连续与间断

Didnelpsun

目录

1 连续

连续则极限值等于函数值。

1.1 求连续区间

若要考察一个函数的连续区间，必须要了解函数的所有部分，一般会给出分段函数，所以要了解分段函数的每段函数的性质。

对于函数 $f(x)$ 是个极限表达形式，我们要简化这个极限，最好得到一个 x 的表达式，从而才能判断其连续区间。

例题：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$，求函数连续区间。

注意到函数的形式为一个极限值，其极限趋向的变量为 n（$n\to\infty$ 指 $n\to+\infty$）。所以在该极限式子中将 x 当作类似 t 的常数。

需要先求出极限形式的 $f(x)$，而 x 变量的取值会影响到极限，且求的就是 x 的取值范围。所以将其分为三段：

当 $x<0$ 时，$nx\to-\infty$，$\therefore e^{nx}\to 0$，x^2 在这个极限式子为一个常数，$\therefore x^2e^{nx}\to 0$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}=\dfrac{x+0}{1+0}=x$。

当 $x=0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}=\dfrac{0}{2}=0$。

当 $x>0$ 时，e^{nx} 在 $n\to\infty$ 时为 ∞，上下都有这个无穷大的因子，所以上下都除以 e^{nx}，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{xe^{-nx}+x^2}{1+e^{-nx}}=\dfrac{0+x^2}{1}=x^2$。

从而得到了 $f(x)$ 关于 x 的表达式：

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$$

又 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2=f(0)=0$。

$f(x)$ 在 R 上连续。

1.2 已知连续区间求参数

一般会给出带有参数的分段函数，要计算参数就必须了解连续区间与函数之间的关系。

例题：$f(x)=\begin{cases} 6, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}, & x>0 \end{cases}$，$g(x)=\begin{cases} \dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}, & x<1 \\ e^{bx}+1, & x \geqslant 1 \end{cases}$，

若 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续，则求 a,b。

解：已知 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续，但是不能判断 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的连续性。

所以分开讨论。

对于 $f(x)$ 因为左侧为常数函数，所以若是 $f(x)$ 连续，则必然：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}=6$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}$$

令$t=\arcsin x \Rightarrow = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{a\sin^3 t}{\sin t-t}$

$$=a\lim_{x\to 0^+}\frac{t^3}{\sin t-t}$$

$$=a\lim_{x\to 0^+}\frac{3t^2}{\cos t-1}=-6a=6。$$

$\therefore a=-1$ 时 $f(x)$ 在 R 上连续。

对于 $g(x)$，当 $x<1$ 时，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{3\sin t}{t}=3$。

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^+}e^{bx}+1=e^b+1=3$。

$\therefore b=\ln 2$ 时 $g(x)$ 在 R 上连续。

$\therefore a=-1, b=\ln 2$ 时 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续。而 $a\neq -1$ 时 $f(x)+g(x)$ 在 $x=0$ 时不连续，$b\neq \ln 2$ 时 $f(x)+g(x)$ 在 $x=1$ 时不连续。

2 间断

2.1 求间断点

求间断点需要首先分析函数的表达形式。

例题：设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，求其间断点并分析其类型。

根据函数形式，我们需要首先回顾一下幂函数的性质，幂函数的变化趋势取决于底数。

当 $x=1$ 时，$x^n\equiv 1$，当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，当 $n\to\infty$ 时，$x^n\to\infty$，而 $x\in(-1,1)$ 时，当 $n\to\infty$ 时，$x^n\to 0$。

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)\\ 1, & x=1\\ x+1, & x\in(-1,1)\end{cases}$$

所以分段点为 $x=\pm 1$。

当 $x=-1$ 时，$f(-1^+)=f(-1^-)=f(-1)=0$，所以在此处连续。

当 $x=1$ 时，$f(1^+)=0\neq f(1^-)=2$，所以在此处简短，为跳跃间断点。

2.2 已知间断点求参数

这种题目已知间断点，而未知式子中的参数，只用将间断点代入式子并利用极限计算间断点的类型就可以了。

例题：$f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}$ 有无穷间断点 $x=e$，可去间断点 $x=1$，求 ab 的值。

已知有两个间断点 $x=a,x=b$，其中无穷间断点指极限值为无穷的点，可去间断点表示极限值存在且两侧相等，但是与函数值不相等的点。

已经给出两个间断点的值为 $x=1$ 和 $x=e$，所以 ab 必然对应其中一个，但是不清楚到底谁是谁。

当 $a=1,b=e$ 时，$f(x)=\dfrac{e^x-e}{(x-1)(x-e)}$。

当 $x\to 1$ 时，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{(x-1)(x-e)}=\dfrac{1}{1-e}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}=\dfrac{e}{1-e}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}=\dfrac{e}{1-e}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}=\dfrac{e}{1-e}$。

$\therefore x=1$ 为可去间断点。

当 $x\to e$ 时，$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^x-e}{(x-1)(x-e)}=\dfrac{1}{e-1}\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^x-e}{x-e}=\dfrac{e}{e-1}\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-e}=\dfrac{e}{e-1}\lim\limits_{x\to e}\dfrac{x-1}{x-e}=\dfrac{e(e-1)}{e-1}\lim\limits_{x\to e}\dfrac{1}{x-e}=\infty$。

$\therefore x=e$ 为无穷间断点。

当 $a=e,b=1$ 时，$f(x)=\dfrac{e^x-1}{(x-e)(x-1)}$。

而作为分子的 e^x-1 必然为一个常数，当式子趋向 1 或 e 的时候分母两个不等式中的一个不等式必然为一个常数，从而另一个不等式则变为了无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to e}f(x)=\infty$。

$\therefore a=1,b=e$。