导数与微分

Didnelpsun

目录

1　一阶导数

1.1　幂指函数求导

形如 $f(x)^{g(x)}$ 的幂指函数求导也可以类似幂指函数的求极限方法。既可以取 e 为底的指数也可以取对数。

例题：求 $f(x)=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数。

取对数：

$\therefore \ln y=\sin x\ln x$

求导：

$\dfrac{y'}{y}=\cos\ln x+\dfrac{\sin x}{x}$

$\therefore y'=x^{\sin x}\left(\cos\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$。

取指数：

$x^{\sin x}=e^{\sin x\cdot\ln x}$

求导：

$e^{\sin x\cdot\ln x}(\sin x\cdot\ln x)'=x^{\sin x}\left(\cos\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$。

1.2　分段函数导数

当给出一个分段函数，要求求出该函数的导数时，最重要的就是分段点是否可导，计算分段点的导数，如果两边的导数不相等，则需要挖去该点。

例题：设 $f(x)=\begin{cases}\arctan x, & x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{2}(e^{x^2-1}-x)+\dfrac{\pi}{4}, & x>1\end{cases}$，求 $f'(x)$。

当 $x\leqslant 1$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)=xe^{x^2-1}-\dfrac{1}{2}$。

然后需要查看分段点两边的导数是否一样：$f'_-(1)=\left.\dfrac{1}{1+x^2}\right|_{x=1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$，$f'_+(1)=\left.xe^{x^2-1}-\dfrac{1}{2}\right|_{x=1}=1\cdot e^{1-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$。

$\therefore f'_-(1)=f'_+(1)$，所以该点可导。

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x\leqslant 1\\ xe^{x^2-1}-\dfrac{1}{2}, & x>1\end{cases}$。

1.3　导数存在性

导数存在即可导。而该点左右导数都相等该点才可导。

可导必连续，连续不一定可导。

导数的定义：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$。

导数的存在性：若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$。

例题：设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+bx)}{x}, & x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$，其中 b 为某常数，$f(x)$ 在定义域上处处可导，求 $f'(x)$。

首先需要求出参数 b，而定义域上可导则在分段点 $x=0$ 处也必然可导。

而可导必连续，所以当 $x=0$ 时 $f(x)$ 也是连续的，而连续的定义就是两边极限相等，且两边极限等于该点函数值。

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+bx)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{x}=b=-1$。从而可以完善函数与定义域。

$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x<1,x\neq 0\\ -1, & x=0\end{cases}$。

这样就能转换为直接求导数问题。

对于定义域的 $x<1,x\neq 0$ 部分：

$$f'(x)=\dfrac{\dfrac{-x}{1-x}-\ln(1-x)}{x^2}=\dfrac{x-(x-1)\ln(1-x)}{x^2(x-1)}\,(x<1,x\neq 0)。$$

然后需要求分段点 $x=0$ 处的导数。

可以由导数的定义：、

根据导数的定义是某点偏移量的极限值 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$：

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\dfrac{\dfrac{\ln(1-x)}{x}-(-1)}{x-0}$$

$$=\dfrac{\dfrac{\ln(1-x)}{x}+1}{x}$$

$$=\dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}$$

泰勒公式：$=\dfrac{-x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)+x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$。

$\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x-(x-1)\ln(1-x)}{x^2(x-1)}, & x<1,x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$。

同样也可以使用导数的存在性：

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\therefore x=0$ 的空心邻域上可导。从而 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在。

$\therefore f'(0)=\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$。计算过程类似。

1.4 导数连续性

导数具有连续性与之前的函数连续性类似，不过要对函数求导数罢了。

要求导数两侧的极限并让其相等。

例题：设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0 \\ x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$，若 $f'(x)$ 连续，则 α 应该满足？

若导数连续，则两侧导数相等。

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0$。

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha-2}\left(\alpha x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$。

$\because x\to 0^+$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}\in[-1,1]$，$\therefore \alpha x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$-\cos\dfrac{1}{x}\in[-1,1]$，$\therefore \alpha x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ 为一个不为 0 的常数。

又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha-2}\left(\alpha x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0$。

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha-2}=0$。

$\therefore \alpha-2>0$，从而 $\alpha>2$。

1.5 已知导数求极限

题目会给出对应的导数以及相关条件，并要求求一个极限，这个极限式子并不是个随机的式子，而一个是与导数定义相关的极限式子，所需要的就是将极限式子转换为导数定义的相关式子。

1.5.1 导数定义式子

有时极限式子可以直接转换为导数定义式子，先稍微变换就可以代入导数。

例题：设 $f(x)$ 是以 3 为周期的可导函数，且是偶函数，$f'(-2)=-1$，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(5-2\sin h)-f(5)}$。

根据导数与函数的基本性质，原函数为偶函数，则其导函数为奇函数，所以 $f'(5)=f'(2)=-f'(-2)=1$。

然后需要转换目标的极限式子，因为目标式子倒过来的式子类似于导数定义的 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 结构。所以我们可以先求其倒数式子：

