

多元函数积分学

Didnelpsun

目录

1	二重积分	1
1.1	交换积分次序	1
1.1.1	直角坐标系	1
1.1.2	极坐标系	1
1.2	极直互化	2
1.3	二重积分计算	2
1.3.1	交换积分次序	2
1.3.2	积分性质	2
1.3.3	切分区域	3
1.3.4	坐标轴移动	3
1.4	二重积分等式	4
1.4.1	函数	4
1.4.2	极限	4
1.4.3	求导	5
1.5	二重积分不等式	5
1.5.1	同积分域	5
1.5.2	同积分函数	5
1.6	一重积分化二重积分	5
1.6.1	乘积化不等式	6
1.6.2	乘积简化计算	6
2	弧长曲线积分	7

3	坐标曲线积分	7
3.1	定积分法	7
3.2	二重积分法	7
3.2.1	补全区域	7
3.2.2	不可导点	7

1 二重积分

1.1 交换积分次序

1.1.1 直角坐标系

例题：交换积分次序 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy$ 。

解：已知积分区域分为两个部分。将 X 型变为 Y 型。画出图形可以知道 $y \in (0, 1)$, x 的上下限由 $y = x^2$ 和 $y = \frac{1}{2}(3 - x)$ 转化为 \sqrt{y} 和 $3 - 2y$ 。

所以转换为 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$ 。

1.1.2 极坐标系

例题：对 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 交换积分次序。

解：对于极坐标的积分次序交换需要利用直角坐标系来画图了解，特别是对 r 的上下限。

对 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 变为 y 轴, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 变为 $y = -x$ 。

对 $r = 2 \cos \theta$ 变为 xy 的表达式, $r^2 = 2 \cos \theta$, 即 $x^2 + y^2 = 2x, (x-1)^2 + y^2 = 1$ 。

所以所得到的 σ 为一个圆割去一个扇形。

交换积分次序后就需要以一个长度以极点为圆心做圆, 切割 σ 。

由 σ 可知取长度 $\sqrt{2}$ 可以切分。

所以 σ 可以分为左边的 σ_1 和右边的 σ_2 。

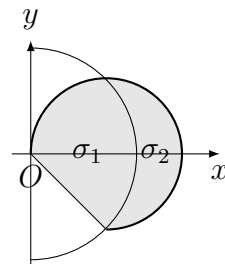
σ_1 的 $r \in [0, \sqrt{2}]$, σ_2 的 $r \in [\sqrt{2}, 2]$ 。

σ_1 的 θ 下限是 $y = -x$ 这条边, 即 $\theta = -\frac{\pi}{4}$, 上限是 $r = 2 \cos \theta$ 这个圆, 则 $\theta = \arccos \frac{r}{2}$ 。

σ_2 的 θ 界限都是 $r = 2 \cos \theta$ 这个圆, 此时 $r > 0$ 恒成立, 但是上限是上半部分 $\theta > 0$, 而下限是下半部分 $\theta < 0$, 即上限 $\theta = \arccos \frac{r}{2}$, 所以下限为 $\theta = -\arccos \frac{r}{2}$ 。

综上交换积分次序结果为:

$$\int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{r}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta + \int_{\sqrt{2}}^2 r dr \int_{-\arccos \frac{r}{2}}^{\arccos \frac{r}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta。$$



1.2 极直互化

例题：将 $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R} e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-x^2} dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^R e^{-y^2} dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-x^2} dx$ 转换为极坐标系并计算结果。

解：首先根据积分上下限得到积分区域 $D = \left\{ 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}R, 0 \leq x \leq y \right\} \cup \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}R \leq y \leq R, 0 \leq x \leq \sqrt{R^2-y^2} \right\}$, D 为一个八分之一圆的扇形。

根据 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 替换得到 $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq r \leq R, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ 。

又 $e^{-y^2} \cdot e^{-x^2} = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$ 。

$$\therefore I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr。$$

1.3 二重积分计算

二重积分若是累次积分形式出现，则计算可以使用上面两种方法简便运算。

1.3.1 交换积分次序

主要用于直角坐标系。

当按照当前的积分次序无法算出时需要更换积分次序。主要是看 $f(x, y)$ 是对 x 先积分更简单还是对 y 先积分更简单。

例题：求 $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \cos^2 x dx$ 。

解：首先直接对这个式子直接计算， $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ ，原式 $= \frac{1}{2} \int_0^1 (\pi - 2y - \arcsin y) dy$ 。根本无法解出。

