随机变量及其分布

Didnelpsun

目录

1 一维随机变量 **1**

1.1 随机变量概念 1

1.2 分布函数 1

1.2.1 概念 1

1.2.2 性质 1

1.2.3 应用 1

2 一维离散型随机变量 **2**

2.1 分布律 2

2.2 性质 2

2.3 应用 2

2.4 分布 3

2.4.1 0-1 分布 3

2.4.2 二项分布 3

2.4.3 泊松分布 3

2.4.4 几何分布 3

2.4.5 超几何分布 4

3 一维连续型随机变量 **4**

3.1 概率密度 4

3.2 性质 4

3.3 应用 4

3.4 分布 5

3.4.1 均匀分布 5

3.4.2 指数分布 5
3.4.3 正态分布 6

4 一维随机变量函数分布 7

4.1 离散型 7
4.2 连续性 8

5 多维随机变量 9

5.1 概念 9
5.2 联合分布函数 9
5.3 边缘分布函数 9

6 二维离散型随机变量 10

6.1 联合分布律 10
6.2 边缘分布律 10
6.3 条件分布律 10

7 二维连续型随机变量 11

7.1 联合概率密度 11
7.2 边缘概率密度 11
7.3 条件概率密度 11
7.4 二维均匀分布 12
7.5 二维正态分布 12

8 随机变量独立性 12

8.1 概念 12
8.2 充要条件 12
8.3 性质 12

9 二维随机变量函数分布 12

9.1 离散型 12
9.2 连续型 12
9.3 混合型 12

1　一维随机变量

1.1　随机变量概念

定义：随机变量就是其值会随机而定的变量。设随机试验 E 的样本空间 $\Omega = \omega$，如果对每一个 ω 都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应，并且对任意实数 x，$\{\omega|X(\omega) \leqslant x, \omega \in \Omega\}$ 是随机事件，则称定义在 Ω 上的实值单值函数 $X(\omega)$ 为**随机变量**，记为随机变量 X。

1.2　分布函数

1.2.1　概念

定义：设 X 为随机变量，x 为任意实数，称函数 $F(x) = P\{X \leqslant x\}$（$x \in R$ 且取遍所有实数）为随机变量 X 的分布函数，或称 X 服从分布 $F(x)$，记为 $X \sim F(x)$。（随着 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$，$X(\omega)$ 到 $\varnothing$ 到 Ω）

1.2.2　性质

同样是分布函数的充要条件：

- $F(x)$ 是 x 的单调不减函数，即对任意实数 $x_1 < x_2$，有 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$。
- $F(x)$ 是 x 的右连续函数，即对任意 $x_0 \in R$，有 $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0 + 0) = F(x_0)$。（左空心右实心）
- $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$，$F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$。

1.2.3　应用

- $P\{X \leqslant a\} = F(a)$。
- $P\{X < a\} = F(a - 0)$。是指分布函数下该点左极限的概率值。
- $P(X = a) = F(a) - F(a-0)$。$\because P\{X \leqslant a\} = P\{X < a \cup X = a\} = P\{X < a\} + P\{X = a\}$，$\therefore P\{X = a\} = P\{X \leqslant a\} - P\{X < a\} = F(a) - F(a-0)$。

2 一维离散型随机变量

定义：若随机变量 X 只可能取有限个或可列各值 $x_1, x_2, \cdots$，则称 X 为离散型随机变量。

2.1 分布律

定义：$P\{X = x_i\} = p_i$，$i = 1, 2, \cdots$ 为 X 的**分布列**、**分布律**或**概率分布**，记为 $X \sim p_i$。

概率分布常用表格或矩阵表示：

X	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

或 $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$。

2.2 性质

数列 $\{p_i\}$ 是离散型随机变量的概率分布的充要条件是 $p_i \geqslant 0$（$i = 1, 2, \cdots$）且 $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$。

设离散型随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = x_i\} = p_i$，则 X 的分布函数 $F(x) = P\{X \leqslant x\} = \sum\limits_{x_i \leqslant x} P\{X = x_i\}$，即离散型随机变量的分布律函数是一个左实右空的阶梯形函数。

