

无穷级数

Didnelpsun

目录

1	常数项级数	1
1.1	概念	1
1.1.1	基本概念	1
1.1.2	性质	1
1.2	级数敛散性判别	2
1.2.1	正项级数	2
1.2.1.1	概念	2
1.2.1.2	收敛原则	2
1.2.1.3	比较判别法	2
1.2.1.4	比较判别法极限性质	3
1.2.1.5	比值判别法	3
1.2.1.6	根值判别法	4
1.2.1.7	积分判别法	4
1.2.2	交错级数	4
1.2.2.1	概念	4
1.2.2.2	莱布尼兹判别法	4
1.2.3	任意项级数	5
1.2.3.1	概念	5
1.2.3.2	绝对收敛	5
1.2.3.3	条件收敛	6
2	幂级数	7
2.1	概念	7

2.1.1	定义	7
2.1.2	阿贝尔定理	7
2.1.3	收敛域	7
2.1.3.1	具体型	7
2.1.3.2	抽象型	8
2.2	函数展开为幂级数	9
2.2.1	概念	9
2.2.2	重要展开式	10
2.2.3	求法	11
2.2.3.1	直接法	11
2.2.3.2	间接法	11
2.3	幂级数求和函数	11
2.3.1	概念	11
2.3.2	运算法则	11
2.3.3	性质	12
3	傅里叶级数	12
3.1	概念	12
3.1.1	* 三角级数	12
3.1.2	三角函数族	13
3.2	周期傅里叶级数	13
3.3	非周期傅里叶级数	14
3.3.1	$[-\pi, \pi]$	14
3.3.2	$[0, \pi]$	15
3.4	任意区间傅里叶级数	15

1 常数项级数

1.1 概念

级数的经典悖论为芝诺悖论。

1.1.1 基本概念

定义：给定义一个无穷数列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ，将其各项用加号连起来的得到的记号 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ 叫做无穷级数，简称级数，其中 u_n 称为该级数的通项。

若 u_n 是常数而不是函数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 就被称为常数项无穷级数，简称常数项级数。

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ 称为级数的部分和， $\{S_n\}$ 是级数的部分和数量。

定义：若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，并称 S 为该收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和；若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在或为 $\pm\infty$ ，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

研究 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛还是发散，就是研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性。

在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 去掉前 m 项，得 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots$ ，称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 m 项后余项

1.1.2 性质

1. 线性性质：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，且其和分别为 S ， T ，则任给常数 a, b ，有 $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$ 也收敛，且其和为 $aS + bT$ ，即 $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n + b \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 。（收敛 \pm 发散 = 发散，发散 \pm 发散 = 不确定）
2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则其任意 m 项后余项 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 也收敛；若存在 m 项后余项 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。
3. 对收敛级数加括号仍然收敛，但是加括号收敛原级数不一定收敛。如果原级数加括号发散，则原级数发散。
4. 级数收敛必要条件：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

证明性质三: $u_n = S_n - S_{n-1}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$ 。极限为 0 不一定收敛。

1.2 级数敛散性判别

1.2.1 正项级数

1.2.1.1 概念

定义: 若通项 $u_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数。

所以和项一定是递增的, 由数列极限的单调有界准则如果和有上界则极限存在。

1.2.1.2 收敛原则

定理: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界。(某一函数在固定区间内变化率是有界的, 则变化范围是有界的)

证明: 必要性: 由于 $u_n \geq 0, \therefore S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \geq 0$, 且 $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$, $\{S_n\}$ 单调不减且下界为 0。当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 则 $\{S_n\}$ 必有上界。有上界下界则 $\{S_n\}$ 有界。(某一函数在固定区间内变化率是有界的, 则变化范围是有界的)

充分性: 由于 $\{S_n\}$ 单调不减, 所以根据单调有界准则, $\{S_n\}$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

基本就是使用放缩法判断是否有界。

例题: 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性。

解: $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\sqrt{n} \rightarrow \infty$, 无上界所以发散。

由于收敛原则很多时候都不能方便使用, 所以出现了以下几种解决方法。

1.2.1.3 比较判别法

定理: 给出两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 若从某项开始有 $u_n \leq v_n$ 成立, 则:

①若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛; ②若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散。

