

# 相似

Didneipsun

## 目录

<b>1</b>	<b>特征值与特征向量</b>	<b>1</b>
1.1	代数余子式 . . . . .	1
1.2	特征值 . . . . .	1
1.2.1	已知对应特征向量 . . . . .	1
1.3	特征向量 . . . . .	2
1.3.1	已知其他特征向量 . . . . .	2
1.3.2	可逆矩阵关系 . . . . .	2
1.3.3	抽象型 . . . . .	3
<b>2</b>	<b>相似理论</b>	<b>3</b>
2.1	判断相似对角化 . . . . .	3
2.2	反求参数 . . . . .	3
2.2.1	具体矩阵 . . . . .	4
2.2.2	对角矩阵 . . . . .	4
2.3	反求矩阵 . . . . .	4
2.4	相似性 . . . . .	5
2.5	抽象型 . . . . .	5
2.6	正交相似 . . . . .	6

特征值往往与前面的内容进行混合考察。

## 1 特征值与特征向量

首先根据  $|\lambda E - A| = 0$  求出  $\lambda$ ，然后把  $\lambda$  逐个带入  $(\lambda E - A)x = 0$ ，根据齐次方程求解方法进行初等变换求出基础解系。这个基础解系就是当前特征值的特征向量。

### 1.1 代数余子式

**例题：**已知  $A$  是 3 阶方阵，特征值为 1, 2, 3，求  $|A|$  的元素  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  的代数余子式  $A_{11}, A_{22}, A_{33}$  的和  $\sum_{i=1}^3 A_{ii}$ 。

**解：**首先代数余子式的和  $A_{11}, A_{22}, A_{33}$  一般在行列式展开定理中使用，但是这里给出的不是一行或一列的代数余子式，而是主对角线上的代数余子式，这就无法使用代数余子式来表达行列式的值了。

而另一个提到代数余子式的地方就是伴随矩阵  $A^*$ ，所求的正好是伴随矩阵的迹  $tr(A^*) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ 。

又根据特征值性质，特征值的和为矩阵的迹，特征值的积为矩阵行列式的值，所以  $tr(A^*) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^*$   
$$= \sum_{i=1}^3 \frac{|A|}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_i} = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 = 2 + 3 + 6 = 11。$$

### 1.2 特征值

#### 1.2.1 已知对应特征向量

通过相关式子将逆矩阵转换为原矩阵。同一个向量的逆矩阵的特征值是原矩阵的特征值的倒数。

**例题：**已知  $\vec{\alpha} = (a, 1, 1)^T$  是矩阵  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$  的逆矩阵的特征向量，则求  $\vec{\alpha}$  在矩阵  $A$  中对应的特征值。

**解：**由于  $\vec{\alpha}$  是  $A^{-1}$  的特征向量，所以令此时的特征值为  $\lambda_0$ ，则定义  $\lambda_0 \vec{\alpha} = A^{-1} \vec{\alpha}$ ， $\lambda_0 A \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ 。

$$\text{即 } \lambda_0 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 即 } \lambda_0 \begin{bmatrix} -a & 2 & 2 \\ 2a & a & -2 \\ 2a & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

即根据矩阵代表的是方程组, 得到  $\lambda_0(4-a) = a, \lambda_0(3a-2) = 1, \lambda_0(2a-3) = 1$ 。

又  $\lambda_0 \neq 0, 3a-2 = 2a-3, a = -1$ , 则  $\lambda_0 = -\frac{1}{5}$ 。

所以矩阵  $A$  对应的特征值为  $-5$ 。

## 1.3 特征向量

### 1.3.1 已知其他特征向量

使用实对称矩阵性质, 即实对称矩阵的不同特征值的特征向量相互正交 ( $B^T A = 0$ )。

**例题:** 已知  $A$  为三阶实对称矩阵, 特征值为  $1, 3, -2$ , 其中  $\alpha_1 = (1, 2, -2)^T$ ,  $\alpha_2 = (4, -1, a)^T$  分别属于特征值  $\lambda = 1, \lambda = 3$  的特征向量。求  $A$  属于特征值  $\lambda = -2$  的特征向量。

