

二次型

Didnelpsun

目录

1	二次型	1
1.1	配方法	1
1.2	矩阵乘法	1
2	标准形	1
2.1	初等变换法	1
2.2	可逆线性变换法	2
2.2.1	平方项	2
2.2.2	无平方项	3
2.3	正交变换法	4
3	规范形	4
3.1	惯性定理	4
4	合同	5
4.1	合同判断	5
4.1.1	配方法	5
4.1.2	特征值法	6
4.2	可逆矩阵	6
5	正定二次型	6
5.1	具体型	6
5.2	抽象型	7
6	二次型最值	7

1 二次型

即最基本的将二次型式子变为矩阵形式。

1.1 配方法

1.2 矩阵乘法

由于二次型是 X^TAX 的形式，所以最后的左右两边都存在所有的 x_i ，所以可以依次把 x_i 缺的项进行补齐 x_n 与其他所有 x_i 乘积的和的形式。

例题：将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 化为矩阵。

$$\begin{aligned} \text{解：} f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3 = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= 2x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2^2 - x_1x_2 - x_2x_3 + 2x_3^2 + x_1x_3 - x_2x_3 = \\ &= x_1(2x_1 - x_2 + x_3) + x_2(-x_1 + 2x_2 - x_3) + x_3(x_1 - x_2 + 2x_3) \\ &= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}。 \\ \text{即 } A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}。 \end{aligned}$$

2 标准形

即将二次型式子变为平方形式，再变量更换，变成矩阵形式。

2.1 初等变换法

$f(x) = X^TAX$, 线性变换 $X = CY, C^TAC = \Lambda$, 又 C 可逆, $\therefore C = P_1P_2 \cdots P_s$, $EP_1P_2 \cdots P_s = C$, $\therefore (P_1P_2 \cdots P_s)^TAP_1P_2 \cdots P_s = \Lambda$,

1. 对 A, E 做同样的初等列变换。
2. 对 A 做相应的初等行变换。(交换 i, j 列就要交换 i, j 行)。一套行列变换后 Λ 为对称矩阵。
3. A 化成对角矩阵时, E 化成的就是 C 。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}, \text{ 对整个列变换, 只对 } A \text{ 行变换。} \\
\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\therefore \Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.2 可逆线性变换法

即配方法, 求可逆线性变换。

1. 如果二次型有平方项, 则首先从 x_1 开始往后不断配方, 让最后的式子全部以平方加和的形式, 从而不会有混合项。
2. 如果二次型没有平方项, 则首先令 $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_i = y_i$ 等然后带入 $f(x)$ 强行出现平方项, 然后配方, 成功后再用 z_i 替换。
3. 如果总的完全平方项数小于变量个数, 则令多余的 x_i 为 y_i , 系数为 0。

2.2.1 平方项

即依次对存在 x_i 的式子进行整合配方。从 x_1 开始, 后面含 x_1 的都提到一起配方, 然后依次按这个方法进行配方。

例题: 将 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2$ 化为标准形并求出作的可逆线性变换。

解：首先对 x_1 进行配方，因为有 x_1 因子的式子有 $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ 。

所以将 x_1, x_2, x_3 全部配在一起： $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 。

所以 $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2$ ，然后继续配 x_2 。

因为还有 $-2x_2^2 - 4x_2x_3$ ，所以配成 $-2(x_2 + x_3)^2$ ，正好全部配完了。

$\therefore f(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_2 + x_3)^2$ 。

令 $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 + x_3$, 补 $y_3 = x_3$, $\therefore f = y_1^2 - 2y_2^2$ 。

$$(y_1, y_2, y_3)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T, \text{ 此时是 } y = Dx, \text{ 但是我们要求的}$$

是 $x = Cy$ ，所以 $C = D^{-1}$ ，所以 D^{-1} 才是作出的可逆线性变换。

$$\text{所以得到的线性变换为 } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

这样方法还要重新求逆，比较麻烦。实际上我们要求的是 $x = Cy$ ，即用 y 来表示 x ，从而直接将 y 来表示 x 就可以了。

首先 $y_3 = x_3$ ，所以 $x_2 = y_2 - x_3 = y_2 - y_3$, $x_1 = y_1 - x_2 - x_3 = y_1 - y_2 + y_3 - y_3 = y_1 - y_2$ ，综上 $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$ ，也得到同样结果。

2.2.2 无平方项

例题：将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3$ 化为规范形，并求所用的可逆线性变换。

解：因为二次型中没有平方项式子，而如果进行配方一定会出现平方，就会产生冲突，所以希望把 x 代换称有平方的式子。

令 $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$ ，代入二次型中。

$$f = y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 + y_2y_3 - y_1y_3 - y_2y_3 = y_1^2 - y_2^2 + 2y_2y_3 = y_1^2 - y_2^2 + 2y_2y_3。$$

