

随机事件与概率

Didneipsun

目录

1	排列组合	1
1.1	捆绑法	1
1.2	插空法	1
1.3	插板法	1
2	随机事件概率	2
3	概率模型	2
3.1	古典概型	2
4	独立性	2

1 排列组合

排列公式: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 。

组合公式: $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ 。

1.1 捆绑法

要求某些元素必须在一起。

例题: $ABCDEF$ 六个人排队, 要求 AB 必须在一起, 问有多少种排法。

解: 排法就是排列的问题。首先 AB 在一起, 要么是 AB 要么是 BA , 也是一种排列, 有 A_2^2 种。

然后将 AB 看作一个整体与 $CDEF$ 进行排列, 一共五个元素, 进行全排列: A_5^5 。

因为是按步骤来的, 所以使用乘法: $A_2^2 \cdot A_5^5 = 120$ 。

1.2 插空法

要求某些元素不能相邻。

例题: 要对 6 个唱歌和 4 个舞蹈节目进行排列, 要求两个舞蹈节目不能相邻, 求多少种排法。

解: 由于是对舞蹈进行限制, 所以对唱歌的序列没有特别的限制, 第一步先对唱歌进行全排列 A_6^6 。

第二步对舞蹈进行排列, 由于舞蹈之间不能相邻, 所以舞蹈节目必然是在两个唱歌节目之间进行插孔排序的, 而唱歌 6 个节目一共 7 个空, 所以排列 A_7^4 。

由于是步骤, 所以乘法: $A_6^6 \cdot A_7^4$ 。

1.3 插板法

与插空法类似, 但是是组合进行归类, 而不是排序。

例题: 将 8 个完全相同的球放入三个不同的盒子, 要求每个盒子至少有一个球, 求一共有多少种放法。

解: 相当于在七个空插入两个板。即 $C_7^2 = 21$ 。

2 随机事件概率

是基本事件关系的概率运算。

例题：已知事件 A 和 B 相互独立， $P(A) = a$ ， $P(B) = b$ ，如果事件 C 必然导致 AB 同时发生，则求 ABC 都不发生的概率。

解：首先必须理解题目的意思，并将其抽象为具体的计算式子。

ABC 都不发生就是 A 不发生且 B 不发生且 C 不发生，用式子表达就是 \overline{ABC} 。

然后是分析事件 C 必然导致 AB 同时发生， AB 同时发生就是 AB ，即 AB 比 C 的范围大， $C \subset AB$ ， $\overline{AB} \subset \overline{C}$ ， $\therefore \overline{ABC} = \overline{AB} \cap \overline{C} = \overline{AB}$ 。

又事件 AB 相互独立。 $P(\overline{AB}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1-a)(1-b)$ 。

3 古典概型

3.1 定义法

3.2 随机分配

将 n 个质点分配倒 N 个容器中：

4 独立性

例题：射手对同一目标独立地进行 4 次射击。若至少命中一次的概率为 $\frac{15}{16}$ ，则求该射手对同一目标独立地进行 4 次射击中至少没命中一次的概率。

解：这个题目其实就是四重伯努利试验，彼此之间的概率都是独立的。令每一次命中的概率为 p ，则该次未命中的概率为 $1-p$ 。

若至少命中一次的概率为 $\frac{15}{16}$ ，则其对立事件全部不命中的概率为 $1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$ ，则 $(1-p)^4 = \frac{1}{16}$ ，则得到每次命中概率 $p = \frac{1}{2}$ 。

求该射手对同一目标独立地进行 4 次射击中至少没命中一次的概率，则其对立事件为每次命中，其概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ ，则至少没命中一次的概率为 $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ 。