考虑交换积分次序，首先求 σ , $y \in [0, 1]$, $x \in [\arcsin y, \pi - \arcsin y]$ ，则 $\sin x = y$, $y = \sin(\pi - x) = \sin x$ 即 $x \in [0, \sin x]$ 。

将积分区域换成 X 型： $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, \sin x]$ 。

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2 x dx \int_0^{\sin x} dy &= \int_0^\pi \cos^2 x \sin x dx = - \int_0^\pi \cos^2 x d(\cos x) = - \frac{\cos^3 x}{3} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{3}。 \end{aligned}$$

1.3.2 积分性质

直角坐标系和极坐标系都可以使用。

若积分区域 σ 关于 $x = k_1$ 或 $y = k_2$ 对称，则当 $f(x, y)$ 含有 $x - k_1$ 或 $y - k_2$ 因式时重积分值为 0。

例题： 设 $D: x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$, 求 $\iint_D xy \, dx dy$ 。

解： 本题目使用直角坐标系和极坐标系都不好做。所以需要利用积分性质，对 D 进行平移等操作。

利用平移，由于 $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$, 令 $x = 1 + r \cos \theta$, $y = 1 + r \sin \theta$, 则利用极坐标, $r \in [0, \sqrt{2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} ((1+r \cos \theta)(1+r \sin \theta)r) dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (1+r \sin \theta + r \cos \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta)r dr$, 又将 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 对 θ 在 $[0, 2\pi]$ 进行积分全部为 0, 所以直接把后面的全消掉, 变为 $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr = 2\pi$ 。

1.3.3 切分区域

主要用于直角坐标系转为极坐标系。

将不规则的区域划分为圆域。

例题： 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 求 $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 。

解： 由 $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 知道可以使用极坐标系来表示, 但是 D 是一个正方形, 无法用圆来简单表示。

又 D 可以从 $y = x$ 切割为两个部分, 所以令下三角形为 D_1 , $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \iint_{D_1} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 。

所以 $0 \leq y$ 和 $y = x$ 可以确定 $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $0 \leq x \leq 1$ 可以确定 r 上界为 $x = 1$, 即 $r \cos \theta = 1$, 即 $r = \frac{1}{\cos \theta}$, 确定 $r \in [0, \frac{1}{\cos \theta}]$ 。

所以 $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos \theta} = 2 \ln(\sec \theta + \tan \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \ln(1 + \sqrt{2})$ 。

即对二重积分求导, 需要将二重积分化为一重积分。

1.3.4 坐标轴移动

主要用于直角坐标系转为极坐标系。

面对 D 为一个圆的部分区域, 而圆心不在原点, 则可以坐标轴移动让圆心到原点上, 从而方便积分, 本质就是换元。

例题： 设积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x + 2y\}$, 求 $\iint_D (x^2 + xy + y^2) d\sigma$ 。

解： D 为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq \sqrt{2}$, 即圆心在 $(1, 1)$ 的圆, 极坐标系无法表示, 所以必须平移坐标轴。

令 $x-1 = u$, $y-1 = v$, $x = u+1$, $y = v+1$, 此时 $D' = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 2\}$ 。

$$\iint_D (x^2 + xy + y^2) d\sigma = \iint_{D'} [(u+1)^2 + (u+1)(v+1) + (v+1)^2] dudv = \iint_{D'} [u^2 + uv + v^2 + 3(u+v) + 3] dudv = \iint_{D'} (u^2 + v^2) dudv + \iint_{D'} [uv + 3(u+v)] dudv + 3 \iint_{D'} dudv.$$

由于 $uv + 3(u+v)$ 是关于 u 或 v 的奇函数, 且 D' 关于 uv 轴都对称, 所以积分值为 0。且根据二重积分的几何意义 $\iint_{D'} dudv = S_{D'} = 2\pi$ 。

$$\text{所以 } \iint_D (x^2 + xy + y^2) d\sigma = \iint_{D'} (u^2 + v^2) dudv + 6\pi.$$

转换为极坐标系, $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$, 则 $D' = \{(r, \theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$ 。

$$\iint_{D'} (u^2 + v^2) dudv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr = \frac{\pi}{2} (\sqrt{2})^4 = 2\pi.$$

$$\text{所以原式} = 2\pi + 6\pi = 8\pi.$$

1.4 二重积分等式

1.4.1 函数

例题: 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 且 $f(x, y) = \frac{1}{\pi} \sqrt{x^2 + y^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} f(x, y) d\sigma + y^2$, 求 $f(x, y)$ 。

