# 向量代数与空间解析几何

Didnelpsun

## 目录

该部分的内容服务于后面的多元函数积分学。

# 1 向量代数

## 1.1 向量及其表达形式

定义：既有方向又有大小的向量称为**向量**。

向量的相等性体现在大小和方向，与空间位置无关。

向量表达形式为 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$。

## 1.2 向量运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均不是零向量。

### 1.2.1 数量积

称为内积或点积。

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x,a_y,a_z)\cdot(b_x,b_y,b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$。
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$，其中 $\theta$ 为 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角。
- $a\perp b\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow a\cdot b=|a||b|\cos\theta=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$。
- $Prj_ba=\dfrac{a\cdot b}{|b|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$ 称 $a$ 在 $b$ 上的**投影**。

### 1.2.2 向量积

也称为外积、叉积。

- $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$，其中 $|a\times b|=|a||b|\sin\theta$，用右手规则确定方向（转向角不超过 $\pi$），其中 $\theta$ 为 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角。
- $a//b\Leftrightarrow\theta=0$ 或 $\pi\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$。

向量积的计算也可以如此理解，将两个向量上下摆在一起，然后右边再复制一份：
$\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z & a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$，向量积的第一个值就是 2、3 列的行列式值，第二个值就是 3、4 列的行列式值，第三个值就是 4、5 列行列式值，第 1 和第 6 列不用。

#### 1.2.3 混合积

- $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$。
- $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ 三向量共面。

### 1.3 向量方向角与方向余项

- $\vec{a}$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴正向的夹角 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为 $\vec{a}$ 的**方向角**。
- $\cos\alpha$,$\cos\beta$,$\cos\gamma$ 称为 $\vec{a}$ 的**方向余弦**,且 $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$,$\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$,$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$。
- $a^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 称为向量 $\vec{a}$ 的**单位向量**（表示方向的向量）。
- 任意向量 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (r\cos\alpha, r\cos\beta, r\cos\gamma) = r(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为 $\vec{r}$ 的方向余弦，$r$ 为 $\vec{r}$ 的模，$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

# 2 空间解析几何

## 2.1 平面方程

假设平面的法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$。

- 一般式：$Ax + By + Cz + D = 0$。
- 点法式：$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$。

- 三点式：$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$（平面过不共线的三点）。
- 截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$（平面过 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$ 三点）。

## 2.2 直线方程

假设直线的方向向量 $\vec{\tau}=(l,m,n)$。

- 一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2) \end{cases}$，其中 $\vec{n}_1$ 不平行于 $\vec{n}_2$。（两个平面的交线，该直线方向向量 $\vec{\tau}=n_1\times n_2$）
- 点向式（标准式、对称式）：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$。（直线上一点与方向向量成比例）
- 参数式：$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$，$M(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上已知点，$t$ 为参数。
- 两点式：$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$。（直线过不同的两点）

## 2.3 位置关系

### 2.3.1 直线关系

设 $\vec{\tau}_1=(l_1,m_1,n_1)$，$\vec{\tau}_2=(l_2,m_2,n_2)$ 分别为直线 $L_1$，$L_2$ 的方向向量。

- $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \vec{\tau}_1\perp\vec{\tau}_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$。
- $L_1//L_2 \Leftrightarrow \vec{\tau}_1//\vec{\tau}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$。

### 2.3.2 平面关系

设平面 $\pi_1$，$\pi_2$ 的法向量分别为 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$。

- $\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\perp\vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$。
- $\pi_1//\pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1//\vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$。

### 2.3.3 直线与平面关系

设直线 $L$ 的方向向量为 $\tau=(l,m,n)$，平面 $\vec{\tau}$ 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$。

- $L\perp\pi \Leftrightarrow \vec{\tau}//\vec{n} \Leftrightarrow \dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$。
- $L//\pi \Leftrightarrow \vec{\tau}\perp\vec{n} \Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$。