$P\{X = x_i\} = P\{X \leqslant x_i\} - P\{X < x_i\} = F(x_i) - F(x_i - 0)$，即某点的概率值为该点分布律值减去该点左极限的分布律值。

对实数轴上的任一集合 B 有 $P\{X \in B\} = \sum\limits_{x_i \in B} P\{X = x_i\}$，特别地 $P\{a < X \leqslant b\} = P\{X \leqslant b\} - P\{X \leqslant a\} = F(b) - F(a)$。

2.3 应用

例题：已知随机变量 X 的概率分布为：

X	1	2	3
$P\{X = k\}$	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

且 $P\{X \geqslant 2\} = \dfrac{3}{4}$，求未知参数 θ 与 X 的分布函数 $F(x)$。

解：$\because P\{X \geqslant 2\} = \dfrac{3}{4}$，$\therefore 2\theta(1-\theta) + (1-\theta)^2 = \dfrac{3}{4}$，解得 $\theta = \dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$ 舍。

2.4 分布

2.4.1 0-1 分布

定义：若 X 的概率分布为 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$，即 $P\{X=1\}=p$，$P\{X=0\}=1-p$，则称 X 服从参数为 p 的 0-1 分布，记为 $X \sim B(1,p)$（$0<p<1$）。

0-1 分布基于一次伯努利试验，X 也称为伯努利计数变量。

2.4.2 二项分布

定义：如果 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$（$k=0,1,\cdots,n$，$0<p<1$），则称 X 服从参数为 (n,p) 的**二项分布**，记为 $X \sim B(n,p)$。

二项分布基于 n 重伯努利试验。

二项分布的分布律计算，总共进行试验 n 次，已知成功的概率为 p，若成功了 k 次，则 k 次成功概率为 p^k，则失败次数为 $n-k$，从而 $n-k$ 失败概率为 $(1-p)^{n-k}$，因为 n 次试验都是相互独立的，所以将成功的概率与失败的概率乘在一起。又在 n 次中成功 k 次就可以了，进行排列，所以还乘上 C_n^k。

2.4.3 泊松分布

定义：如果 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$（$k=0,1,\cdots,n$，$\lambda>0$），则称 X 服从参数为 λ 的**泊松分布**，记为 $X \sim P(\lambda)$。

泊松分布基于某场合某单位时间内源源不断的质点来流的个数 $X=k$，λ 代表质点流动到来的强度。也可以代表稀有事件发生的概率。

2.4.4 几何分布

定义：如果 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$（$k=0,1,\cdots,n$，$0<p<1$），则称 X 服从参数为 p 的**几何分布**，记为 $X \sim G(p)$。

几何分布与几何无关，代表的是 n 重伯努利试验首次成功就停止试验，试验次数可以为无穷。设 X 表示伯努利试验中事件 A 首次放生所需要的试验次数，则 $X \sim G(p)$，其中 $p=P(A)$。

从而根据意义，几何分布要求前 $k-1$ 次都失败，从而概率为 $(1-p)^{k-1}$，最后一次成功，所以再乘上 p。

2.4.5 超几何分布

定义：如果 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$（$\max\{0,n-N+M\}\leqslant k\leqslant \min\{MM,n\}$，$M,N,n$ 为正整数且 $M\leqslant N$，$n\leqslant N$，k 为整数），则称 X 服从参数为 (n,N,M) 的**超几何分布**，记为 $X\sim H(n,N,M)$。

超几何分布考的可能性很小，事件数就是古典概型的一个特例。

如有 N 件产品，其中 M 件正品，从而 $N-M$ 件次品，任取 n 个，则取出 k 件正品的概率就是超几何分布。

3 一维连续型随机变量

定义：若随机变量 X 的分布函数可以表示为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$（$x\in R$ 且取遍所有实数），其中 $f(x)$ 是非负可积函数，则 X 为**连续型随机变量**。

3.1 概率密度

定义：$f(x)$ 称为 X 的**概率密度函数**，简称**概率密度**，记为 $X\sim f(x)$。

3.2 性质

改变 $f(x)$ 有限各点的值 $f(x)$ 仍是概率密度（因为单个点没有面积），$f(x)$ 为某一随机变量 X 的概率密度的充分必要条件：$f(x)\geqslant 0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$。

