

# 一元函数积分学

Didneipsun

## 目录

1	不定积分	1
1.1	基本积分	1
1.2	换元积分	1
1.2.1	第一类换元	1
1.2.1.1	聚集因式	1
1.2.1.2	积化和差	2
1.2.1.3	三角等式	2
1.2.1.4	反三角换元	3
1.2.1.5	指对换元	3
1.2.1.6	倒数换元	4
1.2.1.7	有理换元	4
1.2.1.8	万能公式	5
1.2.2	第二类换元	6
1.2.2.1	$\sqrt{a^2 - x^2}$ : $x = a \sin t (a \cos t)$	6
1.2.2.2	$\sqrt{a^2 + x^2}$ : $x = a \tan t$	6
1.2.2.3	$\sqrt{x^2 - a^2}$ : $x = a \sec t$	7
1.2.2.4	辅助换元	7
1.2.2.5	$\sqrt{ax^2 + bx + c}$	8
1.3	分部积分	8
1.3.1	基本分部	8
1.3.1.1	非幂函数优先	8
1.3.1.2	幂函数优先	9
1.3.2	多次分部	9

1.3.3	分部积分推广公式 . . . . .	10
1.3.4	分部与换元 . . . . .	11
1.4	有理积分 . . . . .	11
1.4.1	高阶多项式分配 . . . . .	11
1.4.2	低阶多项式分解 . . . . .	11
1.4.3	低阶多项式分配 . . . . .	12
1.4.4	低阶多项式因式分解与分配 . . . . .	13
1.4.5	有理积分与其他积分运算 . . . . .	13
<b>2</b>	<b>定积分</b>	<b>15</b>
2.1	定限积分 . . . . .	15
2.1.1	极限 . . . . .	15
2.1.2	区间再现 . . . . .	15
2.1.3	换元积分 . . . . .	16
2.1.4	分部积分 . . . . .	16
2.2	变限积分 . . . . .	16
2.2.1	极限 . . . . .	16
2.2.2	连续 . . . . .	17
2.3	反常积分 . . . . .	17
<b>3</b>	<b>一元函数积分应用</b>	<b>17</b>
3.1	几何应用 . . . . .	17
3.1.1	面积 . . . . .	17
3.1.2	体积 . . . . .	17
3.1.3	平均值 . . . . .	17
3.1.4	弧长 . . . . .	17
3.1.5	旋转曲面表面积 . . . . .	18
3.1.6	形心坐标公式 . . . . .	18
3.1.7	平行截面已知的立体体积 . . . . .	18
3.2	物理应用 . . . . .	18
3.2.1	变力沿直线做功 . . . . .	18
3.2.2	抽水做功 . . . . .	18
3.2.3	水压力 . . . . .	19

<b>4</b>	<b>积分等式</b>	<b>19</b>
4.1	中值定理 . . . . .	19
4.2	夹逼准则 . . . . .	20
<b>5</b>	<b>积分不等式</b>	<b>20</b>
5.1	函数单调性 . . . . .	20
5.2	拉格朗日中值定理 . . . . .	21
5.3	泰勒公式 . . . . .	21

# 1 不定积分

## 1.1 基本积分

**例题：**汽车以 20m/s 的速度行驶，刹车后匀减速行驶了 50m 停止，求刹车加速度。

**解：**已知题目含有两个变量：距离和时间，设距离为  $s$ ，时间为  $t$ 。

因为汽车首先按 20m/s 匀速运动，所以  $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 20$ ，最开始距离为 0，所以  $s|_{t=0} = 0$ 。

又因为是匀减速的，所以速度形如： $v = \frac{s}{t} = kt + b$ ，从而令二阶导数下  $\frac{d^2s}{dt^2} = k$ 。

所以  $\frac{ds}{dt} = \int \frac{d^2s}{dt^2} dt = \int k dt = kt + C_1$ 。

代入  $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 20$ ，所以  $C_1 = 20$ ，即  $\frac{ds}{dt} = kt + 20$ 。

所以  $ds = (kt + 20) dt$ ，从而  $s = \int (kt + 20) dt = \frac{1}{2}kt^2 + 20t + C_2$ 。

又  $s|_{t=0} = 0$ ，所以代入得  $C_2 = 0$ ，所以  $s = \frac{1}{2}kt^2 + 20t$ 。

当  $s = 50$  时停住，所以此时  $\frac{ds}{dt} = 0$ ，得到  $t = -\frac{20}{k}$ 。

代入  $s$ ： $50 = \frac{1}{2}k \left(-\frac{20}{k}\right)^2 + 20 \left(-\frac{20}{k}\right)$ ，解得  $k = -4$ ，即加速度为  $-4\text{m/s}^2$ 。

## 1.2 换元积分

### 1.2.1 第一类换元

#### 1.2.1.1 聚集因式

将复杂的式子转换为简单的一个因式放到  $d$  后面看作一个整体，然后利用基本积分公式计算。

**例题：**求  $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}$ 。

**解：** $= \int \frac{d(\ln x)}{\ln x \ln \ln x} = \int \frac{d(\ln \ln x)}{\ln \ln x} = \ln |\ln \ln x| + C$ 。

**例题：**求  $\int \frac{10^{2 \arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 。

**解：** $= - \int 10^{2 \arccos x} d(\arccos x) = -\frac{1}{2} \int 10^{2 \arccos x} d(2 \arccos x)$   
 $= -\frac{10^{2 \arccos x}}{2 \ln 10} + C$ 。

### 1.2.1.2 积化和差

对于两个三角函数的乘积可以使用积化和差简单计算。特别是携带  $\sin 2x$ 、 $\cos 2x$ 、 $\sin 3x$  等的。

**例题：**求  $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$ 。

$$\begin{aligned}\text{解：} &= \int \cos 3x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x - \sin x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 5x \, dx - \frac{1}{2} \int \sin x \, dx = -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C.\end{aligned}$$

**例题：**求  $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$ 。

**解：**这时候需要利用积化和差。

$$\begin{aligned}&= \int \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x) \sin 3x \, dx = \frac{1}{2} \int \cos x \sin 3x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 3x \sin 3x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (\sin 2x + \sin 4x) \, dx - \frac{1}{12} \sin^2 3x = -\frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{12} \sin^2 3x + C.\end{aligned}$$

### 1.2.1.3 三角等式

主要用于  $\sec^2 - 1 = \tan^2 x$ ，当出现  $\tan^2$ 、 $\tan^3$  等与  $\sec x$  在一起作为乘积时可以考虑拆分换元。同时  $\sin^2 x + \cos^2 = 1$ ， $\csc^2 x - \cos^2 x = 1$ 。