即大的收敛小的也收敛, 小的发散大的也发散。

例题: 判断调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性。

解: $\because x > 0, x > \ln(1+x), \therefore \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 。

又对于 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$ 。

$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$ 。当 $\ln(n+1)$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时, $S_n \rightarrow \infty$ 。

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也发散。

1.2.1.4 比较判别法极限性质

是比较判别法的推论, 利用极限的阶数来比较。

给出两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, v_n \neq 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$:

1. 若 $A = 0$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。
2. 当 $A = +\infty$, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散。
3. 若 $0 < A < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 具有相同敛散性。

例题: 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$ 敛散性。

解: 令 $\frac{1}{n} = x, n \rightarrow \infty$ 所以 $x \rightarrow 0^+$ 。当 $x \rightarrow 0^+$, $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ 。

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{6} \neq 0$, 所以 $\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}$ 与 $\frac{1}{n^3}$ 具有相同敛散性。

根据 p 级数定理, $p = 3 > 1$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$ 收敛。

1.2.1.5 比值判别法

也称为达朗贝尔判别法。由等比级数推断出部分级数的敛散性只与自己的参数有关, 根据自己的通项的商进行比较。

定理: 给出一正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则: ①若 $\rho < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; ②若 $\rho > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

注意: $\rho = 1$ 时无法根据此判断 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛。

例题: 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^{n!}}{n^n}$ 的敛散性, 其中 a 为非零常数。

解: 记 $u_n = \frac{|a|^n n!}{n^n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = |a| e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n}{n+1}} = |a| e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{n}{n+1} - 1)} = |a| e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{n}{n+1})} = |a| e^{-1} = \frac{|a|}{e}$ 。

若 $0 < |a| < e$, 所以收敛; 若 $|a| > e$, 所以发散; 若 $|a| = e$, 则回代得到比值 $e \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{e}{(1 + \frac{1}{n})^n} \rightarrow 1^+$, 且 $u_1 = e$, $\therefore u_n > u_1 > 0$, 所以发散。

1.2.1.6 根值判别法

也称为柯西判别法。由比值判别法类比而来。

定理: 给出正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则①若 $\rho < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 若 $\rho > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

同理 $\rho = 1$ 也会失效。

例题: 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^3}$ 的敛散性。

解: 记 $u = \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^3}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(n \sin \frac{1}{n} - 1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}} = e^{-\frac{1}{6}} < 1$, 所以收敛。

1.2.1.7 积分判别法

定理: 设 $f(x)$ 是在 $[1, +\infty)$ 上单调递减且非负连续函数, $a_n = f(n)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同敛散。

例题: 证明 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 的敛散性。

证明: 令 $f(x) = \frac{1}{x^p}$, 又 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 在 $p > 1$ 收敛, 在 $p \leq 1$ 发散, 所以得到原级数敛散性。

1.2.2 交错级数

1.2.2.1 概念

定义: 若级数各项正负相间出现, 则这样的级数是交错级数, 一般写为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$, 其中 $u_n > 0$ 。

1.2.2.2 莱布尼兹判别法

定义：给出一交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, $u_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, 若 $\{u_n\}$ 单调不增 $u_n \geq u_{n+1}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则该级数收敛。反过来则不行。

如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛, 但是里面的 u_n 并不递减, 由根值判别法加绝对值可知 u_n 为不递减。

例题：判断交错调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 的敛散性。

解： $\because \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 。

且 $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, 所以级数收敛。

例题：判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2})$ 的敛散性, 其中 a 为非零常数。

解： $\because \sin(\alpha + n\pi) = (-1)^n \sin \alpha$ 。 $\therefore \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2}) = \sin(\pi \sqrt{n^2 + a^2} - n\pi + n\pi) = (-1)^n \sin\left(\frac{a^2 \pi}{\sqrt{n^2 + a^2} + n}\right)$ 。

记 $u_n = \sin\left(\frac{a^2 \pi}{\sqrt{n^2 + a^2} + n}\right)$, 又 $n \rightarrow \infty$ 时 $\frac{a^2 \pi}{\sqrt{n^2 + a^2} + n} \rightarrow 0^+$ 且单调不增, $\sin x$ 在 $x \rightarrow 0^+$ 时也是单调函数, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 且单调不增。

