

无穷级数

Didnelpsun

目录

1	常数项级数	1
1.1	概念	1
1.1.1	基本概念	1
1.1.2	性质	1
1.2	级数敛散性判别	2
1.2.1	正项级数	2
1.2.1.1	概念	2
1.2.1.2	收敛原则	2
1.2.1.3	比较判别法	2
1.2.1.4	比较判别法极限性质	3
1.2.1.5	比值判别法	3
1.2.1.6	根值判别法	4
1.2.2	交错级数	4
1.2.2.1	概念	4
1.2.2.2	莱布尼兹判别法	4
1.2.3	任意项级数	5
1.2.3.1	概念	5
1.2.3.2	绝对收敛	5
1.2.3.3	条件收敛	5
2	幂级数	6
2.1	概念	6
2.1.1	定义	6

2.1.2	阿贝尔定理	7
2.1.3	收敛域	7
2.1.3.1	具体型	7
2.1.3.2	抽象型	8
2.2	幂级数求和函数	9
2.2.1	概念	9
2.2.2	运算法则	9
2.2.3	性质	10
2.2.4	重要展开式	10
2.3	函数展开为幂级数	11
2.3.1	概念	11
2.3.2	求法	11
2.3.2.1	直接法	11
2.3.2.2	间接法	11
3	傅里叶级数	11
3.1	* 三角级数	11
3.2	函数展开为傅里叶级数	12

1 常数项级数

1.1 概念

级数的经典悖论为芝诺悖论。

1.1.1 基本概念

定义：给定义一个无穷数列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ，将其各项用加号连起来的得到的记号 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ 叫做无穷级数，简称级数，其中 u_n 称为该级数的通项。

若 u_n 是常数而不是函数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 就被称为常数项无穷级数，简称常数项级数。

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ 称为级数的部分和， $\{S_n\}$ 是级数的部分和数量。

定义：若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，并称 S 为该收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和；若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在或为 $\pm\infty$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

研究 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛还是发散，就是研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 去掉前 m 项，得 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots$ ，称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 m 项后余项

1.1.2 性质

1. 线性性质：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，且其和分别为 S ， T ，则任给常数 a, b ，有 $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$ 也收敛，且其和为 $aS + bT$ ，即 $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n + b \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 。
2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则其任意 m 项后余项 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 也收敛；若存在 m 项后余项 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。
3. 级数收敛必要条件：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 首先，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

证明性质三： $u_n = S_n - S_{n-1}$ ，所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$ 。极限为 0 不一定收敛。

1.2 级数敛散性判别

1.2.1 正项级数

1.2.1.1 概念

定义：若通项 $u_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数。

1.2.1.2 收敛原则

定理：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界。（某一函数在固定区间内变化率是有界的，则变化范围是有界的）

证明：必要性：由于 $u_n \geq 0$ ， $\therefore S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \geq 0$ ，且 $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$ ， $\{S_n\}$ 单调不减且下界为 0。当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时， $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在，则 $\{S_n\}$ 必有上界。有上界下界则 $\{S_n\}$ 有界。（某一函数在固定区间内变化率是有界的，则变化范围是有界的）

充分性：由于 $\{S_n\}$ 单调不减，所以根据单调有界准则， $\{S_n\}$ 收敛，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在，于是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

基本就是使用放缩法判断是否有界。

定理：等比级数（几何级数）： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a} q^{n-1} \begin{cases} |q| < 1, \text{收敛} \\ |q| \geq 1, \text{发散} \end{cases}$ 。

例题：判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性。

解： $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\sqrt{n} \rightarrow \infty$ ，无上界所以发散。

1.2.1.3 比较判别法

定理：给出两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ，若从某项开始有 $u_n \leq v_n$ 成立，则：

①若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；②若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散。
即大的收敛小的也收敛，小的发散大的也发散。

例题：判断调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性。

解： $\because x > 0, x > \ln(1+x), \therefore \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 。

