

矩阵

Didneipsun

目录

1	矩阵定义	1
2	矩阵运算	1
2.1	矩阵加法减法	1
2.2	数乘矩阵	2
2.3	矩阵相乘	2
2.4	矩阵幂	3
2.5	矩阵转置	4
2.6	方阵行列式	4
2.7	线性方程组与矩阵	4
3	线性方程组	5
3.1	线性方程组与矩阵	5
3.2	线性方程组的解	6
4	逆矩阵	7

矩阵本质是一个表格。

1 矩阵定义

$m \times n$ 矩阵是由 $m \times n$ 个数 a_{ij} (元素) 排成的 m 行 n 列的数表。

元素是实数的矩阵称为实矩阵, 元素是复数的矩阵是复矩阵。

行数列数都为 n 的就是 n 阶矩阵或方阵, 记为 A_n 。

行矩阵或行向量: 只有一行的矩阵 $A = (a_1 a_2 \cdots a_n)$ 。

列矩阵或列向量: 只有一列的矩阵 $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 。

同型矩阵: 两个矩阵行数、列数相等。

相等矩阵: 是同型矩阵, 且对应元素相等的矩阵。记为 $A = B$ 。

零矩阵: 元素都是零的矩阵, 记为 O , 但是不同型的零矩阵不相等。

对角矩阵或对角阵: 从左上角到右下角的直线(对角线)以外的元素都是 0 $\cdots = \lambda_n = 1$ 的对角矩阵, 记为 E 。这的矩阵, 记为 $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 。种线性变换叫做恒等变换, $AE = A$ 。

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2 矩阵运算

2.1 矩阵加法减法

设与两个矩阵都是同型矩阵 $m \times n$ $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$, 则其加法就是 $A + B$ 。

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{m+n} + b_{m+n} \end{pmatrix}$$

- $A + B = B + A$ 。
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ 。

若 $-A = (-a_{ij})$ ，则 $-A$ 是 A 的负矩阵， $A + (-A) = O$ 。

从而矩阵的减法为 $A - B = A + (-B)$ 。

2.2 数乘矩阵

数 λ 与矩阵 A 的乘积记为 λA 或 $A\lambda$ ，规定：

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

假设 A 、 B 都是 $m \times n$ 的矩阵， λ 、 μ 为数：

- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ 。
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ 。
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ 。

矩阵加法与数乘矩阵都是矩阵的线性运算。

2.3 矩阵相乘

设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times s$ 的矩阵， $B = (b_{ij})$ 是一个 $s \times n$ 的矩阵，那么 $A \times B = AB = C_{m \times n} = (c_{ij})$ 。即：

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

所以按此定义一个 $1 \times s$ 行矩阵与 $s \times 1$ 列矩阵的乘积就是一个 1 阶方阵即一个数：

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} = c_{ij}。$$

从而 $AB = C$ 的 c_{ij} 就是 A 的第 i 行与 B 的 j 列的乘积。

注意：只有左矩阵的列数等于右矩阵的行数才能相乘。

只有 AB 都是方阵的时候才能 AB 与 BA 。

矩阵的左乘与右乘不一定相等，即 $AB \neq BA$ 。

若方阵 AB 乘积满足 $AB = BA$ ，则表示其是可交换的。

$A \neq O$ ， $B \neq O$ ，但是不能推出 $AB \neq O$ 或 $BA \neq O$ 。

$AB = O$ 不能推出 $A = O$ 或 $B = O$ 。

$A(X - Y) = O$ 当 $A \neq O$ 也不能推出 $X = Y$ 。

- $(AB)C = A(BC)$ 。
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ 。
- $A(B + C) = AB + AC$ 。
- $(B + C)A = BA + CA$ 。
- $EA = AE = A$ 。

λE 称为纯量阵， $(\lambda E_n)A_n = \lambda A_n = A_n(\lambda E_n)$ 。

若 $A_{m \times s}$ ， $B_{s \times n} = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ ，其中 β 为 n 行的列矩阵，则：

$$AB = A(\beta_1, \dots, \beta_s) = (A\beta_1, \dots, A\beta_s)。$$

2.4 矩阵幂

只有方阵才能连乘，从而只有方阵才有幂。

若 A 是 n 阶方阵，所以：

$$A^1 = A, A^2 = A^1 A^1, \dots, A^{k+1} = A^k A^1$$

- $A^k A^l = A^{k+l}$ 。

- $(A^k)^l = A^{kl}$ 。

因为矩阵乘法一般不满足交换率，所以 $(AB)^k \neq A^k B^k$ 。只有 AB 可交换时才相等。

若 $A \neq 0$ 不能推出 $A^k \neq 0$ ，如：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O。$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = O。$$