**例题：** $\int \tan^3 x \sec x \, dx$ 。

$$\begin{aligned}\text{解：} &= \int (\sec^2 x - 1) \tan x \sec x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, d(\sec x) \\ &= \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C.\end{aligned}$$

有时需要利用到有理积分的高阶多项式分配与低阶多项式因式分解。

**例题：**求  $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$ 。

**解：**将所有的  $\sin x$  都变成  $\cos x$ 。所以分子分母都乘上  $\sin x$ 。

$$= \int \frac{d(\cos x)}{(2 + \cos x)(\cos^2 x - 1)}, \quad \text{令 } \cos x = u: = \int \frac{du}{(2 + u)(u^2 - 1)}.$$

$$\text{利用低阶多项式因式分解：} = \int \left[ \frac{1}{6(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{3(u+2)} \right] du$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{6} |u-1| - \frac{1}{2} \ln |u+1| + \frac{1}{3} \ln |u+2| + C = \frac{1}{6} \ln(1 - \cos x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) + \\ &\frac{1}{3} \ln(2 + \cos x) + C.\end{aligned}$$

有时还可以用二倍角公式。特别是遇到  $1 + \cos x$  等。

**例题：**求  $\int \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} \, dx$ 。

**解：**看到根号就会很自然想到使用有理换元的方式，令  $\sqrt{1 + \cos x} = u$ ，从而  $\sin x = \sqrt{2u^2 - u^4}$ ，原式  $= \int \frac{u}{\sqrt{2u^2 - u^4}} du$ ，这时会发现根本解不出来。

这里自然会想到把根号去掉, 那么还有什么方法? 将  $1 + \cos x$  变为一个平方的形式, 可以使用二倍角公式  $1 + \cos x = \cos^2 \frac{x}{2}$ , 同理分母  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ 。

$$= \int \frac{\sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right|}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \pm \sqrt{2} \int \csc \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{2} \ln \left| \csc \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right| + C。$$

且  $\cos \frac{x}{2} > 0$  为正, 否则为负。

$$\text{又 } \ln \left| \csc \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right| = \ln \frac{\left| 1 - \cos \frac{x}{2} \right|}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} = \ln \left( \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} - \frac{\cos \frac{x}{2}}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \right)。$$

所以当  $\cos \frac{x}{2} > 0$  时乘积正负号不变,  $= \ln \left( \left| \csc \frac{x}{2} \right| - \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right)。$

当  $\cos \frac{x}{2} < 0$  时乘积正负号相反, 提出负号,  $= \ln \left( \left| \csc \frac{x}{2} \right| + \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right)。$

$$\text{又 } \csc^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{x}{2} = 1, \therefore \ln \left( \left( \left| \csc \frac{x}{2} \right| + \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right) \cdot \left( \left| \csc \frac{x}{2} \right| - \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right) \right) = \ln \left( \csc^2 \frac{x}{2} - \cot^2 \frac{x}{2} \right) = \ln 1 = 0, \therefore \ln \left( \left| \csc \frac{x}{2} \right| + \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right) + \ln \left( \left| \csc \frac{x}{2} \right| - \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right) = 0, \ln \left( \left| \csc \frac{x}{2} \right| + \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right) = -\ln \left( \left| \csc \frac{x}{2} \right| - \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right)。$$

当  $\cos \frac{x}{2} > 0$ ,  $= \sqrt{2} \ln \left| \csc \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right| + C = \sqrt{2} \ln \left( \left| \csc \frac{x}{2} \right| - \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right) + C。$

当  $\cos \frac{x}{2} < 0$ ,  $= -\sqrt{2} \ln \left| \csc \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right| + C = \sqrt{2} \ln \left( \left| \csc \frac{x}{2} \right| - \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right) + C。$

综上,  $\int \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} dx = \sqrt{2} \ln \left( \left| \csc \frac{x}{2} \right| - \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right) + C。$

#### 1.2.1.4 反三角换元

当积分式子中存在  $\arcsin x$ 、 $\arccos x$ 、 $\arctan x$  这种反三角函数时, 可以考虑将其令为  $t$  来进行简化计算。从而  $x$  分别为  $\sin t$ 、 $\cos t$ 、 $\tan t$ 。

**例题:** 求  $\int (\arcsin x)^2 dx$ 。

**解:** 令  $\arcsin x = t$ ,  $\therefore x = \sin t$ ,  $dx = \cos t dt$ 。

$= \int t^2 \cos t dt$ 。除了换元法还需要使用分部积分法, 可以直接进行分部积分也可以使用下面讲到的分部积分拓展公式的表格法来计算,  $\cos t$  更难求导, 所以对其积分, 放在下面,  $t^2$  容易求导, 所以对其求导, 放在上面:

$t^2$	$2t$	$2$	$0$
$\cos t$	$\sin t$	$-\cos t$	$-\sin t$

$$\therefore t^2 \sin t - 2t \cos t - \sin t + C = (\arcsin x)^2 x + 2 \arcsin x \sqrt{1 - x^2} - 2x + C。$$

#### 1.2.1.5 指对换元

当积分式子存在指数函数  $e^x$  或对数函数  $\ln x$  时, 可以考虑令其为  $t$ , 从而  $x$  分别为  $\ln t$  和  $e^t$ 。

### 1.2.1.6 倒数换元

当被积函数的分母的幂次要比分子高两次及以上时, 令  $x = \frac{1}{u}$ 。

**例题:** 求  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ 。

**解:** 因为所有的变量都在分母, 所以先进行倒代换:

$$= -\int \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{1-u^2} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C。$$

### 1.2.1.7 有理换元

书上这个类型属于有理函数部分, 我这里移动到第一类换元中。即将无理因式直接设为一个变量, 从而提高式子的阶数, 消除无理式变为有理式。

有理换元时无理因式中的  $x$  必须是一阶的, 如  $\sqrt[3]{x+6} = u$ , 若是二阶需要利用第二类换元 (三角换元), 否则则无法消去无理因式项, 因为  $x$  不能用单个的  $u$  来表示, 如  $\sqrt{x^3+6} = u$ ,  $u = \sqrt[3]{u^2-6}$ 。