又对于 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$ 。

$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$ 。当 $\ln(n+1)$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时， $S_n \rightarrow \infty$ 。

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也发散。

定理: p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} p > 1, \text{收敛} \\ p \leq 1, \text{发散} \end{cases}$ 。

1.2.1.4 比较判别法极限性质

是比较判别法的推论, 利用极限的阶数来比较。

给出两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n \neq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$:

1. 若 $A = 0$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。
2. 当 $A = +\infty$, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。
3. 若 $0 < A < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 具有相同敛散性。

例题: 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$ 敛散性。

解: 令 $\frac{1}{n} = x$, $n \rightarrow \infty$ 所以 $x \rightarrow 0^+$ 。当 $x \rightarrow 0^+$, $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ 。
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{6} \neq 0$, 所以 $\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n^3}$ 具有相同敛散性。

根据 p 级数定理, $p = 3 > 1$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$ 收敛。

1.2.1.5 比值判别法

也称为达朗贝尔判别法。

定理: 给出一正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则: ①若 $\rho < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; ②若 $\rho > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

注意: $\rho = 1$ 时无法根据此判断 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛。

适用于含有 a^n , $n!$, n^n 的通项。

例题: 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n n!}{n^n}$ 的敛散性, 其中 a 为非零常数。

解: 记 $u_n = \frac{|a|^n n!}{n^n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = |a| e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n}{n+1}} = |a| e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n}{n+1} - 1\right)} = |a| e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)} = |a| e^{-1} = \frac{|a|}{e}$ 。

若 $0 < |a| < e$, 所以收敛; 若 $|a| > e$, 所以发散; 若 $|a| = e$, 则回代得到比值 $e \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow 1^+$, 且 $u_1 = e$, $\therefore u_n > u_1 > 0$, 所以发散。

1.2.1.6 根值判别法

也称为柯西判别法。

定理: 给出正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则①若 $\rho < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $\rho > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

适用于含有 a^n, n^n 的通项。

同理 $\rho = 1$ 也会失效。

例题: 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^3}$ 的敛散性。

解: 记 $u = \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^3}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(n \sin \frac{1}{n} - 1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}} = e^{-\frac{1}{6}} < 1$, 所以收敛。

1.2.2 交错级数

1.2.2.1 概念

定义: 若级数各项正负相间出现, 则这样的级数是交错级数, 一般写为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$, 其中 $u_n > 0$ 。

1.2.2.2 莱布尼兹判别法

定义: 给出一交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, $u_n > 0, n = 1, 2, \cdots$, 若 $\{u_n\}$ 单调不增 $u_n \geq u_{n+1}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则该级数收敛。

例题: 判断交错调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 的敛散性。

解: $\because \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 。

且 $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, 所以级数收敛。

例题: 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2})$ 的敛散性, 其中 a 为非零常数。

解: $\because \sin(\alpha + n\pi) = (-1)^n \sin \alpha$. $\therefore \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2}) = \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2} - n\pi + n\pi) = (-1)^n \sin \left(\frac{a^2 \pi}{\sqrt{n^2 + a^2} + n} \right)$ 。

记 $u_n = \sin\left(\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)$, 又 $n \rightarrow \infty$ 时 $\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n} \rightarrow 0^+$ 且单调不增, $\sin x$ 在 $x \rightarrow 0^+$ 时也是单调函数, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 且单调不增。

所以收敛。

例题: 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 的敛散性。

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n)}{1+n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$ 。

对 $\frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 进行比较有些麻烦, 所以令 $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ 。

$f'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) < 0$, $\{u_n\}$ 单调减少, 所以收敛。

1.2.3 任意项级数

1.2.3.1 概念

定义: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 各项可为正可为负, 可为零, 则这种级数就是任意项级数。

给任意项级数每一项加上绝对值 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$, 就得到了正项级数, 称为原级数的绝对值级数。

