

Projekt des Ingenieurwissenschaftler Physik I

Diego Alonso Rodríguez Almaguer

4. Juni 2021

```
[2] : using FFTW
using Plots
Plots.theme(:ggplot2)
gr();
```

1 Fourier-Transformation im zweidimensionalen Raum

1.1 Die n-dimensionale Fourier-Transformation

Wir kennen schon die Fourier-Transformation für eine unabhängige Variable, so haben wir es:

Sei $f \in \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Die (kontinuierliche) Fourier-Transformierte $\mathcal{F}\{f(t)\}$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

und die zugehörige inverse Transformation lautet:

$$\mathcal{F}^{-1}\{g(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2)$$

Aber auch ist es möglich, diese mathematische Ausdrücke für funktionen $f \in \mathbb{R}_n$ schreiben. Also:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}_n} f(t)e^{-i\omega \cdot t} dt \quad (3)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{g(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}_n} g(\omega)e^{i\omega \cdot t} d\omega \quad (4)$$

Dabei gilt: dt und $d\omega$ wären n -dimensionale Volumenelemente und " $\omega \cdot t$ " das Standardskalarprodukt der Vektoren t und ω .

1.2 Sonderfall: 2D Fourier-Transformationen

In 1 Dimension benutzen wir normalerweise t für Zeit- und ω für Frequenzraum. In 2 Dimensionen Fourier-Transformationen (2DFT) ist es einfacher, auf räumlicher Dimensionen zu denken. Das heißt, $t = x\hat{i} + y\hat{j}$. Für g benutzen wir (u, v) , die vertikale und horizontale räumliche Frequenzen. Das heißt, $\omega = u\hat{i} + v\hat{j}$. Da wäre $\omega \cdot t = ux + vy$ und infolgedessen werden die funktionen

so geschrieben: $f(t) = f(x, y)$ und $g(\omega) = g(u, v)$, beziehungsweise $dt = dxdy$ und $d\omega = dudv$. Die Ausdrücke für 2 Dimensionen wären

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = g(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy \quad (5)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{g(u, v)\} = f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u, v) e^{i(ux+vy)} du dv \quad (6)$$

Manche Autoren schreiben es anders:

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = g(f_X, f_Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(f_X x + f_Y y)} dx dy \quad (7)$$

Das kann folgendes erklären werden. Am Anfang war es mit ξ , oder f , statt ω , und $\omega = 2\pi\xi = 2\pi f$. ω ist die Kreisfrequenz und ξ oder f sind nur Frequenzen. In letzter Beispiel ist es einfach zu sehen, weil die räumliche frequenzen sind f_X und f_Y , statt ω_X und ω_Y . Deshalb sind sie anders, aber beide sind gültig.

Die funktion $f(x, y)$ muss einige Bedingungen erfüllen, damit das wahr ist: 1. $f(x, y)$ muss absolut integrierbar sein, d.h. $\iint_{R^2} |f(x, y)| dx dy$ muss endlich sein 2. $f(x, y)$ muss nur ein endliche Anzahl von Diskontinuitäten und Extremwerte haben 3. $f(x, y)$ muss keine Polstelle haben

1.3 Eigenschaften der 2DFT

Sei $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(u, v)$ und $\mathcal{F}\{h(x, y)\} = H(u, v)$:

1.3.1 Delta-Distribution - $\mathcal{F}\{\delta(x, y)\} = 1$

1.3.2 Linearitätssatz - $\mathcal{F}\{\alpha g + \beta h\} = \alpha \mathcal{F}\{g\} + \beta \{h\}$

1.3.3 Ähnlichkeitssatz - $\mathcal{F}\{g(\alpha x, \beta y)\} = \frac{1}{|\alpha\beta|} G\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v}{\beta}\right)$

1.3.4 Verschiebungssatz - $\mathcal{F}\{g(x - x_0, y - y_0)\} = G(u, v) \cdot e^{-i(ux_0 + vy_0)}$

1.3.5 Satz von Parseval - $\iint_{R^2} |g(x, y)|^2 dx dy = \iint_{R^2} |G(u, v)|^2 du dv$

1.3.6 Faltungssatz - $\mathcal{F}\left\{ \iint_{R^2} g(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right\} = G(u, v) H(u, v)$

1.3.7 Autokorrelationssatz - $\mathcal{F}\left\{ \iint_{R^2} g(\alpha, \beta) g^*(\alpha - x, \beta - y) d\alpha d\beta \right\} = |G(u, v)|^2$

1.3.8 Beziehungsweise: $\mathcal{F}\{|g(x, z)|^2\} = \iint_{R^2} G(\alpha, \beta) G^*(\alpha - u, \beta - v) d\alpha d\beta$

1.3.9 Fourierischer Integralsatz - $\mathcal{F}\left\{ \mathcal{F}^{-1}\{g(x, y)\} \right\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{g(x, y)\}\} = g(x, y)$

1.4 Separationsätze

Ein Separationsatz ist eine Funktion, die mehreren Variablen hat (n -Variablen) und dass als Produkt von n einzelne Variable Funktionen, die jede von diese n variable haben. Das heißt:

$$g(x, y) = X(x)Y(y) \quad (8)$$

Diese Funktion wäre ein Separationsatz durch das Kartesisches Koordinatensystem. Es wäre auch möglich, dass die Funktion durch andere Koordinatensysteme auch eine Separationsatz ist, zB durch Polarkoordinaten:

$$g(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (9)$$

Für uns werden diese Funktionen sehr nutzlich sein, das werden wir bald sehen. Sei $g(x, y) = X(x)Y(y)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{g(x, y)\} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy \\ \Rightarrow \mathcal{F}\{g(x, y)\} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} X(x)Y(y) e^{-iux} e^{ivy} dx dy \\ \Rightarrow \mathcal{F}\{g(x, y)\} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} [X(x)e^{-iux} dx] [Y(y)e^{ivy} dy] \\ \Rightarrow \mathcal{F}\{g(x, y)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(x)e^{-iux} dx \int_{-\infty}^{\infty} Y(y)e^{ivy} dy \\ \therefore \mathcal{F}\{g(x, y)\} &= \mathcal{F}_x\{X(x)\} \mathcal{F}_y\{Y(y)\} \end{aligned}$$

Und so ist auch die Transformation der Funktion ein Separationsatz.

1.5 Polarkoordinaten

Manchmal werden wir Kreissymmetrie haben, sodass es einfach ist, mit Polarkoordinaten, statt mit kartesischen Koordinaten, zu arbeiten. Das ist aber leider mit unsere Ausdrücke nicht möglich. Wir brauchen neue Begriffe, und zwar sofort. Aber zuerst, was bedeutet Kreissymmetrie? Wenn wir ein funktion in Polarkoordinaten haben, lass uns sagen $g(r, \theta)$, dass unabhängig von θ ist, d.h. $g(r, \theta) = g(r)$, dann haben wie Kreissymmetrie. In viele optische Systeme ist das der Fall, deswegen ist es wichtig, in diese Koordinaten die Fourier-Transformation zu begriffen. Wir benutzen die folgende Transformationen zur Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} & x &= r \cos \theta \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x} & y &= r \sin \theta \\ \rho &= \sqrt{u^2 + v^2} & u &= \rho \cos \phi \\ \phi &= \arctan \frac{v}{u} & v &= \rho \sin \phi \\ dx dy &= r dr d\theta & du dv &= \rho d\rho d\phi \end{aligned}$$

Dann haben wir $g(x, y) = h(r)$ (wir nehmen eine Kreissymmetrie an) und $G(u, v) = H(\rho, \phi)$. Wir werden bald sehen, dass H auch Kreissymmetrie hat, aber jetzt können wir es noch nicht wissen. Wir dann haben die Fourier-Transformation in folgendes Form:

$$H(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty h(r) e^{-i[(\rho \cos \phi)(r \cos \theta) + (\rho \sin \phi)(r \sin \theta)]} (r dr d\theta)$$

$$H(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty rh(r) dr \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho(\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta)} d\theta$$

Wir erinnern uns an die trigonometrische Identität:

$$\cos(s - t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t$$

Und wir benutzen sie, um den letzten Satz zu vereinfachen:

$$H(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty rh(r) dr \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\theta-\phi)} d\theta$$

Und hier, pause. Es ist an der Zeit, dass wir über die Bessel-Funktionen reden.

1.5.1 Bessel-Funktionen

Die Besselsche Differentialgleichung ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die durch

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}y + x \frac{d}{dx}y + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

definiert ist. Wobei x und α reelle oder komplexe Zahlen sind. Die Lösungen heißen Bessel-Funktionen α -ter Ordnung. Wir können auch die Bessel-Operator definieren:

$$B_\alpha := x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \alpha^2)$$

So würde die Besselsche Differentialgleichung einfach nur $B_\alpha y = 0$ sein. Hier werden wir nur die Bessel-Funktionen erster Gattung benutzen. So definieren wir sie:

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}}{\Gamma(\alpha+m+1)r!}$$

Aber was passiert, wenn $\alpha \in \mathbb{Z}$? Wir müssen es überlegen, dass m auch eine ganze Zahl ist. Das heißt, die Gamma-Funktion wäre einfach nur ein Faktorial:

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}}{(\alpha+m+1)!r!}$$

Es ist vielleicht schwierig zu glauben, aber diese Ausdrücke hat eine Integraldarstellung:

$$J_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - \alpha\theta)} d\theta$$

Und auch haben wir: $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ So können wir eine neue Variablen u , sodass $\theta = u + \frac{\pi}{2}$, $d\theta = du$. Die Grenze würden sich auch normalerweise verändert, aber da \cos eine periodische Funktion ist, mit Periode 2π , würde es egal sein. In der Tat, wir könnten die Grenzen für a und $a + 2\pi$ verändern und die Ergebnisse würden nicht verändert:

$$J_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[x\sin(u+\pi/2) - \alpha(u+\pi/2)]} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[x\cos u - \alpha(u+\pi/2)]} du$$

Mit $\alpha = 0$ haben wir:

$$J_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos u} du$$

Wir können wieder θ benutzen, und auch eine Phasenwinkel ϕ hinzufügen:

$$J_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos(\theta-\phi)} d\theta$$

Kommt sie jetzt bekannt vor?

