

向量代数与空间解析几何

Didnelpsun

目录

1	空间解析几何	1
1.1	平面方程	1
1.2	直线方程	1
1.3	位置关系	1
1.4	空间曲线	1
1.5	空间曲面	1
2	场论初步	1
2.1	方向导数	1
2.2	梯度	1
2.3	散度与旋度	1

1 空间解析几何

1.1 平面方程

1.2 直线方程

1.3 位置关系

1.4 空间曲线

1.4.1 投影

1.5 空间曲面

2 场论初步

2.1 方向导数

2.2 梯度

2.3 散度与旋度

直接代入公式。

例题：计算向量场 $u(x, y, z) = xy^2\vec{i} + ye^x\vec{j} + x\ln(1+z^2)\vec{k}$ 在点 $P(1, 1, 0)$ 的散度和旋度。

解：所以 $u(x, y, z) = (P, Q, R)$, $P = xy^2$, $Q = ye^x$, $R = x\ln(1+z^2)$ 。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = e^x, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2zx}{1+z^2}.$$

代入 $P(1, 1, 0)$, 得到散度 $\operatorname{div} \vec{u} = 1 + e$ 。

$$\begin{aligned} \text{旋度 } \vec{\operatorname{rot}} \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & ye^x & x\ln(1+z^2) \end{vmatrix} = \frac{\partial x\ln(1+z^2)}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial xy^2}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial ye^x}{\partial x}\vec{k} - \\ &\quad \frac{\partial xy^2}{\partial y}\vec{k} - \frac{\partial ye^x}{\partial z}\vec{i} - \frac{\partial x\ln(1+z^2)}{\partial x}\vec{j} = 0 + 0 + ye^x\vec{k} - 2xy\vec{k} - 0 - \ln(1+z^2)\vec{j} = \\ &\quad -\ln(1+z^2)\vec{j} + (ye^x - 2xy)\vec{k} = (0, 0, e - 2). \end{aligned}$$