**解:** 令  $A$  属于特征值  $\lambda = -2$  的特征向量为  $(x_1, x_2, x_3)^T$ 。

根据实对称矩阵的正交性质。

$$\alpha_1^T \alpha_2 = 4 - 2 - 2a = 0, \alpha_2^T \alpha_3 = 4x_1 - x_2 + ax_3 = 0, \alpha_3^T \alpha_1 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0.$$

$a = 1, 4x_1 - x_2 + x_3 = 0, x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$ , 解得基础解系  $(0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, k, k)^T (k \neq 0)$ 。

### 1.3.2 可逆矩阵关系

使用可逆矩阵相似对角化的性质。若  $A \sim B$ , 则  $P^{-1}AP = B$ 。  $B$  为纯量阵。且  $B$  的迹为  $A$  的特征值。  $P$  为特征向量。

$$\text{例题: 已知 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \text{ 可逆, 求 } A \text{ 关于特}$$

征值  $\lambda = 1$  的特征向量。

**解:** 根据  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 所以  $P$  为特征向量,  $1, 1, -1$  为特征值。

所以  $A$  关于  $\lambda = 1$  的特征向量为  $\alpha_1$  或  $\alpha_2$ 。而某一特征值的全部特征向量构成特征向量子空间, 所以  $\lambda = 1$  的特征向量为  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ 。

### 1.3.3 抽象型

题目只会给对应的式子，来求对应的特征向量。需要记住特征值的关系式然后与给出的式子上靠拢，不会很复杂。

**例题：**已知  $A$  为三阶矩阵，且矩阵  $A$  各行元素之和均为 5，则求  $A$  必然存在的特征向量。

解：由于是抽象型，所以没有实际的数据，就不能求出固定的特征值， $\lambda\xi = A\xi$ 。

又矩阵  $A$  各行元素之和均为 5，所以转换为方程组：

$$\begin{cases} A_{11} + A_{12} + A_{13} = 5 \\ A_{21} + A_{22} + A_{23} = 5 \\ A_{31} + A_{32} + A_{33} = 5 \end{cases}, \text{ 转为矩阵: } \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

即  $\xi = (1, 1, 1)^T$ 。

## 2 相似理论

### 2.1 判断相似对角化

可以使用相似对角化的四个条件，但是最基本的使用还是  $A$  有  $n$  个无关的特征向量  $\xi$ 。

1. 判断是否为实对称矩阵，实对称矩阵必然相似于对角矩阵。
2. 特征值是否都是实单根，相似于对角矩阵。
3. 特征值为  $n$  重根，对应  $n$  个线性无关的特征向量，则相似于对角矩阵。如果小于则不相似。

### 2.2 反求参数

常用方法：

- 若  $A \sim B$ ，则  $|A| = |B|$ ， $r(A) = r(B)$ ， $tr(A) = tr(B)$ ， $\lambda_A = \lambda_B$ ，通过等式计算参数。
- 若  $\xi$  是  $A$  属于特征值  $\lambda$  的特征向量，则有  $A\xi = \lambda\xi$ ，建立若干等式或方程组来计算参数。
- 若  $\lambda$  是  $A$  的特征值，则与  $|\lambda E - A| = 0$ ，通过该等式计算参数。

### 2.2.1 具体矩阵

例题：已知  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & y & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ , 且  $A \sim B$ , 求参数。

首先可以利用迹相等, 则  $2+0+x=2+y-1$ , 行列式值相等, 则  $-2=-2y$ , 解得  $x=0$ ,  $y=1$ 。

### 2.2.2 对角矩阵

首先要计算其特征值, 再根据特征值反代特征方程, 根据向量的构成判定秩的大小。

例题：已知  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  相似于对角矩阵, 求  $xy$  关系式。

解：已知相似, 即  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 则需要求  $A$  的特征值和特征向量。

