线性方程组

Didnelpsun

目录

1 基本概念

矩阵是根据线性方程组得到。线性方程组和向量组本质上是一致的。

1.1 线性方程组与矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

n 元齐次线性方程组。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

n 元非齐次线性方程组。

m 是方程个数，即方程组行数，n 是方程未知数个数，即类似方程组的列数。

对于齐次方程，$x_1 = \cdots = x_n = 0$ 一定是其解，称为其**零解**，若有一组不全为零的解，则称为其**非零解**。其一定有零解，但是不一定有非零解。

对于非齐次方程，只有 $b_1 \cdots b_n$ 不全为零才是。

令**系数矩阵** $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，**未知数矩阵** $x_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，**常数项矩阵** $b_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$，**增广矩阵** $B_{m\times(n+1)} = \left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$。

所以 $AX = \begin{pmatrix} a_1 1x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$。

从而 $AX = b$ 等价于 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$，当 $b = O$ 就是齐次线性方程。

从而矩阵可以简单表示线性方程。

1.2 矩阵乘法与线性变换

矩阵乘法实际上就是线性方程组的线性变换，将一个变量关于另一个变量的关系式代入原方程组，得到与另一个变量的关系。

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1s}x_s \\ \cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{ms}x_s \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 + \cdots + b_{1n}t_n \\ \cdots \\ x_s = b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \cdots + b_{sn}t_n \end{cases}$$

原本是线性方程分别是 y 与 x 和 x 与 t 的关系式，而如果将 t 关于 x 的关系式代入 x 关于 y 的关系式中，就会得到 t 关于 y 的关系式：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(b_{11}t_1 + \cdots + b_{1n}t_n) + \cdots + a_{1s}(b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \cdots + b_{sn}t_n) \\ \cdots \\ y_m = a_{m1}(b_{11}t_1 + \cdots + b_{1n}t_n) + \cdots + a_{ms}(b_{s1}t_1 + b_{s2}t_2 + \cdots + b_{sn}t_n) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1s}b_{s1})t_1 + \cdots + (a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1s}b_{sn})t_n \\ \cdots \\ y_m = (a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{ms}b_{s1})t_1 + \cdots + (a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{ms}b_{sn})t_m \end{cases}$$

这可以看作上面两个线性方程组相乘，也可以将线性方程组表示为矩阵，进行相乘就得到乘积，从而了解矩阵乘积与线性方程组的关系：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}_{m\times s} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}_{s\times n}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1s}b_{s1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1s}b_{sn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{ms}b_{s1} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + \cdots + a_{ms}b_{sn} \end{pmatrix}_{m\times n} 。$$

1.3 线性方程组的解

对于一元一次线性方程：$ax = b$：

- 当 $a \neq 0$ 时，可以解得 $x = \dfrac{b}{a}$。
- 当 $a = 0$ 时，若 $b \neq 0$ 时，无解，若 $b = 0$ 时，无数解。

当推广到多元一次线性方程组：$Ax = b$，如何求出 x 这一系列的 x 的解？

从数学逻辑上看，已知多元一次方程，有 m 个约束方程，有 n 个未知数，假定 $m \leqslant n$。

当 $m < n$ 时，就代表有更多的未知变量不能被方程约束，从而有 $n - m$ 个自由变量，所以就是无数解，解组中其他解可以由自由变量来表示。无穷多解需要一个解来代表其他解，这个解就是**基础解系**。

当 $m = n$ 时代表约束与变量数量相等，此时又要分三种情况。

当所有的约束条件其中存在线性相关，即一部分约束条件可以由其他约束表示，则代表这部分约束条件是没用的，实际上的约束条件变少，从而情况等于 $m < n$，结果是无数解。

当所有的约束条件不存在线性相关，但是一部分约束条件互相矛盾，则约束条件下就无法解出解，从而结果是无实数解。

当所有的约束条件不存在线性相关，且相互之间不存在矛盾情况，这时候才会解出一个实数解，从而结果是有唯一实解。

若使用矩阵来解决线性方程组的问题，其系数矩阵 $A_{m\times n}$。

对于 $A \neq O$，则 $Ax = b$，若存在一个矩阵 $B_{n\times n}$ 类似 $\dfrac{1}{a}$，使得 $BAx = Bb$，解得 $Ex = x = Bb$，这个 B 就是 A 的逆矩阵。

对于 $A = O$ 即不可逆，需要判断 b 是否为 0，若不是则无实数解，若是则无穷解，这种判断需要用到增广矩阵，需要用到矩阵的秩判断。

取自由变量时必须要保证取完后的矩阵行列式不为 0，否则自由变量不能表示其他向量。

1.4 线性方程组的矩阵解表示

已知对于线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$。

按乘积表示为 $A_{m\times n}x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$，然后将 A 按列分块，x 按行分块：

