矩阵

Didnelpsun

目录

1　矩阵幂

1.1　对应成比例

因为矩阵运算不满足交换率但是满足结合率，且一行矩阵乘一列矩阵的乘积为一个数，所以可以推出矩阵的幂的运算方法。

这个方法要求 $r(A)=1$，即对应成比例。

令 A 为 n 阶方阵，将 A 拆为 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\alpha^T\beta$，所以 $A^n=\alpha^T\beta\alpha^T\beta\cdots\alpha^T\beta$，利用结合率：$\alpha^T(\beta\alpha^T)(\beta\cdots\alpha^T)\beta$，中间一共 $n-1$ 个 $\beta\alpha^T$，$\beta\alpha^T$ 是一个数，即 $A^n=(\beta\alpha^T)^{n-1}\alpha^T\beta=(\beta\alpha^T)^{n-1}A$。

例题：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&-4&-6\\3&6&9\end{pmatrix}$，求 A^n。

解：$A=(1,-2,3)^T(1,2,3)$，所以 $A^n=((1,2,3)(1,-2,3)^T)^n(1,-2,3)^T(1,2,3)$ $=6^{n-1}A$。

若矩阵 A 的行与列都成比例，则 $A^n=[tr(A)]^{n-1}A$，$[tr(A)]=\sum a_{ii}$，即矩阵迹为对角线元素值之和。

1.2　试算归纳

对 A 进行试算，如 A^2，若 A^k 是一个数量阵，那么计算 A^n 就只用找规律就可以了。

例题：$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，求 A^n（$n\geqslant 2$）。

解：通过计算得知 $A^2=4E$，这是一个数量阵。

$\therefore A^n=\begin{cases}4^kE, & n=2k\\4^kA, & n=2k+1\end{cases}$。

1.3　拆分矩阵

将 A^n 拆分为两个矩阵 $A^n=(B+C)^n$,其中 BC 应该是可逆的,即 $BC=CB$，所以一般有一个是 E。

例题：$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 A^n。

解：$A=E+B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$。

$\therefore A^n=(E+B)^n=C_n^0E^n+C_n^1E^{n-1}B+C_n^2E^{n-2}B^2+\cdots$。

又 $B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$。

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$。

$\therefore B^4=B^5=\cdots=O$。

$\therefore A^n=(E+B)^n=C_n^0E^n+C_n^1E^{n-1}B+C_n^2E^{n-2}B^2$。

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

2 初等变换

2.1 可逆矩阵

若 A 和 B 等价，求一个可逆矩阵 P，使得 $PA=B$。只用右乘 $P=BA^{-1}$。需要根据逻辑上的计算还原出左乘的初等矩阵。

例题：$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&-4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，当 $A\sim B$ 时，求 P 使得 $PA=B$。.

解：目标是将 A 变为 B，所以第一步将第一列的第二行的-1 变为 0。即将第一行加到第二行。

左乘 $E_{21}(1)A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&-4\end{pmatrix}=C$。

然后对第二列进行消，首先将第三行加上第二行的两倍。

$E_{32}(2)C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&2\\0&2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}=B$。

$\therefore E_{32}(2)E_{21}(1)A=B$。

$P=E_{32}(2)E_{21}(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$。

3 逆矩阵

3.1 定义法

找出一个矩阵 B，使得 $AB=E$，则 A 可逆，$A^{-1}=B$。

例题：A，B 均是 n 阶方阵，且 $AB=A+B$，证明 $A-E$ 可逆，并求 $(A-E)^{-1}$。

解：要证明 $A-E$，就要从 $AB=A+B$ 中尽量凑出。

$AB=A+B$ 变为 $AB-B=A$，从而提取 $(A-E)B=A$，$(A-E)BA^{-1}=E$。

但是 A^{-1} 是未知的，所以 $A-E$ 的逆矩阵不能用 BA^{-1} 来表示。

$AB-A=B$，所以提出 $A(B-E)=B$，即 $A(B-E)=B-E+E$，$(A-E)(B-E)=E$，所以 $A-E$ 的逆矩阵就是 $B-E$。

3.2 分解乘积

将 A 分解为若干个可逆矩阵的乘积。若 $A=BC$，B，C 可逆，则 A 可逆，且 $A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$。