若 X 为连续型随机变量，$X\sim f(x)$，则对任意实数 c 有 $P\{X=c\}=0$。

对实数轴上的任一集合 B 有 $P\{X\in B\}=\int_B f(x)\,\mathrm{d}x$，特别地 $P\{a<X<b\}=P\{a\leqslant X<b\}=P\{a<X\leqslant b\}=P\{a\leqslant X\leqslant b\}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$。

3.3 应用

例题：已知随机变量 X 的概率密度为 $\begin{cases} Ax, & 1<x<2 \\ B, & 2\leqslant x<3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，且 $P\{1<X<2\}=P\{2<X<3\}$，求常数 AB，分布函数 $F(x)$ 以及概率 $P\{2<X<4\}$。

解：由于归一性 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$，$\therefore \int_1^2 Ax\,\mathrm{d}x+\int_2^2 B\,\mathrm{d}x=1$。

$\therefore \dfrac{3}{2}A+B=1$。又 $P\{1<X<2\}=P\{2<X<3\}$。

$\therefore \int_1^2 Ax\,\mathrm{d}x = \int_2^3 B\,\mathrm{d}x$，即 $\therefore \int_1^2 Ax\,\mathrm{d}x = \int_2^2 B\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$，$A = \frac{1}{3}$，$B = \frac{1}{2}$。

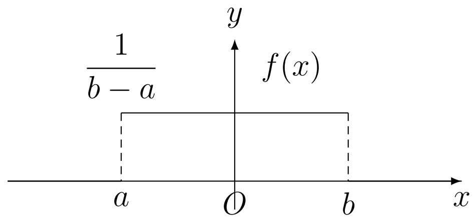
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x, & 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2}, & 2 \leqslant x < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}，\because F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t。$$

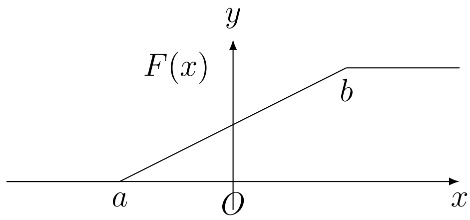
$$\therefore F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \int_1^x \frac{1}{3}t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6}, & 1 \leqslant x < 2 \\ \int_1^2 \frac{1}{3}x\,\mathrm{d}x + \int_2^x \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & 2 \leqslant x < 3 \\ 1, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

3.4 分布

3.4.1 均匀分布

定义：如果 X 的概率密度或分布函数分别为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b \\ 1, & x \geqslant b \end{cases}$，则称 X 在区间 (a,b) 上服从**均匀分布**，记为 $X \sim U(a,b)$。



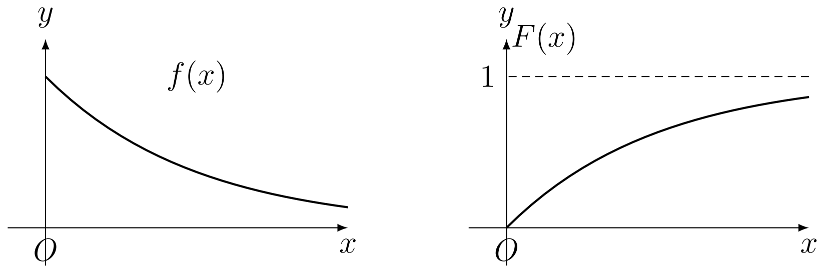


几何概型在一维情况下就是几何分布。

若 X 在区间 I 上的任一子区间取值的概率与该子区间的长度成正比，则 $X \sim U(a,b)$。

3.4.2 指数分布

定义：如果 X 的概率密度或分布函数分别为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$，则称 X 在区间 (a,b) 上服从参数为 λ 的**指数分布**，记为 $X \sim E(\lambda)$。