1.5.2 Hankel-Transformationen

Wir können diese letzte Darstellung benutzen, um unsere Ausdruck daoben zu vereinfachen:

$$H(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty rh(r) dr \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos(\theta-\phi)} d\theta = \int_0^\infty rh(r) J_0(r\rho) dr$$

Offentsichtlich hängt H von ϕ nicht ab, also:

$$H(\rho) = \int_0^\infty rh(r) J_0(r\rho) dr$$

Wenn h eine Kreissymmetrie hat, wird H es auch haben. Das ist aber wunderbar. Diese besondere Fall der Fourier-Transformationen geschieht so oft, dass es eine besondere Name kriegt: Hankel-Transformation nuller Ordnung, \mathcal{H}_0 . Nun können wir auch finden, wie die inverse Transformation lautet:

$$h(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho H(\rho) e^{-ir\rho \cos(\theta-\phi)} d\rho d\theta$$

Vereinfacht:

$$h(r) = \int_0^\infty \rho H(\rho) J_0(r\rho) d\rho$$

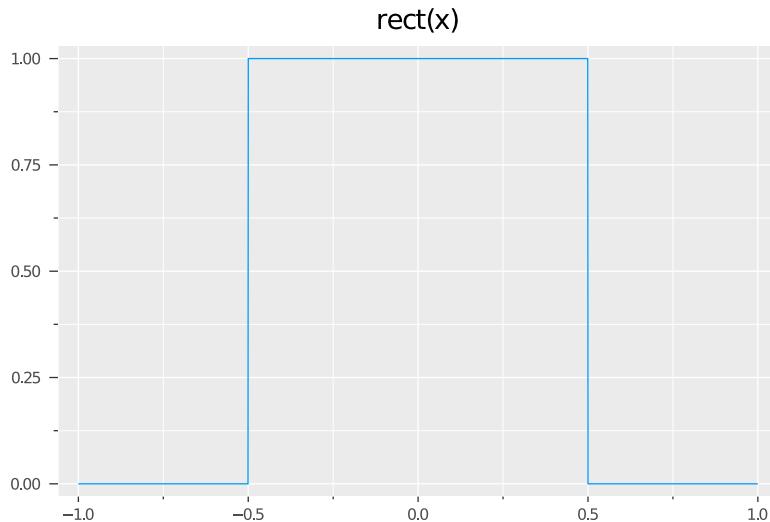
1.6 Besondere Funktionen

Es gibt ein paar besondere Funktionen, die man so oft in Bereich benutzt, sodass sie alle eine eigene Name bekommen haben. Sehen wir es folgendes:

1.6.1 Rechtecksfunktion

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
[3]: # Heaviside Function
H(x) = 0.5 * (sign(x)+1)
# Triangle Function
rect(x) = H(x+0.5) * H(-(x-0.5))
plot(rect)
plot(rect,-1,1,title = "rect(x)",label = "")
savefig("rectplot.pdf")
```

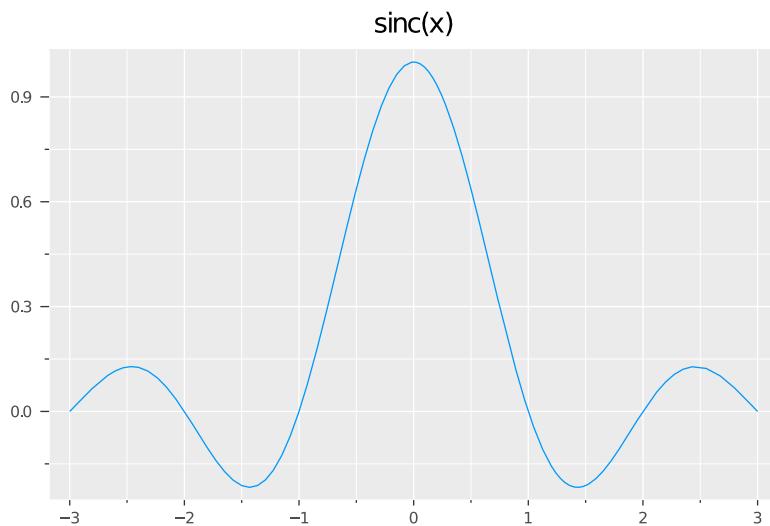


Figur I: Rechtecksfunktion

1.6.2 Spaltfunktion

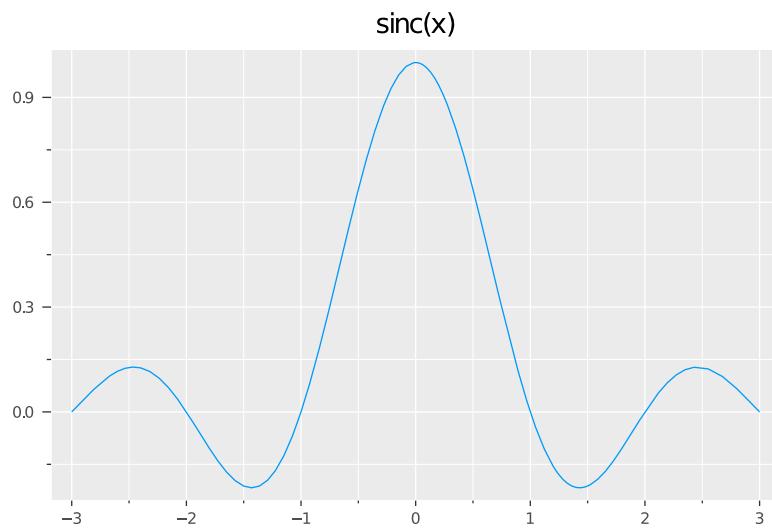
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

```
[4]: plot(sinc,-3,3,title="sinc(x)",label = "")  
savefig("sincplot.pdf")
```



Figur II: Spaltfunktion

```
[5]: sinc2(x) = (sinc(x))^2  
plot((sinc2),-3,3,title="sinc2(x)",label = "")  
savefig("sinc2plot.pdf")
```

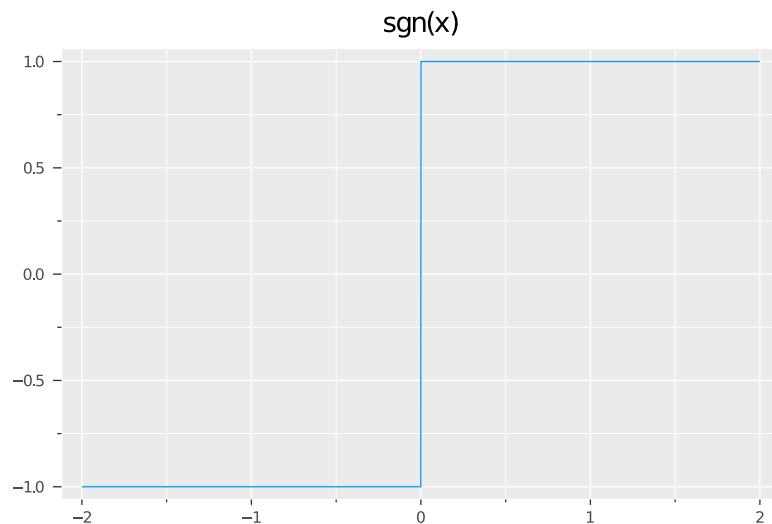


Figur III: Spaltfunktion im Quadrat

1.6.3 Vorzeichenfunktion

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

```
[6]: sgn(x) = sign(x)
plot(sgn,-2,2,title = "sgn(x)",label = "")
savefig("signplot.pdf")
```



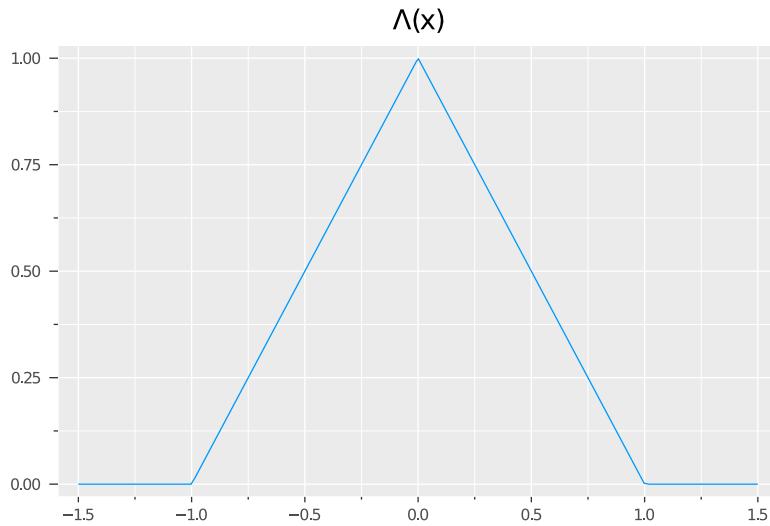
Figur IV: Vorzeichnenfunktion

1.6.4 Dreiecksfunktion

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

[7] : # Heaviside Function

```
H(x) = 0.5 * (sign(x)+1)
# Triangle Function
Lambda(x) = H(x+1) * H(-(x-1)) * (1-abs(x))
plot(Lambda,title = "Lambda(x)",-1.5,1.5,label = "")
savefig("triangleplot.pdf")
```

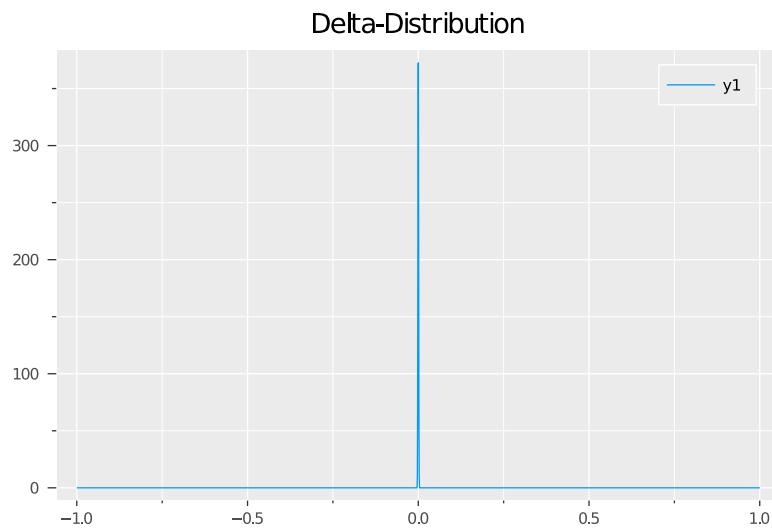


Figur V: Dreiecksfunktion

1.6.5 Dirac-Kamm

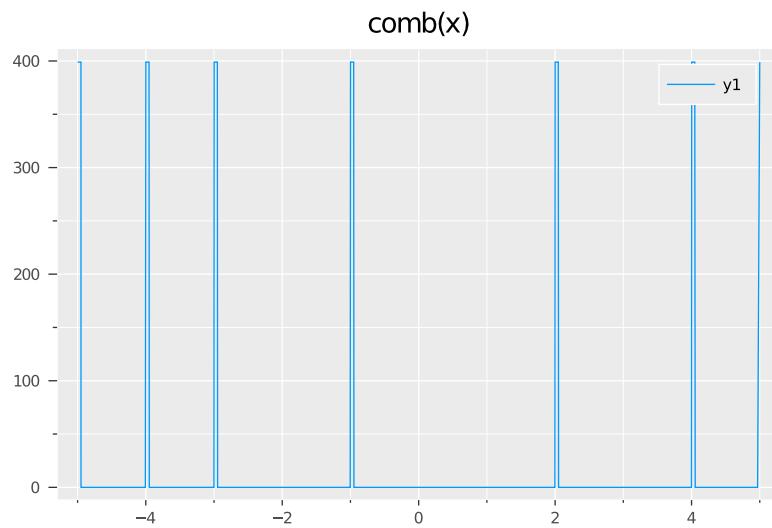
$$comb(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

[8] : delta(x) = 1/((1e-3)*sqrt(2pi))*exp(-1/2*(x/(1e-3))^2)
plot(delta,-1,1,title="Delta-Distribution")
savefig("diracplot.pdf")



Figur VI: Delta Distribution

