# 微分方程

Didnelpsun

## 目录

# 1　一阶微分方程

## 1.1　可分离变量微分方程

**例题**：求 $y\sin\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x-\cos\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}y=0$ 的通解。

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\tan\dfrac{x}{2}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\tan\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x$，$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=2\int\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\frac{x}{2}$。

解得 $\ln|y|=-\ln\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\ln C_1$（取对数更好解），$|y|=\dfrac{C_1}{\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^2}$。

$y=\dfrac{\pm C_1}{\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^2}$，令 $C=\pm C_1$，得 $y=\dfrac{C}{1+\cos x}$。

注意在第一步时将 $y$ 除到分母上，本来 $y$ 为任意常数，变为 $y\neq 0$，所以解得最后 $C\neq 0$，而实际上 $y$ 可以为 0，所以 $C$ 应该为任意常数。

此时解为全部解，为通解加上 $y=0$ 的奇解。

## 1.2　多项式换元

**例题**：求微分方程 $\mathrm{d}y=\sin(x+y+100)\,\mathrm{d}x$ 的通解。

解：令 $u=x+y+100$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(x+y+100)$，$\therefore\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\sin u$。

$\dfrac{\mathrm{d}u}{1+\sin u}=\mathrm{d}x$，$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{1+\sin u}=\int\mathrm{d}x$，$\displaystyle\int\frac{1-\sin u}{\cos^2 u}\mathrm{d}u=x$。

$\int\sec^2 u-\tan u\sec u\,\mathrm{d}u=x$，即 $\tan u-\sec u=x+C$。代回 $u=x+y+100$：

通解 $\tan(x+y+100)-\sec(x+y+100)=x+C$。

所有解：$\tan(x+y+100)-\sec(x+y+100)=x+C$，$x+y+100=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$。

## 1.3　自然齐次方程

**例题**：设 $L$ 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)$（$x>0$）到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 $y$ 轴上的截距，且 $L$ 经过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，求 $L$ 的方程。

解：$(x,y)$ 到坐标原点的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$。

若 $y=y(x)$，则切线为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $X=0$，解得 $Y=y-xy'$。

$\therefore\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$，解得 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\dfrac{y}{x}-\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}$。

令 $\dfrac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x+u$。代入 $y'$：

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x+u=u-\sqrt{1+u^2}$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$。

$\therefore\ln(u+\sqrt{1+u^2})=-\ln x+\ln C$，$u+\sqrt{1+u^2}=\dfrac{C}{x}$。

代入 $\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=\dfrac{C}{x}$，$y+\sqrt{x^2+y^2}=C$。

### 1.4 一阶线性方程

**例题**：求微分方程 $y'+1=e^{-y}\sin x$ 的通解。

解：已知对 $e^{-y}\sin x$ 无法处理，所以必然需要对其转换，$e^y y'+e^y=\sin x$。

$\therefore (e^y)'+e^y=\sin x$，令 $e^y=u$，$u'+u=\sin x$，$P(x)=1$，$Q(x)=\sin x$。

$e^y=u=e^{-\int \mathrm{d}x}(\int e^{\int \mathrm{d}x}\sin x\,\mathrm{d}x+C)=e^{-x}(\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x+C)$，积分再现表格解出 $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$：$=e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C\right)$。

### 1.5 伯努利方程

**例题**：求 $y\,\mathrm{d}x=(1+x\ln y)x\,\mathrm{d}y$（$y>0$）的通解。

解：将导数放到一边：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{(1+x\ln y)x}$，这个算式无法处理。

而颠倒 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{(1+x\ln y)x}{y}=\dfrac{1}{y}x+\dfrac{\ln y}{y}x^2$。

凑伯努利方程：$x'+P(x)x=Q(x)x^n$：$x'-\dfrac{1}{y}x=\dfrac{\ln y}{y}x^2$。$P(x)=-\dfrac{1}{y}$，$Q(x)=\dfrac{\ln y}{y}$。

乘 $x^{-2}$ 降阶：$x^{-2}x'-\dfrac{1}{y}x^{-1}=\dfrac{\ln y}{y}$。令 $z=x^{-1}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$。代入方程：$-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{y}z=\dfrac{\ln y}{y}$，$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\dfrac{1}{y}z=-\dfrac{\ln y}{y}$，利用公式：

$z=e^{-\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(\displaystyle\int e^{\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\cdot\left(\dfrac{\ln y}{y}\right)+C\right)=\dfrac{1}{y}(-\int \ln y\,\mathrm{d}y+C)=\dfrac{1}{y}(-y(\ln y-1)+C)=-\ln y+1+\dfrac{C}{y}$。