指数分布中 λ 代表失效率，往往用来代表一个事物毁坏的过程，如灯泡毁坏。

定理：无记忆性：若 X 服从指数分布，则 $P\{X>s+t|X>s\}=P\{X>t\}$。

即在指数分布下事情发生的概率与前面所经过的时间无关，如果 T 是某一元件的寿命，已知元件使用了 t 小时，它总共使用至少 $s+t$ 小时的条件概率，与从开始使用时算起它使用至少 s 小时的概率相等。

证明：$P\{X>s+t|X>s\}=\dfrac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}=\dfrac{1-P\{X\leqslant s+t\}}{1-P\{X\leqslant s\}}$

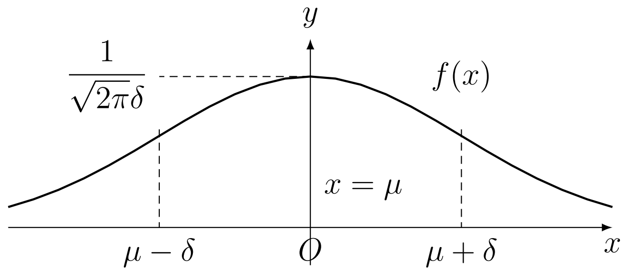
$=\dfrac{1-F(s+t)}{1-F(x)}=\dfrac{1-(1-e^{-\lambda(s+t)})}{1-(1-e^{-\lambda s})}=\dfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=1-(1-e^{-\lambda t})$

$=1-F(t)=1-P\{X\leqslant t\}=P\{X>t\}$。

3.4.3 正态分布

定义：如果 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$（$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<\mu<+\infty$，$\delta>0$），则称 X 服从参数为 (μ,δ^2) 的**正态分布**，称 X 为**正态变量**，记为 $X\sim N(\mu,\delta^2)$。

$f(x)$ 的图形关于 $x=\mu$ 对称，即 $f(\mu-x)=f(\mu+x)$，并在 $x=\mu$ 处有唯一最大值 $f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}$。$\mu-\delta$ 和 $\mu+\delta$ 为拐点。



当 $\mu=0$，$\delta=1$ 时的正态分布 $N(0,1)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 为**标准正态分布**，记为 $\phi(x)$，分布函数为 $\varPhi(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$。$\phi(x)$ 为偶函数，$\varPhi(0)=\dfrac{1}{2}$，$\varPhi(-x)=1-\varPhi(x)$。

若 $X\sim N(0,1)$，$P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha$，则称 μ_α 为标准正态分布的**上侧 α 分位数/上 α 分位点**。

若 $X \sim N(\mu, \delta^2)$，则

- $F(x) = P\{X \leqslant x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\delta} \leqslant \frac{x-\mu}{\delta}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)$。（标准化）
- $F(\mu - x) + F(\mu + x) = 1$。
- $P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\delta}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\delta}\right)$。（标准化得到）
- $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\theta^2)$（$a \neq 0$）。

4 一维随机变量函数分布

设 X 为随机变量，函数 $y = g(x)$，则以随机变量 X 作为自变量的函数 $Y = g(X)$ 也是随机变量，称为**随机变量 X 的函数**。

如 $Y = aX^2 + bX^+c$ 等等。

4.1 离散型

设 X 为离散型随机变量，其概率分布为 $p_i = P\{X = x_i\}$（$i = 1, 2, \cdots$），则 X 的函数 $Y = g(X)$ 也是离散型随机变量，其概率分布为 $P\{Y = g(x_i)\} = p_i$（$i = 1, 2, \cdots$）。

即 $Y \sim \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$。

若有若干个 $g(x_i)$ 相同，则合并为一项，并将对应概率相加作为 Y 取 $g(x_i)$ 的概率。

离散型一维随机变量函数分布单独考的可能性很低。

例题：设 X 是仅可能取 6 个值的离散型随机变量，分布为：

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0.05	0.15	0.20	0.25	0.20	0.15