所以收敛。

例题：判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 的敛散性。

解： $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n)}{1+n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$ 。

对 $\frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 进行比较有些麻烦, 所以令 $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ 。

$f'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) < 0$, $\{u_n\}$ 单调减少, 所以收敛。

1.2.3 任意项级数

1.2.3.1 概念

定义：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 各项可为正可为负, 可为零, 则这种级数就是任意项级数。

给任意项级数每一项加上绝对值 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$, 就得到了正项级数, 称为原级数的绝对值级数。

添加绝对值会提高发散性, 因为不改变逼近 0 的速度, 而让各项之间不能抵消为 0。

1.2.3.2 绝对收敛

定义： 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 为任意项级数，若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 绝对收敛。

1.2.3.3 条件收敛

定义： 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 为任意项级数，若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 条件收敛。

定理： 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 必收敛。（绝对收敛则收敛）

定理： 收敛级数的项任意加括号后所得的新级数仍收敛，且其和不变。

定理： 若原级数绝对收敛，不论将其项如何排列，则所得的新级数也收敛，且其和不变。（绝对收敛的级数具有可交换性）

定理： 条件收敛的级数的所有正项（或负项）构成的级数一定发散。

定理： $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛。（ b_n 收敛则不能得到）

例题： 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则下面级数必收敛的是（ ）。

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

解：对于 A，取 $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ ，则原来 $\frac{u_n}{n} = (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$ 收敛，但是乘上 $(-1)^n$ 就不一定收敛，得到 $\frac{1}{n \ln n}$ 。

定理： 广义 p 级数： $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \begin{cases} p > 1, \text{收敛} \\ p \leq 1, \text{发散} \end{cases}$ 。（ $n=1$ 无意义，从 $n=2$ 开始不影响其敛散性）

所以 A 发散。

对于 B，取 $u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ ，则 $u_n^2 = \frac{1}{n}$ ，调和级数不收敛。

对于 C，取 $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ，则得到 $u_{2n-1} - u_{2n} = \frac{1}{n}$ ，调和级数不收敛。

对于 D，由于 u_n 收敛，则 u_{n+1} 也收敛，所以相加也收敛，选 D。

定理： 若 u_n^2 收敛，则 $\frac{u_n}{n}$ 绝对收敛。

证明：因为不等式 $|a||b| \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2}$ ， $\therefore 0 \leq |u_n \frac{1}{n}| \leq \frac{u_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2}$ 。

且 u_n^2 收敛，则 $\frac{u_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2}$ 也收敛，根据性质得证。

2 幂级数

2.1 概念

2.1.1 定义

定义: 设函数列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上, 称 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ 为定义在区间 I 上的函数项级数, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 当 x 取确定的值 x_0 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 成为常数项级数 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x_0)$ 。

定义: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 为 n 次幂函数, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为幂级数, 是一种常用的函数项级数, 一般形式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$, 其标准形式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$, 其中 a_n ($n=0, 1, 2, \cdots$) 为幂级数的系数。

幂级数也称为泰勒级数, 与泰勒展开式一样的结构。

定义: 若给定 $x_0 \in I$, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛, 则称点 x_0 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点; 若给定 $x_0 \in I$, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 发散, 则点 x_0 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散点。

2.1.2 阿贝尔定理

定义: 当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_1$ ($x_1 \neq 0$) 处收敛时, 对于满足 $|x| < |x_1|$ 的一切 x , 幂级数绝对收敛; 当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_2$ ($x_2 \neq 0$) 处发散时, 对于满足 $|x| > |x_2|$ 的一切 x , 幂级数发散。

所以一定存在一个点 R , 在 $|x| < |R|$ 中绝对收敛, 在 $|x| > |R|$ 中发散, R 称为收敛半径。对于点 $\pm R$ 需要代入幂级数变成常数项级数进行计算, 判别其敛散性。

2.1.3 收敛域

定义: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的所有收敛点的集合就是其收敛域。

2.1.3.1 具体型

收敛域的求法:

$$1. \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \text{ 则收敛半径 } R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}.$$