例题：设 A，B 为同阶可逆方阵，且 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，求 $(A+B)^{-1}$。

解：已知 $A^{-1}+B^{-1}$ 可以用来表示其他式子，需要求 $A+B$ 的逆，则需要将 $A+B$ 转为其逆。

$\because A+B=A(E+A^{-1}B)=A(B^{-1}+A^{-1})B$。

$\therefore (A+B)^{-1}=B^{-1}(B^{-1}+A^{-1})^{-1}A^{-1}$。

3.3 初等变换

$$\begin{bmatrix} A \vdots B \end{bmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{bmatrix} E \vdots A^{-1} \end{bmatrix}，\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}。$$

3.4 分块矩阵

基于拉普拉斯展开式。

对于一些分块矩阵的逆，若 A,B 都可逆，则：$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$。

例题：已知 $A = \begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}$，其中 B 为 $r \times r$ 可逆矩阵，C 为 $s \times s$ 可逆矩阵，求 A^{-1}。

解：$\because |A| = \begin{vmatrix} B & O \\ D & C \end{vmatrix} = |B||C| \neq 0$，所以 A 可逆，设 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$。

$AA^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = E_{r+s}$。即 $\begin{pmatrix} BX & BY \\ DX + CZ & DY + CW \end{pmatrix} = E_{r+s}$。

$$\therefore \begin{cases} BX = E \\ BY = O \\ DX + CZ = O \\ DY + CW = E \end{cases}，\begin{cases} B^{-1}BX = B^{-1}, & X = B^{-1} \\ B^{-1}BY = O, & Y = O \\ CZ = -DX = -DB^{-1}, & Z = -C^{-1}DB^{-1} \\ CW = E, & W = C^{-1} \end{cases}。$$

$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$。

当分块矩阵为三角矩阵时，对角线为原方块矩阵的逆矩阵，非 0 的一角为原矩阵，再左乘同行的逆矩阵，右乘同列的逆矩阵。

$\therefore A = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}$，$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$。

当分块矩阵为副对角矩阵时，对角线为对角方块矩阵的逆矩阵，非 0 的一角为原矩阵，再左乘同行的逆矩阵，右乘同列的逆矩阵。

$\therefore A = \begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}$，$A^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$。

$$\therefore A=\begin{pmatrix} D & B \\ C & O \end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \end{pmatrix}。$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_n^{-1} \end{pmatrix}。$$

$$A=\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \ddots & \\ A_n & & \end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix} & & A_n^{-1} \\ & \iddots & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}。$$

4　方阵行列式

4.1　两项积商

- $|A^T|=|A|$。
- $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$。
- $|\lambda A|=\lambda^n|A|$。
- $|AB|=|A|\cdot|B|=|BA|$。

因为两项积商比较简单，所以基本上会变换 A 和 B，让其变为转置或逆矩阵。

4.2　两项和差

两项和差需要将方阵拆分为向量组的形式，然后根据矩阵与行列式的运算法则进行运算。（注意其中的差别）

例题：设四阶方阵 $A=[\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$，$B=[\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$，其中 α、β、γ_i 均为四维向量，且 $|A|=5$，$|B|=-\dfrac{1}{2}$，求 $|A+2B|$。

解：$=|[\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]+2[\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]|=|[\alpha+2\beta,3\gamma_2,3\gamma_3,3\gamma_4]|=27|[\alpha+2\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]|=27|[\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]|+54|[\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]|=27(|A|+2|B|)=108$。

5　矩阵方程

含有未知矩阵的方程就是矩阵方程，需要将方程进行恒等变形，化为 $AX = B$、$XA = B$ 或 $AXB = C$ 的形式。

若 A、B 可逆，且可以分别得到 $X = A^{-1}B$，$X = BA^{-1}$，$X = A^{-1}CB^{-1}$。

例题：设 3 阶方阵 A，B 满足 $A^{-1}BA = 6A + BA$，且 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$，求 B。

解：$A^{-1}BA = (6E+B)A$，$A^{-1}B = 6E+B$，$A^{-1}B-B = 6E$，$(A^{-1}-E)B = 6E$。

$\therefore B = 6(A^{-1} - E)^{-1}$。