若式子是一个因式的整数次幂, 则可以直接令这个因式为中间变量。

当无理式子是一个分式或其他复杂形式, 既可以令其整个都是中间变量, 也可以先化简, 但是不能将无理式子拆开, 否则有理换元就无用了。

**例题:** 求  $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ 。

**解:** 令  $u = \sqrt[3]{x+1}$ , 从而  $x = u^3 - 1$ ,  $dx = 3u^2 du$ 。

$$\begin{aligned} &= \int \frac{3u^2}{1+u} du = \int \frac{3u^2 + 3u - 3u - 3 + 3}{1+u} du = \int \left( 3u - 3 + \frac{3}{1+u} \right) du \\ &= \frac{3}{2}u^2 - 3u + 3 \ln |1+u| + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3 \ln |1+\sqrt[3]{x+1}| + C。 \end{aligned}$$

可以和有理积分一同使用:

**例题:** 求  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$ 。

**解:** 令  $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ,  $x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ 。

$$\begin{aligned} \therefore dx &= d\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right) = \frac{-2u(1+u^2) - 2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \\ &= \int u \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2} \cdot \frac{-4u}{(1+u^2)^2} du = \int \frac{-4u^2}{(1-u)(1+u)(1+u^2)} du \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{Cu+D}{1+u^2} = \frac{-4u^2}{(1-u)(1+u)(1+u^2)}。$$

$$\text{通分: } A(1+u^2+u+u^3) + B(1+u^2-u-u^3) + (Cu-Cu^3+D-Du^2)$$

$$= (A-B-C)u^3 + (A+B-D)u^2 + (A-B+C)u + (A+B+D) = -4u^2$$

$$\therefore A-B-C=0, A+B-D=-4, A-B+C=0, A+B+D=0。$$

$$\therefore A=B=-1, C=0, D=2。$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \left( \frac{2}{1+u^2} - \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} \right) du \\
&= 2 \arctan u + \ln|1-u| - \ln|1+u| + C \\
&= 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + C.
\end{aligned}$$

**例题：**求  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$ 。

解：由最开始分析的，有理换元需要让换元里的式子是一个一阶的，而现在里面最高四阶，所以必须想办法把这个式子转换为一阶的，这个也是本题目的难点。由于是三次根，所以可以尝试将里面的  $(x+1)^2(x-1)^4$  都提出三次方：

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{x^2-1} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx, \text{ 令 } \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = u, \text{ 所以 } x = \frac{u^3+1}{u^3-1}: \\
&= \int \frac{u}{\left(\frac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2 - 1} \cdot \frac{-6u^2}{(u^3-1)^2} du = -\frac{3}{2} \int du = -\frac{3}{2}u + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.
\end{aligned}$$

$C$ 。

因为有理换元将一个复杂的式子设为  $u$ ，所以有时可以使用分部积分法：

**例题：**求  $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$ 。

$$\begin{aligned}
\text{解：} &\text{令 } \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = u, \text{ 解得 } x = a \frac{u^2-1}{u^2+1}, \quad dx = 4a \frac{u du}{(u^2+1)^2}. \\
&= 4a \int \frac{u^2 du}{(u^2+1)^2} = -2a \int u d\left(\frac{1}{1+u^2}\right) = -\frac{2au}{1+u^2} + \int \frac{2a}{1+u^2} du \\
&= -\frac{2au}{1+u^2} + 2a \arctan u + C = (x-a) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + 2a \arctan \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C \\
&= -\sqrt{a^2-x^2} + 2a \arctan \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.
\end{aligned}$$

### 1.2.1.8 万能公式

同样属于有理积分的内容，但是本质还是属于三角函数的部分。

$$\text{令 } u = \tan \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du.$$

**例题：**求  $\int \frac{dx}{3+\cos x}$ 。

$$\begin{aligned}
\text{解：} &\text{令 } u = \tan \frac{x}{2}, \text{ 从而 } \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}: \\
&= \int \frac{1}{3 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \frac{1}{2+u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}$$



### 1.2.2 第二类换元

使用换元法做了换元之后是要带回式子中的，也就是说要保证反函数的存在才能代入有意义。为了保证反函数的存在，因此要保证原函数的单调性，所以要有一个规定的范围来使原函数保证单调。

#### 1.2.2.1 $\sqrt{a^2 - x^2}$ : $x = a \sin t (a \cos t)$

若令  $x = a \sin t$ , 则根据  $\sin t \in (-1, 1)$  得到主区间:  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

若令  $x = a \cos t$ , 则根据  $\cos t \in (-1, 1)$ , 得到主区间:  $t \in (0, \pi)$ 。

**例题:** 求  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$ 。

**解:** 令  $x = \sin t$  ( $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ), 所以  $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$ ,  $dx = \cos t dt$ ,  
 $t = \arcsin x$ 。

因为式子  $\frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} > 0$ , 单调递减, 所以不用讨论正负号。

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\cos t}{1 + \cos t} dt = \int \frac{2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = \int dt - \int \sec^2 \frac{t}{2} dt = t - \tan \frac{t}{2} + C \\ &= t - \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} + C = t - \frac{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2}} + C = t - \frac{\sin t}{1 + \cos t} + C \\ &= \arcsin x - \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + C. \end{aligned}$$

#### 1.2.2.2 $\sqrt{a^2 + x^2}$ : $x = a \tan t$

根据  $\tan t \in R$ , 从而得到主空间:  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

**例题:** 求  $\int \frac{x^3 + 1}{(x^2 + 1)^2} dx$ 。

**解:** 虽然本题目看着可以从分母解开平方, 然后低阶分配, 但是这分母是平方的式子很难分配, 所以需要使用换元法。

令  $x = \tan t$ ,  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $x^2 + 1 = \sec^2 t$ ,  $dx = \sec^2 t dt$ 。

因为  $(x^2 + 1)^2 > 0$ , 虽然  $x^3 + 1$  可能为负可能为正, 但是都是单调递增的, 所以不用考虑正负号。

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\tan^3 t + 1}{\sec^2 t} dt = \int \frac{\sin^3 t + \cos^3 t}{\cos t} dt = \int \frac{\sin t(1 - \cos^2 t) + \cos^3 t}{\cos t} dt \\ &= \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} d(\cos t) + \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \int \cos t d(\cos t) - \int \frac{1}{\cos t} d(\cos t) + \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{4} \int \cos 2t d(2t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \cos t - \ln \cos t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C \quad (\cos t \text{ 在 } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 中为正}) \\
&\because \tan t = x, \therefore \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \\
&= \frac{1+x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \arctan x + C.
\end{aligned}$$

### 1.2.2.3 $\sqrt{x^2 - a^2}$ : $x = a \sec t$

根据  $\sec t \in (-1, 1)$ , 所以从而得到主空间:  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