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(5-2\sin h)-f(5)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(5-2\sin h)-f(5)}{-2\sin h}\cdot\frac{-2\sin h}{h}\\
&= -2f'(5) = -2\times 1 = -2\\
&\therefore \lim_{h\to 0}\frac{h}{f(5-2\sin h)-f(5)} = -\frac{1}{2}。
\end{aligned}
$$

1.5.2 定义近似式子

有时候极限式子不为导数定义的近似式子，这时候就需要先根据求极限的计算方式简化目标极限式子。

例题：设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f(0)=1$，$f'(0)=3$，则数列极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}}$。

设 $\frac{1}{n}=x$，则：

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}(f(x))^{\frac{x}{1-\cos x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{1-\cos x}\ln f(x)}\\
&= e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{x}}\\
&= e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}}\\
&= e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}\\
&= e^{2f'(0)} = e^6。
\end{aligned}
$$

2 高阶导数

2.1 导数存在性

2.2 携带未知数的多项式求高阶导

当所需要的求导的式子为一个多项式的时候，这个求导必然是有规律的。

当所求高阶导数的 x 值为一个常数时，那么这个常数值代入求导的式子必然是会消去一部分的，最常用的常数为 $x=0$。

例题：已知 $f(x)=x^2(x+1)^2(x+2)^2\cdots(x+n)^2$，求 $f''(0)$。

因为式子中带有未知数 n，所以结果很可能会带有 n。

而这个式子项数为 $n+1$ 项，所以求导结果必然很大，所以一定会消去一部分。

又求导的自变量 $x=0$，而 0 代入很多式子都会被消去，所以这就是个突破口。

因为求导是求二阶导数，所以很可能这种求导是消去一部分而不是得到一个规律，因为阶数太低很难看出规律。

首先对 $f(x)$ 求一阶导数（需要记住乘积的导数为各项求导的和）：

$$
\begin{aligned}
f'(x) = & 2x(x+1)^2(x+2)^2\cdots(x+n)^2 \\
& +x^2 2(x+1)(x+2)^2\cdots(x+n)^2 \\
& +x^2(x+1)^2 2(x+2)\cdots(x+n)^2 \\
& \cdots \\
& +x^2(x+1)^2(x+2)^2\cdots 2(x+n)
\end{aligned}
$$

原式子一共 1 项，一阶导数后变为 $n+1$ 项和，然后求二阶导数，会变为 $(n+1)^2$ 项和。这时候我们应该回头看目标求的式子为 $f''(0)$，而根据式子，只要乘积项中含有 x 项，那么这一整个项就都为 0。

一阶导数中除一项每个项都含有 x^2，所以求二阶导数的时候，x^2 会变为 $2x$ 在 $x=0$ 处二阶导数为 0，所以求二阶导数的时候一次导数的第一项后面 n 项在 $x=0$ 处都是 0，可以不用考虑。

而一阶导数的第一项只有对第一个 x 求导时会消去这个 x 变为 $2(x+1)^2(x+2)^2\cdots(x+n)^2$，其他的 n 项二阶导数仍然含有 x 的项，所以结果也为 0。

所以求 $f''(0)$ 时，只有对一阶导数的第一项的第一个 x 求导所得到的导数项不为 0，其他都是 0，所以最后 $f''(0)=2(x+1)^2(x+2)^2\cdots(x+n)^2=2(n!)^2$。

2.3 反函数高阶导数

已知一阶导数的时候，反函数的导数为原函数导数的倒数（$g'(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$）。

因为原函数的一阶导数是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，而反函数就是对原函数的 xy 对调，所以其反函数的一阶导数为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$。

例题： 已知 $y=x+e^x$，求其反函数的二阶导数。

$y=x+e^x$ 的反函数的一阶导数为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{1+e^x}$。

所以二阶导数为 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{1+e^x}\right)}{\mathrm{d}y}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{1+e^x}\right)}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=-\dfrac{e^x}{(1+e^x)^3}$。

3 微分

4 隐函数与参数方程

隐函数与参数方程求导基本上只用记住：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}。$$

例题：已知 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定，求其一阶导数与二阶导数。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=\frac{1}{t}。$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}。$$

5 导数应用

5.1 单调性与凹凸性

5.2 极值与最值

5.3 函数图像

5.4 曲率

曲率公式：$k=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$。

5.4.1 一般计算

例题：求 $y=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 对应的曲率

$y'=\cos x$，$y'(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$y''=-\sin x$，$y''(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$$\therefore k = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}。$$

所以 $y = \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 的点 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 的曲率为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$。

5.4.2 最值

例题：求 $y = x^2 - 4x + 11$ 曲率最大值所在的点。

简单得 $y' = 2x - 4$，$y'' = 2$。

曲率为 $\frac{2}{[1+(2x-4)^2]^{\frac{3}{2}}}$。

当 $2x - 4 = 0$ 时即在 $(2, 7)$ 时曲率最大为 2。