```
[9]: T = 1
function comb(x)
    if floor(x/T)==round(x/T,digits=1)
        delta(0)
    else
        0
    end
end
plot(comb,-5,5,title="comb(x)")
savefig("combplot.pdf")
```



Figur VII: Dirac-Kamm

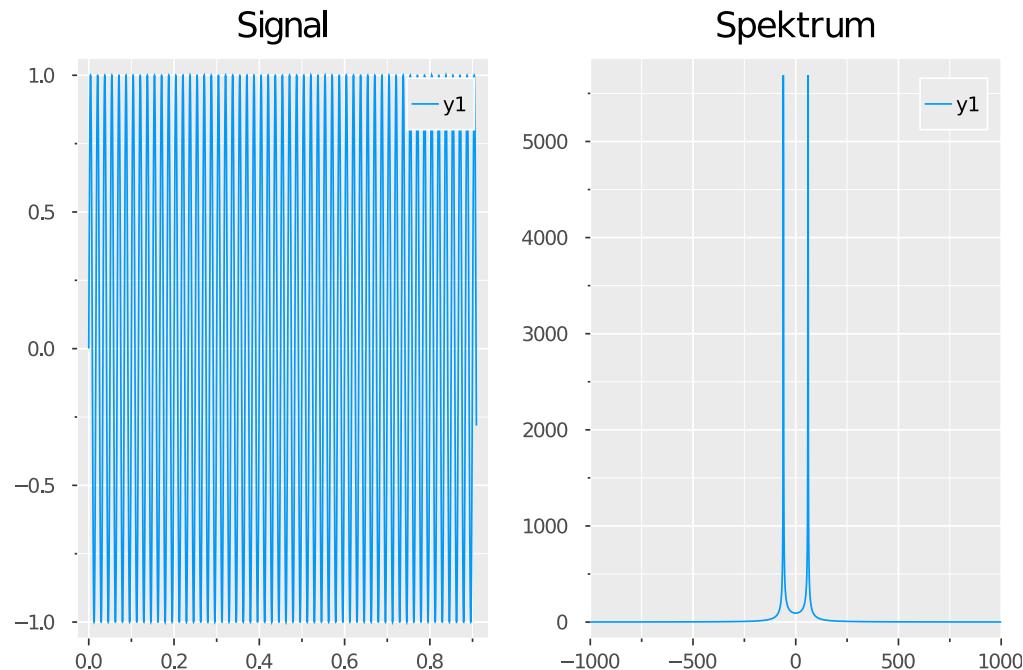
1.6.6 Numerische Fourier-Transformation Beispiel

```
[10]: # Number of points
N = 2^14 - 1
# Sample period
Ts = 1 / (1.1 * N)
# Start time
t0 = 0
tmax = t0 + N * Ts
# time coordinate
t = t0:Ts:tmax

# signal
signal = sin.(2pi * 60 .* t) # sin (2pi f t)

# Fourier Transform of it
F = fft(signal) |> fftshift
freqs = fftfreq(length(t), 1.0/Ts) |> fftshift

# plots
time_domain = plot(t, signal, title = "Signal")
freq_domain = plot(freqs, abs.(F), title = "Spektrum", xlim=(-1000, +1000))
pl = plot(time_domain, freq_domain, layout = 2)
savefig("fouriertransform.pdf")
```



Figur VIII: Fourier-Transformation Beispiel mit einer Sinusfunktion

1.7 Ortsfrequenz

Komplexe Zahlen können wir als folgendes darstellen

$$z = a + bi = |z|e^{i\phi}$$

Wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, 2\pi)$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist der Betrag von z und ϕ nennen wir die Phase. Man könnte z als eine Funktion mit zwei Argumenten $z = z(a, b)$ sehen. Nun definieren wir eine komplexe Funktion. Wir könnten $|z|$ und ϕ als Funktionen mit zwei Argumenten x und y :

$$g(x, y) = a(x, y)e^{i\phi(x, y)}$$

2 Spatiale Frequenzen

2.1 Wellengleichung

Die Wellengleichung ist folgendes:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, r) - \nabla^2 u(t, r) = 0$$

In einer Dimension wäre es einfach nur:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) = 0$$

Hier ist eine Lösung zB:

$$u(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t + \phi_0)$$

Wobei $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi f$, ϕ_0 der Phasenwinkelkonstante ist und A_0 die Amplitude ist. Wir könnten es auch kürzer darstellen als folgendes:

$$u(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t + \phi_0)}$$

Oder einfach nur

$$u(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

Aber was passiert, wenn wir 2 oder mehr Dimensionen haben?

2.2 Ebene Welle

Wenn wir mehr Dimensionen hätten, würde u nicht nur von x abhängig, sondern auch von den anderen räumlichen Koordinaten, d.h. $u = u(t, r)$, weil wir immer noch nur eine zeitliche Koordinaten, t , haben. So muss u nun sich ändern, aber wie?

Wenn wir einfach nur direkt substituieren würden wir so es haben:

$$u(r, t) = A_0 e^{i(kr - \omega t)}$$

Aber das macht überhaupt keinen Sinn, weil wir eine Subtraktion zwischen einem Vektor und einem Skalar haben würden. Also, t wird immer ein Skalar sein, deshalb müssen wir ein Skalar für k und r auch haben und deswegen muss sein Produkt ein Skalarprodukt sein. Aber dafür muss k auch ein Vektor sein und es ist noch ein Skalar. Deshalb definieren wir ein k Vektor durch:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k}$$

Wobei \hat{k} in der Richtung der Bewegung des Welles zeigt. So haben wir endlich:

$$u(r, t) = A_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}$$

Aber wir könnten es noch einfacher machen, indem wir unsere Koordinatensystem in so eine Weise definieren, dass $\hat{k} = \hat{z}$. Dann hätten wir:

$$u(z, t) = A_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

In diese Konvention würden wir eine Ebene Welle haben, die Symmetrie hat. Nämlich würde sie denselbe Wert in alle $x - y$ Koordinaten für jeden Wert von z .

2.3 Komplexe Funktionen

Komplexe Zählen können wir als folgendes darstellen:

$$w = re^{i\phi}$$

Und eine Komplexe Funktion könnten wir auch bauen:

$$w(r, \phi) = re^{i\phi}$$

Aber was wenn r und ϕ auch von anderen Werten abhängig sind? Dann hätten wir folgendes:

$$w(x, y) = r(x, y)e^{i\phi(x, y)}$$

So würden wir eine komplexe Funktion haben, die von den 2D räumlichen Koordinaten abhängig ist, d.h. eine mehrdimensionale Funktion mit realen Funktionsargumenten und komplexen Funktionswerte.

Diese Funktion ist ähnlich wie die Ebene Welle, aber hier ist die Amplitude nicht fest. Wir könnten aber so eine Region bedenken, in der $r(x, y)$ ungefähr fest ist, d.h. $r_x \approx 0$ und $r_y \approx 0$. So könnten wir uns in der Phasenwinkel konzentrieren.

$$w(x, y) \approx r_0 e^{i\phi(x, y)}$$

2.4 Lokale spatiale Frequenzen

Wir definieren die lokale spatiale Frequenzen als folgendes:

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) \quad \zeta = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y)$$

Wenn $w(x, y)$ definiert ist. Wenn nicht, sind beide Null. Lass uns nun ein Beispiel analysieren:

Wir haben die Funktion:

$$w(x, y) = e^{i2\pi(ux+vy)}$$

Wir können die lokale spatiale Frequenzen berechnen:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} [i2\pi(ux + vy)] = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi u = u \\ \zeta &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} [i2\pi(ux + vy)] = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi v = v \end{aligned}$$

Die lokale spatiale Frequenzen (ξ, ζ) sind dieselbe wie die spatiale Frequenzen (u, v) in der ganzen $x - y$ Ebene.

3 Lineare Systeme

3.1 Lineare Operatoren

Ein Operator ist eine mathematische Vorschrift, durch die man aus mathematischen Objekten neue Objekte bilden kann. Er kann eine standardisierte Funktion oder eine Vorschrift über Funktionen sein. Wir definieren dann einen linearen Operator $\mathcal{S}\{\}$ durch folgendes Ausdruck:

$$\mathcal{S}\{g_1(x_1, y_1)\} = g_2(x_2, y_2)$$

Wobei g_1 und g_2 Funktionen sind, die durch unser Operator verbindet sind. Um ein ein linear Operator zu sein, muss er eine entscheidende Eigenschaft haben:

$$\mathcal{S}\{a \cdot p_1(x_1, y_1) \pm b \cdot q_1(x_1, y_1)\} = a \cdot \mathcal{S}\{p_1(x_1, y_1)\} \pm b \cdot \mathcal{S}\{q_1(x_1, y_1)\}$$

Wobei a und b Festwerte sind. Das nennt wir auch Superpositionsprinzip und für uns wird es sehr hilfreich sein, weil wir die Änderung zu einer Funktion als die Summe der Änderungen zu einfacheren "elementaren" Funktionen darstellen können. Zum Beispiel haben wir der Faltungsatz:

$$g_1(x_1, y_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\alpha, \beta) \delta(x_1 - \alpha, y_1 - \beta) d\alpha d\beta$$

Wir können dann der Operator benutzen:

$$\mathcal{S}\{g_1(x_1, y_1)\} = \mathcal{S}\left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\alpha, \beta) \delta(x_1 - \alpha, y_1 - \beta) d\alpha d\beta \right\}$$

An der linken Seite können wir einfach nur g_2 schreiben. An der rechten Seite wissen wir, dass die Ergebnisfunktion unabhängig von α und β ist. Deswegen können wir der Operator rein in der Integral bringen.

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\alpha, \beta) \mathcal{S}\{\delta(x_1 - \alpha, y_1 - \beta)\} d\alpha d\beta$$

Wir definieren dann ein Funktional $h(x_2, y_2; \alpha, \beta)$ sodass:

$$h(x_2, y_2; \alpha, \beta) \mathcal{S}\{\delta(x_1 - \alpha, y_1 - \beta)\}$$

Und nennen wir es die Impulsantwort für das System in der Punkt (α, β) . Dann haben wir:

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\alpha, \beta) h(x_2, y_2; \alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

Und das hier nennen wir die Superpositionsintegralsatz

3.2 Zeitinvarianz

Wir haben ein zeitinvarianzisches System, wenn die Impulsantwort $h(t; \tau)$ nur von die Zeitunterschied $(t - \tau)$ hängt. Für solche Systeme können wir h einfacher darstellen:

$$h(x_2, y_2; \alpha, \beta) = h(x_2 - \alpha, y_2 - \beta)$$

So hätten wir dann:

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\alpha, \beta) h(x_2 - \alpha, y_2 - \beta) d\alpha d\beta$$

Aber erinnern wir uns nun an der Faltungsatz:

$$\mathcal{F}\left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} g(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \right\} = G(u, v) H(u, v)$$

Hätten wir dann:

$$G_2(u, v) = G_1(u, v) H(u, v)$$

Wobei H die Fourier-Transformation der Impulsantwort ist, die durch folgendes definiert würde:

$$H(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(\alpha, \beta) e^{-i(u\alpha + v\beta)} d\alpha d\beta$$

4 Besondere Funktionen und ihre gehörige Fourier-Transformation

