

# 函数与极限

Didnelpsun

## 目录

<b>1</b>	<b>函数</b>	<b>1</b>
1.1	中值定理 . . . . .	1
1.1.1	罗尔定理 . . . . .	1
1.1.1.1	直接式子 . . . . .	1
1.1.1.2	含参数式子 . . . . .	1
1.1.2	拉格朗日中值定理 . . . . .	2
1.1.2.1	对数函数特性 . . . . .	2
1.1.2.2	查找特定值 . . . . .	2
1.1.3	柯西中值定理 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>极限</b>	<b>3</b>
2.1	基本计算方式 . . . . .	3
2.1.1	基础四则运算 . . . . .	3
2.1.2	重要极限 . . . . .	3
2.1.3	导数定义 . . . . .	4
2.1.4	等价无穷小替换 . . . . .	4
2.1.5	夹逼准则 . . . . .	4
2.1.6	拉格朗日中值定理 . . . . .	4
2.1.7	洛必达法则 . . . . .	5
2.1.8	泰勒公式 . . . . .	5
2.2	常用化简技巧 . . . . .	6
2.2.1	对数法则 . . . . .	6
2.2.2	指数法则 . . . . .	6

2.2.3	三角函数关系式 . . . . .	7
2.2.4	提取常数因子 . . . . .	7
2.2.5	提取公因子 . . . . .	7
2.2.6	有理化 . . . . .	8
2.2.7	换元法 . . . . .	9
2.2.8	倒代换 . . . . .	9
2.2.8.1	含有分式 . . . . .	9
2.2.8.2	$\infty - \infty$ 型 . . . . .	10
2.2.8.3	$\infty \cdot \infty$ 型 . . . . .	10
2.2.9	拆项 . . . . .	10
2.2.9.1	积拆项 . . . . .	10
2.2.9.2	和拆项 . . . . .	10
2.3	极限计算形式 . . . . .	11
2.3.1	极限不定式类型 . . . . .	11
2.3.2	极限转换 . . . . .	12
2.3.2.1	整体换元 . . . . .	12
2.3.2.2	关系转换 . . . . .	12
2.3.2.3	脱帽法 . . . . .	13
2.3.3	求参数 . . . . .	13
2.3.3.1	常数 . . . . .	13
2.3.3.2	无穷小 . . . . .	13
2.3.4	极限存在性 . . . . .	14
2.3.5	极限唯一性 . . . . .	14
2.3.6	函数连续性 . . . . .	15
2.3.6.1	极限判连续性 . . . . .	15
2.3.6.2	连续性求极限 . . . . .	15
2.3.7	迭代式数列 . . . . .	16
2.3.7.1	数列表达式 . . . . .	16
2.3.7.2	单调有界准则 . . . . .	16
2.3.8	变限积分极限 . . . . .	18

# 1 函数

## 1.1 中值定理

中值定理一般用于判断不等式。

### 1.1.1 罗尔定理

罗尔定理在判断不等式时一般用于零点的状况。

#### 1.1.1.1 直接式子

需要证明所给式子的导数是否在该区间为 0 即可。

**例题：**证明多项式  $f(x) = x^3 - 3x + a$  在  $[0, 1]$  上不可能有两个零点。

证明：假设  $f(x) = x^3 - 3x + a$  在  $[0, 1]$  有两个零点  $x_1$  和  $x_2$ ，其中  $x_1 < x_2$ 。

因为  $f(x) = x^3 - 3x + a$  在  $[0, 1]$  内连续，所以  $f(x) = x^3 - 3x + a$  在  $[0, 1]$  内可导。

由罗尔定理得知  $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (0, 1)$ ，使得  $f'(\xi) = 0$ ，但是  $f'(x) = 3x^2 - 3$  在  $(0, 1)$  上不超过 0，所以  $\xi$  不存在，从而多项式  $f(x) = x^3 - 3x + a$  在  $[0, 1]$  上不可能有两个零点。

#### 1.1.1.2 含参数式子

若所求式子是一个含参数，那么其一定还有另一个式子约束参数，此时我们就需要构建一个新的式子来利用所给的条件，然后将新式子转换为旧式子。

**例题：**设  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ ，证明多项式  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  在  $(0, 1)$  中至少有一个零点。

证明：因为所要证明零点，所以一定使用罗尔定理。所给出的约束参数式子  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$  与所求  $f(x)$  之间存在一个关系。