**例题:** 求  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx$ 。

**解:** 令  $x = 3 \sec t$ 。  $\therefore \sqrt{x^2 - 9} = 3 \tan t$ ,  $dx = 3 \sec t \tan t dt$ 。

因为式子  $\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}$  的分子必然为正, 而对于分子在 0 两边的单调性不同, 所以需要对  $x$  进行正负区分, 又  $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ , 所以:

当  $x > 3$  时,  $\sec t > 1$ , 即  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

$$\begin{aligned}
&= \int 3 \tan^2 t dt = 3 \int (\sec^2 t - 1) dt \\
&= 3 \tan t - 3t + C = \sqrt{x^2 - 9} - 3 \arccos \frac{3}{x} + C.
\end{aligned}$$

当  $x < -3$  时,  $\sec t < -1$ , 即  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 。

$$\begin{aligned}
&= - \int 3 \tan^2 t dt = -3 \int (\sec^2 t - 1) dt \\
&= -3 \tan t + 3t + C = \sqrt{x^2 - 9} + 3 \arccos \frac{3}{x} + C \quad (\tan t < 0) \\
&= \sqrt{x^2 - 9} - 3 \arccos \frac{3}{-x} + 3\pi + C \quad (3 \arccos \frac{3}{x} = 3\pi - 3 \arccos \frac{3}{-x}) \\
&= \sqrt{x^2 - 9} - 3 \arccos \frac{3}{-x} + C.
\end{aligned}$$

综上结果为  $\sqrt{x^2 - 9} - 3 \arccos \frac{3}{|x|} + C$ 。

### 1.2.2.4 辅助换元

在使用换元法的时候有可能单个式子不能求出积分, 而使用其他辅助式子加减在一起积分可以得到结果, 从而能得到原式和辅助式子的积分结果。对于这类题目需要观察什么样的式子能让积分简单。

**例题:** 求  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}}$ 。

**解:** 令  $x = \sin t$ , 所以  $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$ ,  $dx = \cos t dt$ 。

$\because x + \sqrt{1 - x^2}$  可能为正可能为负, 正负时单调性不同, 所以令  $x + \sqrt{1 - x^2} = 0$ , 即  $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 从而  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

$$\therefore = \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \quad (t \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)).$$

这时你会发现使用积化和差、万能公式、倍角公式都无法解出这个积分，所以这时候就需要另外一个辅助积分式子加上或减去这个式子，从而让和以及差更容易解出积分。这里根据式子特点让辅助式子分子为  $\sin t$ ：

$$\text{令 } I_1 = \int \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt, \quad I_2 = \int \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt。$$

$$I_1 + I_2 = \int \frac{\sin t + \cos t}{\sin t + \cos t} dt = \int dt = t。$$

$$I_1 - I_2 = \int \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt = \int \frac{d(\sin t + \cos t)}{\sin t + \cos t} = \ln |\sin t + \cos t| + C。$$

$$\text{所以 } I_1 = \frac{1}{2}(\arcsin x + \ln |x + \sqrt{1 - x^2}|) + C。$$

同理  $t \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$  也得到同样结果。

### 1.2.2.5 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

当被积函数含有根式  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  时，需要对其配方变成  $\sqrt{\varphi^2(x) + k^2}$ 、 $\sqrt{\varphi^2(x) - k^2}$ 、 $\sqrt{k^2 - \varphi^2(x)}$  三种形式再进行三角函数换元。

## 1.3 分部积分

因为分部积分法使用  $\int u dv = uv - \int v du$ ，所以基本上用于两项乘积形式的积分式子。

函数积分难度为：反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数。越往右求导越难，左边更应该当  $u$  进行求导，而右边更适合做  $v$  进行积分。

### 1.3.1 基本分部

如果不是多次分部就是基本分部，目的都是为了降低积分式子幂次。

#### 1.3.1.1 非幂函数优先

当幂函数与一些微分后能降低幂函数幂次的函数在一起时，先对非幂函数优先分部积分，结果与幂函数相乘可以消去幂次，以达到降低幂次的作用。

如  $\int x^n \ln x dx$ ， $\int x^n \arctan x dx$ ， $\int x^n \arcsin x dx$ 。

**例题：**求  $\int x^2 \arctan x dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：} &= \frac{1}{3} \int \arctan x d(x^3) = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int x^3 d(\arctan x) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x+x^3-x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{3} \int x dx + \frac{1}{6} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$$

### 1.3.1.2 幂函数优先

当幂函数与三角函数在一起微分时，因为三角函数无论如何积分都不会被消去，所以应该优先消去幂函数部分，从而降低幂次。

如  $\int x^a \sin x \, dx$ ,  $\int x^a \cos x \, dx$ 。

**例题：**求  $\int x \tan^2 x \, dx$ 。

$$\text{解：} = \int x(\sec^2 - 1) \, dx = \int x \, d(\tan x) - \frac{x^2}{2} = x \tan x + \ln |\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

### 1.3.2 多次分部

对于一部分通过微分形式不会发生变化的函数，所以需要多次积分，然后利用等式求出目标值。即三角函数和指数函数，这两种积分形式不变，指数函数一次积分保持不变，而三角函数两次积分保持不变。

也称为积分再现、循环积分法。

如： $\int e^x \sin x \, dx$ ,  $\int e^x \cos x \, dx$ 。

**例题：**求  $\int e^x \sin^2 x \, dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：} &= \sin^2 x \cdot e^x - \int e^x d(\sin^2 x) = \sin^2 x \cdot e^x - \int e^x \cdot \sin 2x \, dx \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \int \sin 2x \, d(e^x) = \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + \int e^x d(\sin 2x) \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2 \int e^x \cdot \cos 2x \, dx \quad (\text{①}) \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2 \int \cos 2x \, d(e^x) \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x - 2 \int e^x d(\cos 2x) \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4 \int e^x \cdot \sin 2x \, dx \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4 \int \sin 2x \, d(e^x) \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4 \sin 2x \cdot e^x - 4 \int e^x d(\sin 2x) \\ &= \sin^2 x \cdot e^x - \sin 2x \cdot e^x + 2e^x \cos 2x + 4 \sin 2x \cdot e^x - 8 \int e^x \cdot \cos 2x \, dx \quad (\text{②}) \\ \text{然后①=②：} &\int e^x \cdot \cos 2x \, dx = \frac{e^x(\cos 2x + 2 \sin 2x)}{5} + C \\ \text{代入①：} &= \frac{e^x(5 \sin^2 x - 5 \sin 2x + 2 \cos 2x + 4 \sin 2x)}{5} + C \\ &= \frac{e^x(5 \sin^2 x - \sin 2x + 2 \cos 2x)}{5} + C = e^x \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{1}{10} \cos 2x \right) + C \end{aligned}$$