```
[18]: using Plots
Plots.theme(:ggplot2)
using SymPy
using SpecialFunctions;
```

Mithilfe der PlotlyJS Einheit, können wir ein paar besondere Funktionen graphisch darstellen. Im kurz schreiben wir die Begriffe der Funktionen und dann können wir ihre Fourier-Transformation analytischerweise oder vom Buch rechnen:

```
[2]: # Special Functions
# Delta Distribution
delta(x) = 1/((1e-3)*sqrt(2pi))*exp(-1/2*(x/(1e-3))^2)
# Heaviside Function
H(x) = 0.5 * (sign(x)+1)
# Triangle Function
Lambda(x) = H(x+1) * H(-(x-1)) * (1-abs(x))
# Sign Function
sgn(x) = sign(x)
# Triangle Function
rect(x) = H(x+0.5) * H(-(x-0.5));
```

4.1 Gauß-Funktion

Wir haben folgendes Ausdruck

$$f(x, y) = e^{-\pi(a^2x^2 + b^2y^2)}$$

Und versuchen eine Fourier-Transformation zu finden

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x, y)\} &= g(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy \\ &\Rightarrow g(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(a^2x^2 + b^2y^2)} e^{-i(ux+vy)} dx dy \\ &\Rightarrow g(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi b^2 y^2 i v y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a^2 x^2 - i u x} dx dy \end{aligned}$$

Wir wissen schon, dass

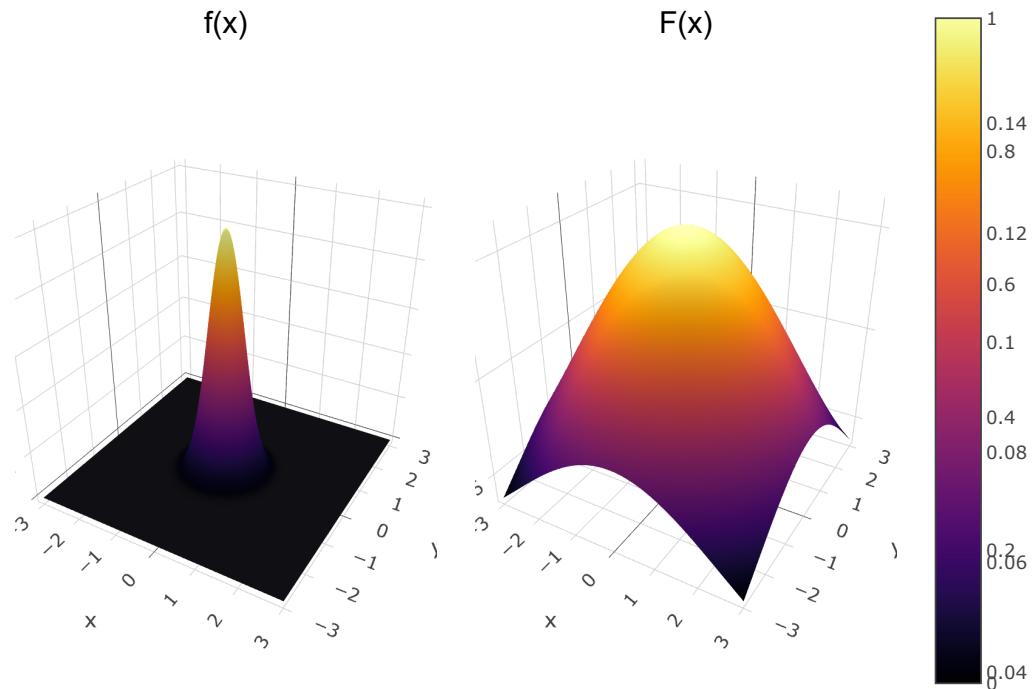
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + bx + c} dx = e^{\frac{b^2}{4a} + c} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} &\Rightarrow g(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(-iu)^2}{4\pi a^2}} \sqrt{\frac{\pi}{\pi a^2}} e^{-\pi b^2 y^2 i v y} dy \\ &\Rightarrow g(u, v) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-u^2}{4\pi a^2}} \frac{1}{|a|} e^{\frac{(-iv)^2}{4\pi b^2}} \sqrt{\frac{\pi}{\pi b^2}} \\ &\Rightarrow g(u, v) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-u^2}{4\pi a^2}} \frac{1}{|a|} e^{\frac{-v^2}{4\pi b^2}} \frac{1}{|b|} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(u, v) = \frac{1}{2\pi|ab|} e^{-\frac{u^2}{4\pi a^2} - \frac{v^2}{4\pi b^2}}$$

```
[27]: # Gaußische Funktion
plotlyjs()
x = -3:0.01:3
y = -3:0.01:3
a = 1
b = 1
fun(x,y) = exp(-pi*(a^2*x^2+b^2*y^2))
Fun(x,y) = 1/(2pi*abs(a*b))*exp(-(1/4pi)*(a^(-2)*x^2+b^(-2)*y^2))
p1 = surface(x,y,fun,title = "f(x)")
p2 = surface(x,y,Fun,title = "F(x)")
plot(p1,p2)
savefig("Gauß.pdf")
```



Figur IX: Gaußische Funktion (links) und ihren gehörigen Fourier-Transformation

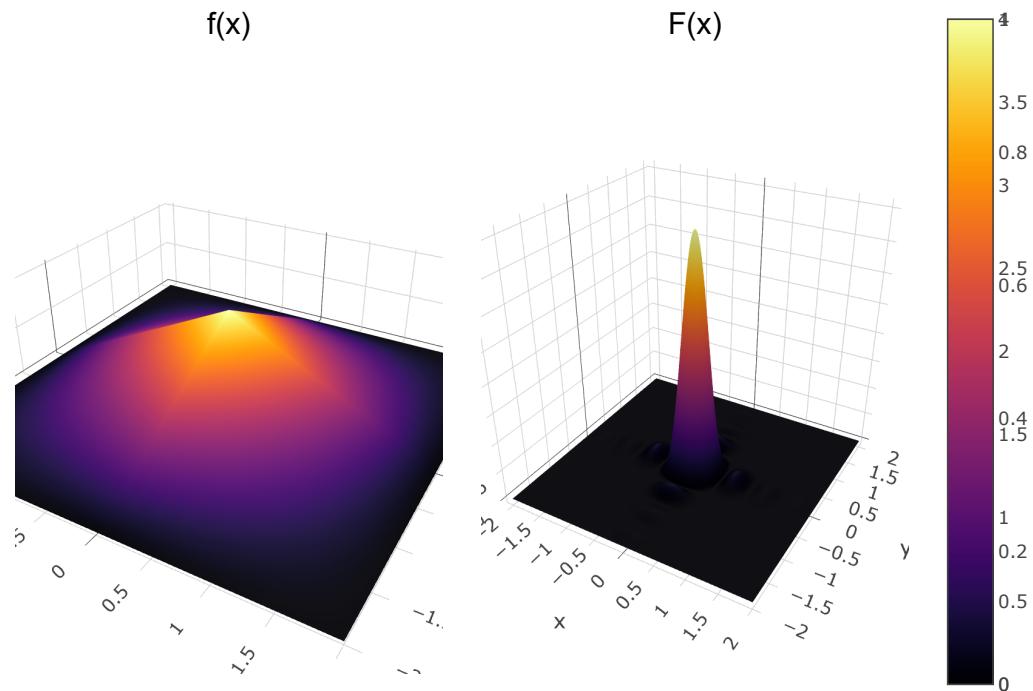
4.2 Dreiecksfunktion

```
[28]: # Dreiecksfunktion
plotlyjs()
x = -2:0.01:2
y = -2:0.01:2
a = 1/2
```

```

b = 1/2
fun(x,y) = Lambda(a*x)*Lambda(b*y)
Fun(x,y) = 1/(abs(a*b))*(sinc(x/a))^2*(sinc(y/b))^2
p1 = surface(x,y,fun,title = "f(x)")
p2 = surface(x,y,Fun,title = "F(x)")
plot(p1,p2)
savefig("Dreieck.pdf")

```



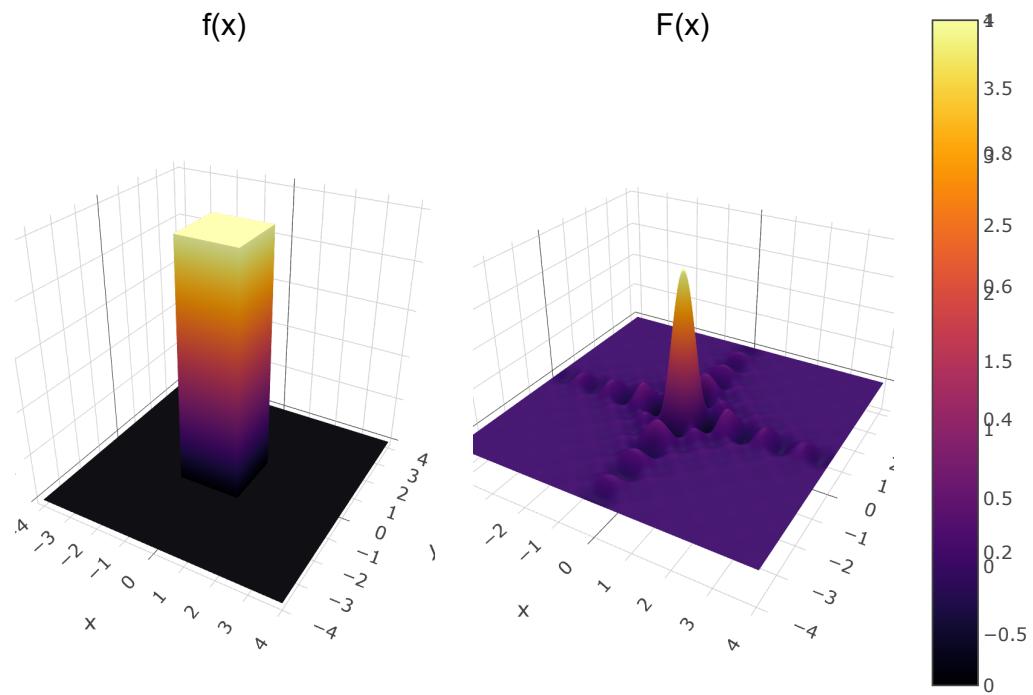
Figur X: Dreiecksfunktion (links) und ihren gehörigen Fourier-Transformation

4.3 Rechtecksfunktion