设  $F(x) = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ， $F'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = f(x)$ 。

又  $F(0) = 0, F(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ ，又罗尔定理一定存在一个  $\xi \in (0, 1)$ ，使得  $F'(\xi) = f(\xi) = 0$ 。

从而  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  在  $(0, 1)$  中至少有一个零点。

### 1.1.2 拉格朗日中值定理

证明不等式最重要的还是找到  $f(x)$ ，有时候不等式不存在  $f(a) - f(b)$  这种式子，就需要我们转换。

#### 1.1.2.1 对数函数特性

对于对数函数，要记住其特定的性质： $\log_n\left(\frac{a}{b}\right) = \log_n a - \log_n b$ 。

**例题：**设  $a > b > 0$ ，证明： $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ 。

证明：因为  $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ ，所以令  $f(x) = \ln x$ 。

所以根据拉格朗日中值定理： $\ln a - \ln b = f'(\xi)(a - b)$  ( $\xi \in (b, a)$ )。

又  $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$ ，所以  $\ln a - \ln b = \frac{a-b}{\xi}$ 。

又  $\xi \in (b, a)$ ，所以  $\frac{1}{\xi} \in \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ 。

所以  $\frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{\xi} < \frac{a-b}{b}$ ，从而  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ ，得证。

#### 1.1.2.2 查找特定值

对于证明一种不等式，如果里面没有差式，也无法转换为差式，那么就可以考虑制造差式，对于  $f(x)$  一般选择更高阶的， $a$  选择  $x$ ， $b$  要根据题目和不等式设置一个常数。

一般是 0 或 1。可以先尝试 1。

**例题：**当  $x > 1$  时，证明  $e^x > ex$ 。

证明：题目中没有差式，所以需要选择一个函数作为基准函数，里面有一个指数函数和一个幂函数，所以选择  $e^x$  作为基准函数。

然后选择一个常数作为  $b$  值，可以先选一个 1 作为  $b$  值： $f(x) - f(1) = f'(\xi)(x - 1)$ 。

从而  $e^x - e = e^\xi(x - 1)$ ， $\xi \in (1, x)$ ，所以  $e^x - e > e(x - 1)$ ，即  $e^x > ex$ ，得证。

### 1.1.3 柯西中值定理

需要找到两个函数，使得  $\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 。

**例题：**设  $0 < a < b$ ，函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导，证明存在一点  $\xi \in (a, b)$  使得  $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$ 。

证明：由对数函数的特性可以知道  $\frac{b}{a} = \ln b - \ln a$ ，所以可以令  $F(x) = \ln x$ ，所以  $F'(x) = \frac{1}{x}$ 。

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a} = \frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}} \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}。$$

根据柯西中值定理得证。

## 2 极限

### 2.1 基本计算方式

课本上极限计算可以使用的主要计算方式：

#### 2.1.1 基础四则运算

只有式子的极限各自存在才能使用四则运算，使用的频率较少。

#### 2.1.2 重要极限

重要极限有两个，但是  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  这个很少用，因为往往用等价无穷小替代了，而  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  则用的较多，当出现分数幂的幂指函数时，不要先去取对数，而是使用重要极限看看能不能转换。

**例题：**求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ 。

解：=  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{6+x}\right)^{\frac{6+x}{-3} \cdot \frac{-3}{6+x} \cdot \frac{x-1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-3}{6+x} \cdot \frac{x-1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{3}{2} \cdot \frac{x-1}{x+6}} = e^{-\frac{3}{2}}。$

**例题：**求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ 。

解：=  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x \cdot \frac{2x+3}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x$

=  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{2x}}{1 + \frac{1}{2x}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{2x}\right)^x}{\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x}$

=  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{\frac{2x}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e。$

### 2.1.3 导数定义

极限转换以及连续性的时候会用到，但是使用的频率也较小。

### 2.1.4 等价无穷小替换

当看到复杂的式子，且不论要求的极限值的趋向，而只要替换的式子是  $\Delta \rightarrow 0$  时的无穷小，就使用等价无穷小进行替换。

**注意：**替换的必然是整个求极限的乘或除的因子，一般加减法与部分的因子不能进行等价无穷小替换。

对于无法直接得出变换式子的，可以对对应参数进行凑，以达到目标的可替换的等价无穷小。

### 2.1.5 夹逼准则

夹逼准则可以用来证明不等式也可以用来计算极限。但是最重要的是找到能夹住目标式子的两个式子。

**例题：**求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lceil \frac{10}{x} \right\rceil$ ，其中  $\lceil \cdot \rceil$  为取整符号。