### 1.3.3 分部积分推广公式

分部积分法可以直接利用表格简便计算，特别是积分式子中含有  $f(x)$  这种不定的因子。

如何得到分部积分推广公式？以三次导数的积分为例：

$$\int uv''' dx = \int u d(v'') = uv'' - \int v'' u' dx$$

$$\int u' v'' dx = \int u' d(v') = u' v' - \int v' u'' dx$$

$$\int u'' v' dx = \int u'' dv = u'' v - \int v u''' dx$$

$$\therefore \int uv''' dx = uv'' - u'v' + u''v - \int u'''v dx。$$

所以分部积分法找到对应的规律，表格上求导，下积分：

符号	+	-	+	...	$(-1)^{n+1}$
$u$ 的各阶导数	$u$	$u'$	$u''$	...	$u^{n+1}$
$v^{(n+1)}$ 的各阶原函数	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	$v^{(n-1)}$	...	$v$

以  $u$  为起点左上右下错位相乘，各项符号正负交错，直到  $uv$  的导阶数相同，最后一项是  $(-1)^{n+1} \int u^{(n+1)}v dx$ ，只要这最后一项可以解出来就可以停止了，即上下是同一类的函数或幂函数求导成 0。

**例题：**求  $\int (x^3 + 2x + 6)e^{2x} dx$ 。

**解：**如果要一般求，则需要拆分：

$$\int (x^3 + 2x + 6)e^{2x} dx = \int x^3 e^{2x} dx + 2 \int x e^{2x} dx + 6 \int e^{2x} dx。$$

而如果使用分部积分的推广公式，令  $u = x^3 + 2x + 6$ ， $v = e^{2x}$ 。

$x^3 + 2x + 6$	$3x^2 + 2$	$6x$	$6$	$0$
$e^{2x}$	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$\frac{1}{4}e^{2x}$	$\frac{1}{8}e^{2x}$	$\frac{1}{16}e^{2x}$

$$\therefore = (x^3 + 2x + 6) \left( \frac{1}{2}e^{2x} \right) - (3x^2 + 2) \left( \frac{1}{4}e^{2x} \right) + 6x \left( \frac{1}{8}e^{2x} \right) - 6 \left( \frac{1}{16}e^{2x} \right) + \int 0 \cdot \left( \frac{1}{16}e^{2x} \right) dx = \left( \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{17}{8} \right) e^{2x} + C。$$

**例题：**求  $\int x^2 \ln x dx$ 。

**解：**

$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$x^2$	$\frac{1}{3}x^3$

$$\therefore = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{1}{3}x^3 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C。$$

### 1.3.4 分部与换元

分部积分法和换元积分法经常一起使用。

**例题：**求  $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$ 。

**解：**令  $\sqrt[3]{x} = u$ ，从而  $x = u^3$ ， $dx = 3u^2 du$ 。

$$\begin{aligned} &= 3 \int e^u u^2 du = 3 \int u^2 d(e^u) = 3u^2 e^u - 3 \int e^u d(u^2) = 3u^2 e^u - 6 \int e^u u du \\ &= 3u^2 e^u - 6 \int u d(e^u) = 3u^2 e^u - 6ue^u + 6 \int e^u du = 3u^2 e^u - 6ue^u + 6e^u + C \\ &= 3e^u(u^2 - 2u + 2) + C = 3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 2) + C. \end{aligned}$$

**例题：**求  $\int e^{\sqrt{3x+9}} dx$ 。

**解：**令  $\sqrt{3x+9} = u$ ，从而  $x = \frac{1}{3}(u^2 - 9)$ ， $dx = \frac{2}{3}u du$ ：

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3} \int ue^u du = \frac{2}{3} \int u d(e^u) = \frac{2}{3}ue^u - \int \frac{2}{3}e^u du = \frac{2}{3}ue^u - \frac{2}{3}e^u + C \\ &= \frac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}}(\sqrt{3x+9} - 1) + C. \end{aligned}$$

## 1.4 有理积分

针对于多项式分式，需要将分母和分子拆解。

### 1.4.1 高阶多项式分配

当不定积分式子形如  $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ ，且  $f(x)$ 、 $g(x)$  都为与  $x$  相关的多项式， $f(x)$  阶数高于或等于  $g(x)$ ，则  $f(x)$  可以按照  $g(x)$  的形式分配，约去式子，得到最简单的表达。

**例题：** $\int \frac{x^3}{x^2+9} dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：} &= \int \frac{x^3 + 9x - 9x}{x^2 + 9} dx = \int \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 9} dx - \int \frac{9x}{x^2 + 9} dx \\ &= \int x dx - \frac{9}{2} \int \frac{d(x^2 + 9)}{x^2 + 9} = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2} \ln(9 + x^2) + C. \end{aligned}$$

### 1.4.2 低阶多项式分解

当不定积分式子形如  $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ ，且  $f(x)$ 、 $g(x)$  都为与  $x$  相关的多项式， $f(x)$  阶数低于  $g(x)$ ，且  $g(x)$  可以因式分解为  $g(x) = g_1(x)g_2(x) \cdots$  时，先因式分解再进行运算。

有理积分的拆项是最小项的最高次数不超过 2。所以具体的分解基本原理：

1. 一次单项式  $ax + b$  产生一项  $\frac{A}{ax + b}$ 。

2.  $k$  重一次因式  $(ax+b)^k$  产生  $k$  项:  $\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$ 。

3. 二次因式  $px^2+qx+r$  产生一项:  $\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$ 。

4.  $k$  重二次因式  $(px^2+qx+r)^k$  产生  $k$  项:  $\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(px^2+qx+r)^k}$ 。

虽然分母可以因式分解, 但是整个式子不一定能因式分解, 特别是某个因子的阶数高于一阶, 所以若不能因式分解则可以考虑低阶多项式分配的方式。

**例题:** 求  $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$ 。

**解:** 令  $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$ 。

**通分:**  $= A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2$

$= A(x^2-1) + B(x-1) + C(x^2+2x+1)$

$= (A+C)x^2 + (B+2C)x + (C-A-B) = x^2+1$ 。

从而  $A+C=1$ ,  $B+2C=0$ ,  $C-A-B=1$ 。

所以  $A=C=\frac{1}{2}$ ,  $B=-1$ , 所以  $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x-1)}$ 。

$\therefore = \int \left[ \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x-1)} \right] dx$

$= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C$ 。

当然也没必要将所有式子拆开再同类型合并进行相等计算, 可以直接将因式的解代入令部分因式等于 0 来计算, 如:

**通分:**  $= A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2 = x^2+1$ 。

代入  $x=-1$ :  $B(-1-1) = -2B = (-1)^2+1$ ,  $\therefore B=-1$ 。

代入  $x=1$ :  $C(1+1)^2 = 1^2+1$ ,  $\therefore 4C=2$ ,  $C=\frac{1}{2}$ 。

代入  $x=0$ :  $-A-B+C=1$ , 代入  $B=-1$ ,  $C=\frac{1}{2}$ ,  $\therefore A=\frac{1}{2}$ 。

### 1.4.3 低阶多项式分配

当不定积分式子形如  $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ , 且  $f(x)$ 、 $g(x)$  都为与  $x$  相关的多项式,  $f(x)$  阶数低于  $g(x)$ , 且  $g(x)$  不能因式分解为  $g(x) = g_1(x)g_2(x)\cdots$  时, 则可以分配式子:  $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = a_1 \int \frac{d(f_1(x))}{g_1(x)} + a_2 \int \frac{d(f_2(x))}{g_2(x)} + \cdots$ , 将积分式子组合成积分结果为分式的函数, 如  $\ln x$ 、 $\arcsin x$ 、 $\arctan x$  等。

**例题:** 求  $\int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx$ 。

解：因为  $x^2 + 2x + 3$  不能因式分解，所以考虑将分子按照分母形式进行分配。优先对高阶的  $x$  进行分配。

首先因为分子最高阶为  $x$  只比分母最高阶  $x^2$  低一阶，所以考虑将  $x - 1$  分配到微分号内。

$$\begin{aligned} & \because d(x^2 + 2x + 3) = 2x + 2, \text{ 而现在是 } x - 1, \text{ 所以:} \\ & = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} dx - 2 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2x + 3)}{x^2 + 2x + 3} \\ & - \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) - \sqrt{2} \int \frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} \\ & = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) - \sqrt{2} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

#### 1.4.4 低阶多项式因式分解与分配

有时候一个式子需要同时用到因式分解和分配两种方式。

例题：求  $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - x} dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：} & = \int \frac{x^5 - x^3 + x^4 - x^2 + x^3 - x + x^2 + x - 8}{x^3 - x} dx \\ & = \int x^2 dx + \int x dx + \int dx + \int \frac{x^2 + x - 8}{x^3 - x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x^2 + x - 8}{x^3 - x} dx \\ \text{令 } & \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{x^2 + x - 8}{x^3 - x}。 \\ \therefore & (A + B + C)x^2 + (C - B)x - A = x^2 + x - 8。 A = 8, B = -4, C = -3。 \\ & = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{8}{x} dx - \int \frac{4}{x+1} dx - \int \frac{3}{x-1} dx \\ & = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 8 \ln |x| - 4 \ln |x+1| - 3 \ln |x-1| + C。 \end{aligned}$$

#### 1.4.5 有理积分与其他积分运算

换元积分法可以与有理积分、分部积分共同使用。

例题：求  $\int \frac{-x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} dx$ 。

$$\begin{aligned} \text{解：} & \text{首先根据因式分解：} \frac{-x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + x + 1)^2}。 \\ \therefore & Ax^3 + (A + B)x^2 + (A + B + C)x + (B + D) = -x^2 - 2。 \end{aligned}$$

解得：  $A = 0, B = D = -1, C = 1$ 。

$$= \int \frac{x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx - \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx \\
&= -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\
&\because x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2, \therefore \text{令 } u = x + \frac{1}{2}, a = \frac{\sqrt{3}}{2}: \\
&\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \int \frac{1}{(u^2 + a^2)^2} du = \int \frac{1}{\left(a^2 \left(\left(\frac{u}{a}\right)^2 + 1\right)\right)^2} du, \text{使用第二类}
\end{aligned}$$

换元法（三角换元）：  $\frac{u}{a} = \tan t$ ,  $u = a \tan t$ ,  $du = a \sec^2 t dt$ ,  $t = \arctan \frac{u}{a}$ 。

$$\begin{aligned}
&\therefore \int \frac{a \sec^2 t}{a^4 \sec^4 t} dt = \frac{1}{a^3} \int \frac{dt}{\sec^2 t} = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{a^3} \int (1 + \cos 2t) dt \\
&= \frac{1}{a^3} \int dt + \frac{1}{2a^3} \int \cos 2t d(2t) = \frac{t}{a^3} + \frac{\sin 2t}{2a^3} = \frac{\arctan \frac{u}{a}}{a^3} + \frac{\sin t \cos t}{a^3}。 \\
&\because \tan t = \frac{u}{a}, \therefore \tan^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} = \frac{u^2}{a^2} \\
&\therefore \sin t = \frac{u}{\sqrt{a^2 + u^2}}, \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}}, \frac{\sin t \cos t}{a^3} = \frac{u}{a^2(a^2 + u^2)}。 \\
&\therefore \text{原式} = -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx \\
&= -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2} \left( \frac{\arctan \frac{u}{a}}{a^3} + \frac{u}{a^2(a^2 + u^2)} \right) + C \\
&= -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\
&\quad - \frac{3}{2} \left( \frac{\arctan \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} + \frac{x + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right)} \right) + C \\
&= -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\
&\quad - \frac{3}{2} \left( \frac{\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}} + \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}(x^2 + x + 1)} \right) + C \\
&= -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} + C \\
&= -\frac{4x+3}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C。
\end{aligned}$$

## 2 定积分

### 2.1 定限积分

#### 2.1.1 极限

若极限中有  $n$  这种变量, 也可以通过定积分的定义来做,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_1^0 f(x) dx$ 。

1. 先提出  $\frac{1}{n}$ 。
2. 凑出  $\frac{i}{n}$ 。
3. 写出  $\int_0^1 f(x) dx$ 。

**例题:** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$ 。

**解:** 即求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$ 。如果我们要传统求的话一般使用夹逼准则, 找到放缩的两个函数。

所以找到两个:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+1}$ 。

即  $\frac{1}{2} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ 。夹逼准则失败。

所以对  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$  通过定积分定义进行计算。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2。$$

**例题:** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n^2} \right)$ 。

$$\text{解: 即求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n+i}{n^2+i^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n^2+ni}{n^2+i^2} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1 + \frac{i}{n}}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \left[ \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2。 \end{aligned}$$

