随机变量数字特征

Didnelpsun

目录

1　一维随机变量数字特征

1.1　数学期望

1.1.1　离散型随机变量

可以根据随机变量分布律的形式拟合出已知的离散型随机变量分布，从而得到已知的期望。

例题：设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k k!(\sqrt{e}-1)}$，$k=1,2,\cdots$，求 EX。

解：查看分布律中含有 $k!$ 的形式，所以可以考虑转换为泊松分布。泊松分布的标准形式是 $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$。

$P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k k!(\sqrt{e}-1)}=\dfrac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}e^{-\frac{1}{2}}$，$X\sim\dfrac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}P\left(\dfrac{1}{2}\right)$。

$\therefore EX=\dfrac{\sqrt{e}}{2\sqrt{e}-2}$。

1.1.2　连续型随机变量

例题：连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$（$-\infty<x<+\infty$），求 EX。

解：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}=\dfrac{1}{2pi}\ln(^1+x^2)|_{-\infty}^{+\infty}$。发散，所以不存在。

1.1.3　连续型随机变量函数

例题：连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$（$-\infty<x<+\infty$），求 $E(\min\{|X|,1\})$。

解：$E(\min\{|X|,1\})=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{|x|,1\}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\min\{x,1\}$
$\displaystyle\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^1 x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_1^{+\infty}1\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)|_0^1+\frac{2}{\pi}\arctan x|_1^{+\infty}$
$=\dfrac{1}{\pi}\ln 2+\dfrac{1}{2}$。

1.2 方差

1.2.1 方差关系

例题：相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 具有相同的方差 $\sigma^2 > 0$，设 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，求 $D(X_1 - \overline{X})$。

解：由题已知 $DX_i = \sigma_2$。

$D(X_1 - \overline{X}) = D\left(X_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = D\left(\frac{n-1}{n}X_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} X_i\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 DX_1 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=2}^{n} DX_i = \frac{n^2-2n+1}{n^2}\sigma^2 + \frac{n-1}{n^2}\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$。

1.2.2 期望关系

例题：已知随机变量 X_1，X_2 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$（$\sigma > 0$），求 $D(X_1X_2)$。

解：X_1，X_2 服从 $N(\mu, \sigma^2)$，则 $EX_1 = EX_2 = \mu$。

$D(X_1X_2) = E[(X_1X_2)^2] - [E(X_1X_2)]^2 = E(X_1^2X_2^2) - (EX_1EX_2)^2$。

若 X_1，X_2 相互独立则 X_1^2，X_2^2 相互独立，则 $= EX_1^2EX_2^2 - \mu^4$。

又 $EX_1^2 = EX_2^2 = DX_1 + (EX_1)^2 = DX_2 + (EX_2)^2 = \sigma^2 + \mu^2$。

$(\sigma^2 + \mu^2)^2 - \mu^4 = \sigma^4 + 2\sigma^2\mu^2$。

1.3 切比雪夫不等式

$P\{|X - EX| \leqslant \epsilon\} \leqslant \frac{DX}{\epsilon^2}$ 或 $P\{|X - EX| < \epsilon\} \geqslant 1 - \frac{DX}{\epsilon^2}$。

2 二维随机变量数字特征

2.1 协方差

$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$。

例题：设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，且方差 $\sigma^2 > 0$，$Y_1 = \sum_{i=2}^{n} X_i$ 和 $Y_2 = \sum_{j=1}^{n-1} X_j$，求 Y_1 和 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1, Y_n)$。

解：$\because Y_1 = \sum_{i=2}^{n} X_i$，$Y_2 = \sum_{j=1}^{n-1} X_j$，$DX_i = \sigma^2$。

3 独立性与相关性

独立范围小于不相关范围。所以我们一般先用数字特征判断相关性再用分布判断独立性。

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY\begin{cases}\neq 0\Leftrightarrow XY\text{相关}\Rightarrow X\text{与}Y\text{不独立}\\ =0\Leftrightarrow XY\text{不相关，分布}\begin{cases}XY\text{独立}\\ XY\text{不独立}\end{cases}\end{cases}$$

且如果服从二维正态分布，则 XY 独立与不相关等价。

3.1 独立性

通过分布来确定独立性。如独立条件是 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$。

3.2 相关性

通过数字特征来判断相关性。如不相关性条件是 $\rho_{XY}=0$、$Cov(X,Y)=0$、$E(XY)=EXEY$、$D(X\pm Y)=DX+DY$。

4 切比雪夫不等式

切比雪夫不等式用于估算随机变量在区间的概率，证明收敛性问题。

4.1 区间概率

常用变式 $P\{|Z-EZ|\geqslant\epsilon\}\leqslant\dfrac{DZ}{\epsilon^2}$ 或 $P\{|Z-EZ|<\epsilon\}\geqslant 1-\dfrac{DZ}{\epsilon^2}$，$Z=f(X)$。

例题：已知随机变量 XY，$EX=EY=2$、$DX=1$、$DY=4$，$\rho_{XY}=0.5$，估计概率 $P\{|X-Y|\geqslant 6\}$。

解：已知 $\rho_{XY}=0.5=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{Cov(X,Y)}{2}$，$Cov(X,Y)=1=E(XY)-EXEY$，$E(XY)=5$。

令 $X-Y=Z$，$EZ=EX-EY=0$，$DZ=DX+DY-2Cov(X,Y)=1+4-2=3$。

取 $\epsilon=6$，由切比雪夫不等式得 $P\{|X-Y|\geqslant 6\}=P\{|Z-0|\geqslant 6\}\leqslant\dfrac{DZ}{\epsilon^2}=\dfrac{3}{6^2}=\dfrac{1}{12}$。