多元函数积分学

Didnelpsun

目录

1 二重积分

1.1 概念

1.1.1 几何背景

二重积分的几何背景就是曲顶柱体的体积。定积分用极限的思想求出了二维平面的曲边梯形的面积，同样二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$。

被积函数 $f(x,y)$ 作为曲顶柱体在点 (x,y) 处柱体微元的高，用底面积 $\mathrm{d}\sigma>0$ 乘上高 $f(x,y)$ 就得到一个小柱体体积，再把所有 D 上的柱体相加起来就是整个曲顶柱体的体积。

1.1.2 性质

- 求区域面积：$\iint\limits_D 1\cdot\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=A$，其中 A 为 D 的面积。
- 可积函数必有界：当 $f(x,y)$ 在有界闭区间 D 上可积时，$f(x,y)$ 在 D 上必有界。
- 积分线性性质：k_1,k_2 为常数，则 $\iint\limits_D [k_1f(x,y)\pm k_2g(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ $\pm k_2\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$。
- 积分可加性：当 $f(x,y)$ 在有界闭区间 D 上可积时，且 $D_1\cup D_2=D$，$D_1\cap U_2=\varnothing$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$。
- 积分保号性：当 $f(x,y),g(x,y))$ 在有界闭区间 D 上可积时，若在 D 上有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，特别 $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant$ $\iint\limits_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$。
- 二重积分估值定理：设 M,m，分别为 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的最大值和最小值，A 为 D 的面积，则有 $mA\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\leqslant MA$。
- 二重积分中值定理：设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，A 为 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η) 使得 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)A$。

例题：设 $I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant1\}$，则 ()。

$A.I_3>I_2>I_1$　　$B.I_1>I_2>I_3$　　$C.I_2>I_1>I_3$　　$D.I_3>I_1>I_2$

解：令 $x^2+y^2=t$，$\therefore 0<t\leqslant 1$。所以 $1\geqslant\sqrt{t}\geqslant t\geqslant t^2\geqslant 0$。

又 $\cos x$ 单调减，所以 A。

1.1.3 对称性

普通对称性**定义**：设 D 关于 y 轴对称，$I=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，将 D 分为对称的两部分 D_1D_2，即 $I=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(-x,y)\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,y)\end{cases}$。关于 x 轴对称也同理。

轮换对称性**定义**：xy 对调后区域 D 不变或关于 $y=x$ 对称，$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(y,x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$。类似积分值与积分变量无关。同理对于一元函数积分的不变性：$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$。

例题：设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$f(x)$ 在 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，求 $I=\iint\limits_D\dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma$。

解：由于被积函数是抽象的，所以无法直接计算。但是由于 D 是圆，xy 对调后 D 保持不败你，所以 D 关于 $y=x$ 对称，根据轮换对称性：

$$I=\iint\limits_D\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma。$$

$\therefore 2I=\iint\limits_D\dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D\dfrac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(a+b)\,\mathrm{d}\sigma=(a+b)\dfrac{\pi}{4}$。

解得 $I=\dfrac{a+b}{8}\pi$。

1.2 计算

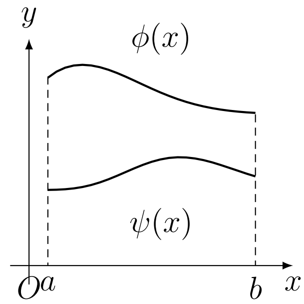
1.2.1 直角坐标系

后积先定限，先内画条线，先交写下限，后交写上限。

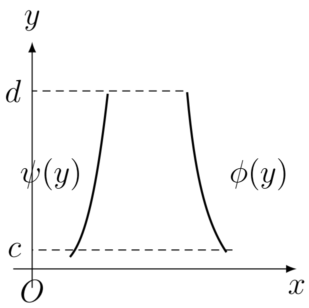
1.2.1.1 X 区域

也称为上下型区域。

$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$。



1.2.1.2 Y 区域



也称为左右型区域。

$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi(y)}^{\phi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$。

1.2.1.3 区域类型选择

若上下是两条曲线，那么就是 X 型，若左右是两条曲线，那么就是 Y 型。

若同一个方向的函数有两种不同的表达式，则从另一个方向将 D 按照函数分段割开求积分。

1.2.2 极坐标系

按积分区域与极点位置关系的不同，将二重积分计算分为三种情况：

根据 θ 按角度切割区间，然后从极点开始按 $\mathrm{d}r$ 切割，变成一个个类似矩形的图形。图形一边为切割半径的改变量 $\mathrm{d}r$，另一条边为圆弧，等于半径乘改变角度 $r\mathrm{d}\theta$，所以最后 $\mathrm{d}\sigma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$。