矩阵幂可以同普通多项式进行处理。

如 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ，对于 A 就是 $f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 E$ 。

$$f(A) = A^2 - A - 6E = (A + 2E)(A - 3E)。$$

2.5 矩阵转置

把矩阵 A 的行换成同序数的列就得到一个新矩阵，就是 A 的转置矩阵 A^T 。
若 A 为 $m \times n$ ，则 A^T 为 $n \times m$ 。

- $(A^T)^T = A$ 。
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ 。
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ 。
- $(AB)^T = B^T A^T$ 。

对称矩阵或对称阵：元素以对角线为对称轴对应相等， $A = A^T$ 。

2.6 方阵行列式

由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式称为矩阵 A 的行列式，记为 $\det A$ 或 $|A|$ 。

2.7 线性方程组与矩阵

- $|A^T| = |A|$ 。

- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ 。
- $|AB| = |A| \cdot |B| = |BA|$ 。

伴随矩阵或伴随阵：行列式 $|A|$ 各个元素的代数余子式 A_{ij} 构成的矩阵。

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $AA^* = A^*A = |A|E$ 。

3 线性方程组

矩阵是根据线性方程组得到。

3.1 线性方程组与矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

n 元齐次线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

n 元非齐次线性方程组。

对于齐次方程， $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 一定是其解，称为其零解，若有一组不全为零的解，则称为其非零解。其一定有零解，但是不一定有非零解。

对于非齐次方程，只有 $b_1 \cdots b_n$ 不全为零才是。

令系数矩阵 $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ，未知数矩阵 $X_{n \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ，常

数项矩阵 $b_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ，增广矩阵 $B_{m \times (n+1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$ 。

$$\text{所以 } AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}。$$

$$\text{从而 } AX = b \text{ 等价于 } \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}, \text{ 当 } b = O \text{ 就是齐次线性方程。}$$

性方程。

从而矩阵可以简单表示线性方程。

3.2 线性方程组的解

对于一元一次线性方程: $ax = b$:

- 当 $a \neq 0$ 时, 可以解得 $x = \frac{b}{a}$ 。
- 当 $a = 0$ 时, 若 $b \neq 0$ 时, 无解, 若 $b = 0$ 时, 无数解。

当推广到多元一次线性方程组: $AX = b$, 如何求出 X 这一系列的 x 的解?

从数学逻辑上看, 已知多元一次方程, 有 m 个约束方程, 有 n 个未知数, 假定 $m \leq n$ 。

当 $m < n$ 时, 就代表有更多的未知变量不能被方程约束, 从而有 $n - m$ 个自由变量, 所以就是无数解, 解组中其他解可以由自由变量来表示。

当 $m = n$ 时代表约束与变量数量相等, 此时又要分三种情况。

当所有的约束条件其中存在线性相关, 即一部分约束条件可以由其他约束表示, 则代表这部分约束条件是没用的, 实际上的约束条件变少, 从而情况等于 $m < n$, 结果是无数解。

当所有的约束条件不存在线性相关, 但是一部分约束条件互相矛盾, 则约束条件下就无法解出解, 从而结果是无数解。

当所有的约束条件不存在线性相关, 且相互之间不存在矛盾情况, 这时候才会解出一个实数解, 从而结果是有唯一实解。

若使用矩阵来解决线性方程组的问题, 其系数矩阵 $A_{m \times n}$ 。

对于 $A \neq O$, 则 $AX = b$, 若存在一个矩阵 $B_{n \times n}$ 类似 $\frac{1}{a}$, 使得 $BAX = Bb$, 解得 $EX = X = Bb$, 这个 B 就是 A 的逆矩阵。

对于 $A = O$ 即不可逆，需要判断 b 是否为 0，若不是则无实数解，若是则无穷解，这种判断需要用到增广矩阵，需要用到矩阵的秩判断。

4 逆矩阵

逆矩阵类比倒数，若对于 n 阶矩阵 A ，有一个 n 阶矩阵 B ，使得 $AB = BA = E$ ，则 A 可逆， B 是 A 的逆矩阵也称为逆阵，且逆矩阵唯一，记为 $B = A^{-1}$ 。