1.2.3.2 绝对收敛

定义: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 为任意项级数, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 绝对收敛。

1.2.3.3 条件收敛

定义: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 为任意项级数, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 条件收敛。

定理: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 必收敛。(绝对收敛则收敛)

定理: 收敛级数的项任意加括号后所得的新级数仍收敛, 且其和不变。

定理: 若原级数绝对收敛, 不论将其项如何排列, 则所得的新级数也收敛, 且其和不变。(绝对收敛的级数具有可交换性)

例题: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下面级数必收敛的是 ()。

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{u_n}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

解：对于 A ，取 $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ ，则原来 $\frac{u_n}{n} = (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$ 收敛，但是乘上 $(-1)^n$ 就不一定收敛，得到 $\frac{1}{n \ln n}$ 。

定理： 广义 p 级数： $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \begin{cases} p > 1, \text{收敛} \\ p \leq 1, \text{发散} \end{cases}$ 。（ $n=1$ 无意义，从 $n=2$ 开始不影响其敛散性）

所以 A 发散。

对于 B ，取 $u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ ，则 $u_n^2 = \frac{1}{n}$ ，调和级数不收敛。

对于 C ，取 $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ，则得到 $u_{2n-1} - u_{2n} = \frac{1}{n}$ ，调和级数不收敛。

对于 D ，由于 u_n 收敛，则 u_{n+1} 也收敛，所以相加也收敛，选 D 。

定理： 若 u_n^2 收敛，则 $\frac{u_n}{n}$ 绝对收敛。

证明：因为不等式 $|a||b| \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2}$ ， $\therefore 0 \leq |u_n \frac{1}{n}| \leq \frac{u_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2}$ 。

且 u_n^2 收敛，则 $\frac{u_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2}$ 也收敛，根据性质得证。

2 幂级数

2.1 概念

2.1.1 定义

定义： 设函数列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上，称 $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$ 为定义在区间 I 上的函数项级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ，当 x 取确定的值 x_0 时， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 成为常数项级数 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x_0)$ 。

定义： 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 为 n 次幂函数，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为幂级数，是一种常用的函数项级数，一般形式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$ ，其标准形式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ ，其中 a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 为幂级数的系数。

幂级数也称为泰勒级数，与泰勒展开式一样的结构。

定义： 若给定 $x_0 \in I$ ，有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，则称点 x_0 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点；若给定 $x_0 \in I$ ，有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 发散，则点 x_0 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散点。

2.1.2 阿贝尔定理

定义: 当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_1$ ($x_1 \neq 0$) 处收敛时, 对于满足 $|x| < |x_1|$ 的一切 x , 幂级数**绝对收敛**; 当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_2$ ($x_2 \neq 0$) 处发散时, 对于满足 $|x| > |x_2|$ 的一切 x , 幂级数**发散**。

所以一定存在一个点 R , 在 $|x| < |R|$ 中绝对收敛, 在 $|x| > |R|$ 中发散, R 称为**收敛半径**。对于点 $\pm R$ 需要代入幂级数变成常数项级数进行计算, 判别其敛散性。

2.1.3 收敛域

定义: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的所有收敛点的集合就是其**收敛域**。

2.1.3.1 具体型

收敛域的求法:

$$1. \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \text{ 则 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 收敛半径 } R \text{ 的表达式为 } \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}。$$

2. 开区间 $(-R, R)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间。

3. 代入 R 判断该点的敛散性, 最后组合得到收敛域。

但是这种方法有一点不方便, 如若只知道 a_n 和 a_{n+2} 的关系则求 $\rho = \frac{1}{R}$ 比较麻烦。

收敛域的统一求法:

1. 取绝对值 $|u_0(x)| \geq 0$, 从而可以使用正项级数的判别法。

2. 根据比值判别法或根值判别法, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \rho$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \rho$, 令其小于 1, 得到收敛区间 $x \in (a, b)$ 。

