随机事件与概率

Didnelpsun

目录

1 基本概念

1.1 随机试验

定义：满足三个条件的就是随机试验：

1. 试验可以在相同的条件下重复进行。
2. 试验所以可能结果都是明确可知，且不止一个。
3. 每次试验的结果事先不确定。

随机试验也称为**试验**，并用 $E_1, E_2, \cdots$ 来表示。

1.2 随机事件

定义：一次试验中可能出现也可能补出现的结果称为**随机事件**，简称**事件**，并用大写字母 $A, B, \cdots$ 来表示。

必然事件定义：每次试验中一定发生的事件，记为 Ω。

不可能事件定义：每次试验中一定不发生的事件，记为 $\varnothing$。

1.3 样本空间

随机试验的每一个不可再分的可能结果称为**样本点**，记为 ω，样本点的全体组成的集合称为**样本空间**或**基本事件空间**，记为 Ω，即 $\Omega = \{\omega\}$。

由一个样本点构成的事件称为**基本事件**。

随机事件 A 总是由若干个基本事件构成，即 A 是 Ω 的子集。

样本点的个数就是基本事件的个数。

2 事件

2.1 关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A（或 A 被 B 包含），记为 $A \subset B$。

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 AB **相等**，记为 $A = B$，AB 是由完全相同的一些试验结果构成，是同一事件表面上看来两个不同说法。

若事件在事件 A 与 B 同时发生，则称为事件 A 与 B 的**积或交**，记为 $A \cap B$ 或 AB。

有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生的事件为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积或交，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$。

若 $AB \neq \varnothing$，则称事件 AB **相容**，否则**互不相容**或**互斥**。如果一些事件中任意两个事件都互斥，则这些事件**两两互斥**，简称互斥。

事件 AB 至少有一个发生的事件称为事件 AB 的**和或并**，记为 $A \cup B$。

有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生的事件为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和或并，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$。

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件为事件 AB 的**差**，记为 $A - B$。

事件 A 不发生的事件为事件 A 的**逆事件**或**对立事件**，记为 $\overline{A}$。

若 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$，$A_i A_j = \varnothing$（对一切的 $i \neq j$，$i, j = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$），则称有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个**完备事件组**。

2.2 运算

定义可知：$A - B = A - AB = A\overline{B}$，$B = \overline{A}$ 等价于 $AB = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$。

1. 吸收律：若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$，$A \cap B = A$。

2. 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$。

3. 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。

4. 分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$。

5. 对偶律（德 • 摩根律）：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。（长杠变短杠，开口换方向）

例题：判断 $A - (B - C) = (A - B) \cup C$ 是否成立。

解：$\because A - B = A\overline{B}$，$\therefore A - (B - C) = A - B\overline{C} = A\overline{B\overline{C}} = A(\overline{B} \cup C) = A\overline{B} \cup AC = (A - B) \cup AC \neq (A - B) \cup C$。

3 概率

3.1 定义

- 描述性定义：将随机事件 A 发生的可能性大小的度量（非负）称为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$。
- 统计性定义：在相同条件下做重复试验，事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 之比 $\frac{k}{n}$，称为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**，当 n 充分大时，频率将稳定与某常数 p 附近，n 越大频率偏离这个常数 p 的可能性越小，这个常数 p 就是事件 A 的概率。

3.2 概率模型

3.2.1 古典概型

3.2.2 几何概型

3.3 性质

3.4 公式

4 独立性