2. 开区间 $(-R, R)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间。

3. 代入 R 判断该点的敛散性，最后组合得到收敛域。

但是这种方法有一点不方便，如若只知道 a_n 和 a_{n+2} 的关系则求 $\rho = \frac{1}{R}$ 比较麻烦。

收敛域的统一求法：

1. 取绝对值 $|u_0(x)| \geq 0$ ，从而可以使用正项级数的判别法。

2. 根据比值判别法或根值判别法，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \rho$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \rho$ ，令其小于 1，得到收敛区间 $x \in (a, b)$ 。

3. 单独讨论 $x = a$ ， $x = b$ 处的敛散性，得到收敛域。

定理：若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ 处条件收敛，则点 x_0 在幂级数收敛区间的端点上。

例题：求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域。

解：令 $|u_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n} \right|$ 。由于含有 x^n ，所以使用比值判别法。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{n+1} \frac{n}{|x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x|。$$

令其小于 1，即 $|x| < 1$ ， $-1 < x < 1$ 。

当 $x = -1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛。当 $x = 1$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散。

所以 x 收敛域为 $[-1, 1)$ 。

2.1.3.2 抽象型

定理：根据阿贝尔定理，已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_0(x - x_0)^n$ 在某点 x_1 ($x_1 \neq x_0$) 的敛散性，确定该幂级数的收敛半径可分为三种情况：

1. 若在 x_1 处收敛，则收敛半径 $R \geq |x_1 - x_0|$ 。

2. 若在 x_1 处发散，则收敛半径 $R \leq |x_1 - x_0|$ 。

3. **注意**：若在 x_1 处条件收敛，则 $R = |x_1 - x_0|$ 。

定理：已知 $\sum a_n(x - x_1)^n$ 的敛散性，讨论 $\sum b_n(x - x_2)^m$ 的敛散性：

1. $(x - x_1)^n$ 与 $(x - x_2)^m$ 的转换一般通过初等变形来完成，包括①平移收敛区间；②提出或乘以因式 $(x - x_0)^k$ 等。
2. a_n 与 b_n 的转换一般通过微积分变形来完成，包括①对级数逐项求导；②对级数逐项积分等。
3. 以下三种情况，级数收敛半径不变，收敛域要具体代入点讨论：
 - (a) 对级数提出或乘以因式 $(x - x_0)^k$ 或进行平移等，收敛半径不变。
 - (b) 对级数逐项求导，收敛半径不变，收敛域可能缩小。
 - (c) 对级数逐项积分，收敛半径不变，收敛域可能扩大。

收敛域的扩大和缩小在于其端点是否通过求导或积分变得可取了。

例题：设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 在点 $x=1$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 在点 $x=2$ 处 ()。

A. 绝对收敛 B. 条件收敛 C. 发散 D. 敛散性不确定

解： $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - (-1))^n$ ，所以 $x_0 = -1$ 。

又 $x=1$ 处条件收敛，所以 $R = 1 - (-1) = 2$ 。从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 的收敛区间为 $(-3, 1)$ 。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 要转换为 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ ，则首先中心点要从 -1 移动到 1， $a_n(x+1)^n \rightarrow a_n(x-1)^n$ ，由于平移不改变收敛半径，所以 $a_n(x-1)^n$ 收敛区间为 $(1, 3)$ 。

然后将 $a_n(x-1)^n$ 变为 $na_n(x-1)^n$ ，需要进行求导得到 $na_n(x-1)^{n-1}$ ，求导收敛半径不变，所以收敛区间依然为 $(1, 3)$ 。最后还要乘上 $(x-1)$ 得到 $na_n(x-1)^n$ 就是所求，收敛区间依然为 $(1, 3)$ 。

而在 $x=2$ 在收敛区间内，必然绝对收敛，所以选 A。

2.2 函数展开为幂级数

2.2.1 概念

定义：若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在任意阶导数，则称 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的泰

勒级数, 则 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ 。

当 $x_0 = 0$ 时, 称 $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$ 为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数, 若收敛, 则 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 。

都是函数展开成幂级数。

定理: 已知 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处任意阶可导, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上收敛于 $f(x)$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 等价。其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ 在 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式 $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$ 中的余项。

