

# 微分方程

Didnelpsun

## 目录

<b>1</b>	<b>微分方程基本概念</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>可分离变量的微分方程</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>齐次方程</b>	<b>2</b>
3.1	自然齐次方程 . . . . .	2
3.2	* 可化为齐次方程 . . . . .	3
<b>4</b>	<b>一阶线性微分方程</b>	<b>4</b>
4.1	线性方程 . . . . .	4
4.2	* 伯努利方程 . . . . .	4
<b>5</b>	<b>可降阶的高阶微分方程</b>	<b>4</b>
5.1	$y^{(n)} = f(x)$ 型 . . . . .	5
5.2	$y'' = f(x, y')$ 型 . . . . .	5
5.3	$y'' = f(y, y')$ 型 . . . . .	5
<b>6</b>	<b>高阶线性微分方程</b>	<b>6</b>

本节内容较少。

若一曲线过点  $(1, 2)$ ，且该曲线上任一点  $M(x, y)$  处的切线的斜率为  $2x$ ，求该曲线的方程。

令所求曲线为  $\varphi(x)$ ， $\frac{dy}{dx} = 2x$ ，且  $x = 1$  时， $y = 2$ 。

两边积分： $\int dy = \int 2x dx$ 。所以  $y = x^2 + C$ 。

代入  $(1, 2)$ ， $C = 1$ ，所以  $y = x^2 + 1$ 。

## 1 微分方程基本概念

表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，即含导数的方程就是微分方程。导数可能是一阶导数也可能是二阶以及以上阶数的导数。

微分方程所出现的未知函数的最高阶导数的阶数就是该微分方程的**阶**。

$n$  阶微分方程的形式是  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ 。其中最高阶导数是必须出现的。若能从中解出最高阶导数，则可得微分方程  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ 。

若微分方程中的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则就是微分方程的**通解**。

如若  $y'' = 3$ ，则  $y' = 3x + C_1$ ， $y = \frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2$ ，此时含有两个任意常数  $C_1C_2$ ，则微分方程的阶数也为 2。

确定通解中任意常数后，就得到微分方程的**特解**。

当给出  $x = x_0$  时  $y_0$  与  $y'_0$  的值，那么这些条件就是**初值条件**，如上面的  $y'' = 3$ 。

求微分方程  $y' = f(x, y)$  满足初值条件  $y|_{x=x_0} = y_0$  的特解这样的问题，就是一阶微分方程的初值问题，记为 
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}。$$

微分方程的解的图形是一条曲线，叫做微分方程的**积分曲线**，初值问题的集几何意义就是求微分方程的通过某点的积分曲线。

**例题：**判断函数  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$  是否是微分方程  $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$  的解，若是则令其为  $k \neq 0$  时方程的通解，求满足初值条件  $x|_{t=0} = A$ ， $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$  时的特解。

判断是否为方程的解，就要将这个解代入微分方程中。微分方程中除了  $x$ ，还出现了  $x''$ ，所以需要先将  $x$  对  $t$  求两次导：

$x' = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$ ， $x'' = -k^2C_1 \sin kt - k^2C_2 \sin kt$ 。代入方程：

$-k^2(C_1 \sin kt + C_2 \sin kt) + k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0$ , 所以是解, 然后求特解:

代入  $x|_{t=0} = A$ ,  $\therefore C_1 = A$ , 代入  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$ ,  $\therefore C_2 = 0$ 。

所以代入  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$  得到特解:  $x = A \cos kt$ 。

## 2 可分离变量的微分方程

对于第一节的  $dy = 2x dx$  可以直接求解, 但是不是所有一阶微分方程都可以如此求通解, 如  $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$  两端直接积分就可以得到通解  $x^2 + C$ 。

但是并不是所有都是如此, 如  $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$  求积分得  $y = \int 2xy^2 dx$ , 这本身不能直接解, 但是可以将  $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$  先两边同乘  $\frac{dx}{y^2}$  得到  $\frac{dy}{y^2} = 2x dx$ , 将  $xy$  分离在两端, 然后两边同时积分得到  $-\frac{1}{y} = x^2 + C$ , 所以  $y = -\frac{1}{x^2 + C}$ 。

即若可以变型为  $g(y)dy = f(x)dx$  的一阶导数方程就是可分离变量的微分方程。即将含  $y$  的放在一边, 含  $x$  的放在另一边。

然后对两边求积分就得到  $\int g(y) dy = \int f(x) dx$ , 解得隐式解或隐式通解  $G(y) = F(x) + C$ 。

**例题:** 求微分方程  $\frac{dy}{dx} = 2xy$ 。

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx, \ln |y| = x^2 + C, |y| = e^{x^2+C}.$$

$$\therefore y = \pm e^{x^2} e^C = \pm C_1 e^{x^2} = C_2 e^{x^2}.$$

**注意:** 在微分方程部分可以直接  $\ln y = x^2 + C$  而不用管正负号, 因为正负号都会被归为常数中。

## 3 齐次方程

### 3.1 自然齐次方程

若一阶微分方程可化为  $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , 则这方程就是一个齐次方程。

