

微分方程

Didnelpsun

目录

| | | |
|----------|------------------------------|----------|
| 1 | 一阶微分方程 | 1 |
| 1.1 | 可分离变量微分方程 | 1 |
| 1.2 | 多项式换元 | 1 |
| 1.3 | 自然齐次方程 | 1 |
| 1.4 | 一阶线性方程 | 2 |
| 1.5 | 伯努利方程 | 2 |
| 2 | 二阶可降阶微分方程 | 2 |
| 2.1 | $y'' = f(x, y')$ 型 | 2 |
| 2.2 | $y'' = f(y, y')$ 型 | 3 |
| 3 | 高阶线性微分方程 | 3 |
| 3.1 | 常系数齐次线性微分方程 | 3 |
| 3.2 | 常系数非齐次线性微分方程 | 3 |
| 4 | 微分方程概念 | 3 |
| 4.1 | 已知微分方程的解反求系数 | 4 |
| 4.2 | 不解微分方程, 利用方程隐含信息 | 4 |
| 5 | 欧拉方程 | 4 |
| 6 | 微分方程物理应用 | 4 |
| 6.1 | 牛顿第二定律 | 4 |
| 6.2 | 变化率 | 4 |

1 一阶微分方程

1.1 可分离变量微分方程

例题：求 $y \sin \frac{x}{2} dx - \cos \frac{x}{2} dy = 0$ 的通解。

解： $\frac{dy}{dx} = y \tan \frac{x}{2}$, $\frac{dy}{y} = \tan \frac{x}{2} dx$, $\int \frac{dy}{y} = 2 \int \tan \frac{x}{2} d\frac{x}{2}$ 。

解得 $\ln |y| = -\ln \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 + \ln C_1$ (取对数更好解), $|y| = \frac{C_1}{\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2}$ 。

$y = \frac{\pm C_1}{\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2}$, 令 $C = \pm C_1$, 得 $y = \frac{C}{1 + \cos x}$ 。

注意在第一步时将 y 除到分母上, 本来 y 为任意常数, 变为 $y \neq 0$, 所以解得最后 $C \neq 0$, 而实际上 y 可以为 0, 所以 C 应该为任意常数。

此时解为全部解, 为通解加上 $y = 0$ 的奇解。

1.2 多项式换元

例题：求微分方程 $dy = \sin(x + y + 100) dx$ 的通解。

解：令 $u = x + y + 100$, $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y + 100)$, $\therefore \frac{du}{dx} = 1 + \sin u$ 。

$\frac{du}{1 + \sin u} = dx$, $\int \frac{du}{1 + \sin u} = \int dx$, $\int \frac{1 - \sin u}{\cos^2 u} du = x$ 。

$\int \sec^2 u - \tan u \sec u du = x$, 即 $\tan u - \sec u = x + C$ 。代回 $u = x + y + 100$ 。

通解 $\tan(x + y + 100) - \sec(x + y + 100) = x + C$ 。

所有解: $\tan(x + y + 100) - \sec(x + y + 100) = x + C$, $x + y + 100 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ 。

1.3 自然齐次方程

例题：设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y)$ ($x > 0$) 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 求 L 的方程。

解： (x, y) 到坐标原点的距离为 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 。

若 $y = y(x)$, 则切线为 $Y - y = y'(X - x)$, 令 $X = 0$, 解得 $Y = y - xy'$ 。

$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$, 解得 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$ 。

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$ 。代入 y' :

$\frac{du}{dx}x + u = u - \sqrt{1 + u^2}$, $\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{dx}{x}$, $\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\int \frac{dx}{x}$ 。

$\therefore \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = -\ln x + \ln C$, $u + \sqrt{1 + u^2} = \frac{C}{x}$ 。

代入 $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{C}{x}$, $y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$ 。

1.4 一阶线性方程

形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 。

例题：求微分方程 $y' + 1 = e^{-y} \sin x$ 的通解。

解：已知对 $e^{-y} \sin x$ 无法处理，所以必然需要对其转换， $e^y y' + e^y = \sin x$ 。

$\therefore (e^y)' + e^y = \sin x$, 令 $e^y = u$, $u' + u = \sin x$, $P(x) = 1$, $Q(x) = \sin x$ 。

$e^y = u = e^{-\int dx} (\int e^{\int dx} \sin x dx + C) = e^{-x} (\int e^x \sin x dx + C)$, 积分再现表格
解出 $\int e^x \sin x dx$: $= e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \right)$ 。

1.5 伯努利方程

形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ 。

例题：求 $y dx = (1 + x \ln y)x dy$ ($y > 0$) 的通解。

解：将导数放到一边： $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(1 + x \ln y)x}$, 这个算式无法处理。

而颠倒 $\frac{dx}{dy} = \frac{(1 + x \ln y)x}{y} = \frac{1}{y}x + \frac{\ln y}{y}x^2$ 。

凑伯努利方程： $x' + P(x)x = Q(x)x^n$: $x' - \frac{1}{y}x = \frac{\ln y}{y}x^2$ 。 $P(x) = -\frac{1}{y}$,

