二次型

Didnelpsun

目录

1 标准形

1.1 配方法

1. 如果二次型有平方项，则首先从 x_1 开始往后不断配方，让最后的式子全部以平方加和的形式，从而不会有混合项。

2. 如果二次型没有平方项，则首先令 $x_1 = y_1 + y_2$，$x_2 = y_1 - y_2$，$x_i = y_i$ 等然后带入 $f(x)$ 强行出现平方项，然后配方，成功后再用 z_i 替换。

3. 如果总的完全平方项数小于变量个数，则令多余的 x_i 为 y_i，系数为 0。

1.1.1 平方项

例题：将 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2$ 化为标准形并求出作的可逆线性变换。

解：首先对 x_1 进行配方，因为有 x_1 因子的式子有 $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$。

所以将 x_1, x_2, x_3 全部配在一起：$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$。

所以 $f(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2$，然后继续配 x_2。

因为还有 $-2x_2^2 - 4x_2x_3$，所以配成 $-2(x_2 + x_3)^2$，正好全部配完了。

$\therefore f(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_2 + x_3)^2$。

令 $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$，$y_2 = x_2 + x_3$，补 $y_3 = x_3$，$\therefore f = y_1^2 - 2y_2^2$。

$(y_1, y_2, y_3)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3)^T$，此时是 $y = Dx$，但是我们要求的是 $x = Cy$，所以 $C = D^{-1}$，所以 D^{-1} 才是作出的可逆线性变换。

所以得到的线性变换为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

这样方法还要重新求逆，比较麻烦。实际上我们要求的是 $x = Cy$，即用 y 来表示 x，从而直接将 y 来表示 x 就可以了。

首先 $y_3 = x_3$，所以 $x_2 = y_2 - x_3 = y_2 - y_3$，$x_1 = y_1 - x_2 - x_3 = y_1 - y_2 + y_3 - y_3 = y_1 - y_2$，综上 $x_1 = y_1 - y_2$，$x_2 = y_2 - y_3$，$x_3 = y_3$，也得到同样结果。

1.1.2 无平方项

例题：将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$ 化为规范形，并求所用的可逆线性变换。

解：因为二次型中没有平方项式子，而如果进行配方一定会出现平方，就会产生冲突，所以希望把 x 代换称有平方的式子。

令 $x_1=y_1+y_2$，$x_2=y_1-y_2$，$x_3=y_3$，代入二次型中。

$f=y_1^2-y_2^2+y_1y_3+y_2y_3-y_1y_3-+y_2y_3=y_1^2-y_2^2+2y_2y_3=y_1^2-y_2^2+2y_2y_3$。

此时由没有平方项就变成了有平方项，所以就能进行配方。

$=y_1^2-(y_2-y_3)^2+y_3^2$，继续之前的步骤，进行换元：

令 $z_1=y_1$，$z_2=y_2-y_3$，$z_3=y_3$，$f=z_1^2-z_2^2+z_3^2$ 得到标准形。

对于 x 与 y：$(x_1,x_2,x_3)^T=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}(y_1,y_2,y_3)^T$。$y$ 作为过渡变量。

将 y 转换为 z：$(z_1,z_2,z_3)^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}(y_1,y_2,y_3)^T$，我们需要 $x=Cz$。

$(x_1,x_2,x_3)^T=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}(z_1,z_2,z_3)^T$，从而得到 $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$。

1.2 初等变换法

$f(x)=X^TAX$,线性变换 $X=CY$,$C^TAC=\Lambda$,又 C 可逆,$\therefore C=P_1P_2\cdots P_s$，$EP_1P_2\cdots P_s=C$，$\therefore (P_1P_2\cdots P_s)^TAP_1P_2\cdots P_3=\Lambda$，

1. 对 A,E 做同样的初等列变换。
2. 对 A 做相应的初等行变换。（交换 i,j 列就要交换 i,j 行）。一套行列变换后 Λ 为对称矩阵。
3. A 化成对角矩阵时，E 化成的就是 C。

$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Lambda \\ C \end{pmatrix}$，对整个列变换，只对 A 行变换。

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3 正交变换法

例题：将二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 使用正交变换法化为标准形，并求所作的正交变换。

已知将二次型通过矩阵表示：$= (x_1,x_2,x_3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} (x_1,x_2,x_3)^T$。

这个矩阵跟第五章相似的实对称矩阵相似对角化的例题的矩阵一样。

所以直接结果：$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 10$，$\eta_1' = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(-2,1,0)^T$，$\eta_2' = \dfrac{\sqrt{5}}{15}(2,4,5)^T$，$\eta_3' = \dfrac{1}{3}(1,2,-2)^T$。

第五步：$f(x) = g(y) = y^T\Lambda y = (y_1,y_2,y_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix} (y_1,y_2,y_3)^T = y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

2　正定二次型