

向量

Didneipsun

目录

1	线性相关性	1
1.1	代入重组	1
1.2	同乘	1
1.3	行列式	2
1.4	矩阵秩	2
1.4.1	线性相关性	2
1.4.2	线性表出	3
1.5	极大线性无关组	3
2	等价向量组	4
3	向量空间	4

1 线性相关性

使用行列式不等于 0 的方法最方便，但是有时候行列不同就不能这么做了。

1.1 代入重组

若要求线性相关的式子由其他向量构成，则将式子代入表示目标式子。

例题：设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都是 n 维向量， $n \geq 3$ ，且 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ ， $\beta_2 = \alpha_1 - 2\alpha_2$ ， $\beta_3 = 3\alpha_1 + 1 + 2\alpha_2$ ，证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关。

证明：若存在 k_1, k_2, k_3 使得 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = 0$ 。

代入 α 表示 β 的式子： $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_1 - 2\alpha_2) + k_3(3\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0$ 。

$\therefore (k_1 + k_2 + 3k_3)\alpha_1 + (k_1 - 2k_2 + 2k_3)\alpha_2 = 0$ 。

$\therefore k_1 + k_2 + 3k_3 = 0$ ，且 $k_1 - 2k_2 + 2k_3 = 0$ 即可。

而未知数的个数大于方程个数，所以有无穷多解，从而必然有非零解，从而 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关。

1.2 同乘

若要求线性相关的式子存在一定的乘积关系，则可以用同乘一步步消去系数。

例题：设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k ，使得线性方程组 $A^k x = 0$ 有解向量 α ，且 $A^{k-1}\alpha \neq 0$ ，证明向量组 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关。

证明：假设 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性相关，则设存在系数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 使得 $\lambda_1\alpha + \lambda_2A\alpha + \dots + \lambda_kA^{k-1}\alpha = 0$ 。

$\therefore A^k x = 0$ 的解为 α ， $\therefore A^k\alpha = 0$ ， $\therefore \dots = A^{k+2}\alpha = A^{k+1}\alpha = A^k\alpha = 0$ 。

左乘 A^{k-1} ，得到 $\lambda_1A^{k-1}\alpha + \lambda_2A^k\alpha + \dots + \lambda_kA^{2k-2}\alpha = \lambda_1A^{k-1}\alpha = 0$ 。

$\therefore A^{k-1}\alpha \neq 0$ ， $\therefore \lambda_1 = 0$ ，消去 λ_1 ： $\lambda_2A\alpha + \lambda_3A^2\alpha + \dots + \lambda_kA^{k-1}\alpha = 0$ 。

左乘 A^{k-2} ，得到 $\lambda_2A^{k-1}\alpha + \lambda_3A^k\alpha + \dots + \lambda_kA^{2k-3}\alpha = \lambda_2A^{k-1}\alpha = 0$ 。

$\therefore A^{k-1}\alpha \neq 0$ ， $\therefore \lambda_2 = 0$ ，消去 λ_2 ： $\lambda_3A^2\alpha + \lambda_4A^3\alpha + \dots + \lambda_kA^{k-1}\alpha = 0$ 。

同理依次左乘 A^n ，所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ ，所以 $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关。

1.3 行列式

对向量的线性相关性可以从其向量组组成的行列式来计算，若行列式值为 0 则线性相关，若行列式值不为 0 则线性无关。

注意这里容易失根。要仔细找出所有为 0 的因式，不要随便降低阶数。

例题：设 a_1, a_2, \dots, a_s 是 s 个互不相同的数，探究 s 个 n 维列向量 $\alpha_i = [1, a_i, a_i^2, \dots, a_i^{n-1}]^T$ ($i = 1, 2, \dots, s$) 的线性相关性。

解：当 $s > n$ 时，有 n 个方程 s 个未知数，所以必然存在自由变量，从而必然线性相关性。

$$\text{当 } s = n \text{ 时, } |\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \neq 0。$$

所以线性无关。

$$\text{当 } s < n \text{ 时, 对方程矩阵切割保留方形的 } s \text{ 个} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix},$$

上面因为范德蒙德行列式已经不等于 0，即上面的方阵线性无关，原来无关延长无关，所以整个方程都线性无关。

綜上当 $s > n$ 时线性相关， $s \leq n$ 时线性无关。

1.4 矩阵秩

当向量的个数与维数不同时就不能使用行列式去分析，而只能用矩阵的秩来分析。当矩阵满秩则线性无关，当矩阵降秩则线性相关。

1.4.1 线性相关性

当谈到多个向量是否线性相关时可以将向量组组成矩阵，判断其秩。满秩就是线性无关，降秩就是线性相关。

1.4.2 线性表出

当谈到一个向量是否能被其他向量线性表出时，要将这些向量全部组成一起，判断能否被其他向量表出的向量放在最右边，然后判断增广矩阵的秩。

1. 若 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta)$ ，则 β 无法被 α 线性表出。
2. 若 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta) < r$ ，则 β 可以被 α 无穷线性表出。表达式为基础解系。
3. 若 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta) = r$ ，则 β 可以被 α 惟一线性表出。表达式为将矩阵化为单位矩阵后 β 所在就是 α 的系数。