解: $\because f(x, y)$ 为连续函数, 所以其在区间上可积且是一个常数。

令 $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} f(x, y) d\sigma = A$ 。对 $f(x, y) = \frac{A}{\pi} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2$ 两边积分:

$$A = \frac{A}{\pi} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma + \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} y^2 d\sigma, \text{ 令 } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta:$$

$$A = \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr + \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{2A}{3} + \frac{\pi}{4}. A = \frac{3}{4}\pi.$$

$$\text{则代入原式 } f(x, y) = \frac{3}{4} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2.$$

1.4.2 极限

例题: 设 $g(x)$ 有连续的导数, 且 $g(0) = 0$, $g'(0) = a \neq 0$, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的某邻域内连续, 求 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy}{g(r^2)}$ 。

解: 已知对于这个积分式子中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是未定式, 不可能求出具体的值, 所以不能再二重积分直接计算。

面对这种未定式我们希望把这个式子变成我们已知的式子, 也应该与 r 相关。此时我们可以想到二重积分中值定理。

根据二重积分中值定理 $\iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy = \pi r^2 f(\xi, \eta)$, 其中 (ξ, η) 为圆域 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 上的点, 所以 $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(\xi, \eta) = f(0, 0)$ 。

$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\pi r^2 f(\xi, \eta)}{g(r^2)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\pi f(0, 0) 2r}{2r g'(r^2)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\pi f(0, 0)}{g'(r^2)} = \frac{\pi f(0, 0)}{g'(0)} = \frac{\pi f(0, 0)}{a}.$$

1.4.3 求导

1.5 二重积分不等式

即对二重积分进行对比。

1.5.1 同积分域

同一积分域上二重积分大小的比较，只要比较在该区间被积函数值的大小。

1.5.2 同积分函数

同一积分函数上二重积分大小的比较，要比较函数域的大小，也要注意在函数域上被积函数的符号。

例题：设积分区域 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 、 $D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$ 、 $D_3 = \left\{(x, y) | \frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ 、 $D_4 = \left\{(x, y) | x^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq 1\right\}$ 。

记 $I_i = \iint_{D_i} \left[1 - \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)\right] d\sigma$ ($i = 1, 2, 3, 4$)，求 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ 。

解：已知 D_1 、 D_2 分别为半径 1 和 $\sqrt{2}$ 的圆，而 D_3 、 D_4 分别为横着和竖着的椭圆。可以画出图像。

被积函数 $f(x, y) = 1 - \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)$ 为连续函数，只有在 D_4 上才能保证完全为正，以外的地方为负值。

所以 $D_1 \subset D_4$ ，所以 $I_1 < I_4$ 。对于 D_2 更大， $D_4 \subset D_2$ ，但是多余的左右部分是负值，积分值会在 D_4 的基础上减去这部分的价值，同理 D_3 和 D_4 一个是横的椭圆一个是竖的椭圆，其积分值只有中间交叉的部分，还要减去两边多余的部分。

所以 I_4 最大。

1.6 一重积分化二重积分

对于一重积分的计算或证明可能比较有难度，如两个关于 x 的函数的一重积分乘积计算，可以将其中一个 x 当作 y ，从而将一重积分的乘积变为二重积分。

1.6.1 乘积化不等式

例题： $f(x)$ 为恒大于 0 的连续函数，证明 $\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$ 。

解：首先观察这个式子，右边是积分上下限的差的乘积，左边是两个积分的乘积，看上去貌似没什么关系，而且积分式子给出的的是一个未定式 $f(x)$ ，所以不能直接求左边值再比较大小，他们之间一定存在着某种关系。

式子左边的两个函数互为倒数，所以应该要尝试将这两个式子乘在一起利用基本不等式计算，即将一重积分乘积变为二重积分。

对于一重积分而言只是一个自变量，对于二重积分而言就变成了两个自变量，需要令其中一个 $f(x)$ 变为 y ，所以 xy 的积分区域都是一样的 $[a, b]$ ，所以设 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ 。