基本上都是先积 r 后积 θ。

从射线刚开始接触区域 D 的射线记为 $\theta = \alpha$，要离开区域 D 的射线记为 $\theta = \beta$，中间移动的射线为 $\theta = \theta$。$\theta = \alpha$ 与 $\theta = \beta$ 与 D 相交于两点，两点内靠近极点的 D 的边为**内曲线**，远离极点的边为**外曲线**。$\theta = \theta$ 与内曲线交于 $r = r_1(\theta)$，与外曲线交于 $r = r_2(\theta)$。

1. 极点 O 在区域 D 外部：$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$。
2. 极点 O 在区域 D 边上：$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$。

3. 极点 O 在区域 D 内部：$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$。

1.2.3 极坐标系与直角坐标系选择

若给出一个二重积分：

1. 被积函数是否为 $f(x^2+y^2)$、$f\left(\dfrac{y}{x}\right)$、$f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 等形式。

2. 积分区域是否为圆或圆的一部分。

3. 如果上面两种都有，则优先使用极坐标系，否则优先考虑直角坐标系。

1.2.4 极直互化

对于极坐标系转换到直角坐标系：$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$。

例题：设区域 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant R^2\}$，计算 $\iint\limits_{D}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

解：互换积分变量：$I = \iint\limits_{D}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D}\left(\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

$\therefore 2I = \left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\therefore I = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$。

根据公式三转换为极坐标系：$I = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int)^R r^2 r\,\mathrm{d}r$。

即 $I = \left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)\dfrac{\pi R^4}{4}$。

例题：计算 $I = \int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$。

解：根据上限 $\sqrt{1-x^2}$ 和 $1-x$ 所围成的图形 D 为第一象限的圆减去三角形。

所以转换为极坐标系时，对于 $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，对于 r 在 $(1-x, \sqrt{1-x^2})$。

下限 $x+y=1$，即 $r\cos\theta + r\sin\theta = 1$，解出 $r = \dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$，上限是一个圆，所以为 1。

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 \cos\theta+\sin\theta\,\mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta+\sin\theta-1\,\mathrm{d}\theta = 2-\dfrac{\pi}{2}$。

1.2.5 积分次序

积分次序即区域类型选择的问题，目的是为了简化计算，使得积分的函数更简单。

从另一方面，也很可能是积分函数无法按此次序进行积分，所以需要更换积分顺序。

存在许多有原函数但求不出初等函数形式的原函数。如 $\dfrac{\sin x}{x}$、$\dfrac{\cos x}{x}$、$\dfrac{\tan x}{x}$、$\dfrac{e^x}{x}$、$\sin x^2$、$\cos x^2$、$\tan x^2$、e^{ax^2+bx+c}、$\dfrac{1}{\ln x}$ 等。

例题：计算 $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$。

解：首先可以看出积分函数都是一样的，只是积分区域不同所以分开了，可见该函数的积分区域较复杂。

积分函数为 $\sin\dfrac{\pi x}{2y}$，若对 y 进行积分，则可以类比求 $\displaystyle\int \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$，这个是积分积不出来的。所以必须更换积分顺序。先积 x。

首先根据被积函数上下限得到积分区域：$\sqrt{x}$、x、2 围成的类三角形 $\mathrm{d}\sigma$。

$I = \displaystyle\iint\limits_D \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^{y^2} \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2y}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi y}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$。

1.2.6 二重积分处理一元积分

在面对有中间变量的一元积分时，可以使用二重积分。

例题：设 $f(x) = \int_x^1 \sin(\pi u^2)\,\mathrm{d}u$，求 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。（可以使用分部积分法）

解：$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \sin(\pi u^2)\,\mathrm{d}u$。又 $\sin(\pi u^2)$ 无法对 x 积分。

换做对 y 积分，$\mathrm{d}\sigma$ 为 $x=0$、$x=1$、$u=x$ 围成的三角形。交换积分次序：

$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^u \sin(\pi u^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\pi u^2) u\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^1 \sin(\pi u^2)\,\mathrm{d}(\pi u^2) = -\dfrac{1}{2\pi}\cos\pi u^2|_0^1 = -\dfrac{1}{2\pi}(-1-1) = \dfrac{1}{\pi}$。

例题：利用广义二重积分求 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$。

解：根据积分值与积分变量无关的性质：

$I^2 = (\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

$\mathrm{d}\sigma$ 是第一象限，可以看作一个广义的圆，半径无限大，转换为极坐标系。

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$。$\therefore I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$。

2 三重积分

3 曲线曲面积分