解：取整函数公式：  $x - 1 < [x] \leq x$ ，所以  $\frac{10}{x} - 1 < \left\lceil \frac{10}{x} \right\rceil \leq \frac{10}{x}$ 。

当  $x > 0$  时， $x \rightarrow 0^+$ ，两边都乘以 10， $10 - x < x \cdot \left\lceil \frac{10}{x} \right\rceil \leq x \cdots \frac{10}{x} = 10$ ，而左边在  $x \rightarrow 0^+$  时极限也为 10，所以夹逼准则，中间  $x \cdot \left\lceil \frac{10}{x} \right\rceil$  极限也为 10。

当  $x > 0$  时， $x \rightarrow 0^-$ ，同样也是夹逼准则得到极限为 10。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \left\lceil \frac{10}{x} \right\rceil = 10。$$

### 2.1.6 拉格朗日中值定理

对于形如  $f(a) - f(b)$  的极限式子就可以使用拉格朗日中值定理，这个  $f(x)$  为任意的函数。使用拉格朗日中值定理最重要的还是找到这个  $f(x)$ 。

可以将极限式子中形如  $f(a) - f(b)$  的极限部分使用拉格朗日中值定理进行替换。

**例题：**求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1} \right)$ 。

解：因为式子不算非常复杂，其实也可以通过洛必达法则来完成，但是求导会很复杂。而  $\arctan x$  可以认定为  $f(x)$ 。

从而  $\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1}$  为  $f(\frac{2}{n}) - f(\frac{2}{n+1}) = f'(\xi) \left( \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right)$ 。

其中  $\frac{2}{n+1} < \xi < \frac{2}{n}$ , 而当  $n \rightarrow \infty$  时,  $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \rightarrow 1$ 。

$\therefore \arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1} \sim \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$ 。

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{2}{n(n+1)} = 2$ 。

### 2.1.7 洛必达法则

洛必达法则的本质是降低商形式的极限式子的幂次。

洛必达在处理一般的极限式子比较好用, 但是一旦式子比较复杂最好不要使用洛必达法则, 最好是对求导后有规律或幂次较低的式子进行上下求导。

对于幂次高的式子必然使用洛必达法则。

洛必达法则必须使用在分式都趋向 0 或  $\infty$  时, 如果不是这样的趋向则不能使用。如:

**例题:** 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2}$ 。

如果使用洛必达法则, 则会得到结果为 1, 这是错误的, 因为分子在  $x \rightarrow 1$  时结果为常数 1。正确的计算方式:

解:  $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ 。

### 2.1.8 泰勒公式

泰勒公式一般会使用趋向 0 的麦克劳林公式, 且一般只作为极限计算的一个小部分, 用来替代一个部分。

且一般只有麦克劳林公式表上的基本初等函数才会使用倒泰勒公式, 复合函数最好不要使用。

**例题:** 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x}$ 。

分析: 该题目使用洛必达法则会比较麻烦且难以计算, 所以先考虑是否能用泰勒展开。

解:  $x \rightarrow 0$ ,  $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ ,  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ ,  $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ ,  $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ 。

$\therefore \sin x - \tan x = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ ,  $\arcsin x - \arctan x = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$

$\therefore \text{原式} = \frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = -1$ 。

## 2.2 常用化简技巧

### 2.2.1 对数法则

如  $\log_n(a \cdot b) = \log_n a + \log_n b$ ,  $\log_n \frac{a}{b} = \log_n a - \log_n b$ 。

换底公式: 对于  $a, c \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  且  $b \in (0, +\infty)$  时, 有  $\log_a b = \frac{\log_n b}{\log_n a}$ 。

**例题:** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}{[\ln(1-x) + \ln(1+x)] \sin \frac{x}{x+1}}$ 。

注意在积或商的时候不能把对应的部分替换为 0, 如分母部分的  $[\ln(1-x) + \ln(1+x)]$  就无法使用  $\ln(1+x) \sim x$  替换为  $-x+x$ , 这样底就是 0 了, 无法求得最后的极限。

解: 这时可以尝试变形, 如对数函数相加等于对数函数内部式子相乘:  $\ln(1-x) + \ln(1+x) = \ln(1-x^2) \sim -x^2$ 。

