线性方程组

Didnelpsun

目录

1 基本概念

矩阵是根据线性方程组得到。线性方程组和向量组本质上是一致的。

1.1 线性方程组与矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

n 元齐次线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

n 元非齐次线性方程组。

m 是方程个数，即方程组行数，n 是方程未知数个数，即类似方程组的列数。

对于齐次方程，$x_1 = \cdots = x_n = 0$ 一定是其解，称为其**零解**，若有一组不全为零的解，则称为其**非零解**。其一定有零解，但是不一定有非零解。

对于非齐次方程，只有 $b_1 \cdots b_n$ 不全为零才是。

令**系数矩阵** $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，**未知数矩阵** $x_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，**常数项矩阵** $b_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$，**增广矩阵** $B_{m\times(n+1)} = \left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$。

所以 $AX = \begin{pmatrix} a_1 1x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$。

从而 $AX = b$ 等价于 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$，当 $b = O$ 就是齐次线性方程。

从而矩阵可以简单表示线性方程。

1.2 矩阵乘法与线性变换

矩阵乘法实际上就是线性方程组的线性变换，将一个变量关于另一个变量的关系式代入原方程组，得到与另一个变量的关系。

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s \\ \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{ms}x_s \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 + \cdots + b_{1n}t_n \\ \cdots \\ x_s = b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \cdots + b_{sn}t_n \end{cases}$$

原本是线性方程分别是 y 与 x 和 x 与 t 的关系式，而如果将 t 关于 x 的关系式代入 x 关于 y 的关系式中，就会得到 t 关于 y 的关系式：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(b_{11}t_1 + \cdots + b_{1n}t_n) + \cdots + a_{1s}(b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \cdots + b_{sn}t_n) \\ \cdots \\ y_m = a_{m1}(b_{11}t_1 + \cdots + b_{1n}t_n) + \cdots + a_{ms}(b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \cdots + b_{sn}t_n) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1s}b_{s1})t_1 + \cdots + (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1s}b_{sn})t_n \\ \cdots \\ y_m = (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{ms}b_{s1})t_1 + \cdots + (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{ms}b_{sn})t_m \end{cases}$$

这可以看作上面两个线性方程组相乘，也可以将线性方程组表示为矩阵，进行相乘就得到乘积，从而了解矩阵乘积与线性方程组的关系：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}_{m\times s} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}_{s\times n}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1s}b_{s1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1s}b_{sn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{ms}b_{s1} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{ms}b_{sn} \end{pmatrix}_{m\times n} 。$$

1.3 线性方程组的解

对于一元一次线性方程：$ax = b$：

- 当 $a \neq 0$ 时，可以解得 $x = \frac{b}{a}$。
- 当 $a = 0$ 时，若 $b \neq 0$ 时，无解，若 $b = 0$ 时，无数解。

当推广到多元一次线性方程组：$Ax = b$，如何求出 x 这一系列的 x 的解？

从数学逻辑上看，已知多元一次方程，有 m 个约束方程，有 n 个未知数，假定 $m \leqslant n$。

当 $m < n$ 时，就代表有更多的未知变量不能被方程约束，从而有 $n - m$ 个自由变量，所以就是无数解，解组中其他解可以由自由变量来表示。

当 $m = n$ 时代表约束与变量数量相等，此时又要分三种情况。

当所有的约束条件其中存在线性相关，即一部分约束条件可以由其他约束表示，则代表这部分约束条件是没用的，实际上的约束条件变少，从而情况等于 $m < n$，结果是无数解。

当所有的约束条件不存在线性相关，但是一部分约束条件互相矛盾，则约束条件下就无法解出解，从而结果是无实数解。

当所有的约束条件不存在线性相关，且相互之间不存在矛盾情况，这时候才会解出一个实数解，从而结果是有唯一实解。

若使用矩阵来解决线性方程组的问题，其系数矩阵 $A_{m\times n}$。

对于 $A \neq O$，则 $Ax = b$，若存在一个矩阵 $B_{n\times n}$ 类似 $\dfrac{1}{a}$，使得 $BAx = Bb$，解得 $Ex = x = Bb$，这个 B 就是 A 的逆矩阵。

对于 $A = O$ 即不可逆，需要判断 b 是否为 0，若不是则无实数解，若是则无穷解，这种判断需要用到增广矩阵，需要用到矩阵的秩判断。

1.4 线性方程组的矩阵解表示

已知对于线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$。

按乘积表示为 $A_{m\times n}x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$，然后将 A 按列分块，x 按行分块：

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b，\quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}。$$

这三种都是解的表示方法。

2 具体线性方程

2.1 齐次方程组

2.1.1 有解条件

2.1.2 解的性质

2.1.3 基础解系

2.1.4 求解过程

2.2 非齐次方程组

2.2.1 有解条件

2.2.2 解的性质

2.2.3 求解过程

3 抽象线性方程

3.1 解的判定

3.2 解的性质

3.3 求解过程

4 公共解

5 通解方程组