```

[29]: # Rechtecksfunktion
plotlyjs()
x = -4:0.01:4
y = -4:0.01:4
a = 1/2
b = 1/2
fun(x,y) = rect(a*x)*rect(b*y)
Fun(x,y) = 1/(abs(a*b))*(sinc(x/a))*(sinc(y/b))
p1 = surface(x,y,fun,title = "f(x)")
p2 = surface(x,y,Fun,title = "F(x)")
plot(p1,p2)
savefig("Rechteck.pdf")

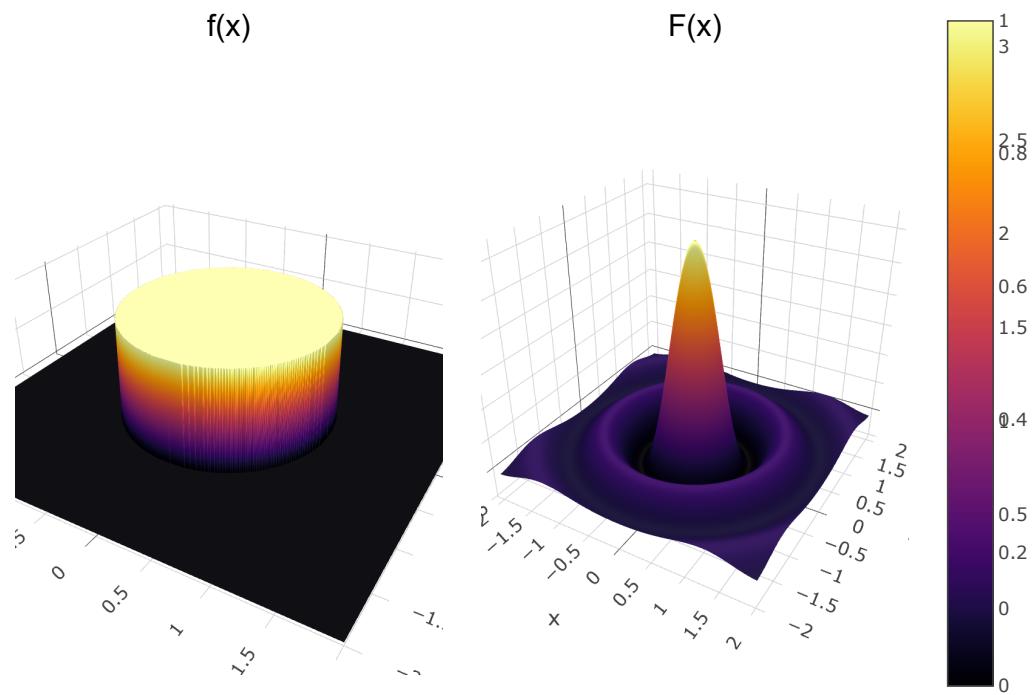
```



Figur XI: Rechtecksfunktion (links) und ihren gehörigen Fourier-Transformation

4.4 Kreisfunktion