### 2.2.2 指数法则

当出现  $f(x)^{g(x)}$  的类似幂函数与指数函数类型的式子, 需要使用  $u^v = e^{v \ln u}$ 。一般需要与洛必达法则配合使用。

**例题:** 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$ 。

解:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x}} \left( \ln(x + \sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)$   
 $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = e^0 = 1$

**例题:** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} (a > 0, b > 0, c > 0)$ 。

解:  $= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a^x + b^x + c^x) - \ln 3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c}{a^x + b^x + c^x}}$  (洛必达法则)

$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{1+1+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(abc)}{3}} = \sqrt[3]{abc}$ 。

**例题:** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}} - \sqrt{e} \right]$ 。

解: 首先对于幂指函数需要取指数, 所以  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2} \ln(1 + \frac{1}{n})}$ 。

而后面的多一个  $\sqrt{e}$  导致整个式子变为一个复杂的式子, 而与  $e^x$  相关的是  $e^x - 1 \sim x$ 。

所以  $e^{\frac{n}{2} \ln(1 + \frac{1}{n})} - \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \cdot \left( e^{\frac{n}{2} \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{2}} - 1 \right) = e^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \frac{n}{2} \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{2} \right]$ 。

综上:



$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}} - \sqrt{e} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( e^{\frac{n}{2} \ln(1 + \frac{1}{n})} - \sqrt{e} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ e^{\frac{1}{2}} \cdot \left( e^{\frac{n}{2} \ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{2}} - 1 \right) \right] = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right] \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{e}}{4}
\end{aligned}$$

### 2.2.3 三角函数关系式

**例题：**求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$ 。

$$\begin{aligned}
\text{解：} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot x^2} (\sin x \sim x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^4} (\sin x \cos x \sim \frac{1}{2} \sin 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4} \sin^2 2x}{x^4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{1}{4} \cdot 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2}{4x^3} (\sin x \cos x \sim \frac{1}{2} \sin 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{1}{2} \sin 4x}{4x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{1}{2} \cos 4x \cdot 4}{12x^2} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} (1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2) = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

### 2.2.4 提取常数因子

提取常数因子就是提取出能转换为常数的整个极限式子的因子。这个因子必然在自变量的趋向时会变为非 0 的常数，那么这个式子就可以作为常数提出。

### 2.2.5 提取公因子

当作为商的极限式子上下都具有公因子时可以提取公因子然后相除，从而让未知数集中在分子或分母上。

**例题：**求  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^5 - 5x + 4}$ 。

$$\text{解：需要先提取公因子：} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{3}。$$

(当然可以使用洛必达法则得到极限为  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-6}{2x-5} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{8-6}{8-5}$ )

**注意：**提取公因子的时候应该注意开平方等情况下符号的问题。如果极限涉及倒正负两边则必须都讨论。

当趋向为负且式子中含有根号的时候最好提取负因子，从而让趋向变为正。

**例题：**求  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt{4x^2 + x} \ln \left( 2 + \frac{1}{x} \right) + 2 \ln 2x \right]$ 。

解：题目的形式为  $\infty - \infty$ ，所以必须使用后面的倒代换转换为商的形式。

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left[ \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln \left( 2 + \frac{1}{x} \right) - 2 \ln 2 \right]。$$

这里就需要注意到因为  $\sqrt{4x^2 + x}$  的限制导致这个式子必然为正数，而  $x \rightarrow -\infty$  代表自变量为负数，所以提出来的  $x$  必然是负数，而原式是正数，所以需要添加一个负号，而后面的  $2 \ln 2x$  则没有要求，所以直接变成  $-2 \ln 2$  就可以了。

将  $x$  下翻变成分母为  $\frac{1}{x}$ ，并令  $t = \frac{1}{x}$ 。

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{t+4} \ln \left( 2 + \frac{1}{x} \right) - 2 \ln 2}{-t}。$$

幂次不高可以尝试洛必达：

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(2+t)}{\sqrt{t+4}} + \frac{\sqrt{t+4}}{2+t} \right) = - \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln 2}{2} + \frac{2}{2} \right) = -\frac{\ln 2}{4} - 1。$$

## 2.2.6 有理化

当遇到带有根号的式子可以使用等价无穷小，但是只针对形似  $(1+x)^a - 1 \sim ax$  的式子，而针对  $x^a \pm x^b$  的式子则无法替换，必须使用有理化来将单个式子变为商的形式。

$$\text{如 } \sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \frac{a+b}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}。$$