求 $Y = 2X + 1$，$Z = X^2$ 的概率分布。

因为 $Y = 2X + 1$ 是线性的，所以改变 X 变为 Y，所对应的 P 不变：

Y	-3	-1	1	3	5	7
P	0.05	0.15	0.20	0.25	0.20	0.15

对于 $Z = X^2$ 是一个平方，导致 Z 的值有些是一样的，所以概率合在一起：

Z	0	1	4	9
P	0.20	0.40	0.25	0.15

4.2 连续性

设 X 为离散型随机变量，其分布函数、概率密度为 $F_X(x)$ 与 $f_X(x)$，随机变量 $Y=g(X)$ 也是 X 的函数，则 Y 的分布函数或概率密度可用分布函数法得到 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=\int_{g(X)\leqslant y} f_X(x)\,\mathrm{d}x$。

若 $F_Y(y)$ 连续,且除有限个点外,$F_Y'(y)$ 存在且连续,Y 的概率密度为 $f_Y(y)=F_Y'(y)$。

首先已知 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，分布函数为 $F_X(x)$，已知 $Y=g(X)$，即 Y 对 X 的映射关系。现在要求 Y 的概率规律，即要求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 与分布函数 $F_Y(y)$。

先求分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}$，然后用 y 来表示 X，这是连续性随机变量函数分布的重点。

即 X 在以 y 表示的一个区间上,$X\in I_y$,所以解得 Y 分布函数 $\int_{I_y} f_X(x)\,\mathrm{d}x$。

例题：设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求随机变量 $Y=X^2+1$ 的分布函数。

解：求随机变量 $Y=X^2+1$ 的分布函数即求 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2+1\leqslant y\}$。即将 X^2+1 与 y 的概率关系解出，即求曲线 X^2+1 与直线 y 的关系。

根据 X 的概率密度函数，所以只有 $x\in[-1,1]$ 才有正概率，其他区间概率为 0，即不能取，将 Y 的取值范围划在 $[-1,1]$ 中。

又由 $f_X(x)$ 的关系知道 Y 的函数，是在 $[-1,1]$ 的属于 $[1,2]$ 的抛物线。

当 $y<1$ 时，$Y=X^2+1>1$ 恒成立，所以 $X^2+1\leqslant y$ 不可能发生，概率为 0，所以 $F_Y(y)=0$。

当 $y>2$ 时，$Y=X^2+1$ 在 $X\in[-1,1]$ 时 $Y\in[1,2]$，所以 $X^2+1\leqslant y$ 必然成立，所以所以 $F_Y(y)=1$。

当 $1<y<2$ 时，解出 $X^2+1\leqslant y$ 为 $X=\pm\sqrt{y-1}$，所以 $F_Y(y)=P\{-\sqrt{y-1}\leqslant X\leqslant\sqrt{y-1}\}=\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y-1}}^{0} 1+x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{y-1}} 1-x\,\mathrm{d}x=2\sqrt{y-1}-y+1$。

5 多维随机变量

5.1 概念

多维随机变量**定义：**如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是定义在同一个样本空间上的 n 个随机变量，则称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n **维随机变量**或 n **维随机向量**，X_i 为第 i 个分量。

当 $n = 2$ 时，(X, Y) 为**二维随机变量/二维随机向量**。

5.2 联合分布函数

定义：对任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为 n 元函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n\}$ 为 n 为随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**联合分布函数**。

当 $n = 2$ 时对任意的实数 xy 称二元函数 $F(x, y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}$ 为二维随机变量 (X, Y) 的**联合分布函数**，简称**分布函数**，记为 $(X, Y) \sim F(x, y)$。

性质：

- 单调性：$F(x, y)$ 是 xy 的单调不减函数。
- 右连续性：$F(x, y)$ 在右边连续。
- 有界性：当 x 或 y 趋向负无穷时值为 0，当 x 和 y 趋向正无穷时值为 1。
- 非负性：对任意 $x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$ 有 $P\{x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geqslant 0$。（由定义画图可知）

5.3 边缘分布函数

定义：设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$，随机变量 X, Y 的分布函数 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$ 分别称 (X, Y) 关于 X 与关于 Y 的**边缘分布函数**。

$F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x, Y < +\infty\} = \lim\limits_{y \to +\infty} P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = \lim\limits_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty)$。同理 $F_Y(y) = F(+\infty, y)$。

所以就可以通过联合分布函数推出边缘分布函数。

6 二维离散型随机变量

定义：若二维随机变量 (X,Y) 只能取有限或可列对值 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots$ 则称 (X,Y) 为**二维离散型随机变量**。