2.2.2 重要展开式

x 的取值指其幂指数的收敛域。第七个幂函数问题较复杂, 收敛区间与 α 取值有关。

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^n}{n!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$ 。
2. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, -1 < x < 1$ 。
3. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, -1 < x < 1$ 。
4. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \leq 1$ 。
5. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$ 。
6. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$ 。
7. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$

$$\begin{cases} x \in (-1, 1), \text{当 } \alpha \leq -1 \\ x \in (-1, 1], \text{当 } -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1, 1], \text{当 } \alpha > 0 \end{cases}$$

其中第 1、3、5 都是直接的公式, 其他公式是根据其推出的。

2.2.3 求法

2.2.3.1 直接法

逐个计算 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 并代入，但是一般很麻烦。

2.2.3.2 间接法

利用已知的七个幂级数展开式，通过变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分和待定系数等得到。

例题：求函数 $f(x) = \arctan x$ 在 $x = 0$ 处的幂级数展开。

解： $f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, |x| < 1$ 。

已经求得求导后的函数的幂级数展开，所以求原函数的幂级数展开只需要积分，利用先导后积公式： $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 。

求导的级数要求 $|x| < 1$ ，代入 $x = \pm 1$ 到最后结果得到两个交错级数，所以收敛域其实为 $[-1, 1]$ （可以不写）。

2.3 幂级数求和函数

即函数展开的逆操作。

2.3.1 概念

定义：在收敛域上，记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ，并称 $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**。

2.3.2 运算法则

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b ($R_a \neq R_b$)，则：

- $k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} k a_n x^n, |x| < R, k$ 为常数。
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, |x| < R = \min\{R_a, R_b\}$ 。
- $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n$ 。

实际运算中，可能运算法则要求的起始 n 值不同， $a_n b_n$ 不为不包含 x 的常数， x^n 的幂次不同，恒等变形方法如下：

1. 通项, 下标一起变化: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k+l}^{\infty} a_{n-l} x^{n-l}$, 其中 l 为整数。

2. 只变下标, 只变通项: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_{k+l-1} x^{k+l-1} + \sum_{n=k+l}^{\infty} a_n x^n$ 。

3. 只变通项, 不变下标: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-l}$ 。

如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n} = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^{2n}$ 。

2.3.3 性质

- 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 I 上连续, 且如果幂级数在收敛区间的端点 $x = \pm R$ 处收敛, 则和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R]$ 或 $[-R, R)$ 上连续。

- 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积, 且有逐项积分公式 $\int_0^x S(t) dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ($x \in I$), 逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同收敛半径, 但是收敛域可能扩大。(逐项可积性)

- 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导, 且有逐项求导公式 $S'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ($|x| < R$), 逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同收敛半径, 但是收敛域可能缩小。(逐项可导性)(为什么求和函数后从 $n=1$ 开始? 因为 0 开始的是常数, 求导为 0)

3 傅里叶级数

3.1 概念

3.1.1 * 三角级数

周期函数可以由一个序列的正弦型函数叠加得到, 即周期函数图形可以由一个序列的正弦型曲线合成。

即 $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$, 这个级数就是三角级数。

3.1.2 三角函数族

$\{1, \sin nx, \cos nx\}$ ($n \in N^*$) 称为三角函数族, 在 $[-\pi, \pi]$ 区间上积分具有正交性:

- $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0。$
- $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0。$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = 0。$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = 0 \ (m \neq n)。$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx = 0 \ (m \neq n)。$
- $\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx = 2\pi。$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi。$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi。$

3.2 周期傅里叶级数

对于周期为 2π 的函数 $f(x)$, 是否可以被展开为 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 三角级数的形式? 其系数为多少? 定义域是多少?

迪利克雷充分条件 (迪利克雷收敛定理) **定义:** 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 若满足:

1. $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点。
2. $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上至多只有有限个真正的极值点。

则 $f(x)$ 可以被展开成 $f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 即 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数。

利用积分和三角函数族计算得到系数, a_n 、 b_n 称为傅里叶系数:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

当 x 为连续点时, 傅里叶级数 $S(x) = f(x)$, 当 x 为第一类间断点时, 傅里叶级数 $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, 即两端左右极限的平均值。

所以要注意原函数和其傅里叶级数并不是处处相等。

例题: 设以 2π 为周期的 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为 $\begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$,