**例题：**求极限  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x)$ 。

解：首先定性分析： $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 100} + x)$ 。

在  $x \rightarrow -\infty$  趋向时， $x$  就趋向无穷大。

而  $\sqrt{x^2 + 100}$  为一次，所以  $\sqrt{x^2 + 100} + x$  趋向 0。

又  $\sqrt{x^2 + 100}$  在  $x \rightarrow -\infty$  时本质为根号差，所以有理化：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{x^2 + 100 - x^2}{\sqrt{x^2 + 100} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100x}{\sqrt{x^2 + 100} - x} \\ &\xrightarrow{\text{令 } x=-t} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-100t}{\sqrt{t^2 + 100} + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-100}{\sqrt{1 + \frac{100}{t^2}} + 1} = -50 \end{aligned}$$

**例题：**求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x\sqrt{1 + \sin^2 x} - x}$ 。

$$\text{解：} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{1 + \sin^2 x} - x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1 + \sin^2 x} + x}{x^2(1 + \sin^2 x) - x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} + 1}{x \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}。
\end{aligned}$$

### 2.2.7 换元法

换元法本身没什么技巧性，主要是更方便计算。最重要的是获取到共有的最大因子进行替换。

**例题：**求极限  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1 - x)$ 。

解：当  $x \rightarrow 1^-$  时， $\ln x$  趋向 0， $\ln(1 - x)$  趋向  $-\infty$ 。

又  $x \rightarrow 0$ ， $\ln(1 + x) \sim x$ ，所以  $x \rightarrow 1$ ， $\ln x \sim x - 1$ ：

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1 - x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) \ln(1 - x) \xrightarrow{t=1-x} - \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t \\
&= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t = 0
\end{aligned}$$

### 2.2.8 倒代换

#### 2.2.8.1 含有分式

当极限式子中含有分式中一般都需要用其倒数，把分式换成整式方便计算。

**例题：**求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$

$$\text{解：} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2x^{-3}}{100x^{99}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{50} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}}$$

使用洛必达法则下更复杂，因为分子的幂次为负数，导致求导后幂次绝对值越来越大，不容易计算。

使用倒代换再洛必达降低幂次，令  $t = \frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{t^{-50}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{50}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t^{49}}{e^t} \\
&= \dots \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50!}{e^t} = 0
\end{aligned}$$

**例题：**求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x]$ 。

解：该式子含有分数，所以尝试使用倒数代换：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] &\xrightarrow{\text{令 } x = \frac{1}{t}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^t - 1}{t^2} - \frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \\ &\xrightarrow{\text{泰勒展开 } e^t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### 2.2.8.2 $\infty - \infty$ 型

### 2.2.8.3 $\infty \cdot \infty$ 型

## 2.2.9 拆项

拆项需要根据式子形式进行，所以很难找到普遍规律。

### 2.2.9.1 积拆项

**例题：**求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (n+6)}{6n^6}$ 。

解：需要将分子和分母都拆为 6 项：

$$= \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n} \times \cdots \times \frac{n+6}{n} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{6}{n}\right) = \frac{1}{6}。$$

当极限式子中出现不知道项数的  $n$  时，一般需要使用拆项，把项重新组合。

一般的组合是根据等价无穷小。

### 2.2.9.2 和拆项

而对于复杂的具有同一结构的和的式子也可以考虑拆项。

**例题：**求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$ 。 ( $n \in N^+$ )

解：这里可以使用等价无穷小  $e^x - 1 \sim x$ 。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} \ln \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} \left( \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{n} \right)} \\ &= e^{\frac{e}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} + \cdots + \frac{e^{nx} - 1}{x} \right)} = e^{\frac{e}{n} [1 + 2 + \cdots + n]} = e^{\frac{e}{n} \cdot \frac{n(1+n)}{2}} = e^{\frac{e(1+n)}{2}} \end{aligned}$$

**例题：**求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{\ln \cos x}$

解：可以使用  $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ 。

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{\ln \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{x^2}{2}} + \frac{\cos x(1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x})}{-\frac{x^2}{2}} \\
&= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos 2x}) + \sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{-\frac{x^2}{2}} \\
&= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(\cos 2x - 1) + \sqrt{\cos 2x}(1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{-\frac{x^2}{2}} \\
&= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{4x^2}{2}) + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{9x^2}{2}\right)}{-\frac{x^2}{2}} = -6
\end{aligned}$$