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b，\quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}。$$

这三种都是解的表示方法。

2 具体线性方程

2.1 齐次方程组

即 $Ax = 0$。其中 A 有 m 行 n 列。

2.1.1 有解条件

必有一个零解。

有解条件讨论是否列满秩问题，即方程组是否能约束全部变量。

对系数矩阵进行行变换，若 $r(A) = m$，即使行满秩若 $m < n$ 则列不满秩，那么还是无法约束所有变量；若 $r(A) = n$，即使行不满秩但是列满秩，所以还是能约束所有变量。

当 $r(A) = n$ 时，即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，则方程组有唯一零解。

当 $r(A) = r < n$ 时，即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，则方程具有无穷多个非零解，具有 $n - r$ 个线性无关解（自由变量）。

2.1.2 解的性质

若 $A\xi_1 = 0$，$A\xi_2 = 0$，则 $A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = 0$。

2.1.3 解的结构

基础解系定义：假如 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 满足：①是方程组 $Ax = 0$ 的解；②线性无关；③方程组 $Ax = 0$ 的任一解均可由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性表出，则称 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的**基础解系**。

当 $r(A) < n$ 时讨论基础解系。

通解定义：设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系，则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $Ax = 0$ 的通解，$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$ 为任意常数。

2.1.4 求解过程

1. 将系数矩阵 A 作为**初等行变换**后化为阶梯形矩阵或最简阶梯形矩阵 B，因为初等行变换将方程组化为同解方程组，所以 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解，只需解 $Bx = 0$，设 $r(A) = r$。其中 A 为 m 行 n 列，m 为约束方程组个数，n 为变量个数。

2. 在 B 中按列找到一个秩为 r 的子矩阵，即在每排阶梯都选出一列组合成子矩阵，则剩余列位置的未知数就是自由变量。（极大线性无关组）

3. 按基础解析定义求出 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，并写出通解。

例题：求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$ 的通解。

解：系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$，然后对其行变换，得到：

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，r(A)=3。$$

然后找子矩阵，第一台阶选 C_1，第二台阶选 C_2 或 C_3，第三台阶选 C_4 或 C_5，随便找一个，如 (C_1,C_2,C_4) 为子矩阵，则 C_3，C_5 所代表的未知数 x_3，x_5 就是自由变量。

所以选择两个分量 $\xi_1=(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\xi_{14},\xi_{15})^T$ 和 $\xi_2=(\xi_{21},\xi_{22},\xi_{23},\xi_{24},\xi_{25})^T$ 作为基础解系。

因为此时选择 x_3，x_5 为自由变量，所以 x_3 和 x_5 所对应的 ξ_{13}、ξ_{15}、ξ_{23}、ξ_{25} 可以任意取，但是为了保证秩为 2，所以让 $\xi_{13}=1$、$\xi_{15}=0$、$\xi_{23}=0$、$\xi_{25}=1$。这四个分量组成的矩阵线性无关，原矩阵线性无关，延长矩阵线性无关，从而 ξ_1 和 ξ_2 必然线性无关。

所以此时已经给定两组解，一种是 ξ_1 的 $x_3=1$，$x_5=0$，另一种是 ξ_2 的 $x_3=0$，$x_5=1$，这样就只有三个未知数和三个方程，分别代入 A 矩阵所代表的方程组中（代入行阶梯矩阵就可以，不用代入最简行阶梯矩阵）：

$\begin{cases} 1\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3-3\cdot x_4-1\cdot x_5=0 \\ 0\cdot x_1-2\cdot x_2+2\cdot x_3+2\cdot x_4+1\cdot x_5=0 \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+3\cdot x_4-1\cdot x_5=0 \end{cases}$，分别代入：

$$\xi_1\text{：}\begin{cases}1\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot 1-3\cdot x_4-1\cdot 0=0\\0\cdot x_1-2\cdot x_2+2\cdot 1+2\cdot x_4+1\cdot 0=0\\0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot 1+3\cdot x_4-1\cdot 0=0\end{cases}\text{，}\xi_1=(-1,1,1,0,0)^T\text{。}$$

$$\xi_2\text{：}\begin{cases}1\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot 0-3\cdot x_4-1\cdot 1=0\\0\cdot x_1-2\cdot x_2+2\cdot 0+2\cdot x_4+1\cdot 1=0\\0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot 0+3\cdot x_4-1\cdot 1=0\end{cases}\text{，}\xi_2=(7,5,0,2,6)^T\text{。}$$