如  $(xy - y^2)dx - (x^2 - 2xy)dy = 0$  可以化为  $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ , 即  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}$ 。

解决齐次方程问题的过程: 令  $u = \frac{y}{x}$ ;  $y = xu$ ;  $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 。

代入微分方程:  $u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)$ ,  $\therefore x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$ , 分离变量:  $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$ , 求积分  $\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$ 。最后求出积分再用  $\frac{y}{x}$  替代  $u$ 。

若是方程可以变为齐次方程, 则  $x$  和  $y$  的幂应该是对称的, 可以尝试除以一个  $x^a$  来变为  $\frac{y^a}{x^a}$  形式。

**例题:** 求  $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$ 。

得到  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ 。

然后将这个等式化为  $\frac{y}{x}$  的形式, 分子分母同时除以  $x^2$ :  $\frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy - x^2}{x^2}} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$ 。

从而到第三步:  $u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u - 1}$ ,  $\therefore x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u - 1} - u = \frac{u}{u - 1}$ 。

$\therefore \frac{u - 1}{u} du = \frac{dx}{x}$ ,  $\therefore \int \frac{u - 1}{u} du = \int \frac{dx}{x}$ ,  $u - \ln u = \ln x + C$ ,  $\ln xu = u + C$ 。

代入  $u = \frac{y}{x}$ , 得到  $\ln y = \frac{y}{x} + C$ , 所以得到  $y = Ce^{\frac{y}{x}}$ 。

### 3.2 \* 可化为齐次方程

对于自然齐次方程, 其形式如  $\frac{dy}{dx} = \frac{A_1x + B_1y}{A_2x + B_2y}$ , 则可以除以  $x$  得到齐次方程。

而对于形式如  $\frac{dy}{dx} = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}$ , 则因为有常数项, 所以不能直接除以  $x$ 。

所以想尝试消去常数项。令  $x = X + h$ ,  $y = Y + k$ 。

$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{A_1X + B_1Y + A_1h + B_1k + C_1}{A_2X + B_2Y + A_2h + B_2k + C_2}$ , 当取一个合适的  $h$  和  $k$  时常数项  $A_1h + B_1k + C_1 = A_2h + B_2k + C_2 = 0$ , 从而能化为齐次方程。

若  $\frac{A_2}{A_1} \neq \frac{B_2}{B_1}$ , 则可以解得:

$$\begin{cases} k = \frac{A_1C_2 - A_2C_1}{A_2B_1 - A_1B_2} \\ h = \frac{A_1B_1C_2 - A_2B_1C_1 + A_1A_2B_1C_1 - A_1^2B_2C_1}{A_1^2B_2 - A_1A_2B_1} \end{cases}$$

若  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1}$ , 即关系式对应成比例。

令  $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \lambda$ ,  $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\lambda(A_1x + B_1y) + C_2}$ 。

又令  $A_1x + B_1y = v$ ,  $\therefore \frac{dv}{dx} = A_1 + B_1 \frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dx} = A_1 + B_1 \frac{v + C_1}{\lambda v + C_2}$

$= \frac{(A_1\lambda + B_1)v + A_1C_2 + B_1C_1}{\lambda v + C_2}$ 。此时未知数只有  $v$ , 所以可以按照可分离变量来处理。

## 4 一阶线性微分方程

### 4.1 线性方程

形如  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$  就是一阶线性方程。因为其对未知函数  $y$  与其导数都是一次方程。

若  $Q(x) \equiv 0$ , 则是齐次一阶线性微分方程, 可化为  $\frac{dy}{y} = -P(x) dx$ ,  $\ln y = \int P(x) dx + C'$ ,  $y = e^{-\int P(x) dx} \cdot e^{C'}$ ,  $y = Ce^{-\int P(x) dx}$ 。

若  $Q(x) \neq 0$ , 则是非齐次一阶线性微分方程, 令  $y = ue^{-\int P(x) dx}$ , 求  $u$  这个关于  $x$  的函数的具体值, 这就是**常数变易法**。代入  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ , 得到  $u'e^{-\int P(x) dx} - ue^{-\int P(x) dx}P(x) + P(x)ue^{-\int P(x) dx} = Q(x)$ , 得到  $u'e^{-\int P(x) dx} = Q(x)$ , 从而得到  $u'$ , 再对  $u'$  积分得到  $u = \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C$ 。从而代入  $y = ue^{-\int P(x) dx}$ , 得到**定理**:  $y = e^{-\int P(x) dx} \left( \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C \right)$ 。非齐次通解就是其齐次通解加上一个非齐次的特解。

**例题**: 求  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$ 。

不能直接做, 因为不能分离出  $y$ 。

可以两边求倒数:  $\frac{dx}{dy} - x = y$ , 颠倒  $xy$ , 得到  $\frac{dy}{dx} - y = x$ 。就可以按照公式来求。

或令  $x+y = u$ , 所以  $y = u - x$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$ ,  $\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{u}$ ,  $\frac{u}{1+u} du = dx$ 。

### 4.2 \* 伯努利方程

形如  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$  就是伯努利方程。若  $y = 0$  则是齐次方程, 若  $y = 1$  则是一阶线性方程。