## 2.3 极限计算形式

极限相关计算形式主要分为下面六种：

1. 未定式：直接根据式子计算极限值。
2. 极限转换：根据已知的极限值计算目标极限值。
3. 求参数：已知式子的极限值，计算式子中未知的参数。
4. 极限存在性：根据式子以及极限存在性计算极限或参数。
5. 极限唯一性：式子包含参数，根据唯一性计算两侧极限并求出参数与极限值。
6. 函数连续性：根据连续性与附加条件计算极限值或参数。
7. 迭代式数列：根据数列迭代式计算极限值。
8. 变限积分：根据变限积分计算极限值。

### 2.3.1 极限不定式类型

七种： $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$ 。

①其中  $\frac{0}{0}$  为洛必达法则的基本型。 $\frac{\infty}{\infty}$  可以类比  $\frac{0}{0}$  的处理方式。 $0 \cdot \infty$  可以转为  $\frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} = \frac{\infty}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\infty}{\infty}$ 。设置分母有原则，简单因式才下放（简单：幂函数，e 为底的指数函数）。

6 ②  $\infty - \infty$  可以提取公因式或通分, 即和差化积。

③  $\infty^0, 0^0, 1^\infty$ , 就是幂指函数。

$$u^v = e^{v \ln u} = \begin{cases} \infty^0 & \rightarrow e^{0+\infty} \\ 0^0 & \rightarrow e^{0-\infty} \\ 1^\infty & \rightarrow e^{\infty \cdot 0} \end{cases}$$

$$\therefore \lim u^v = e^{\lim v \cdot \ln u} = e^{\lim v(u-1)}$$

综上, 无论什么样的四则形式, 都必须最后转换为商的形式。

## 2.3.2 极限转换

### 2.3.2.1 整体换元

最常用的方式就是将目标值作为一个部分, 然后对已知的式子进行替换。

**例题:** 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + xf(x)}{x^2} = 0$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x}$ 。

解: 令目标  $\frac{f(x)-1}{x} = t$ ,  $\therefore f(x) = tx + 1$ 。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + xf(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + tx^2 + x}{x^2} \text{ (泰勒展开)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - \frac{x^2}{2} + tx^2 + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(t - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} t = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}。$$

### 2.3.2.2 关系转换

**例题:** 如果  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + f(x)}{x^4}$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{f(x)}$  为常数多少?

解: 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + f(x)}{x^4} = A$ , 而目标是  $x^3$ , 所以需要变形:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + f(x)}{x^4} = A$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + f(x) \cdot x}{x^4} = A \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$$

$$\text{泰勒展开: } x - \sin x = \frac{1}{6}x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{f(x)} = -6$$

### 2.3.2.3 脱帽法

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

**例题：**如果  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + f(x)}{x^4}$  存在，则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{f(x)}$  为常数多少？

解：由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + f(x)}{x^4} = A$  脱帽：  $\frac{x \sin x + f(x)}{x^4} = A + \alpha$ 。

得到：  $f(x) = Ax^4 + \alpha \cdot x^4 - (x - \sin x)$ 。

$$\text{反代入：} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Ax^4 + \alpha \cdot x^4 - x + \sin x}{x^3} = 0 + 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}。$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{f(x)} = -6。$$

### 2.3.3 求参数

因为求参数类型的题目中式子是未知的，所以求导后也是未知的，所以一般不要使用洛必达法则，而使用泰勒展开。

一般极限式子右侧等于一个常数，或是表明高阶或低阶。具体的关系参考无穷小比阶。

在求参数的时候要注意与 0 的关系。

#### 2.3.3.1 常数

**例题：**设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$ ，求常数 a, b。

解：根据泰勒展开式：  $x \rightarrow 0, \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ，  $x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2 \sim 1 - \cos x$ 。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} &= 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x - \left(\frac{1}{2} + b\right)x^2 + o(x^2)}{x^2} = 2 \neq 0 \\ 1-a &= 0; -\left(\frac{1}{2} + b\right) = 2 \\ \therefore a &= 1; b = -\frac{5}{2}。 \end{aligned}$$