所以通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1(-1,1,1,0,0)^T+k_2(7,5,0,2,6)^T$。

2.2 非齐次方程组

即 $Ax=b$，b 为不全为 0 的列向量。

2.2.1 有解条件

$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，其中 $\alpha_j=[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}]^T$，$j=1,2,\cdots,n$。

当 $r(A)\neq r([A,b])$ 时（$r(A)+1=r([A,b])$），即 b 不能被 A 线性表出，则方程组无解。

当 $r(A)=r([A,b])=n$ 时，即 b 能被 A 线性表出，A 线性无关，$[A,b]$ 线性相关，矩阵列满秩，则方程组有唯一解。

当 $r(A)=r([A,b])=r<n$ 时，即 b 能被 A 线性表出，A 线性相关，矩阵列降秩，则方程组有无穷多解。

2.2.2 解的性质

若 η_1,η_2,η 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，ξ 是对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则：

①$\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的通解。

②$k\xi+\eta$ 是 $Ax=b$ 的解。

2.2.3 求解过程

将系数矩阵和常数项矩阵合并为一个增广矩阵，对增广矩阵进行行变换变为阶梯形矩阵，求出对应齐次线性方程组的通解，最后假设一个非齐次线性方程组的特解。

1. 写出 $Ax=b$ 的导出方程组 $Ax=0$ 并求出其通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$。

2. 求出 $Ax=b$ 的一个特解 η。

3. $Ax=b$ 的通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$。

例题：求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3 \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7 \end{cases}$ 的通解。

解：对方程组提取出增广矩阵并进行行变换：

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)。$$

然后求齐次方程的通解：找两列作为子矩阵，如 x_1，x_2，则 x_3，x_4 作为自由变量，设两个 $\xi_1=(\xi_{11},\xi_{12},1,0)^T$ 和 $\xi_2=(\xi_{21},\xi_{22},0,1)^T$。

解得 $\xi_1=(-3,2,7,0)^T$，$\xi_2=(-13,4,0,7)^T$（为了得到整数通解都乘了 7）。

通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1(-3,2,7,0)^T+k_2(-13,4,0,7)^T$。

然后求其非齐次的特解，让两个自由变量为 0 减少计算，即 $\eta=(\eta_1,\eta_2,0,0)^T$ 代入方程得到 $\eta=\left(\dfrac{13}{7},-\dfrac{4}{7},0,0\right)^T$。

所以通解为 $k_1(-3,2,7,0)^T+k_2(-13,4,0,7)^T+\left(\dfrac{13}{7},-\dfrac{4}{7},0,0\right)^T$。

注意：通解的向量可以同乘一个数，因为其表示的是一个关系而不是具体数，但是特解不能同乘一个数，因为其表示的是一个具体的数。

2.3 克拉默法则

克拉默法则本来是矩阵中的运算法则，但是与方程组有更密切的关系，所以放到线性方程组中。

定理：若 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的行列式 $|A|\neq 0$，则方程有唯一解，且 $x_i=\dfrac{|A_i|}{|A|}$，其中 A_i 为把系数矩阵 A 的第 i 列的元素用方程组右侧的常数项代替后所得到的 n 阶矩阵。

3　抽象线性方程

3.1　解的判定

$Ax=0$，总有解，至少有零解。

$A_{m\times n}x=0$，当 $r(A)=n$ 时，只有零解；当 $r(A)<n$ 时，无穷多解。

$A_{m\times n}x=b$ 时，当 $r(A)=r([A,b])+1\neq r([A,b])$ 时，无解；当 $r(A)=r([A,b])=n$ 时，有唯一解；当 $r(A)=r([A,b])=r<n$ 时，无穷多解。

当 $Ax=0$ 只有零解时，$r(A)=n$，当 $Ax=0$ 有无穷多解时，$r(A)=r<n$，都不能判定 $r(A)$ 与 $r([A,b])$ 的关系，若以 $Ax=b$ 可能有解也可能无解。

当 $Ax=b$ 有唯一解时，$r(A)=r([A,b])=n$，所以 $Ax=0$ 列满秩，只有零解。

当 $Ax=b$ 有无穷多解时，$r(A)=r([A,b])=r<n$，则 $Ax=0$ 有无穷多解。

当 A 行满秩，则 $r(A)=r([A,b])$，则 $Ax=\beta$ 必有解，因为原来无关，延长无关。

所以已知非齐次解情况能推出齐次解情况，但是反之不能。

3.2　解的性质

非齐次通解 = 齐次的通解 + 非齐次一个特解。

例题：$r(A_{4\times 4})=2$，η_1,η_2,η_3 为 $Ax=b$ 的三个解向量，其中具有如下关系：$\begin{cases}\eta_1-\eta_2=(-1,0,3,-4)^T\\ \eta_1+\eta_2=(3,2,1,-2)^T\\ \eta_3+2\eta_2=(5,1,0,3)^T\end{cases}$，求 $Ax=b$ 的通解。