6.1 联合分布律

定义：$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$，$i,j=1,2,\cdots$ 为 (X,Y) 的**分布律**或随机变量 X 和 Y 的**联合分布律**，记为 $(X,Y)\sim p_{ij}$。

数列 $\{p_{ij}\}$，$i,j=1,2,\cdots$ 是某一二维离散型随机变量的概率分布的充要条件是 $p_{ij}\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$。

定义：若 p_{ij}，$i,j=1,2,\cdots$ 为 (X,Y) 的概率分布，则 (X,Y) 的**联合分布函数**为 $F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\sum\limits_{x_i\leqslant x}\sum\limits_{y_j\leqslant y}p_{ij}$。

联合分布函数是以 (x,y) 为定点的左下角平面上 (X,Y) 所有可能取值的概率的和。

设 G 是平面上某个区域，则 $P\{(X,Y)\in G\}=\sum\limits_{(x_i,y_j)\in G}p_{ij}$。

6.2 边缘分布律

定义：对于同一个 x 值的所有 y 取值的概率的和，就是该 x 值的**边缘分布律**。同理对于同一个 y 值的所有 x 取值的概率的和，就是该 y 值的**边缘分布律**。

即 $p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}$（$i=1,2,\cdots$）。

$p_{\cdot j}=P\{Y=y_i\}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij}$（$j=1,2,\cdots$）。

6.3 条件分布律

条件分布律类比随机事件概率中的条件概率。

定义：如果 $(X,Y)\sim p_{ij}$（$i,j=1,2,\cdots$），对固定的 j，如果 $p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}>0$，则称 $P\{X=x_i|Y=y_j\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$（$i=1,2,\cdots$）为 X 在 $Y=y_j$ 条件下的**条件分布**。

同理定义：Y 在 $X=x_i$ 条件下的**条件分布**为 $P\{Y=y_j|X=x_i\}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$（$j=1,2,\cdots$）。

7　二维连续型随机变量

定义：如果二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$ 可表示为 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，（$(x,y)\int R^2$），其中 $f(x,y)$ 为非负可积函数，则称 (X,Y) 为**二维连续型随机变量**，$f(x,y)$ 为 (X,Y) 的**概率密度**，记为 $(X,Y)\sim f(x,y)$。

二元函数 $f(x,y)$ 是概率密度的充要条件 $f(x,y)\geqslant 0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$。

改变 $f(x,y)$ 有限个点值（仍取非负值），$f(x,y)$ 仍是概率密度。

7.1　联合概率密度

定义：设 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，概率密度为 $f(x,y)$，则

- $F(x,y)$ 为 (x,y) 的二元连续函数，且 $F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$。
- 设 G 为平面上某个区域，则 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。
- 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，则 $\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$。
- 若 $F(x,y)$ 连续可导，则 (X,Y) 是连续型随机变量，则 $\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$ 是其概率密度。

7.2　边缘概率密度

定义：设 $(X,Y)\sim f(x,y)$，则 X 的边缘分布函数为 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u$，所以 X 为连续型随机变量，其概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y$，称 $f_X(x)$ 为 (X,Y) 关于 X 的**边缘概率密度**。同理 Y 也为连续型随机变量，其概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$。

7.3　条件概率密度

定义：设 $(X,Y)\sim f(x,y)$，边缘概率密度 $f_X(x)>0$，则称 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 为 Y 在 $X=x$ 条件下的**条件概率密度**。同理 X 在 $Y=y$ 条件下的条件概率密度为 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$。

若 $f_X(x)>0$，$f_Y(y)>0$，则有概率密度乘法公式 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)$。

定义：Y 在 $X=x$ 条件下的**条件分布函数**为 $F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{y}\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y$，同理 X 在 $Y=y$ 条件下的条件分布函数为 $F_{X|Y}(x|y)$

7.4 二维均匀分布

7.5 二维正态分布

8 随机变量独立性

8.1 概念

8.2 充要条件

8.3 性质

9 二维随机变量函数分布

9.1 离散型

9.2 连续型

9.3 混合型