#### 2.3.3.2 无穷小

若是求某个式子与另一个式子的某阶无穷小，则同右边等于常数一样，也需要使用泰勒展开。

**例题：**确定常数 a 和 b，使得  $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$  当  $x \rightarrow 0$  时关于 x 的 5 阶等价无穷小。

解：使用泰勒展开到五阶：

$$\begin{aligned} f(x) &= x - (a + b \cos x) \sin x \\ &= x - a \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right] - \frac{b}{2} \left[ 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^5) \right] \\ &= (1 - a - b)x + \left( \frac{a}{6} + \frac{2b}{3} \right) x^3 - \left( \frac{a}{120} + \frac{2b}{15} \right) x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

所以若为五阶无穷小，则五阶前的常数应该都为 0。

所以  $1 - a - b = 0$ ,  $\frac{a}{6} + \frac{2b}{3} = 0$ ,  $\frac{a}{120} + \frac{2b}{15} \neq 0$ 。

解得  $a = \frac{4}{3}$ ,  $b = -\frac{1}{3}$ 。

### 2.3.4 极限存在性

一般会给出带有参数的例子，并给定一个点指明在该点极限存在，求参数。

若该点极限存在，则该点两侧的极限都相等。

**例题：**设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x(b \cos x - 1)}{e^x + a}, & x > 0 \\ \frac{\sin x}{\ln(1 + 3x)}, & x < 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处极限存在，

则  $a, b$  分别为。

解：首先根据极限在  $x = 0$  存在，且极限的唯一性。分段函数在 0 两侧的极限值必然相等。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\ln(1 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x(b \cos x - 1)}{e^x + a}.$$

又  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x(b \cos x - 1)}{e^x + a}$  的分母的  $e^x$  当  $x \rightarrow 0^+$  时  $e^x \rightarrow 1$ ，假如  $a \neq -1$ ，则  $e^x + a \neq 0$ ，则为一个常数。

从而提取常数因子： $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x(b \cos x - 1)}{e^x + a} = \frac{1}{1 + a} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x(b \cos x - 1)$ ，这时候  $\sin x$  是趋向 0 的，而  $b \cos x - 1$  无论其中的  $b$  为何值都是趋向一个常数或 0，这时候他们的乘积必然为无穷小，从而无法等于  $\frac{1}{3}$  这个常数。

$\therefore a = -1$ ，从而让极限式子变为一个商的形式：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x(b \cos x - 1)}{e^x + a} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x(b \cos x - 1)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x(b \cos x - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} b \cos x - 1 = b - 1 = \frac{1}{3} \\ \therefore a &= -1, b = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

### 2.3.5 极限唯一性

若极限存在则必然唯一。



**例题：** 设  $a$  为常数， $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{\frac{1}{x}} - \pi}{e^{\frac{2}{x}} + 1} + a \cdot \arctan \frac{1}{x} \right)$  存在，求出极限值。

解：因为求  $x \rightarrow 0$ ，所以需要分两种情况讨论：

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{\frac{1}{x}} - \pi}{e^{\frac{2}{x}} + 1} + a \cdot \arctan \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{\frac{1}{x}} - \pi}{e^{\frac{2}{x}} + 1} \right) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( a \cdot \arctan \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{0 \cdot \left( e^{\frac{2}{x}} \right)^2 + e^{\frac{1}{x}} - \pi}{1 \cdot \left( e^{\frac{2}{x}} \right)^2 + 1} \right) + a \cdot \frac{\pi}{2} = a \cdot \frac{\pi}{2} \\ & \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^{\frac{1}{x}} - \pi}{e^{\frac{2}{x}} + 1} + a \cdot \arctan \frac{1}{x} \right) = -\pi + a \cdot \left( -\frac{\pi}{2} \right) = -\pi - \frac{\pi}{2} \cdot a \end{aligned}$$

因为极限值具有唯一性，所以  $-\pi - \frac{\pi}{2}a = \frac{\pi}{2}a$ ，所以  $a = -1$ ，极限值为  $-\frac{\pi}{2}$ 。

### 2.3.6 函数连续性

函数的连续性代表：极限值 = 函数值。所以函数的连续性需要靠极限完成。

#### 2.3.6.1 极限判连续性

题目给出函数，往往是分段函数，然后判断分段点的连续性。

**例题：** 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ e^{-\frac{1}{2}}, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处的连续性。

解：因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]}$ 。

$$\begin{aligned} & \text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left[ \frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}。 \\ & \therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-\frac{1}{2}}。 \end{aligned}$$