对其傅里叶展开。

解: 首先作图, 可以看出 $(2k+1)\pi$ 为 $f(x)$ 间断点, $k \in \mathbb{Z}$ 。

然后计算系数, $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$ 。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{n\pi} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi},$$

当 $n = 2k - 1$ 时, 等于 $-\frac{2}{n^2\pi}$, 当 $n = 2k$ 时, 等于 0, $k \in \mathbb{Z}$ 。

$$\text{同理 } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

所以带入傅里叶系数:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{2}{\pi} \cdot \cos x + \sin x \right) - \frac{1}{2} \sin 2x + \left(-\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) + \cdots.$$

$x \in \mathbb{R}$ 且 $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 。

$$x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ 时, } S(x) = \frac{\pi}{2}.$$

3.3 非周期傅里叶级数

3.3.1 $[-\pi, \pi]$

假使 $f(x)$ 只定义于 $[-\pi, \pi]$, 则首先画图 $f(x)$ 的图像, 然后将 $f(x)$ 拓展为周期函数 $F(x)$, 将 $F(x)$ 展开为傅里叶级数, 然后判断两端端点是否包含, 如果 $F(x)$ 中两端端点连接起来就包括 $f(x)$ 区间端点, 否则不包括。

例题: 将 $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 展开为傅里叶级数。

第一步周期延拓为 $F(x)$, 画出 $F(x)$ 的图像。

计算傅里叶系数, $a_0 = \pi$; $a_n = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1]$, 当 n 为偶数, $a_n = 0$, 当 n 为奇数, $a_n = -\frac{4}{n^2\pi}$; $b_n = 0$ 。

所以 $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \cdots \right)$ ($-\pi \leq x \leq \pi$, 因为拓展后两端连接在一起)

注意: 根据最后的答案可以得出 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 。

3.3.2 $[0, \pi]$

1. 区间延拓 (在原区域的 y 轴对称区间上进行延拓, 延拓方式有奇延拓和偶延拓两种方式), 周期延拓。

2. 求傅里叶系数。

3. 奇延拓: $a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 。(正弦级数)

4. 偶延拓: $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx$, $b_n = 0$, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 。(余弦级数)

例题: 将 $f(x) = x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 进行傅里叶展开。

解:

对 $f(x)$ 进行偶延拓变为余弦级数:

画出图像, 然后计算系数: $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \pi$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1]$, 当 n 为偶数为 0, 为奇数则 $= -\frac{4}{n^2\pi}$ 。

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x \cdots \right)$, $0 \leq x \leq \pi$ 。(两端都连接上)

对 $f(x)$ 进行奇延拓变为正弦级数:

画出图像, 然后计算系数: $a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$ 。

$x = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ 。($0 \leq x < \pi$) (π 没有连接上)

3.4 任意区间傅里叶级数

定义: 将正弦函数 $A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ 按三角公式变形得到 $A_n \sin \varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos \varphi_n \sin n\omega t$, 令 $\frac{a_0}{2} = A_0$, $a_n = A_n \sin \varphi_n$, $b_n = A_n \cos \varphi_n$, $\omega = \frac{\pi}{l}$, 则 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi t}{l} \right)$ 。

则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛, 记起和函数为 $S(x)$, 有 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$ 。

$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx$, $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$, $n = 1, 2, \cdots$ 。

其中三角函数也可以展开为幂级数, 所以最后都能通过幂级数展开。

例题: 将 $f(x) = 1 - x^2$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) 展开为傅里叶级数。

解: $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$ 。

其中 $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1-x^2) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1-x^2) dx = 2 - \frac{2}{3}\pi^2$ 。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1-x^2) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos nx dx - \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \right) = \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1}。$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1-x^2) \sin nx dx = 0 \quad (\text{奇函数乘偶函数为奇函数, 且上下限对称})$$

$$f(x) \sim S(x) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^{n+1} \cos nx。$$

定义: 当 $f(x)$ 是偶函数, 则 \sin 被消去, $f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$, 称为余弦级数。

定义: 当 $f(x)$ 是奇函数, 则 \cos 被消去, $f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$, 称为正弦级数。

若 $f(x)$ 因为定义区间不对称导致无奇偶性, 则补充定义域, 使其称为奇偶函数。