$\therefore x=\dfrac{y}{-y\ln y+y+C}$。

## 2 二阶可降阶微分方程

### 2.1 $y''=f(x,y')$ 型

**例题**：求 $y''=\dfrac{2xy'}{1+x^2}$ 的通解。

解：令 $y'=p$，$p'=\dfrac{2xp}{1+x^2}$，$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2xp}{1+x^2}$，$\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\int\dfrac{2x}{1+x^2}$。

$\ln|p|=\ln(1+x^2)+\ln C_1$，$p=\pm C_1(1+x^2)=C_2(1+x^2)$。

$y'=C(1+x^2)$，$\therefore y=C_2\left(x+\dfrac{x^3}{3}+x\right)+C$。

### 2.2 $y'' = f(y, y')$ 型

# 3 高阶线性微分方程

## 3.1 常系数齐次线性微分方程

## 3.2 常系数非齐次线性微分方程

先将常系数非齐次线性微分方程变为常系数齐次线性微分方程求解，然后加上非齐次方程的一个特解，就是非齐次方程的一个通解。

**例题**：求 $y'' - 4y' + 4y = 3xe^{2x}$ 的通解。

解：变为常系数齐次线性微分方程：$y'' - 4y' + 4y$。

写出特征方程：$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$，从而 $(\lambda - 2)^2 = 0$，$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$。

从而 $y$ 齐次方程的通解为 $(C_1 + C_2x)e^{2x}$。

根据特解的设置方法，设 $y^* = e^{2x}(ax + b)x^2$。

代回二阶方程，$a = \dfrac{1}{2}$，$b = 0$。通解为 $(C_1 + C_2x)e^{2x} + \dfrac{1}{2}x^3e^{2x}$。

**例题**：微分方程 $y'' - 4y' + 3y = e^x \cos x + xe^{3x}$ 的通解。

解：首先常系数齐次线性微分方程：$y'' - 4y' + 3y = 0$。

特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$，解得特征值为 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 3$。

所以该齐次方程的通解：$y = C_1e^x + C_2e^{3x}$。

然后求特解，首先求后面 $f_2(x) = xe^{3x}$ 的特解 $y_2^*$。

根据公式因为 $\alpha$ 为单特征根，即 $\aleph = 3 = \lambda_2 \neq \lambda_1$，所以 $y_2^* = e^{3x}(ax + b)x$。

然后是求 $f_1(x) = e^x \cos x$ 的特解 $y_1^*$。

其中 $P_m(x) = 1$，$P_n(x) = 0$，$l = 0$。所以设 $P_m(x) = A$，$P_n(x) = B$。

对 $k$，自由项中 $\alpha = \beta = 1$，得到 $1 \pm i$。又 $1 \pm i \neq \lambda_1 = 1 \neq \lambda_2 = 3$，$k = 0$。

最后 $y_1^* = e^x(A \cos x + B \sin x)$。通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + e^x(A \cos x + B \sin x) + e^{3x}(ax + b)x$。

# 4 微分方程概念

对于有些方程并不需要求解后才能解决问题。

## 4.1 已知微分方程的解反求系数

**例题**：设 $y_1, y_2$ 为一阶非齐次线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解，若常数 $\lambda, \mu$ 使得 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则 ()。

$A.\lambda = \dfrac{1}{2}, \mu = \dfrac{1}{2}$ $B.\lambda = -\dfrac{1}{2}, \mu = -\dfrac{1}{2}$ $C.\dfrac{2}{3}, \mu = \dfrac{1}{3}$ $\lambda = \dfrac{2}{3}, \mu = \dfrac{2}{3}$

## 4.2 不解微分方程，利用方程隐含信息

$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 反映了**未知函数及其各阶导数之间的关系**。

**例题**：设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解，若 $f(x_0) > 0$，且 $f'(x_0) = 0$，则函数 $f(x)$ 在点 $x_0()$。

$A.$ 取得最大值 $B.$ 取得最小值 $C.$ 某个邻域内单调增加 $D.$ 某个邻域内单调减少

解：因为 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解，所以直接代入 $x_0$：$y''(x_0) - 2y'(x_0) + 4y(x_0) = 0$。又 $f'(x_0) = 0$。

$y''(x_0) = -4y(x_0) < 0$，所以该点为极大值点。

# 5 欧拉方程

# 6 微分方程物理应用

## 6.1 牛顿第二定律

$F = ma$，物体质量 $m$，力 $f$，加速度 $a = \dfrac{\mathrm{d}^x}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。

## 6.2 变化率

考的可能性较大，提法多为 $t$ 时刻某量 $y$ 对 $t$ 的变化率与 $t$ 时刻某量成正比。

如冷却定律，$k$ 时刻物体温度 $T(t)$ 对时间的变化率与 $t$ 时刻物体与介质的温差 $T - T_0$ 成正比，应写为 $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(x - x_0)$。