解：$s=n-r(A)=4-2=2$，所以通解的基础解系中有两个分量 ξ_1 和 ξ_2。

所以需要解 $Ax=0$，又存在三个解向量，所以 $A\eta_1=A\eta_2=A\eta_3=b$，所以 $A(\eta_1-\eta_2)=0$，所以 $\eta_1-\eta_2=(-1,0,3,-4)^T$ 就是其中一个解，所以令 $\xi_1=\eta_1-\eta_2=(-1,0,3,-4)^T$。

然后根据所给出的 η 进行凑，$A(\eta_1+\eta_2)=2b=A(3,2,1,-2)^T$，$A(\eta_3+2\eta_2)=3b=A(5,1,0,3)^T$。所以 $3A(\eta_1+\eta_2)-2A(\eta_3+2\eta_2)=0$，所以 $A(3(\eta_1+\eta_2)-2(\eta_3+2\eta_2))=0$，所以令 $\xi_2=3(\eta_1+\eta_2)-2(\eta_3+2\eta_2)=(-1,4,3,-12)^T$。

最后找一个特解，$\because\ A(\eta_1+\eta_2)=2b$，$\therefore\ A\left(\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)=b$，$\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}=\left(\dfrac{3}{2},1,\dfrac{1}{2},-1\right)^T$ 就是一个特解。

所以通解为 $k_1(-1,0,3,-4)^T+k_2(-1,4,3,-12)^T+\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2},-1\right)^T$

3.3 基础解系

对于 $A_{m\times n}x=0$，$r(A)=r$，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 满足：①$A\alpha_i=0$，$i=1,2,\cdots,s$；②$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关；③$s=n-r$，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为 $Ax=0$ 的基础解系。

例题：设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则下列向量组也是方程组 $Ax=0$ 的基础解系的是 ()。

$A.\xi_1-\xi_2$，$\xi_2-\xi_3$，$\xi_3-\xi_1$ $B.\xi_1+\xi_2$，$\xi_2-\xi_3$，$\xi_3+\xi_1$

$C.\xi_1+\xi_2-\xi_3$，$\xi_1+2\xi_2+\xi_3$，$2\xi_1+3\xi_2$ $D.\xi_1+\xi_2$，$\xi_2+\xi_3$，$\xi_3+\xi_1$

解：需要判断基础解系是否线性无关，需要对应的行列式值非 0。

对于 D：$(\xi_1+\xi_2，\xi_2+\xi_3，\xi_3+\xi_1)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\neq 0$，所以 D 线性无关，从而为基础解系。

例题：设 $\xi_1=[1,-2,3,1]^T$，$\xi_2=[2,0,5,-2]^T$ 是齐次线性方程组 $A_{3\times 4}x=0$ 的解，且 $r(A)=2$，则下列向量中是其解向量的是 ()。

$A.\alpha_1=[1,-2,3,2]^T$ $B.\alpha_2=[0,0.5,-2]^T$

$C.\alpha_3=[-1,-6,-1,7]^T$ $D.\alpha_4=[1,6,1,6]^T$

解：若 ξ_1 和 ξ_2 为 $Ax=0$ 的基，所以 ξ_1 和 ξ_2 应该能表示其解向量。

所以将 ξ_1 和 ξ_2 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 分别联立为矩阵，进行初等行变换，查看是否有解，即新增广矩阵必须秩为 2。

ABD 选项增广矩阵的秩都为 3，所以不能表示，而只有 C 的为 2，所以 C 可以表示。

3.4 系数矩阵列向量与解

对于齐次方程而言，其解是让 A 的线性组合为零向量时线性组合的系数，对于非齐次而言解是 b 由 A 线性表出的表出系数。

所以方程的解就是描述列向量组之间数量关心的系数。

例题：已知 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是四维列向量，且 $\alpha_1=2\alpha_2+\alpha_3$，$r(A)=3$，若 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通

解。

解：$\because \alpha_1 = 2\alpha_2 + \alpha_3$，$1\alpha_1 - 2\alpha_2 - 1\alpha_3 + 0\alpha_4 = 0$，即 $A(1, -2, -1, 0)^T = 0$。

又 $r(A_{4\times 4}) = 4$，$s = n - r(A) = 4 - 3 = 1$，$\therefore \xi = (1, -2, -1, 0)^T$。

