

# 向量

Didneipsun

## 目录

<b>1</b>	<b>向量与向量组</b>	<b>1</b>
1.1	向量的定义与运算 . . . . .	1
1.2	向量组的线性概念 . . . . .	1
1.3	线性相关性 . . . . .	1
<b>2</b>	<b>极大线性无关组</b>	<b>2</b>
2.1	概念 . . . . .	2
<b>3</b>	<b>向量组秩</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>等价向量组</b>	<b>3</b>
4.1	定义 . . . . .	3
4.2	判定 . . . . .	3
4.3	与等价矩阵区别 . . . . .	4
<b>5</b>	<b>向量空间</b>	<b>4</b>
5.1	基本概念 . . . . .	4
5.2	基变换与坐标变换 . . . . .	4

线性代数的主要研究对象就是向量，行列式与矩阵都是由向量组成的向量组。

## 1 向量与向量组

### 1.1 向量的定义与运算

$n$  维向量**定义**：  $n$  个数构成的一个有序数组  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  称为一个  $n$  维向量，记为  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ，并称  $\alpha$  为  $n$  维行向量， $\alpha^T$  为  $n$  维列向量， $a_i$  为向量  $\alpha$  的  $i$  个分量。

若  $\alpha$  与  $\beta$  都是  $n$  维向量，且对应元素相等，则  $\alpha = \beta$ 。

$$\alpha + \beta = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n]。$$

$$k\alpha = [ka_1, ka_2, \dots, ka_n]。$$

### 1.2 向量组的线性概念

线性组合**定义**：  $m$  个  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  以及  $m$  个数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ ，则向量  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$  就是向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合。

线性表出**定义**： 若向量  $\beta$  能表示成向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合，则存在  $m$  个数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ ，使得  $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$ ，则成向量  $\beta$  能被向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出。否则不能被线性表出。

线性相关**定义**： 对  $m$  个  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ，存在一组不全为 0 的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ ，使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ ，则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关。

含有零向量或成比例向量的向量组必然线性相关。

线性无关**定义**： 对  $m$  个  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ，不存在一组不全为 0 的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ ，使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$ ，即仅当  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$  才成立，则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关。

两个非零向量，不成比例向量的向量必然线性无关。

### 1.3 线性相关性

1. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ( $n \geq 2$ ) 线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量可由其他  $n-1$  个向量线性表出。若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关的充要

条件是向量组的任何一个向量都不能被其他  $n - 1$  个向量线性表出。

2. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关, 而  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关, 则  $\beta$  可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示, 且表示方法唯一。
3. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表示, 且  $n > s$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关。(以少表多, 多的相关) 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  可由向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表示,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关, 则  $n \leq s$ 。
4. 设  $m$  个  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , 其中  $\alpha_1 = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{m1}]^T, \dots, \alpha_m = [a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{mm}]^T$ , 则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关的充要条件是齐次线性方程  $Ax = 0$  有非零解, 其中  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]$ ,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ 。  $m$  个  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关的充要条件是齐次线性方程  $Ax = 0$  只有零解。
5. 向量  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  表出, 则向量组  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n][x_1, x_2, \dots, x_n]^T = \beta$  有解, 即  $r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]) = r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta])$ 。否则则不能表出, 则方程无解,  $r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]) + 1 = r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta])$
6. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  存在一部分向量线性相关, 则整个向量组线性相关。若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关, 则任意一部分向量组线性无关。
7. 设  $m$  个  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 则把这些向量中每个各任意添加  $s$  个分量所得到的新向量组 ( $n + s$  维)  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*$  也是线性无关的; 如果  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则每个各去掉相同的若干分量得到的新向量组也线性相关。(原来无关延长无关, 原来相关缩短相关)

## 2 极大线性无关组

### 2.1 概念

极大线性无关组**定义**: 在向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中, 若存在部分  $a_i, a_j, \dots, a_k$  满足: ①  $a_i, a_j, \dots, a_k$  线性无关。② 向量组中任一向量  $a_s$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 均可由  $a_i, a_j, \dots, a_k$  线性表出。则称向量组  $a_i, a_j, \dots, a_k$  为原向量组的极大线性无关组。

不包含无用约束方程的最简方程组的系数矩阵就是极大线性无关组。

向量组的极大线性无关组一般不唯一，只由一个零向量组成的向量组不存在极大线性无关组，一个线性无关向量组的极大线性无关组就是其本身。

### 3 向量组秩

向量组构成矩阵的秩等于行向量组的秩等于列向量组的秩。

若  $A$  通过初等行变换为  $B$ ，则  $AB$  的行向量组是等价向量组，任何对应的部分列向量组都具有同样的线性相关性。

若向量组  $B$  均可由  $A$  线性表出，则  $r(B) \leq r(A)$ 。

### 4 等价向量组

任何一个组都可以由其极大线性无关组来代表。

#### 4.1 定义

设两个向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  和  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ ，若这两个向量组可以互相线性表出，则称其为等价向量组，记为  $\alpha \cong \beta$ 。

具有的性质：

1.  $A \cong A$ （反身性）。
2.  $A \cong B$ ，则  $B \cong A$ （对称性）。
3.  $A \cong B$ ， $B \cong C$ ，则  $A \cong C$ （传递性）。

向量组和其极大线性无关组是等价向量组。

#### 4.2 判定

若  $r(A) = r(B) = r(A|B)$ ，则向量组等价。

### 4.3 与等价矩阵区别

对于矩阵而言, 若  $A \cong B$ , 则  $AB$  同型且  $r(A) = r(B)$ 。

对于向量组而言, 若  $A \cong B$ , 则  $AB$  同维 (行数相同) 且  $r(A) = r(B) = r(A|B)$ 。

## 5 向量空间

### 5.1 基本概念

若  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  是  $n$  维向量空间  $R^n$  中的线性无关的有序向量组, 则任意向量  $\alpha \in R^n$  均可由  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  线性表出, 记为  $\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \dots + a_n\xi_n$ , 类似一个极大线性无关组, 则称有序向量组  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  为  $R^n$  的一个基, 基向量的个数  $n$  为向量空间的维数, 而  $[a_1, a_2, \dots, a_n]([a_1, a_2, \dots, a_n]^T)$  为向量  $\alpha$  在基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  下的坐标, 或称为  $\alpha$  的坐标行列向量。

### 5.2 基变换与坐标变换

若  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  和  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  是  $R^n$  中两个基, 且有关系:  $[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]C_{n \times n}$ , 则这个式子称为基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  到基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的基变换公式, 矩阵  $C$  就是基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  到基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的过渡矩阵,  $C$  可逆,  $C$  的第  $i$  列就是  $\eta_i$  在基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  下的坐标列向量。

$\alpha$  在基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  和基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  下坐标分别为  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ , 即  $\alpha = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]x = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]y$ 。又  $C$  是基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  到基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的过渡矩阵, 则  $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]C$ , 则  $\alpha = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]x = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]y = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]Cy$ , 从而  $x = Cy$  或  $y = C^{-1}x$ , 这个就是坐标变换公式。