3. 单独讨论 $x = a$, $x = b$ 处的敛散性, 得到收敛域。

例题: 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域。

解: 令 $|u_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n} \right|$ 。由于含有 x^n , 所以使用比值判别法。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{n+1} \frac{n}{|x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x|。$$

令其小于 1, 即 $|x| < 1$, $-1 < x < 1$ 。

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{n}}$ 收敛。当 $x = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散。

所以 x 收敛域为 $[-1, 1)$ 。

2.1.3.2 抽象型

定理: 根据阿贝尔定理, 已知 $\lim_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在某点 x_1 ($x_1 \neq x_0$) 的敛散性, 确定该幂级数的收敛半径可分为三种情况:

1. 若在 x_1 处收敛, 则收敛半径 $R \geq |x_1 - x_0|$ 。
2. 若在 x_1 处发散, 则收敛半径 $R \leq |x_1 - x_0|$ 。
3. **注意:** 若在 x_1 处条件收敛, 则 $R = |x_1 - x_0|$ 。

定理: 已知 $\sum a_n(x-x_1)^n$ 的敛散性, 讨论 $\sum b_n(x-x_2)^m$ 的敛散性:

1. $(x-x_1)^n$ 与 $(x-x_2)^m$ 的转换一般通过初等变形来完成, 包括①平移收敛区间; ②提出或乘以因式 $(x-x_0)^k$ 等。
2. a_n 与 b_n 的转换一般通过微积分变形来完成, 包括①对级数逐项求导; ②对级数逐项积分等。
3. 以下三种情况, 级数收敛半径不变, 收敛域要具体代入点讨论:
 - (a) 对级数提出或乘以因式 $(x-x_0)^k$ 或进行平移等, 收敛半径不变。
 - (b) 对级数逐项求导, 收敛半径不变, 收敛域可能缩小。
 - (c) 对级数逐项积分, 收敛半径不变, 收敛域可能扩大。

例题: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 在点 $x=1$ 处条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 在点 $x=2$ 处 ()。

A. 绝对收敛 B. 条件收敛 C. 发散 D. 敛散性不确定

解: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-(-1))^n$, 所以 $x_0 = -1$ 。

又 $x=1$ 处条件收敛, 所以 $R = 1 - (-1) = 2$ 。从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 的收敛区间为 $(-3, 1)$ 。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 要转换为 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$, 则首先中心点要从 -1 移动到 1, $a_n(x+1)^n \rightarrow a_n(x-1)^n$, 由于平移不改变收敛半径, 所以 $a_n(x-1)^n$ 收敛区间为 $(1, 3)$ 。

然后将 $a_n(x-1)^n$ 变为 $na_n(x-1)^n$, 需要进行求导得到 $na_n(x-1)^{n-1}$, 求导收敛半径不变, 所以收敛区间依然为 $(1, 3)$ 。最后还要乘上 $(x-1)$ 得到 $na_n(x-1)^n$ 就是所求, 收敛区间依然为 $(1, 3)$ 。

而在 $x=2$ 在收敛区间内, 必然绝对收敛, 所以选 A。

2.2 幂级数求和函数

2.2.1 概念

定义: 在收敛域上, 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 并称 $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**。

2.2.2 运算法则

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b ($R_a \neq R_b$), 则:

- $k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} k a_n x^n$, $|x| < R$, k 为常数。
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$, $|x| < R = \min\{R_a, R_b\}$ 。

实际运算中, 可能运算法则要求的起始 n 值不同, $a_n b_n$ 不为不包含 x 的常数, x^n 的幂次不同, 恒等变形方法如下:

1. 通项, 下标一起变化: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k+l}^{\infty} a_{n-l} x^{n-l}$, 其中 l 为整数。
2. 只变下标, 只变通项: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_{k+l-1} x^{k+l-1} + \sum_{n=k+l}^{\infty} a_n x^n$ 。
3. 只变通项, 不变下标: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-l}$ 。

$$\begin{aligned} \text{如 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{2n+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} + \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n} &= a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^{2n}. \end{aligned}$$