又  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$ ，且  $f(0) = e^{-\frac{1}{2}}$ 。

从而  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ ，所以  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续。

#### 2.3.6.2 连续性求极限

**例题：** 函数在  $f(x)$  在  $x = 1$  处连续，且  $f(1) = 1$ ，求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[ 2 + f \left( x^{\frac{1}{x}} \right) \right]$ 。

解：根据题目，所求的  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[ 2 + f \left( x^{\frac{1}{x}} \right) \right]$  中，唯一未知的且会随着  $x \rightarrow +\infty$  而变换就是  $f \left( x^{\frac{1}{x}} \right)$ 。如果我们求出这个值就可以了。

而我们对于  $f(x)$  的具体关系是未知的，只知道  $f(1) = 1$ 。那么先需要考察  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$  的整数最大值。

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} f \left( x^{\frac{1}{x}} \right) = f(1) = 1。$$

## 2.3.7 迭代式数列

### 2.3.7.1 数列表达式

最重要的是将迭代式进行变形。

**例题：**数列  $\{a_n\}$  满足  $a_0 = 0, a_1 = 1, 2a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ 。计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 。

解：首先看题目，给出的递推式设计到二阶递推，即存在三个数列变量，所以必须先求出对应的数列表达式。因为这个表达式涉及三个变量，所以尝试对其进行变型：

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{a_{n-1} - a_n}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_n - a_{n-1}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ &= \dots \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n(a_1 - a_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

然后得到了  $a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ，而要求极限，所以使用列项相消法的逆运算：

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_1 - a_0) + a_0 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

### 2.3.7.2 单调有界准则

对于无法将关系式通过变形归纳为一般式的关系式，对于其极限就必须使用单调有界准则来求出。

单调有界的数列必有极限。需要证明单调性和有界性，然后对式子求极限就能求出目标极限。

**例题：**  $x_0 = 0$ ,  $x_n = \frac{1 + 2x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} (n \in N^*)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

解：首先应该知道数列的趋向都是趋向正无穷。

然后对关系式进行变形： $x_n = \frac{1 + 2x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} = 2 - \frac{1}{1 + x_{n-1}}$ 。

首先证明单调性，令  $f(x) = 2 - \frac{1}{1 + x}$ 。

$\therefore f'(x) = \frac{1}{(x + 1)^2} > 0$ , 则  $f(x)$  单调递增。

所以不管  $x = x_{n-1}$  或其他,  $f'(x) > 0$ ,  $x_n$  都是单调递增, 则  $x_n \geq x_0 = 0$ 。

然后证明有界性,  $\because x_n \geq 0$  且单调,  $\therefore x_n = 2 - \frac{1}{1 + x_{n-1}} \in [0, 2]$ 。

从而  $x_n$  有界。

所以根据单调有界定理,  $x_n$  的极限存在。

对于关系式两边取极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} = \frac{1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}} = \frac{1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}。$$

解该一元二次方程:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , 又根据保号性,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$ 。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}。$$

而许多题目只给出样子, 连通项公式都不会给出。

**例题：** 求出数列  $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdots$  的极限。

解：根据数列样式, 无法通过普通的通项公式来表达, 所以需要考虑使用递推式来表示:  $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ 。

首先证明有界性:

给定一个任意的正整数  $k$ , 再根据递推式, 假定  $x_k < 2$ , 所以  $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$ 。且  $x_1 = \sqrt{2}$  满足假定, 所以  $x_k < 2$  对于任意的正整数  $k$  都成立, 所以  $x_n$  存在上界 2。

然后证明单调性, 根据其递推式:

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - x_n = \frac{2 + x_n - x_n^2}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} = \frac{-(x_n - 2)(x_n + 1)}{\sqrt{2 + x_n} + x_n}。$$

又  $0 < x_n < 2$ , 从而上式子大于 0, 从而数列单调递增。

所以根据单调有界定理, 数列  $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$  一定存在极限, 令其极限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a。$$

将递推式两边平方并取极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + x_n)$ 。

从而  $a^2 = 2 + a$ , 得出  $a = 2$  (根据极限的保号性 -1 被舍去)。

### 2.3.8 变限积分极限

已知更改区间限制的积分  $s(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} g(t) \, dx$ ,  $s'(x) = g[\varphi_2(x)] \cdot \varphi_2'(x) - g[\varphi_1(x)] \cdot \varphi_1'(x)$ 。