```
[30]: # Kreisfunktion
using SpecialFunctions
circ(x,y) = H(-(sqrt(x^2+y^2)-1))
plotly()
x = -2:0.01:2
y = -2:0.01:2
a = 1/2
b = 1/2
fun(x,y) = circ(x,y)
Fun(x,y) = besselj(1,2*pi*sqrt(x^2+y^2))/sqrt(x^2+y^2)
# Bessel-Funktion erster Gattung 1er Ordnung
p1 = surface(x,y,fun,title = "f(x)")
p2 = surface(x,y,fun,title = "F(x)")
plot(p1,p2)
savefig("Kreis.pdf")
```



Figur XII: Kreisfunktion (links) und ihren gehörigen Fourier-Transformation

5 Fourier-Transformation 2D - Übungen

5.0.1 2.1 Beweisen Sie die folgende Eigenschaften der Delta-Distribution δ :

a) $\delta(ax, by) = \frac{\delta(x, y)}{|ab|}$ Wir haben die Faltungseigenschaft:

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Das müssen wir nicht hier beweisen, aber vertrau mir, es ist wahr. Wir benutzen jetzt ax als Argument:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x) dx = f(0)$$

Und jetzt Substitution $\xi = ax$ und $d\xi = adx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \delta(\xi) f(\xi) d\xi = f(0)$$

Aber hier ξ wäre eine Dummy-Variable, da das Ergebnis $f(0)$ unabhängig von x ist. Wir könnten dann wieder x benutzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Und tada, haben wir

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a}$$

Aber moment mal. $f(0)$ ist auch von a unabhängig. Wenn a negativ wäre, würde das Sign von $f(0)$ auch ändern. Deshalb muss dass anders sein:

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

Wenn wir zwei Dimensionen haben ist es egal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax, by) f(x, y) dx dy = f(0, 0)$$

Wir benutzen zB $\xi = ax$, $d\xi = adx$ und $\zeta = by$, $d\zeta = bd\zeta$ und da wären wir fertig

$$\therefore \boxed{\delta(ax, by) = \frac{\delta(x, y)}{|ab|}}$$

6 Skalare Lichtbeugung

6.1 Beugung

Optische Dispersion, die Beugung des Lichts, ist das Phänomen, das wir im Regenbogen beobachten und in den Spektren, die von Prismen erzeugt werden. Die Lichtbrechung ist leicht zu beobachten, doch hat sie sich seit Newtons ersten Deutungsversuchen als ein sehr schwer zu modellierendes Phänomen erwiesen, weil es an der Grenze von Licht- und Materietheorien angesiedelt ist. Als Sommerfeld einmal gesagt hat: "irgendeine Abweichung der Lichtstrahle die weder als Reflexion noch Refraktion ausgedeutet werden können."

Vor dem Jahr 1665 glaubten der Physiker noch, dass das Licht korpuskular war. Aber Grimaldi hat in einer Experiment anders gefunden, etwas die mit der Korpuskulartheorie des Lichts nicht erklärt werden könnte. Hier kommt Christian Huygens rein. Er war der Erste, der eine Wellentheorie des Lichts vorgeschlagen hat. Im Jahr 1678. Das war aber leider nicht so wichtig, weil Newton die Korpuskulartheorie bevorzugte. Sein Gefolgsleute waren derselbe Meinung und arme Huygens könnte nicht viel tun. Es gab kein Fortschritt für mehr als eine Zenturie.

Im Jahr 1804 hat der englischer Physiker Thomas Young den Begriff "Störung" vorgestellt. Eine kontroversiale Idee für dieser Zeitpunkt, denn er hat gesagt, dass in spezifische Konditionen könnte es möglich sein, dass Licht addiert werden könnte, um Finsternis zu produzieren.

Endlich ist Fresnel die Party angekommen und er hat im Jahr 1818 die Ideen von beiden Huygens und Young zusammengebracht. Sein Modell war ziemlich arbiträr aber trotzdem könnte er die Verteilung des Lichts berechnen, und zwar mit höherer Präzision. Er hat seine Theorie präsentiert und überprüft, indem er ein Preis bekommen hat.

Später im Jahr 1860 hat Maxwell das Licht als eine Elektromagnetische Welle erkannt und im 1882 hat Gustav Kirchhoff die Ideen von Huygens und Fresnel in einem festen mathematischen Grund fundamentieren. Leider waren die Randbedingungen nicht logisch zueinander und diese Theorie musste nur als eine Approximation benutzt, aber trotzdem Nähe zum echten Ergebnis. Am wichtigsten zu verstehen ist, dass hier war Licht als ein skalares Phänomen behandelt, und ehrlich gesagt ist Licht ein Vektorphänomen. Die Konsequenz ist das, in der Randbedingungen, die skalare Approximation kann nicht viel tun, um die realen Phänomene zu beschreiben. Aber in besondere Konditionen kann es höherer Präzision haben:

1. Die Öffnung muss viel länger als die Wellenlänge
2. Die Beugungsfelder müssen nicht in der Nähe der Öffnung gesehen werden

6.2 Maxwell Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mu \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

Für alle Fälle, die wir studieren werden, müssen wir ein paar Dinge vom Medium annehmen:

1. Es ist linear, d.h. die lineare Eigenschaften die wir früher gesehen haben sind wahr
2. Es ist isotropisch, d.h. die Eigenschaften des Mediums sind von der Richtung der Polarisation der Welle unabhängig
3. Es ist homogen, d.h. die Permittivität hat denselben Wert in allen Regionen, in denen die Welle propagiert
4. Es ist nichtdispersiv, d.h. die Permittivität ist von der Wellenlänge unabhängig
5. Es ist nichtmagnetisch, d.h. die magnetische Permeabilität ist immer gleich μ_0 , die magnetische Feldkonstante.

Wir nehmen dann die zweite Gleichung und machen eine Rotation:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

Wir erinnern uns an der Identität:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

Dann hätten wir für \mathbf{E} :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

Wegen der erster Gleichung:

$$\nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

Und wegen der dritter Gleichung haben wir dass $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$: Dann hätten wir:

$$-\nabla \times \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla (0) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

Und $\nabla (0) = 0 \nabla = 0$

$$-\nabla \times \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

Oder einfach nur

$$\nabla \times \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{E}$$

In der zweite Gleichung machen wir eine Derivation durch t :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Wir können die Derivative drinnen im Laplace-Operator bringen in der linken Seite. Die Permittivität ϵ ist von Zeit unabhängig, deshalb machen wir folgendes:

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit μ

$$\nabla \times \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Dann hätten wir:

$$\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E}$$

Nun erinnern wir uns, dass $\mu = \mu_0$ ist, wegen unsere Annahmen:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Die Lichtgeschwindigkeit ist durch folgendes definiert:

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

Und die Permittivität eines Mediums ist durch folgendes definiert:

$$\epsilon = \epsilon_0 n^2$$

Dann haben wir:

$$c^2 = \frac{n^2}{\mu_0 \epsilon}$$

Und zurück zu unserer Gleichung:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Das hier ist eine Welgleichung. Der Laplace-Operator durch:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

in 3D räumlichen Koordinaten definiert ist. Wir hätten drei skalare Gleichungen für x, y und z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Und für y und z wäre es ähnlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

Für den Magnetfeld ist es ähnlich:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

Und wir werden dasselbe Ding haben. Wir können alles einfach zusammenfassen, indem alle die Gleichungen addieren:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

Aber $E_x = E_x(x, t)$, $E_y = E_y(y, t)$, $E_z = E_z(z, t)$

$$\Rightarrow \nabla^2 (E_x + E_y + E_z) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_x + E_y + E_z) = 0$$

Wir könnten eine skalare Funktion $u(x, y, z, t)$ definieren, sodass:

$$u(x, y, z, t) = E_x(x, t) + E_y(y, t) + E_z(z, t)$$

Und noch erinnern wir uns an die andere Annahmen. Die Eigenschaften des Mediums sind von Richtung unabhängig, i.e. Azimutalsymmetrie. Deshalb könnten wir alles nur einfach als eine Funktion von r , das Distanz, schreiben, so:

$$u(r, t) = E_x(r, t) + E_y(r, t) + E_z(r, t)$$

Und endlich hätten wir:

$$\nabla^2 u(r, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} = 0$$

6.3 Helmholtz Gleichung

Wir haben eine monokromatische Welle, die durch folgendes definiert werden könnte:

$$u(r, t) = A(r) \cos [\omega t + \phi(r)]$$

Wobei $\omega \equiv 2\pi\nu$ und ν die Frequenz der Welle ist. Oder auch

$$u(r, t) = A(r) e^{-i[\omega t + \phi(r)]}$$

Einfach nur

$$u(r, t) = U(r) e^{-i\omega t}$$

Wobei $U(r)$ ein komplexe Festwerte ist, der durch

$$U(r) = A(r) e^{-i\phi(r)}$$

definiert ist. Dann haben wir $u = U(r)T(t)$, wobei

$$T(t) = e^{-i\omega t}$$

Dann wäre die Gleichung

$$\nabla^2 [U(r)T(t)] - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 [U(r)T(t)]}{\partial t^2} = 0$$

sein.

Durch die Trennung der Variablen:

$$\Rightarrow T(t) \nabla^2 U(r) - \frac{n^2 U(r)}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{U(r)} \nabla^2 U(r) - \frac{n^2}{c^2 T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = 0$$

Und hätten wir zwei Gleichungen:

$$\frac{1}{U(r)} \nabla^2 U(r) = -k^2$$

$$\frac{n^2}{c^2 T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -k^2$$

Wir kümmern uns zuerst um die $U(r)$ Gleichung:

$$\boxed{\nabla^2 U = -U k^2}$$

Und das hier ist Helmholtz-Gleichung. In der $T(t)$ Gleichung haben wir:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\frac{k^2 c^2 T}{n^2}$$

Wir substituieren für T :

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{-i\omega t} = -\frac{k^2 c^2}{n^2} e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} = -\frac{k^2 c^2}{n^2} e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow i^2 \omega^2 e^{-i\omega t} = -\frac{k^2 c^2}{n^2} e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow -\omega^2 = -\frac{k^2 c^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k^2 c^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{kc}{n}$$

Erinnern wir uns dass $\omega \equiv 2\pi\nu$ ist

$$2\pi\nu = \frac{kc}{n}$$

Die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium ist durch

$$v = \frac{c}{n}$$

definiert. Dann haben wir:

$$2\pi\nu = \frac{kvn}{n}$$

$$\Rightarrow 2\pi\nu = kv$$

Wobei $v = \nu\lambda$, dann haben wir:

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2\pi\nu &= k\nu\lambda \\ \Rightarrow k &= \frac{2\pi}{\lambda}\end{aligned}$$

Sodass k das Wellenzahl ist.

Dann haben wir:

$$\begin{aligned}T(t) &= e^{-i\omega t} \\ \nabla^2 U &= -Uk^2\end{aligned}$$

6.4 Satz von Green

$$\iint_V (U\nabla^2 G - G\nabla^2 U) dV = \iint_{\partial V} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS$$