### 2.3.4 距离

距离公式：

- 二维点到直线距离：点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。
- 三维点到平面距离：点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。
- 二维平行直线到直线距离：直线 $Ax+By+C_1=0$ 到直线 $Ax+By+C_2=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。
- 二维非平行直线到直线夹角：直线 $A_1x+B_2y+C_1=0$ 到直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的夹角为 $\cos\theta=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$（$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$）。
- 三维平行平面到平面距离：平面 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 到平面 $Ax+By+Cz+D_2=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。（在另一个面上任取一点计算该点到平面距离）

三维点到直线距离：（已知直线 $L$ 一般式方程和点 $M_1$）

1. 根据 $L$ 一般式方程依次求一阶导得出两个面的法向量 $\vec{\xi_1}$、$\vec{\xi_2}$。
2. 使用向量积得出 $L$ 方向向量 $\vec{S}=\vec{\xi_1}\times\vec{\xi_2}$。
3. 在 $L$ 上任意找到一点 $M_0$，计算向量 $\overrightarrow{M_0M_1}$，计算向量积 $\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{S}$，取其模 $|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{S}|$，这个模即为三点所成三角形面积的两倍 $2S_{\triangle M_0M_1S}$。
4. 求出方向向量 $\vec{S}$ 的模，所以 $\vec{M_1}$ 到 $\vec{S}$ 的距离 $d$ 可以化为两倍三角形面积 $2S_{\triangle M_0M_1S}=d\cdot|\vec{S}|$。
5. 所以 $|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{S}|=d\cdot|\vec{S}|$，解得 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{S}|}{|\vec{S}|}$。

## 2.4 空间曲线

空间曲线某点的切线向量等于该点代入各自导数。

### 2.4.1 表达式

- 一般式：$\mathit{\Gamma}:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，表示两个曲面的交线。
- 参数方程：$\mathit{\Gamma}:\begin{cases}x=\phi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$，$t\in[\alpha,\beta]$。

### 2.4.2 空间曲线在坐标面投影

如求曲线 $\mathit{\Omega}$ 在 $xOy$ 平面上的投影曲线，讲 $\mathit{\Gamma}:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中的 $z$ 消去，得到 $\varphi(x,y)=0$，则曲线 $\mathit{\Omega}$ 在 $xOy$ 面上的投影曲线包含于 $\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\z=0\end{cases}$。

## 2.5 空间曲面

### 2.5.1 曲面方程

隐式表达式：$F(x,y,z)=0$，显式表达式：$z=z(x,y)$。

### 2.5.2 二次曲面

- 球面：$x^2+y^2+z^2=r^2$。
- 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。
- 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。
- 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$。
- 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$（$p,q>0$）。（常考旋转抛物面 $x^2+y^2=z$）
- 椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$。（常考旋转锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$）
- 双曲抛物面（马鞍面）：$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$（$p,q>0$）。（可能考 $z=xy$）

### 2.5.3 柱面

空间解析几何中一般认为缺少变量的方程为柱面。

是动直线沿定曲线平行移动所形成的曲面。

- 椭圆柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（当 $a=b$ 为圆柱面）。
- 双曲柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$。
- 抛物柱面：$y=ax^2$。

### 2.5.4 旋转曲面

绕某轴转，其就不变，把另外一个字母写成另外两个字母的平方和的开方。

如 $f(x,y)=0$ 对 $x$ 旋转，则改为 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})$。

是曲线 $\mathit{\Gamma}$ 绕一条定直线旋转一周所形成的曲面。

给定一条直线 $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$，其方向向量为 $\vec{\tau}(l,m,n)$，上有一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$。

现在给定一条曲线 $\mathit{\Gamma}:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$。

在 $\mathit{\Gamma}$ 上找一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，然后再讲 $P_1$ 绕 $L$ 旋转一周得到一个纬圆，去纬圆上一点 $P(x,y,z)$，则 $P$ 为旋转曲面上任意一点。

