

# 多元函数积分学

Didnelpsun

## 目录

<b>1 二重积分</b>	<b>1</b>
1.1 交换积分次序 . . . . .	1
1.1.1 直角坐标系 . . . . .	1
1.1.2 极坐标系 . . . . .	1
1.2 极直互化 . . . . .	2
1.3 二重积分计算 . . . . .	2
1.3.1 交换积分次序 . . . . .	2
1.3.2 积分性质 . . . . .	2
1.3.3 切分区域 . . . . .	3
1.4 二重积分求导 . . . . .	3
1.5 二重积分等式 . . . . .	3

# 1 二重积分

## 1.1 交换积分次序

### 1.1.1 直角坐标系

**例题：**交换积分次序  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy$ 。

**解：**已知积分区域分为两个部分。将  $X$  型变为  $Y$  型。画出图形可以知道  $y \in (0, 1)$ ,  $x$  的上下限由  $y = x^2$  和  $y = \frac{1}{2}(3 - x)$  转化为  $\sqrt{y}$  和  $3 - 2y$ 。

所以转换为  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$ 。

### 1.1.2 极坐标系

**例题：**对  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$  交换积分次序。

**解：**对于极坐标的积分次序交换需要利用直角坐标系来画图了解，特别是对  $r$  的上下限。

对  $\theta = \frac{\pi}{2}$  变为  $y$  轴,  $y = -\frac{\pi}{4}$  变为  $y = -x$ 。

对  $r = 2 \cos \theta$  变为  $xy$  的表达式,  $r^2 = 2 \cos \theta$ , 即  $x^2 + y^2 = 2x, (x-1)^2 + y^2 = 1$ 。

所以所得到的  $\sigma$  为一个圆割去一个扇形。

交换积分次序后就需要以一个长度以极点为圆心做圆, 切割  $\sigma$ 。

由  $\sigma$  可知取长度  $\sqrt{2}$  可以切分。

所以  $\sigma$  可以分为左边的  $\sigma_1$  和右边的  $\sigma_2$ 。

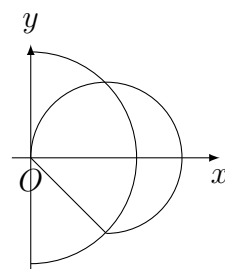
$\sigma_1$  的  $r \in [0, \sqrt{2}]$ ,  $\sigma_2$  的  $r \in [\sqrt{2}, 2]$ 。

$\sigma_1$  的  $\theta$  下限是  $y = -x$  这条边, 即  $\theta = -\frac{\pi}{4}$ , 上限是  $r = 2 \cos \theta$  这个圆, 则  $\theta = \arccos \frac{r}{2}$ 。

$\sigma_2$  的  $\theta$  界限都是  $r = 2 \cos \theta$  这个圆, 此时  $r > 0$  恒成立, 但是上限是上半部分  $\theta > 0$ , 而下限是下半部分  $\theta < 0$ , 即上限  $\theta = \arccos \frac{r}{2}$ , 所以下限为  $\theta = -\arccos \frac{r}{2}$ 。

综上交换积分次序结果为:

$$\int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{r}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta + \int_{\sqrt{2}}^2 r dr \int_{-\arccos \frac{r}{2}}^{\arccos \frac{r}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta。$$



## 1.2 极直互化

**例题：**将  $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-x^2} dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^R e^{-y^2} dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2} dx$  转换为极坐标系并计算结果。

**解：**首先根据积分上下限得到积分区域  $D = \left\{ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}R, 0 \leq x \leq y \right\} \cup \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}R \leq y \leq R, 0 \leq x \leq \sqrt{R^2-y^2} \right\}$ ,  $D$  为一个八分之一圆的扇形。

根据  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  替换得到  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq r \leq R, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ 。