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(y)} dy = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)} dx dy. \\ I &= \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \int_a^b f(y) dy \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)} dx dy. \\ \therefore I &= \frac{1}{2} \left[\iint_D \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right] dx dy \right] \geq \frac{1}{2} \iint_D 2 \sqrt{\frac{f(x)}{f(y)} \cdot \frac{f(y)}{f(x)}} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D 2 dx dy = (b-a)^2. \end{aligned}$$

1.6.2 乘积简化计算

例题：求 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 。

解：对于这个一重积分首先看到 e^{x^2} ，肯定会想到将其幂次降低。使用分部积分法对 e^{x^2} 求导这个幂次不会降低，使用换元法 $x = \sqrt{t}$ 会得到 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 从而无法处理，所以这些都不能计算，那么该怎么办？

看到 x^2 就能想到 $x^2 + y^2$ 的形式，这样就是一个极坐标系的二重积分，所以尝试将一重积分变成二重积分，即再乘一个以 y 为自变量的原式。

设 $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ ，显然 $I > 0$ ，将 x 换成 y ：

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq +\infty \\ 0 \leq y \leq +\infty}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \text{ 令 } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta: \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^{+\infty} e^{-r^2} d(-r^2) = -\frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. \\ \therefore I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

2 弧长曲线积分

3 坐标曲线积分

3.1 定积分法

3.2 二重积分法

3.2.1 补全区域

即 L 不能构成一个完整的域, 就需要按照路径对区域进行补全, 然后减去这个曲线积分值。

3.2.2 不可导点

即 D 中存在不可导的点, 需要以不可导点为圆心做圆对 D 进行切割。

例题: $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, L 为不过原点的闭曲线。

解: $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$, 从而 $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$. 但是此时 $(x, y) \neq (0, 0)$, 所以格林公式无法使用。

若 $(0, 0) \notin D$, 则可以使用格林公式, $I = \iint_D 0 d\sigma = 0$.

若 $(0, 0) \in D$, 不可以使用格林公式, 所以重新对 D 进行划分, 令 $L_0: x^2 + y^2 = r^2$, 其中 $r > 0$ 且 L_0 不超过 D , L_0 为逆时针。中间的环为 D_1 , 最里侧的圆为 D_2 。

所以对中间的环 D_1 使用格林公式: $\oint_{L+L_0^-} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0$ 。

$\therefore \oint_L + \oint_{L_0^-} = \oint_L - \oint_{L_0} = 0$, $\oint_L = \oint_{L_0}$ 。

$$I = \oint_{L_0} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r^2} \oint_{L_0} x dy - y dx = \frac{2}{r^2} \iint_{D_2} d\sigma = 2\pi。$$

例题: 计算曲线积分 $\oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以点 $(1, 0)$ 为圆心, $R \geq 1$ 为半径的圆, 取逆时针方向。

解: 由于是逆时针在 L 上, 所以是正向: $= \oint_{L^+} \left(\frac{-y}{4x^2 + y^2} dx + \frac{x}{4x^2 + y^2} dy \right)$ 。

又对于 L 所围成的圆面 D , 因为 $4x^2 + y^2 \neq 0$, 所以 $(0, 0)$ 应该被挖去。

因为逆时针的方向下挖去这个点做的运动顺时针是负方向的, 所以令其为 C^- 。

又因为格林公式 $\oint_{L^++C^-} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma =$

$$\iint_D \left(\frac{4x^2 + y^2 - 3x^2}{(4x^2 + y^2)^2} - \frac{-(4x^2 + y^2) + 2y^2}{(4x^2 + y^2)^2} \right) d\sigma = 0. \text{ 旋度为 } 0.$$

$= \oint_{L^++C^-} - \oint_{C^-} = 0 - \oint_{C^-} = \oint_{C^+}$ 。取 $C: 4x^2 + y^2 = \delta^2$, δ 为一个足够小的常数。(分母取 δ^2)

$$= \oint_{C^+} \left(\frac{-y}{4x^2 + y^2} dx + \frac{x}{4x^2 + y^2} dy \right) = \oint_{C^+} \left(\frac{-y}{\delta^2} dx + \frac{x}{\delta^2} dy \right)$$

$$= \frac{1}{\delta^2} \oint_{C^+} -y dx + x dy, \text{ 利用格林公式, } C^+ \text{ 所成区域为 } D': \frac{1}{\delta^2} \oint_{D'} (1 - (-1)) d\sigma =$$

$$\frac{2}{\delta^2} D' = \frac{2}{\delta^2} \pi \frac{\delta}{2} \delta = \pi.$$