根据特征关系式  $|E\lambda - A| = 0$ , 即 
$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda - 1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$
, 即有特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -1$ 。

此时有二重特征值, 所以应该有两个线性无关的特征向量, 即对于  $(E - A)x = 0$  有两个线性无关的解向量, 所以该矩阵的秩为  $3 - 2 = 1$ 。

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 1 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x - y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

所以当  $r(E - A) = 1$  时  $x + y = 0$ 。

## 2.3 反求矩阵

若有可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 则:

$P$  即是  $A$  特征向量的拼合。

- $A = P\Lambda P^{-1}$ 。
- $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$ 。
- $f(A) = Pf(\Lambda)P^{-1}$ 。

**例题：**已知  $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$  相似于对角矩阵，求  $A^{100}$ 。

解：首先  $A \sim \Lambda$ ，所以  $A$  能相似对角化。

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -x & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -3 & 6 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = 0. \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 3,$$

$$\lambda_3 = -1.$$

所以对于  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$  时，需要  $s = 2$ ，从而  $r(A) = 1$ ，对应成比例。

$$\text{代入 } 3: (3E - A)x = 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & -x & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{所以 } \frac{-1}{3} = \frac{-x}{6}, \quad x = 2.$$

解得  $\xi_1 = (1, 0, 1)^T$ ,  $\xi_2 = (2, 1, 0)^T$ ,  $\xi_3 = (1, 0, -3)^T$ 。

令  $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ，所以  $A = P\Lambda P^{-1}$ ,  $A^{100} = P\Lambda^{100}P^{-1}$ 。

## 2.4 相似性

1. 首先要判断特征值是否相等（利用  $|\lambda E - A|$ ）。
2. 判断矩阵是否可以相似对角化（先根据特征值拼出  $\Lambda$ ，然后求矩阵的秩是否也有同样数量的特征向量）。

**例题：**已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  和对角矩阵相似，求  $a$ 。

解：由于  $A$  是对角矩阵，所以特征值为其迹  $\lambda = (3, 2, 3)$ 。特征值有二重根。

已知  $A \sim \Lambda$ ， $\lambda = 3$  有两个线性无关的特征向量。即  $(3E - A)x = 0$  有两个线性无关的解。即  $r(3E - A) = 1$ 。

$$3E - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -a - 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \therefore a = -2.$$

## 2.5 抽象型

**例题：**设  $A$  是三阶矩阵， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是三维线性无关的列向量，且  $A\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$ ,  $A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ ，求  $A$  相似的矩阵。

解:  $A \sim \Lambda$ , 则  $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

$$\text{记 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

又  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是三维线性无关的列向量,  $\therefore |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$ , 所以  $P$  可逆。

$\therefore AP = PB, P^{-1}AP = B, A \sim B$ 。

## 2.6 正交相似

$$\text{例题: 已知 } A \text{ 是三阶实对称矩阵, 若正交矩阵 } Q \text{ 使得 } Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

如果  $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$  和  $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$  是矩阵  $A$  属于特征值  $\lambda = 3$  的特征向量, 求  $Q$ 。

解: 首先由正交矩阵就可以知道各特征值正交。令  $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ 。对应的  $\lambda_3 = 6$ 。

$\alpha_3^T \alpha_1 = x_1 - x_3 = 0, \alpha_3^T \alpha_2 = x_2 + x_3 = 0$ , 求  $\lambda_3$  的特征值, 则不如令  $x_3 = 1$ , 则解得  $\alpha_3 = (1, -1, 1)^T$ 。

$$\text{这样 } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 还需要将 } Q \text{ 正交单位化。可知 } \alpha_3 \text{ 根据正交规}$$

律求出来, 一定是正交的, 而  $\alpha_1^T \alpha_2 = -1 \neq 0$  所以需要正交。

$$\text{令 } \beta_1 = \alpha_1 = (1, 0, -1)^T, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = (0, 1, 1)^T + \frac{1}{2}(1, 0, -1)^T = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)^T。$$

$$\text{最后对整个 } Q \text{ 进行单位化: } \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T。$$