又  $e^{-y^2} \cdot e^{-x^2} = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$ 。

$$\therefore I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr。$$

## 1.3 二重积分计算

二重积分若是累次积分形式出现, 则计算可以使用上面两种方法简便运算。

### 1.3.1 交换积分次序

当按照当前的积分次序无法算出时需要更换积分次序。主要是看  $f(x, y)$  是对  $x$  先积分更简单还是对  $y$  先积分更简单。

**例题：**求  $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \cos^2 x dx$ 。

**解：**首先直接对这个式子直接计算,  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ , 原式  $= \frac{1}{2} \int_0^1 (\pi - 2y - \arcsin y) dy$ 。根本无法解出。

考虑交换积分次序, 首先求  $\sigma$ ,  $y \in [0, 1]$ ,  $x \in [\arcsin y, \pi - \arcsin y]$ , 则  $\sin x = y$ ,  $y = \sin(\pi - x) = \sin x$  即  $x \in [0, \sin x]$ 。

将积分区域换成  $X$  型:  $x \in [0, \pi]$ ,  $y \in [0, \sin x]$ 。

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2 x dx \int_0^{\sin x} dy &= \int_0^\pi \cos^2 x \sin x dx = - \int_0^\pi \cos^2 x d(\cos x) = - \frac{\cos^3 x}{3} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{3}。 \end{aligned}$$

### 1.3.2 积分性质

若积分区域  $\sigma$  关于  $x = k_1$  或  $y = k_2$  对称, 则当  $f(x, y)$  含有  $x - k_1$  或  $y - k_2$  因式时重积分值为 0。

**例题：**设  $D: x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$ , 求  $\iint_D xy dx dy$ 。

**解：**本题目使用直角坐标系和极坐标系都不好做。所以需要利用积分性质, 对  $D$  进行平移等操作。

利用平移, 由于  $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ , 令  $x = 1 + r \cos \theta$ ,  $y = 1 + r \sin \theta$ , 则利用极坐标,  $r \in [0, \sqrt{2}]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} ((1+r \cos \theta)(1+r \sin \theta)r) dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (1+r \sin \theta + r \cos \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta)r dr$ , 又将  $\sin \theta$  和  $\cos \theta$  对  $\theta$  在  $[0, 2\pi]$  进行积分全部为 0, 所以直接把后面的全消掉, 变为  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr = 2\pi$ 。

### 1.3.3 切分区域

**例题:** 设  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 求  $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 。

**解:** 由  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , 知道可以使用极坐标系来表示, 但是  $D$  是一个正方形, 无法用圆来简单表示。

又  $D$  可以从  $y = x$  切割为两个部分, 所以令下三角形为  $D_1$ ,  $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \iint_{D_1} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 。

所以  $0 \leq y$  和  $y = x$  可以确定  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ,  $0 \leq x \leq 1$  可以确定  $r$  上界为  $x = 1$ , 即  $r \cos \theta = 1$ , 即  $r = \frac{1}{\cos \theta}$ , 确定  $r \in [0, \frac{1}{\cos \theta}]$ 。

所以  $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos \theta} = 2 \ln(\sec \theta + \tan \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \ln(1 + \sqrt{2})$ 。

## 1.4 二重积分求导

即对二重积分求导, 需要将二重积分化为一重积分。

## 1.5 二重积分等式

**例题:** 设  $f(x, y)$  为连续函数, 且  $f(x, y) = \frac{1}{\pi} \sqrt{x^2 + y^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} f(x, y) d\sigma + y^2$ , 求  $f(x, y)$ 。

**解:**  $\because f(x, y)$  为连续函数, 所以其在区间上可积且是一个常数。

令  $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} f(x, y) d\sigma = A$ 。对  $f(x, y) = \frac{A}{\pi} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2$  两边积分:

$A = \frac{A}{\pi} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma + \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} y^2 d\sigma$ , 令  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ :

$A = \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr + \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{2A}{3} + \frac{\pi}{4}$ 。  $A = \frac{3}{4}\pi$ 。

则代入原式  $f(x, y) = \frac{3}{4} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2$ 。