此时由没有平方项就变成了有平方项，所以就能进行配方。

$$= y_1^2 - (y_2 - y_3)^2 + y_3^2, \text{ 继续之前的步骤，进行换元：}$$

令 $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - y_3$, $z_3 = y_3$, $f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$ 得到标准形。

$$\text{对于 } x \text{ 与 } y: (x_1, x_2, x_3)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3)^T. y \text{ 作为过渡变量。}$$

将 y 转换为 z : $(z_1, z_2, z_3)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3)^T$, 我们需要 $x = Cz$ 。

$$(x_1, x_2, x_3)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} (z_1, z_2, z_3)^T, \text{ 从而得到 } C =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

2.3 正交变换法

即求正交变换。

例题：将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 使用正交变换法化为标准形，并求所作的正交变换。

已知将二次型通过矩阵表示： $= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T$ 。

这个矩阵跟第五章相似的实对称矩阵相似对角化的例题的矩阵一样。

所以直接结果： $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10, \eta'_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2, 1, 0)^T, \eta'_2 = \frac{\sqrt{5}}{15}(2, 4, 5)^T,$
 $\eta'_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$ 。

第五步： $f(x) = g(y) = y^T \Lambda y = (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3)^T = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

3 规范形

由于只有少部分二次型能转换为规范形，所以基本上都是选择题考察。

而且因为规范形的系数必然是 0 或 1 或 -1，所以不要求，直接使用惯性定理即可求出。

3.1 惯性定理

多用于规范形的判断。

例题：二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 的规范形为 ()。

$$A.f = z_1^2 \quad B.f = z_1^2 - z_2^2 \quad C.f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \quad D.f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$$

解：

已知 f 的二次型矩阵表示 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ ，根据特征方程 $|\lambda E - A| = \lambda^2(\lambda - 9) = 0$ ， $\lambda_1 = 9$ ， $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ，所以根据特征值符号，正惯性系数 $p = 1$ ，负惯性系数 $q = 0$ ，所以选择 A 。

4 合同

4.1 合同判断

合同基于二次型，所以只有对称矩阵才能讨论是否合同。

二次型的合同只有两种判断方式：

1. 秩相同，正（负）惯性系数相同。
2. 正负惯性系数都相同。

例题：设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，与 A 合同的是 ()。

$$A. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad D. \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

解：从四个选项，由于是常量矩阵，所以由对角线元素的正负号可以得出这四个的惯性系数分别为 (3,0)、(2,1)、(1,2)、(0,3)（前面为正惯性系数，后面为负惯性系数）。

且每个选项的秩都是 3。

4.1.1 配方法

即将二次型配方为标准型，然后求该矩阵的秩和惯性系数。

解：经过配方 $f = (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2 + x_3^2$ ，由于有三个平方项，所以矩阵秩为 3，正惯性系数为 2，与 B 相同。

4.1.2 特征值法

即根据特征方程进行正交变换得到正负惯性系数。

解：求 A 的特征值，得到 $\lambda_1 = 1$ 、 $\lambda_2 = 3$ 、 $\lambda_3 = -1$ ，所以正交变换后标准形为 $y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$ ，惯性系数与 B 相同。

4.2 可逆矩阵

已知 $A \simeq \Lambda$ ，则 $C^T AC = \Lambda$ 。即 $f = x^T Ax = y^T \Lambda y$ ，得到 $x = Cy$ 。

例题：已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$ 合同于 $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，求 $C^T AC = \Lambda$

中的 C 。

解：已知 A ，则可得二次型 $f = x^T Ax = [x_1, x_2, x_3]A[x_1, x_2, x_3]^T = x_1^2 - 4x_2^2 + \frac{1}{9}x_3^2$ ，规范化让这个二次型与 Λ 转换的二次型相等，由于正负惯性系数相同，平方必然是正数，所以符号对齐，令 $x_1^2 = y_1^2$ 、 $4x_2^2 = y_3^2$ 、 $\frac{1}{9}x_3^2 = y_2^2$ 。

解得 $x_1 = y_1$ ， $x_2 = \frac{1}{2}y_3$ ， $x_3 = 3y_2$ ，即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ 。

所以 $x = Cy$ ，解得 $C = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 3 \end{bmatrix}$ ，此时 $f = x^T Ax = y^T C^T AC y = y^T \Lambda y$ 。

5 正定二次型

5.1 具体型

1. 顺序主子式全部大于 0。
2. 特征值全部大于 0。

3. 配方化为全平方和的标准型，正惯性指数 $p = n$ （未知数个数）。
4. 矩阵乘法配方为完全平方和，内积 $D^T D$ 不等于 0。

5.2 抽象型

6 二次型最值

若 A 的特征值大小排序 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ，则：

- $\lambda_1 x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_n x^T x$ 。
- 若 $x^T x = 1$ ，则 $f_{\min} = \lambda_1$ ， $f_{\max} = \lambda_n$ 。