#### 2.1.2 区间再现

若函数  $f(x)$  为连续函数, 则  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ 。

**例题:** 求  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ 。

解:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \\ &\text{又 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}。 \\ &\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi}{4}。 \end{aligned}$$

### 2.1.3 换元积分

换元积分法基本上跟不定积分一样。

**例题:** 求  $\int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 2x + 2)^2}$ 。

**解:** 从题目来看都需要使用换元积分法, 因为分母比较复杂。一种思路直接令  $x^2 - 2x + 2 = u$ , 但是这样  $dx$  就解不出来。所以尝试将分母配方:  $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ , 看到  $x^2 + 1$  的形式就想到了  $\tan^2 u + 1 = \sec^2 u$ , 所以令  $x-1 = \tan u$ , 即  $x = \tan u + 1$ ,  $dx = \sec^2 u du$ ,  $(x^2 - 2x + 2)^2 = \sec^4 u$ 。当  $x = 0$ ,  $u = -\frac{\pi}{4}$ , 当  $x = 2$ ,  $u = \frac{\pi}{4}$ 。解得  $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan u) du}{\sec^2 u}$   
 $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u \tan u du = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin u \cos u du =$   
 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2u) du = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}。$

### 2.1.4 分部积分

可以使用普通分部积分方式, 也可以使用分部积分推广公式。

## 2.2 变限积分

### 2.2.1 极限

变限积分也常与极限共同出现。

**例题:** 若  $f(x)$  连续,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \pi$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$ 。

**解:**  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f'(0) = \frac{\pi}{2}。$

**例题:** 若  $f(x)$  连续,  $F(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$ , 求  $F''(x)$ 。

**解:** 因为  $x$  与  $t$  混合在一起很麻烦,  $x$  为上限是常数,  $t$  为积分变量。

$$F(x) = \int_0^x x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt$$

$$\therefore F'(x) = \int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(t) dt。$$

$$\therefore F''(x) = f(x)。$$

### 2.2.2 连续

**例题：** 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1) \\ x, & x \in [1, 2] \end{cases}$ ，求  $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$  在  $[0, 2]$  上的表达式，并讨论  $\Phi(x)$  在  $(0, 2)$  内的连续性。

**解：** 当  $x \in [0, 1)$  时， $\Phi(x) = \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$ ，注意的是  $x \in [1, 2]$  时， $\Phi(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^x t dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}$ 。

$$\therefore \Phi(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & x \in [0, 1) \\ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}, & x \in [1, 2] \end{cases}。$$

由于  $x \rightarrow 1^-$  时， $\lim_{x \rightarrow 1^-} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}$ 。  $x = 1$  时， $\Phi(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ ，所以  $\Phi(x)$  在  $x = 1$  处连续，而在其他定义域都是函数，所以也连续，从而  $\Phi(x)$  在  $(0, 2)$  上连续。

### 2.3 反常积分

## 3 一元函数积分应用

### 3.1 几何应用

重点是形心公式和弧长公式。

#### 3.1.1 面积

#### 3.1.2 体积

#### 3.1.3 平均值

#### 3.1.4 弧长

利用勾股定理求弧长。

若平面光滑曲线表达式为：

- 直角坐标系  $y = y(x)$  ( $a \leq x \leq b$ )，则  $s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$ 。
- 参数方程  $x = x(t), y = y(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ )，则  $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ 。
- 极坐标系  $r = r(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ) 给出，则  $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$ 。

### 3.1.5 旋转曲面表面积

使用弧长而不是  $dx$  来计算。

曲线  $y = y(x)$  在区间  $[a, b]$  上的曲线弧段绕  $x$  轴旋转一周所得的旋转曲面的表面积  $S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$ 。

曲线  $x = x(t), y = y(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta, x'(t) \neq 0$ ) 在区间  $[\alpha, \beta]$  上的曲线弧段绕  $x$  轴旋转一周所得到的旋转曲面的表面积  $S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$ 。

### 3.1.6 形心坐标公式

设曲边梯形平面区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $D$  的形心坐标计算公式为:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\iint_D x d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} x dy}{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \\ \bar{y} &= \frac{\iint_D y d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} y dy}{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.\end{aligned}$$

**例题:** 设曲线  $L$  的方程为  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ ,  $1 \leq x \leq e$ ,  $D$  是由曲线  $L$ , 直线  $x = 1$ ,  $x = e$  及  $x$  轴围成的平面图形, 求  $D$  的形心横坐标。

$$\text{解: 代入 } \bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_1^e x \left( \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \right) dx}{\int_1^e \left( \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \right) dx} = \frac{3(e^2 + 1)(e^2 - 3)}{4(e^3 - 7)}.$$

### 3.1.7 平行截面已知的立体体积

## 3.2 物理应用

### 3.2.1 变力沿直线做功

设方向沿  $x$  轴正向的力函数为  $F(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), 则物体沿  $x$  轴从点  $a$  移动到点  $b$  时, 变力  $F(x)$  所做的功为  $W = \int_a^b F(x) dx$ , 功的元素  $dW = F(x) dx$ 。

### 3.2.2 抽水做功

将容器中的水全部抽出所做的功为  $W = \rho g \int_a^b x A(x) dx$ , 其中  $\rho$  为水的密度,  $g$  为重力加速度。

功的元素  $dW = \rho g x A(x) dx$  为位于  $x$  处厚度为  $dx$ , 水平截面面积为  $A(x)$  的一层水被抽出 (路径为  $x$ ) 所做的功。

**例题：**有一个半径为  $4m$  的半球形水池蓄满了水，现在要将水全部抽取到距水池原水面  $6m$  高的水箱中，求需要做多少功。（水的密度为  $1000kg/m^3$ ，重力加速度  $g = 9.8m/s^2$ ）

解：令水池是竖直的，所以以  $y$  为积分的方向。

根据原水平面为半径为  $4$  的圆的面积，得到  $x^2 + y^2 = 16$ ，解得  $x^2 = 16 - y^2$ ， $A(y) = \pi x^2 = \pi(16 - y^2)$ 。

$$\rho g A(y) dy = \rho g \pi (16 - y^2) dy$$

要将水提到  $6m$ ，即路径为  $6 - y$ ，所以  $\rho g \pi (16 - y^2)(6 - y) dy$ 。

又  $y$  从最开始的  $0$  到抽干的  $-4$ ，所以得到  $w = \int_{-4}^0 \rho g \pi (16 - y^2)(6 - y) dy$ 。

### 3.2.3 水压力

垂直浸没于水中的平板  $ABCD$  的一侧收到的水压力为  $P = \rho g \int_a^b x[f(x) - h(x)] dx$ ，其中  $\rho$  为水的密度， $g$  为重力加速度。