Wobei $U(r), G(r) \in \mathbb{C}$ haben einzige Werte für die erste und zweite partielle Abteilungen und $\frac{\partial}{\partial n}$ eine partielle Abteilung in der äußerlich Richtung von jeder Punkt in ∂V .

6.5 Integralsatz von Helmholtz und Kirchhoff

Lassen wir eine Beobachtungspunkt O in der Ursprung haben, die von einer geschlossene Fläche S umgeben ist. Wir wollen die optische Störung bei O in ihren Werten auf der Fläche S ausdrücken. Wir benutzen eine Hilfsfunktion $G(r)$, die eine normalisierte Kugelwelle, die sich um O erweitert. Diese Funktion wäre durch folgendes dargestellt:

$$G(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

6.6 Greensche Funktionen

Wenn wir eine Differenzialgleichung haben:

$$a_2(x) \frac{d^2 U}{dx^2} + a_1(x) \frac{dU}{dx} + a_0(x)U = V(x)$$

Wir könnten einen Operator L definieren:

$$L = a_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x)$$

Sodass die Gleichung

$$LU(x) = V(x)$$

ist. Wir könnten eine Funktion $G(x, s)$ finden, sodass:

$$\int L G(x, s) V(s) ds = \int \delta(x - s) V(s) ds = V(x)$$

Die lineare Operator ändert nur x , deshalb könnten wir es raus bringen:

$$L \left(\int G(x, s) V(s) ds \right) = V(x)$$

Und so

$$U(x) = \int G(x, s)V(s)ds$$

In der Fall dass $V(x) = \delta(x - s)$, hätten wir:

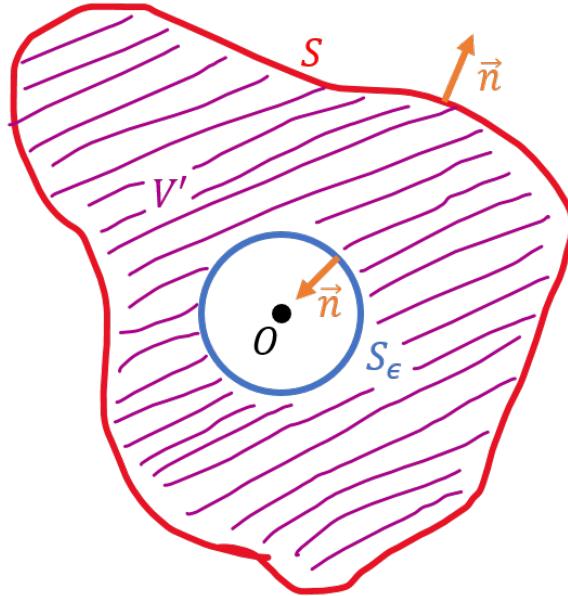
$$U(x) = \int G(x - s)V(s)ds$$

Dann hat $G(x, s)$, die Greensche-Funktion, die Form einer Impulsantwort.

Die Funktion $G(x, s)$ muss in V stetig sein, aber wir haben eine Sprungstelle. Wir müssen das löschen, indem wir eine kleine Kugelfläche S_ϵ , mit Radius ϵ , bei O zentriert ist. Wir integrieren dann in der Region V' , die Volumen zwischen S und S_ϵ . Die Fläche S' wäre:

$$S' = S + S_\epsilon$$

Wir können das in nächstem Diagram sehen:



Figur XIII: Greensche Fläche

Drinnen S_ϵ ist n in der Richtung von O . Die Störung G muss Helmholtz Gleichung erfüllen:

$$\nabla^2 G = -k^2 G$$

6.7 Integralsatz von Helmholtz und Kirchhoff

In der Satz von Green haben wir:

$$\iint_{V'} (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dV = \iint_{\partial V'} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS$$

Aber beide G und U erfüllen Helmholtz Gleichung. Sodass:

$$\iint_{V'} (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dV = \iint_{V'} [U(-k^2 G) - G(-k^2 U)] dV =$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \iint_{V'} [U(-k^2G) - G(-k^2U)] dV = \iint_{V'} (-UGk^2 + UGk^2) dV \\
&\Rightarrow \iint_{V'} [U(-k^2G) - G(-k^2U)] dV = \iint_{V'} 0 dV \\
&\therefore \iint_{V'} (U\nabla^2G - G\nabla^2U) dV = 0
\end{aligned}$$

Dann würde der Satz von Green einfach nur

$$\iint_{\partial V'} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0$$

sein. Aber $\partial V'$ ist S' :

$$\begin{aligned}
&\iint_{S'} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0 \\
&\Rightarrow \iint_{S+S_\epsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0 \\
&\Rightarrow \iint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS + \iint_{S_\epsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0
\end{aligned}$$

Wir könnten die partielle Abteilung rechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(r)}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \hat{n} \cdot \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \\
&\Rightarrow \hat{n} \cdot \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \hat{n} \cdot \left(r^{-1} \nabla e^{ikr} + e^{ikr} \nabla r^{-1} \right)
\end{aligned}$$

Und wir wissen schon dass

$$\nabla r^n = nr^{n-2} \mathbf{r}$$

Sodass:

$$\begin{aligned}
&\hat{n} \cdot \left(r^{-1} \nabla e^{ikr} + e^{ikr} \nabla r^{-1} \right) = \hat{n} \cdot \left[r^{-1} \cdot ik e^{ikr} \cdot \nabla r + e^{ikr} \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right] \\
&\Rightarrow \hat{n} \cdot \left(r^{-1} \nabla e^{ikr} + e^{ikr} \nabla r^{-1} \right) = \hat{n} \cdot \left(ikr^{-1} e^{ikr} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^3} \mathbf{r} \right) \\
&\Rightarrow \mathbf{n} \cdot \left(ikr^{-1} e^{ikr} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^3} \mathbf{r} \right) = \hat{n} \cdot \left(\frac{ik e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \\
&\Rightarrow \hat{n} \cdot \left[\frac{ik e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right] = \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \hat{n} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\
&\therefore \frac{\partial G(r)}{\partial n} = \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \hat{n} \cdot \hat{\mathbf{r}}
\end{aligned}$$

Für die Punkte in S_ϵ haben wir dass $\hat{n} = -\hat{\mathbf{r}}$, als wir in der Diagram sehen können. Auch würde $r = \epsilon$ für diese Punkte, weil die Kubel Radius ϵ hat. In diese besondere Fall hätten wir:

$$G(\epsilon) = \frac{e^{ike}}{\epsilon} \quad \frac{\partial G(\epsilon)}{\partial n} = \frac{e^{ike}}{\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} - ik \right)$$

Aber ϵ soll sehr klein sein, deshalb haben wir dafür interesse, zu wissen, was in der Limit $\epsilon \rightarrow 0$ passiert

Wir haben für S_ϵ folgendes:

$$\iint_{S_\epsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS$$

Mal sehen, was in der Limit passiert:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{S_\epsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \right]$$

Substituieren wir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{S_\epsilon} \left(U \cdot \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} - ik \right) - \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \right]$$

Weil $U = U(r)$, und $r = \epsilon$ in der Kugel, haben wir:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\iint_{S_\epsilon} \left(\frac{U(\epsilon)e^{ik\epsilon}}{\epsilon^2} - \frac{ikU(\epsilon)e^{ik\epsilon}}{\epsilon} - \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{r=\epsilon} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \right) dS \right]$$

Die ganze Integrand ist ein Festwert, deshalb können wir es draußen bringen:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\left(\frac{U(\epsilon)e^{ik\epsilon}}{\epsilon^2} - \frac{ikU(\epsilon)e^{ik\epsilon}}{\epsilon} - \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{r=\epsilon} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \right) \iint_{S_\epsilon} dS \right] \\ & \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\left(\frac{U(\epsilon)e^{ik\epsilon}}{\epsilon^2} - \frac{ikU(\epsilon)e^{ik\epsilon}}{\epsilon} - \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{r=\epsilon} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \right) S_\epsilon \right] \end{aligned}$$

Wobei S_ϵ die Flächeninhalt eines Kugels mit Radius ϵ ist, has heißt:

$$S_\epsilon = 4\pi\epsilon^2$$

Dann hätten wir

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[4\pi\epsilon^2 \left(\frac{U(\epsilon)e^{ik\epsilon}}{\epsilon^2} - \frac{ikU(\epsilon)e^{ik\epsilon}}{\epsilon} - \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{r=\epsilon} \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \right) \right] \\ & \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[4\pi \left(U(\epsilon)e^{ik\epsilon} - ikU(\epsilon)e^{ik\epsilon} - e^{ik\epsilon} \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{r=\epsilon} \right) \right] \end{aligned}$$

Wir suchen nach der Limit, wo $\epsilon \rightarrow 0$, dann:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 4\pi \left(U(0)e^{ik \cdot 0} - 0 \cdot ikU(0)e^{ik \cdot 0} - 0 \cdot e^{ik \cdot 0} \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{r=0} \right) \\ & \Rightarrow 4\pi (U(0)e^0) \\ & \therefore \iint_{S_\epsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 4\pi U(0) \end{aligned}$$

Schau mal, $U(0)$ ist unsere Funktion in der Ursprung.

Zurück zum Satz von Green:

$$\begin{aligned}
& \iint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS + \iint_{S_\epsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0 \\
& \Rightarrow \iint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS + 4\pi U(0) = 0 \\
& \Rightarrow -4\pi U(0) = \iint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \\
& \Rightarrow 4\pi U(0) = \iint_S \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \\
& \Rightarrow U(0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS
\end{aligned}$$

Aber wir kennen schon G und ihrer Abteilung durch n :

$$\Rightarrow U(0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS$$

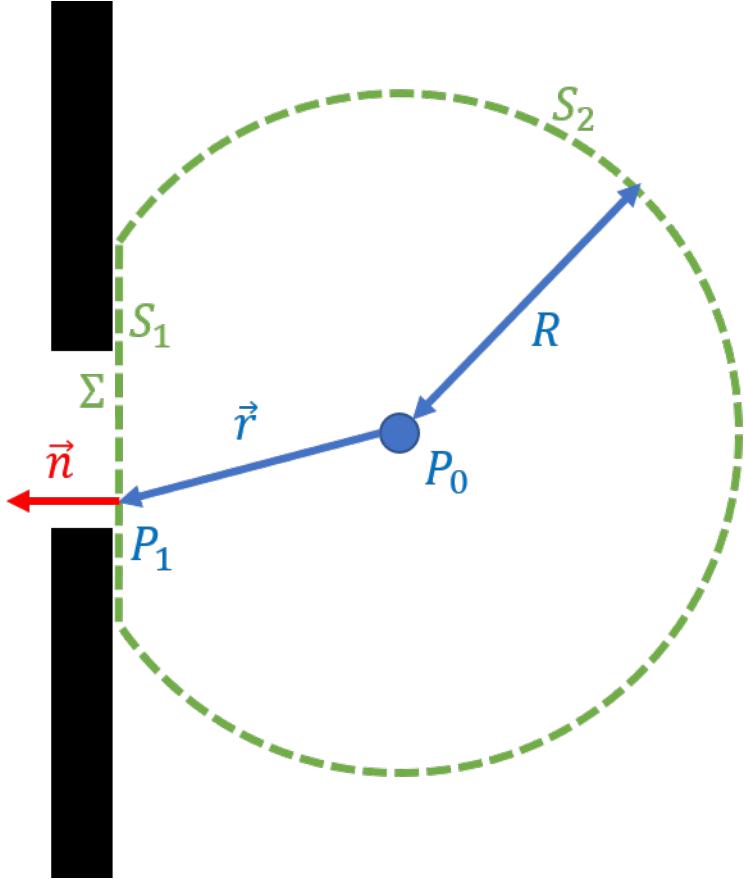
Aber es gab nichts besonders für unsere Ursprung, dann könnten wir schreiben:

$$U(r_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS$$

Das hier ist der Integralsatz von Helmholtz und Kirchhoff, der sehr hilfreich ist, weil er es erlaubt, dass das Feld in jeder Punkt r_0 durch die Grenzwerte der Welle in einer geschlossener Fläche S darstellen.

6.8 Kirchhoffs Darstellung der Beugung eines flaches Bildschirms

Lass uns die Lichtbeugung wegen eines unendliches opakes Bildschirms betrachten, sowie in nächstes Figur:



Figur XIV: Kirchhoff Darstellung Illustration

Wir wollen das Feld beim Punkt P_0 finden und dafür können wir der Helmholtz-Kirchhoff Integralsatz benutzen. Wir müssen uns nur entscheiden, welche Fläche wir auswählen sollen. Die Fläche, die wir benutzen werden, ist die, die beim Bild steht. Die gesamte Fläche S hat einen sphärischen Teil S_2 mit Radius R und einen ebenen Teil S_1 , die genau hinten dem Bildschirm steht. Dann haben wir:

$$U(r_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS$$

Je größer R desto eine größere Kugelschale wird S_2 . Wir können versuchen es zu überprüfen, dass die Kontribution von S_2 null sein wird. In S_2 wir haben $r = R$, sodass

$$G(R) = \frac{e^{ikR}}{R}$$

Und

$$\frac{\partial G(r)}{\partial n} = \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \hat{n} \cdot \hat{r} \Big|_{r=R}$$

Wobei $\hat{n} \cdot \hat{r} = 1$.

$$\Rightarrow \frac{\partial G(r)}{\partial n} = \frac{e^{ikR}}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) = \frac{ike^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R^2}$$

Der Begriff $\frac{1}{R^2}$ wird sehr klein sein, wenn R groß ist, sodass

$$\Rightarrow \frac{\partial G(r)}{\partial n} \approx \frac{ike^{ikR}}{R}$$

Dann hätten wir:

$$U(r_0)_{S_2} \approx \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \left[\frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial U}{\partial n} - U \cdot \frac{ike^{ikR}}{R} \right] dS$$

Oder einfach nur

$$U(r_0)_{S_2} \approx \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - ikUG \right] dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} G \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) dS$$