因为 $P_1$ 在曲线 $\mathit{\Gamma}$ 上，所以 $F(x_1,y_1,z_1)=0$，$G(x_1,y_1,z_1)=0$。

同一个纬圆到 $L$ 上的 $P_0$ 距离相等，既 $|\overrightarrow{P_1P_0}|=|\overrightarrow{PP_0}|$，即 $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$。

每一个纬圆的平面与旋转中心 $L$ 的方向向量 $\vec{\tau}$ 垂直，而 $P_1P$ 在平面上，所以该连线向量 $\overrightarrow{P_1P}\perp\vec{\tau}$，即 $l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$。

为了得到旋转曲面面积，需要消去 $x_1,y_1,z_1$，得到 $H(x,y,z)=0$。

**例题：**求曲线 $L:\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转一周所形成的曲面方程。

解：令 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 在曲线上，所以 $x_1-y_1+2z_1-1=0$，$x_1-3y_1-2z_1+1=0$。

然后任意一点 $P(x,y,z)$ 到 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的距离与 $P_1$ 到 $P_0$ 距离相同，取 $P_0(0,0,0)$，则 $x_1^2+y_1^2+z_1^2=x^2+y^2+z^2$。

两条连线垂直 $y$ 轴，即 $\overrightarrow{P_1P}\perp(0,1,0)$，即 $y=y_1$。

消去 $x_1,y_1,z_1$，根据 $y=y_1$，所以 $x_1^2+z_1^2=x^2+z^2$。

根据交线方程解得 $x_1=2y$，$z_1=\frac{1}{2}(1-y)$。

再代入得到 $x^2+z^2=(2y)^2+\frac{1}{4}(1-y)^2$，解得 $x^2-\frac{17}{4}y^2+z^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}=0$。

# 3 场论初步

## 3.1 方向导数

偏导数就是一个函数在坐标轴方向上的变化率，而方向导数就是函数在某点沿其他特定方向上的变化率。

定义：设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某空间领域 $U\in R^3$ 内有定义，$l$ 从点 $P_0$ 出发的射线，$P(x,y,z)$ 为 $l$ 上切在 $U$ 内的任一点，则 $\begin{cases} x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha \\ y-y_0=\Delta y=t\cos\beta \\ z-z_0=\Delta z=t\cos\gamma \end{cases}$ 进行在坐标轴上投影。

以 $t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ 表示 $P$ 与 $P_0$ 之间的距离。若极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$ 存在，则称此极限为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0$ 沿方向 $l$ 的**方向导数**，记为 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}$。

方向导数计算公式定理：设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微分，则 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0$ 处沿任一方向 $l$ 的方向导数都存在，且 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=u'_x(P_0)\cos\alpha+u'_y(P_0)\cos\beta+u'_z(P_0)\cos\gamma$，其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为方向 $l$ 的方向余弦。

**例题**：求函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿点 $P(1,0)$ 指向 $Q(2,-1)$ 方向的方向导数。

解：这是一个隐式的三元函数，所以基本上解决方法类似。不过需要将 $z$ 对 $xy$ 求偏导。

$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2xe^{2y}$，代入 $P(1,0)$，得到 $\{1,2\}$。

然后求方向余弦，对于 $\overrightarrow{PQ}=(1,-1)$ 方向余弦就是除它的模 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$。

方向导数就是点乘：$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

## 3.2 梯度

在一个数量场中中，函数在给定点处沿不同的方向，其方向导数一般是不相同的。为研究哪个方向的方向导数最大，最大值为多少，增加速度最快，就引入了梯度。

定义：设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处具有一阶偏导数，定义 $\operatorname{grad} u|_{P_0}=(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0))$ 为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0$ 处的**梯度**。

## 3.3 方向导数与梯度关系

方向导数为梯度 $\times$ 梯度方向余弦。

函数在某点的梯度是一个向量，其方向与取得最大方向导数的方向是一致的，其模就是方向导数最大值。

## 3.4 散度与旋度

定义：设向量场 $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，则**散度** $\operatorname{div}\vec{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$，**旋度** $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$。