$\oiint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

例题:  $I = \iint_{\Sigma} yz dzdx + 2 dxdy$ , 其中  $\Sigma$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  的  $xOy$  面的上半部分。

解: 由  $I$  可得  $P = 0$ ,  $Q = yz$ ,  $R = 2$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y} = z$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$ 。

由于  $\Sigma$  只有球面的上半部分, 所以需要补充底面  $\Sigma_0: y = 0$  ( $x^2 + y^2 \leq 4$  下侧), 此时才是一个半球体的完整封闭表面积,  $\Sigma_0$  的法向量为  $z$  轴的反方向。

所以  $I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_0} - \iint_{\Sigma_0}$ 。

$$\begin{aligned} \text{又根据高斯公式 } \oiint_{\Sigma+\Sigma_0} &= \iiint_{\Omega} z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^2 r \cos \psi \cdot r^2 \sin \psi dr = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d(\sin \psi) \int_0^2 r^3 dr = 2\pi \times \frac{1}{2} \sin^2 \psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \times \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 = 4\pi. \end{aligned}$$

$$\text{而底面 } \iint_{\Sigma_0} yz dzdx + 2 dxdy = \iint_{\Sigma_0} 2 dxdy = -2 \iint_{D_{xy}} dxdy = -8\pi.$$

$$I = 4\pi + 8\pi = 12\pi.$$

## 8 空间第二型曲线积分计算

是第二型曲线积分的应用。使用的是斯托克斯公式。