变形:  $y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$ , 又令  $y^{1-n} = z$ ,  $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$ , 从而  $\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} = y^{-n} \frac{dy}{dx}$ , 代入  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$  得到  $\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$ , 从而  $\frac{dz}{dx} = (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ , 将  $(1-n)P(x)$  当作  $P(x)$ ,  $(1-n)Q(x)$  当中  $Q(x)$  代入得到  $z$  的关系式, 再求  $y$ 。

## 5 可降阶的高阶微分方程

高阶微分方程即含二阶以及二阶以上的微分方程, 需要将其降为一阶微分方程。

### 5.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型

右边是只包含  $x$  的函数。

直接对函数不断求积分就可以了。连续积分  $n$  次，会得到一个含有  $n$  个任意常数的通解。

**例题：**求  $y''' = e^{2x} - \cos x$ 。

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1, \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2, \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3。$$

### 5.2 $y'' = f(x, y')$ 型

即存在  $y''$ ,  $y'$  和  $x$  但是没有  $y$ 。

所以令  $y' = p$ ,  $y'' = p'$ , 代入:  $p' = f(x, p)$ , 代入  $p = \varphi(x, C_1)$ , 所以  $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$ , 对其积分:  $y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$ 。

**例题：**求  $(1+x^2)y'' = 2xy'$ , 满足初值条件  $y|_{x=0} = 1$ ,  $y'|_{x=0} = 3$  的特解。

令  $y' = p$ ,  $y'' = p'$ , 所以  $(1+x^2)p' = 2xp$ 。

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2}dx, \quad \ln p = \ln(1+x^2) + C', \quad p = C(1+x^2), \quad \text{所以 } y' = 3(1+x^2),$$
$$y = x^3 + 3x + 1。$$

### 5.3 $y'' = f(y, y')$ 型

即存在  $y''$ ,  $y'$  和  $y$  但是没有  $x$ 。

$$\text{所以令 } y' = p, \quad y'' = p' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy} = f(y, p)。$$

设其通解为  $y' = p = \varphi(y, C_1)$ 。

$$\text{分离变量并积分, 得到通解为 } \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2。$$

**例题：**求微分方程  $yy'' - y'^2 = 0$  的通解。

$$\text{令 } y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}, \quad \text{代入 } yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0。$$

$$\text{若 } p \neq 0, \quad y \neq 0, \quad \text{则 } yp \frac{dp}{dy}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}, \quad p = Cy。$$

若  $p = 0$ , 则  $y' = 0$ , 则  $y$  是一个常数。

所以综上  $y = C_2 e^{C_1 y}$ 。

## 6 高阶线性微分方程

第一部分是一阶微分方程, 分为可分离变量微分方程、齐次微分方程、一阶齐次线性微分方程、一阶非齐次线性微分方程。

第二部分是可降阶的高阶微分方程, 分为三种。

第三部分就是本节的高阶线性微分方程,  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$  就是  $n$  阶齐次线性微分方程,  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$  就是  $n$  阶非齐次线性微分方程

若  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  为两个函数, 当  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  不成比例, 则称  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  线性无关, 否则  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  线性相关。

**定理:** 若  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  为  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$  的解, 则  $y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$  也为其解。

证明: 因为  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  为解, 所以代入方程:

$$\varphi_1'' + a(x)\varphi_1' + b(x)\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2'' + a(x)\varphi_2' + b(x)\varphi_2 = 0$$

$$\text{从而 } (C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)'' + a(x)(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)' + b(x)(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = C_1(\varphi_1'' + a(x)\varphi_1' + b(x)\varphi_1) + C_2(\varphi_2'' + a(x)\varphi_2' + b(x)\varphi_2) = 0。$$

所以得证。

**定理:** 若  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  分别为  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$  与  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$  的解, 则  $y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$  为  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$  的解。

证明:  $\varphi_1'' + a(x)\varphi_1' + b(x)\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2'' + a(x)\varphi_2' + b(x)\varphi_2 = f(x)$ , 代入  $y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ :

$$(\varphi_1 + \varphi_2)'' + a(x)(\varphi_1 + \varphi_2)' + b(x)(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1'' + a(x)\varphi_1' + b(x)\varphi_1) + (\varphi_2'' + a(x)\varphi_2' + b(x)\varphi_2) = f(x)。$$

所以得证。

**定理:** 若  $\varphi_1(x)$  与  $\varphi_2(x)$  为  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$  的解, 则  $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$  为  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$  的解。

证明:  $\varphi_1'' + a(x)\varphi_1' + b(x)\varphi_1 = f(x)$ ,  $\varphi_2'' + a(x)\varphi_2' + b(x)\varphi_2 = f(x)$ , 代入  $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ :

$$\begin{aligned} & (\varphi_2 - \varphi_1)'' + a(x)(\varphi_2 - \varphi_1)' + b(x)(\varphi_2 - \varphi_1) \\ & (\varphi_2'' + a(x)\varphi_2' + b(x)\varphi_2) - (\varphi_1'' + a(x)\varphi_1' + b(x)\varphi_1) \\ & f(x) - f(x) = 0, \text{ 所以得证。} \end{aligned}$$