压力元素  $dP = \rho g x[f(x) - h(x)] dx$  是受到的压力， $x$  表示水深， $f(x) - h(x)$  是矩形的宽度， $dx$  是矩形的高度，总高度为  $|a - b|$ 。

## 4 积分等式

包括证明带有积分的等式、方程根、积分中值定理等。

### 4.1 中值定理

**例题：**设  $f(x)$ 、 $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续且  $g(x)$  不变号，证明至少存在一点  $\xi \in [a, b]$  使得  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ 。（推广中值定理）

若  $g(x) \equiv 1$ ，则结论就是  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$  积分中值定理。

证明：若  $g(x) \equiv 0$  则等式显然成立。若  $g(x)$  不变号，则不妨设  $g(x) > 0$ 。

令  $F(x) = \int_a^x f(t)g(t) dt$ ， $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ 。

由柯西中值定理可得  $\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)}$ 。

$\therefore \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ ， $\xi \in (a, b) \subset [a, b]$ 。

同理  $g(x) < 0$  也如此。

## 4.2 夹逼准则

夹逼准则一般用于求数列极限, 若极限号后面有积分号可以考虑使用夹逼准则。

## 5 积分不等式

带积分号的不等问题。

### 5.1 函数单调性

将某一限一般是上限变量化, 然后移项构造辅助函数, 由辅助函数的单调性来证明不等式, 多用于所给条件为“ $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续”的情况, 因为函数连续必然可积分与求导。

**例题:** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(x) > 0$ , 证明  $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$ 。

证明: 令  $F(x) = \int_a^x f(t) dt \int_a^x \frac{1}{f(t)} dt - (x-a)^2$ 。目标是证明  $F(b) \geq 0$ 。

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \cdot \int_a^x \frac{1}{f(t)} dt + \int_a^x f(t) dt \frac{1}{f(x)} - 2(x-a) \\ &= \int_a^x \frac{f(x)}{f(t)} dt + \int_a^x \frac{f(t)}{f(x)} dt - 2(x-a) = \int_a^x \left[ \frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} \right] dt - 2(x-a) \end{aligned}$$

$$\text{又 } \frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} \geq 2\sqrt{\frac{f(x)}{f(t)} \cdot \frac{f(t)}{f(x)}} = 2。$$

$$\therefore \geq \int_a^x 2 dt - 2(x-a) = 2(x-a) - 2(x-a) = 0。$$

从而  $F'(x) \geq 0$ , 等于 0 不恒成立, 所以  $F(x)$  在  $[a, b]$  上单调增, 从而  $F(b) > F(a)$ ,  $\int_a^x f(t) dt \int_a^x \frac{1}{f(t)} dt - (x-a)^2 > 0$ 。

$$\text{所以 } \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$$

**例题:** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续递减, 证明  $0 < \lambda < 1$  时  $\int_0^\lambda f(x) dx \geq \lambda \int_0^1 f(x) dx$ 。

证明: 看到  $\lambda$  和 1, 可以做出辅助函数  $\frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ , 即要证明  $F(\lambda) \geq F(1)$ 。

又  $\lambda < 1$ , 所以只用证明  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上递减。

则  $F'(x) = \frac{f(x)x - \int_0^x f(t) dt}{x^2}$ , 又根据积分中值定理  $\int_0^x f(t) dt = f(\xi)(x-0)$ ,  $\xi \in (0, x)$ 。

$\therefore = \frac{f(x)x - f(\xi)x}{x^2} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x}$ , 因为  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上递减,  $\xi < x$ ,  $f(\xi) > f(x)$ 。

所以  $F'(x) < 0$ , 所以  $F(x)$  单调递减, 从而  $F(\lambda) \geq F(1)$ , 所以得证。

## 5.2 拉格朗日中值定理

多用于所给条件为“ $f(x)$  一阶可导”且某一端点值较简单甚至为 0 的题目。

一阶导数不代表导数连续, 导数可能存在震荡间断点。

**例题:** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上具有一阶连续导数, 且  $f(0) = f(1) = 0$ , 证明:  
 $|\int_0^1 f(x) dx| \leq \frac{1}{4} \max_{x \in [0, 1]} \{|f'(x)|\}$ 。

证明: 在  $[0, 1]$  中任意取一点  $x$ , 进行两次拉格朗日中值定理。

$$f(x) - f(0) = f'(\xi_1)(x - 0) \quad (\xi_1 \in (0, x)), \quad f(x) = f'(\xi_1)x。$$

$$f(1) - f(x) = f'(\xi_2)(1 - x) \quad (\xi_2 \in (x, 1)), \quad -f(x) = f'(\xi_2)(1 - x)。$$

$$\text{根据不等式性质: } |\int_0^1 f(x) dx| = |\int_0^x f(t) dt + \int_x^1 f(t) dt|$$

$$\leq |\int_0^x f(t) dt| + |\int_x^1 f(t) dt| \leq \int_0^x |f(t)| dt + \int_x^1 |f(t)| dt$$

$$\xi_1 \in (0, x) \text{ 上代入 } f(x) = f'(\xi_1)x, \quad \xi_2 \in (x, 1) \text{ 上代入 } -f(x) = f'(\xi_2)(1 - x)。$$

$$= \int_0^x |f'(\xi_1)|t dt + \int_x^1 |f'(\xi_2)|(1 - t) dt, \quad \text{令 } M = \max_{x \in [0, 1]} \{|f'(x)|\}。$$

$$\leq \int_0^x Mt dt + \int_x^1 M(1 - t) dt = M \left( \int_0^x t dt + \int_x^1 (1 - t) dt \right)$$

$$= M \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(1 - x)^2 \right) = M \left( \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right)$$

$$\text{即 } |\int_0^1 f(x) dx| \leq M \left( \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right), \quad \min \left( M \left( \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right) \right) = \frac{1}{4}M$$

$$\therefore |\int_0^1 f(x) dx| \leq \frac{1}{4}M = \frac{1}{4} \max_{x \in [0, 1]} \{|f'(x)|\}$$

## 5.3 泰勒公式

多用于所给条件为“ $f(x)$  二阶可导”且某一端点值较简单甚至为 0 的题目。

**例题:** 设  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上二阶导数连续, 且  $f(1) = 0$ , 当  $x \in [0, 2]$  时, 记  
 $M = \max\{|f''(x)|\}$ , 证明  $|\int_0^2 f(x) dx| \leq \frac{1}{3}M$ 。