例题：已知 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$ ， $\alpha_2 = (2, 3, a)^T$ ， $\alpha_3 = (1, a+2, -2)^T$ ， $\beta = (1, 3, 0)^T$ ，若 β 可以由 α_1 、 α_2 、 α_3 线性表示，且表示法不唯一，求 a 。

解：设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ ，由 β 可以由 α_1 、 α_2 、 α_3 线性表示，且表示法不唯一可知 $Ax = \beta$ 有无穷解，即 $r(A) = r(A|B) < 3$ 。

$$= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 2a - 3 & a - 3 \end{bmatrix}。$$

$\therefore a = 3$ 。

1.5 极大线性无关组

极大线性无关组一般与向量组秩在一起使用。一般解出极大线性无关组与秩，还要用极大线性无关组表示出其余的向量，基本步骤：

1. 将向量组拼接为矩阵 A ，对 A 进行初等行变换，化为最简行阶梯形矩阵，确定矩阵秩 $r(A)$ 。
2. 在最简行阶梯矩阵中按列找出一个秩为 $r(A)$ 的子矩阵，即在每个台阶上找一列列向量，找 $r(A)$ 列构成一个新矩阵，其就是一个极大线性无关组。
3. 将其余向量依次与极大线性无关组进行对比解出表示方法。

注意：求向量组的秩可以进行初等变换，包括行变换和列变换。但是求极大线性无关组时最好只使用行变换，因为列变换会改变方程的解。从而解方程组只能做行变换。

2 等价向量组

$r(A) = r(B) = r(A|B)$, 所以需要计算三个向量组构成的矩阵的秩就可以了。

例题: 设向量组 α : $\alpha_1 = [1, 0, 2]^T$, $\alpha_2 = [0, 1, 1]^T$, $\alpha_3 = [2, -1, a+4]^T$, 向量组 β : $\beta_1 = [1, 2, 4]^T$, $\beta_2 = [1, -1, a+2]^T$, $\beta_3 = [3, 3, 10]^T$ 。

$$\text{矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & a+4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & a+2 & 10 \end{pmatrix}。$$

(1) AB 是否等价。

(2) 向量组 AB 是否等价。

$$(1) \text{ 解: 化简 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

若 $a \neq -1$, 则 $r(A) = 3$, 且 $a \neq 0$, 则 $r(B) = 3$, 此时 AB 等价。

若 $a = -1$, 则 $r(A) = 2$, $r(B) = 3$, AB 不等价。

若 $a = 0$, 则 $r(B) = 2$, $r(A) = 2$, AB 不等价。

(2) 解: 因为向量组 α 拼接在一起就是 A , β 拼接在一起就是 B , 所以 $r(\alpha) = r(A)$, $r(\beta) = r(B)$, $r(\alpha|\beta) = r(A|B)$ 。

$$\text{将 } AB \text{ 拼在一起做行变换, 得到 } (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & a+1 & 1 \end{array} \right)。$$

若 $a \neq -1 \neq 0$, 则 $r(A) = r(B) = r(A|B)$ 。向量组等价。

若 $a = -1$ 或 $a = 0$, 则 $r(A) \neq r(B)$, 所以不等价。

3 向量空间

例题: 设 R^3 中有两个基 A : $\alpha_1 = [1, 1, 0]^T$, $\alpha_2 = [0, 1, 1]^T$, $\alpha_3 = [1, 0, 1]^T$, 基 B : $\beta_1 = [1, 0, 0]^T$, $\beta_2 = [1, 1, 0]^T$, $\beta_3 = [1, 1, 1]^T$ 。

(1) 求基 B 到基 A 的过渡矩阵。

(2) 已知 ξ 在基 B 下的坐标为 $[1, 0, 2]^T$, 求 ξ 在基 A 下的坐标。

(1) 解: 过渡矩阵为 $A = BC$, 即 $B^{-1}A = C$ 。

(2) 解: 令在基 A 下的坐标为 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 。

$$\therefore \xi = A(x_1, x_2, x_3)^T = B(1, 0, 2)^T, \quad (x_1, x_2, x_3)^T = A^{-1}B(1, 0, 2)^T.$$