所以特解为 β 的系数：$(1, 2, 3, 4)^T$，通解为 $k(1, -2, -1, 0)^T + (1, 2, 3, 4)^T$。

4 公共解

4.1 待定系数法

1. 求两个方程组解的交集部分。可以联立两个方程求解。

2. 求出 $A_{m\times n}x = 0$ 的通解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s$，这些 k 本来是独立的，然后代入 $B_{m\times n}x = 0$，求出 $k_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ 之间的关系，再代回 $A_{m\times n}x = 0$ 的通解中就得到公共解。

3. 给出 $A_{m\times n}x = 0$ 的通解与 $B_{m\times n}x = 0$ 的通解联立：$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s = l_1\eta_1 + l_2\eta_2 + \cdots + l_s\eta_s = 0$，能解出 k_i 和 l_i。

这种方法可以求出公共解，不过比较麻烦。

如果已经给出原方程的基础解系而没有给出矩阵，则这个方法解出公共解较好。

例题：已知线性方程组 $A = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$，$B = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$，求方程组的公共解。

解：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$。

两个秩都为 2，选择前两个分量为基子矩阵，后两个为通解分量。

$\xi_1 = (0, 0, 1, 0)^T$，$\xi_2 = (-1, 1, 0, 1)^T$，$\eta_1 = (0, 1, 1, 0)^T$，$\eta_2 = (-1, -1, 0, 1)^T$。

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = k_1(0, 0, 1, 0)^T + k_2(-1, 1, 0, 1)^T = (-k_2, k_2, k_1, k_2)^T$。

$l_1\eta_1 + l_2\eta_2 = l_1(0, 1, 1, 0)^T + l_2(-1, -1, 0, 1)^T = (-l_2, l_1 - l_2, l_1, l_2)^T$。

令 $(-k_2, k_2, k_1, k_2)^T = (-l_2, l_1 - l_2, l_1, l_2)^T$，所以解得 $2k_2 = k_1$。

公共解为 $(-k_2, k_2, 2k_2, k_2)^T = k_2(-1, 1, 2, 1)^T$。

4.2 矩阵法

要求 A 和 B 的非零公共解，即求联立矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ 的非零解。对这个矩阵求出基础解系。

如果直接给出矩阵，则这种方法可以不用求出基础解系就能得到公共解。

5 同解方程组

5.1 性质

若 $A_{m\times n}x = 0$ 和 $B_{s\times n}x = 0$ 有完全相同的解，就是同解方程组。

$\therefore r(A) = r(B) = r([A, B]^T)$。即行向量组等价。

A 与 $A^T A$ 同解。

5.2 代入法

先求一个方程组的通解，然后把这个通解代入到第二个方程组中，不用管 k 的取值（因为 k 为任意数，所以直接令其为 0）直接求出对应参数。

例题：线性方程组 $A = \begin{cases} x_1 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$，在其基础上加一个方程 $B = \begin{cases} x_1 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_4 + ax_2 + bx_3 + 13x_4 = 0 \end{cases}$，$ab$ 满足什么条件，AB 是同解方程组。

解：B 在 A 的基础上增加一个方程，即多增加了约束，从而 B 的解一定为 A 的解的子集。所以只要 A 的解也满足 B 的解就是同解方程组。

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$，$s = n - r = 4 - 3 = 1$，$\xi = (-3, -5, 1, 0)^T$，$k\xi = k(-3, -5, 1, 0)^T = (-3k, -5k, k, 0)^T$。

所以这个对于 B 而言必然满足前三行，若要整体满足，就也要满足 B 的第四行，所以直接代入第四行：$4(-3k) + a(-5k) + bk + 0 = k(-12 - 5a + b) = 0$。

又 k 为任意数，所以 $-12 - 5a + b = 0$，即 $b = 5a + 12$。

例题：设 A 为 n 阶实矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵，证明方程组 $\Lambda : Ax = 0$ 和 $\Upsilon : A^TAx = 0$ 是同解方程组。

证明：若 γ 为 Λ 的唯一解，则 $A\gamma = 0$，则 $A^TA\gamma = A^T0 = 0$，$\therefore \gamma$ 也为 Υ 的解。

若 η 为 Υ 的唯一解，则 $A^TA\eta = 0$，$\eta^TA^TA\eta = (A\eta)^TA\eta = \|A\eta\|^2 = 0$，所以 $A\eta = 0$，从而 η 也为 Λ 的解。

所以同解，所以其两个矩阵的基解等价。

定理：$r(A) = r(A^T) = r(A^TA) = r(AA^T)$。