$Q(x) = \frac{\ln y}{y}$ 。

乘 x^{-2} 降阶： $x^{-2}x' - \frac{1}{y}x^{-1} = \frac{\ln y}{y}$ 。令 $z = x^{-1}$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dy}$ 。代入方程：

$-\frac{dz}{dy} - \frac{1}{y}z = \frac{\ln y}{y}$, $\frac{dz}{dy} + \frac{1}{y}z = -\frac{\ln y}{y}$, 利用公式：

$z = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left(\int e^{\int \frac{1}{y} dy} \cdot \left(\frac{\ln y}{y} \right) + C \right) = \frac{1}{y} (-\int \ln y dy + C) = \frac{1}{y} (-y(\ln y - 1) + C) = -\ln y + 1 + \frac{C}{y}$ 。

$\therefore x = \frac{y}{-y \ln y + y + C}$ 。

2 二阶可降阶微分方程

2.1 $y'' = f(x, y')$ 型

例题：求 $y'' = \frac{2xy'}{1+x^2}$ 的通解。

解：令 $y' = p$, $p' = \frac{2xp}{1+x^2}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{2xp}{1+x^2}$, $\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2}$, $\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x}{1+x^2}$ 。

$$\ln |p| = \ln(1+x^2) + \ln C_1, \quad p = \pm C_1(1+x^2) = C_2(1+x^2).$$

$$y' = C(1+x^2), \quad \therefore y = C_2 \left(x + \frac{x^3}{3} + x \right) + C.$$

2.2 $y'' = f(y, y')$ 型

3 高阶线性微分方程

3.1 常系数齐次线性微分方程

3.2 常系数非齐次线性微分方程

先将常系数非齐次线性微分方程变为常系数齐次线性微分方程求解，然后加上非齐次方程的一个特解，就是非齐次方程的一个通解。

例题：求 $y'' - 4y' + 4y = 3xe^{2x}$ 的通解。

解：变为常系数齐次线性微分方程： $y'' - 4y' + 4y = 0$ 。

写出特征方程： $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ，从而 $(\lambda - 2)^2 = 0$ ， $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 。

从而 y 齐次方程的通解为 $(C_1 + C_2x)e^{2x}$ 。

根据特解的设置方法，设 $y^* = e^{2x}(ax + b)x^2$ 。

代回二阶方程， $a = \frac{1}{2}$ ， $b = 0$ 。通解为 $(C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^3e^{2x}$ 。

例题：微分方程 $y'' - 4y' + 3y = e^x \cos x + xe^{3x}$ 的通解。

解：首先常系数齐次线性微分方程： $y'' - 4y' + 3y = 0$ 。

特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ，解得特征值为 $\lambda_1 = 1$ ， $\lambda_2 = 3$ 。

所以该齐次方程的通解： $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$ 。

然后求特解，首先求后面 $f_2(x) = xe^{3x}$ 的特解 y_2^* 。

根据公式因为 α 为单特征根，即 $\alpha = 3 = \lambda_2 \neq \lambda_1$ ，所以 $y_2^* = e^{3x}(ax + b)x$ 。

然后是求 $f_1(x) = e^x \cos x$ 的特解 y_1^* 。

其中 $P_m(x) = 1$ ， $P_n(x) = 0$ ， $l = 0$ 。所以设 $P_m(x) = A$ ， $P_n(x) = B$ 。

对 k ，自由项中 $\alpha = \beta = 1$ ，得到 $1 \pm i$ 。又 $1 \pm i \neq \lambda_1 = 1 \neq \lambda_2 = 3$ ， $k = 0$ 。

最后 $y_1^* = e^x(A \cos x + B \sin x)$ 。通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + e^x(A \cos x + B \sin x) + e^{3x}(ax + b)x$ 。

4 微分方程概念

对于有些方程并不需要求解后才能解决问题。

4.1 已知微分方程的解反求系数

例题： 设 y_1, y_2 为一阶非齐次线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解，若常数 λ, μ 使得 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解， $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则 ()。

$$A. \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2} \quad B. \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2} \quad C. \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3} \quad \lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$$

4.2 不解微分方程，利用方程隐含信息

$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ 反映了未知函数及其各阶导数之间的关系。

例题： 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解，若 $f(x_0) > 0$ ，且 $f'(x_0) = 0$ ，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 ()。

A. 取得最大值 B. 取得最小值 C. 某个邻域内单调增加 D. 某个邻域内单调减少

解： 因为 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解，所以直接代入 x_0 ： $y''(x_0) - 2y'(x_0) + 4y(x_0) = 0$ 。又 $f'(x_0) = 0$ 。

$y''(x_0) = -4y(x_0) < 0$ ，所以该点为极大值点。

5 欧拉方程

6 微分方程物理应用

6.1 牛顿第二定律

$$F = ma, \text{ 物体质量 } m, \text{ 力 } f, \text{ 加速度 } a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}。$$

6.2 变化率

考的可能性较大，提法多为 t 时刻某量 y 对 t 的变化率与 t 时刻某量成正比。

如冷却定律， k 时刻物体温度 $T(t)$ 对时间的变化率与 t 时刻物体与介质的温差 $T - T_0$ 成正比，应写为 $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$ 。