2.2.3 性质

收敛域的扩大和缩小在于其端点是否通过求导或积分变得可取了。

- 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 I 上连续, 且如果幂级数在收敛区间的端点 $x = \pm R$ 处收敛, 则和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R]$ 或 $[-R, R)$ 上连续。
- 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积, 且有逐项积分公式 $\int_0^x S(t) dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (x \in I)$, 逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同收敛半径, 但是收敛域可能扩大。
- 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导, 且有逐项求导公式 $S'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (|x| < R)$, 逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同收敛半径, 但是收敛域可能缩小。

2.2.4 重要展开式

x 的取值指其幂指数的收敛域。第七个幂函数问题较复杂, 收敛区间与 α 取值有关。

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty。$
2. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1。$
3. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1。$
4. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \leq 1。$
5. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty。$
6. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty。$
7. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots,$

$$\begin{cases} x \in (-1, 1), \text{ 当 } \alpha \leq -1 \\ x \in (-1, 1], \text{ 当 } -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1, 1], \text{ 当 } \alpha > 0 \end{cases}$$

2.3 函数展开为幂级数

2.3.1 概念

定义：若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在任意阶导数，则称 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒级数，则 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 。

当 $x_0 = 0$ 时，称 $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$ 为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数，若收敛，则 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 。

都是函数展开成幂级数。

2.3.2 求法

2.3.2.1 直接法

逐个计算 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 并代入，但是一般很麻烦。

2.3.2.2 间接法

利用已知的七个幂级数展开式，通过变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分和待定系数等得到。

例题：求函数 $f(x) = \arctan x$ 在 $x = 0$ 处的幂级数展开。

解： $f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ ， $|x^2| < 1$ 。

已经求得求导后的函数的幂级数展开，所以求原函数的幂级数展开只需要积分，利用先导后积公式： $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 。

求导的级数要求 $|x| < 1$ ，代入 $x = \pm 1$ 到最后结果得到两个交错级数，所以收敛域其实为 $[-1, 1]$ （可以不写）。

3 傅里叶级数

3.1 * 三角级数

定义：将正弦函数 $A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ 按三角公式变形得到 $A_n \sin \varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos \varphi_n \sin n\omega t$ ，令 $\frac{a_0}{2} = A_0$ ， $a_n = A \sin \varphi_n$ ， $b_n = A \cos \varphi_n$ ， $\omega = \frac{\pi}{l}$ ，则

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right)$ 。这个级数就是三角级数。

3.2 函数展开为傅里叶级数

定义： 设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上连续或只有有限个第一类间断点，且至多只有有限个真正的极值点，则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛，记和函数为 $S(x)$ ，有

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)。$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n = 1, 2, \dots。$$

其中三角函数也可以展开为幂级数，所以最后都能通过幂级数展开。

例题： 将 $f(x) = 1 - x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 展开为傅里叶级数。

$$\text{解： } S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)。$$

$$\text{其中 } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - x^2) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x^2) dx = 2 - \frac{2}{3}\pi^2。$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - x^2) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos nx dx - \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \right) = \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1}。$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - x^2) \sin nx dx = 0 \quad (\text{奇函数乘偶函数为奇函数，且上下限对称})$$

$$f(x) \sim S(x) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1} \cos nx。$$

定义： 当 $f(x)$ 是偶函数，则 \sin 被消去， $f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$ ，称为余弦级数。

定义： 当 $f(x)$ 是奇函数，则 \cos 被消去， $f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$ ，称为正弦级数。

若 $f(x)$ 因为定义区间不对称导致无奇偶性，则补充定义域，使其称为奇偶函数。

$$\text{迪利克雷定理定义： } f(x) \sim S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \text{ 为间断点} \\ \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}, & x = \pm l \end{cases}$$