Wir können der Raumwinkel benutzen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} G \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) R^2 d\omega \\ & \Rightarrow \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} e^{ikR} R \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) d\omega \end{aligned}$$

Wir brauchen

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) = 0$$

Das ist Sommerfelds Radiationsbedingung, die immer wahr ist, so lange wie U zumindest so schnell wie eine Kugelwelle verschwindet. Das ist der Fall für Welle, die von S_2 rauskommen, statt reinzukommen. Wenn wir nur die erste Art Welle betrachten, wird die Kontribution der Integral gleich null.

6.9 Kirchhoffs Randbedingungen

Alles gut, damit sind wir fertig, aber jetzt müssen wir uns um S_1 kümmern:

$$U(r_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS$$

Wenn $R \rightarrow \infty$, dann wird S_1 eine unendliche Ebene sein. Der Bildschirm ist opak, aber es gibt eine Öffnung. Der Teil der S_1 Fläche, die in der Öffnung ist, werden wir Σ nennen. Hier benutzen wir Kirchhoffs Randbedingungen: 1. In Σ , die Felddistribution U und ihre Abteilung durch \hat{n} verhalten als würde es kein Bildschirm geben. 2. In der Teil von S_1 , der hinter den Bildschirm steht, die Felddistribution U und ihre Abteilung durch \hat{n} sind gleich null

Dann hätten wir:

$$U(r_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS$$

Das sieht schön aus. Vielleicht, so schön... Ehrlich gesagt ist diese Approximation hat ein paar Probleme. Die Felddistribution und ihre Abteilung in Σ können nicht vom Bildschirm unabhängig sein, weil es Randbedingungen in Σ gibt, die ohne den Bildschirm nicht geben würden. Außerdem sind die Schatten hinter dem Bildschirm nicht perfekt. Aber für Fälle, wo die Öffnung groß im Vergleich zur Wellenlänge ist, diese Bedingungen macht Sinn.

6.10 Fresnel-Kirchhoff Beugungsformel

Als Konsequenz von der Randbedingungen können wir andere Vereinfachungen machen. Weil die Wellenlänge klein ist, wird r normalerweise viel größer als λ , sodass

$$r \gg \lambda$$

Oder auch

$$\frac{1}{r} \ll \frac{1}{\lambda}$$

Und k ist durch folgendes definiert

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Sodass

$$\frac{1}{r} \ll k$$

Dann hätten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(r)}{\partial n} &= \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \hat{n} \cdot \hat{r} \\ \Rightarrow \frac{\partial G(r)}{\partial n} &\approx \frac{e^{ikr}}{r} (ik) \hat{n} \cdot \hat{r} = \frac{ike^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \hat{r} \end{aligned}$$

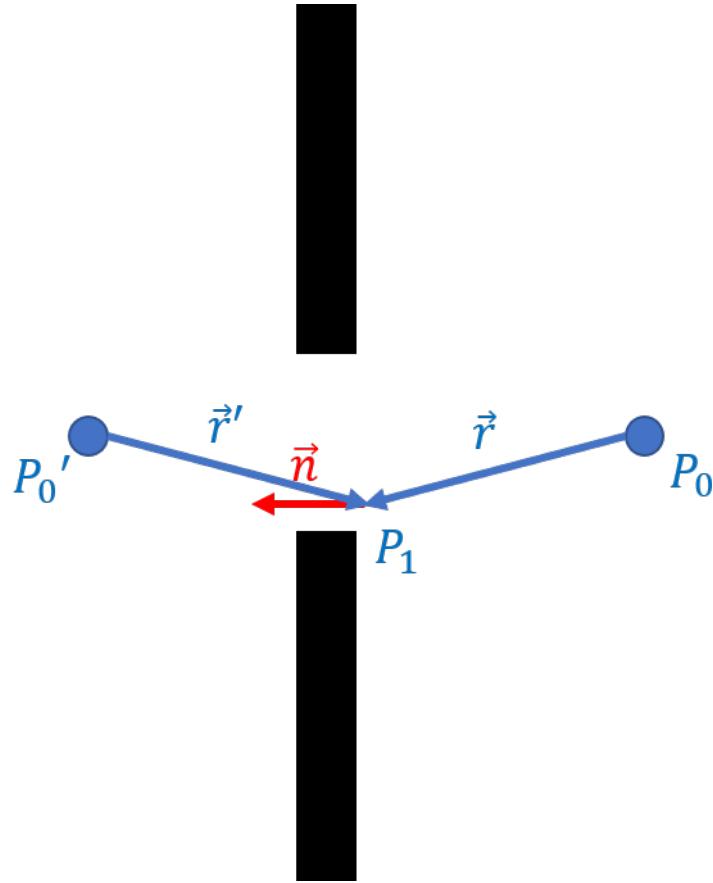
In unserer Gleichung hätten wir

$$\begin{aligned} U(r_0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{ike^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \hat{r} \right] dS \\ U(r_0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \hat{n} \cdot \hat{r} \right) dS \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass die Öffnung nur durch eine Kugelwelle leuchtet ist, sodass

$$U(r') = \frac{Ae^{ikr'}}{r'}$$

Sowie es in nächsten Figur ausdrückt ist



Figur XV: Kirchhoff-Fresnel Darstellung

Dan hätten wir

$$\frac{\partial U(r')}{\partial n} = \frac{Ae^{ikr'}}{r'} \left(ik - \frac{1}{r'} \right) \hat{n} \cdot \hat{r}'$$

Wenn $r' \gg \lambda$ haben wir, dass $r' \ll k$ und so:

$$\frac{\partial U(r')}{\partial n} \approx \frac{ikAe^{ikr'}}{r'} \hat{n} \cdot \hat{r}'$$

In der Integral:

$$\begin{aligned} U(r_0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ikr}}{r} \left[\frac{ikAe^{ikr'}}{r'} \hat{n} \cdot \hat{r}' - ik \left(\frac{Ae^{ikr'}}{r'} \right) \hat{n} \cdot \hat{r} \right] dS \\ \Rightarrow U(r_0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{ikAe^{ikr'}}{r'} \hat{n} \cdot \hat{r}' - \frac{ikAe^{ikr'}}{r'} \hat{n} \cdot \hat{r} \right) dS \\ \Rightarrow U(r_0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{ikAe^{ik(r+r')}}{rr'} (\hat{n} \cdot \hat{r}' - \hat{n} \cdot \hat{r}) dS \\ \Rightarrow U(r_0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{ikAe^{ik(r+r')}}{rr'} (\hat{n} \cdot \hat{r}' - \hat{n} \cdot \hat{r}) dS \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U(r_0) = \frac{ikA}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} (\hat{n} \cdot \hat{r}' - \hat{n} \cdot \hat{r}) dS$$

Weil $\frac{1}{i} = -i$ und $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$U(r_0) = -\frac{2\pi A}{4\pi i \lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} (\hat{n} \cdot \hat{r}' - \hat{n} \cdot \hat{r}) dS$$

$$\Rightarrow U(r_0) = -\frac{A}{2i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} (\hat{n} \cdot \hat{r}' - \hat{n} \cdot \hat{r}) dS$$

$$\therefore \boxed{U(r_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \left(\frac{\hat{n} \cdot (\hat{r} - \hat{r}')}{2} \right) dS}$$

Diese Ergebnis funktioniert nur für eine einzige Quelle leuchtung. Es gibt eine Symmetrie, als man das sehen kann. Was bedeutet, dass die Effekt einer Quelle in P'_0 für ein punkt P_0 würde dieselbe Effekt in P'_0 sein, als ob dieser Quelle in P_0 wäre. Das nennen wir Helmholtzs Reprozitätstheorem.

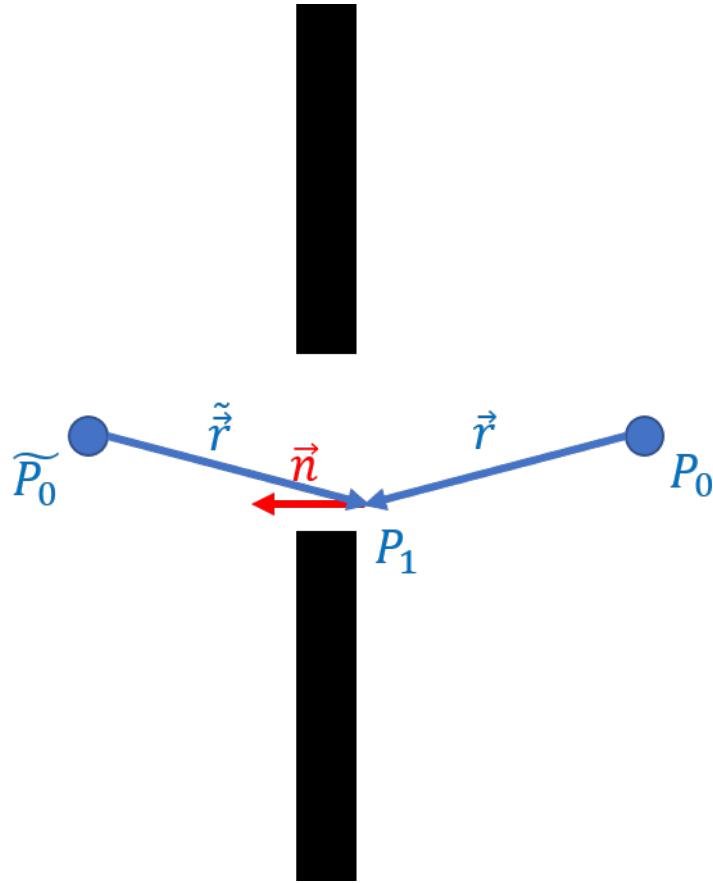
6.11 Rayleigh-Sommerfeld Darstellung der Beugung

Kirchhoffs Darstellung gibt uns genau Ergebnisse und wir benutzen es noch in viele Falle. Aber es gibt ein paar Probleme damit, innere Inkonsistenz. Aber hier kommen Raylech und Sommerfeld um uns zu retten. Wir können nicht im beide U und $\frac{\partial U}{\partial n}$ die Bedingungen haben, sonst würde U über die ganze Raum verschwinden, und das wissen wir falsch.

6.11.1 Alternative Greensche Funktionen

Wir können eine andere G funktion auswählen, sodass entweder G oder $\frac{\partial U}{\partial n}$ verschwindet. Lass wir uns betrachten, dass G ist nicht nur wegen eines Punkts P_0 generiert, sondern auch wegen eines anderen Punkts \tilde{P}_0 , das ein Spiegelbild von P_0 ist. Wir nehmen ab, dass diese Quelle eine Phasenunterschied von π haben, dann hätten wir. Diese funktion nennen wir G_- , und es ist durch folgendes definiert:

$$G_-(r, \tilde{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{i k \tilde{r}}}{\tilde{r}}$$



Figur XVI: Rayleigh-Sommerfeld Darstellung der Beugung

Selbstverständlich ist G_- in Σ gleich null, weil in diesen Fall würde $r = \tilde{r}$ sein. Aber das ist nicht der Fall für alle andere Punkte. Aber zum Glück sind diese anderen Punkte nicht nötig für unser Problem, weil wir nur in die Ebene Σ interessiert sind. Bis hier

$$U_I(r_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS$$

ist alles gut. Wir substituieren dann G_- statt G und hätten

$$U_I(r_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[G_-(r, \tilde{r}) \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G_-(r, \tilde{r})}{\partial n} \right] dS$$

Aber in Σ haben wir $r = \tilde{r}$, sodass: $G_-(r, r) = 0$. Dann hätten wir:

$$\begin{aligned} U_I(r_0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[-U \frac{\partial G_-(r, \tilde{r})}{\partial n} \Big|_{r=r, \tilde{r}=r} \right] dS \\ \Rightarrow U_I(r_0) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[U \frac{\partial G_-(r, \tilde{r})}{\partial n} \Big|_{r=r, \tilde{r}=r} \right] dS \end{aligned}$$

Das hier ist die erste Rayleigh-Sommerfeld Lösung.

Lass uns die Abteilung rechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_-(r, \tilde{r})}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ik\tilde{r}}}{\tilde{r}} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial G_-(r, \tilde{r})}{\partial n} &= \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \hat{r} - \left(ik - \frac{1}{\tilde{r}} \right) \frac{e^{ik\tilde{r}}}{\tilde{r}} \hat{n} \cdot \hat{r}\end{aligned}$$

Für ein P_1 , der im σ steht, würde es sein:

$$\begin{aligned}&\left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \hat{r} - \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} (-\hat{n} \cdot \hat{r}) \\ &2 \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \hat{r}\end{aligned}$$

Und für $r \gg \lambda$ hätten wir:

$$\frac{2ike^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \hat{r}$$

Das ist aber die Form, die wir vorher gekriegt haben, die mit G anstatt von G_- .

$$\frac{\partial G_-(r)}{\partial n} = 2 \frac{\partial G(r)}{\partial n}$$

Dann können wir einfach nur schreiben:

$$\begin{aligned}U_I(r_0) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} U \cdot 2 \frac{\partial G}{\partial n} dS \\ \Rightarrow U_I(r_0) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} U \frac{\partial G}{\partial n} dS\end{aligned}$$

Und jetzt

$$\begin{aligned}U_I(r_0) &= -\frac{ik}{2\pi} \iint_{\Sigma} U(r) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \hat{r} dS \\ \Rightarrow U_I(r_0) &= \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(r) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \hat{r} dS\end{aligned}$$

Und jetzt, für eine Kugelwelle, wie früher, hätten wir

$$\begin{aligned}U(r') &= A \frac{e^{ikr'}}{r'} \\ \Rightarrow U_I(r_0) &= \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} A \frac{e^{ikr'}}{r'} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \hat{r} dS\end{aligned}$$

$$U_I(r_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS$$

Das hier ist der Rayleigh-Sommerfeld Beugungssatz.

Aber es gibt auch eine genau so gültig Greensche Funktion, die wir finden können, indem wir die Quelle ohne Phasenunterschied bauen. Wir nennen diese Funktion G_+ :

$$G_+(r, \tilde{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ik\tilde{r}}}{\tilde{r}}$$

Dann hätten wir U_{II} durch folgendes definiert:

$$U_{II}(r_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[G_+(r, \tilde{r}) \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G_+(r, \tilde{r})}{\partial n} \right] dS$$

In Σ haben wir $\tilde{r} = r$, sodass:

$$G_+(r, r) = \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr}}{r} = 2 \frac{e^{ikr}}{r} = 2G(r)$$

Dann hätten wir

$$U_{II}(r_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[2G(r) \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G_+(r, \tilde{r})}{\partial n} \Big|_{r=r, \tilde{r}=r} \right] dS$$

Lass uns die Abteilung rechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_+(r, \tilde{r})}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ik\tilde{r}}}{\tilde{r}} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial G_-(r, \tilde{r})}{\partial n} = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \left(ik - \frac{1}{\tilde{r}} \right) \frac{e^{ik\tilde{r}}}{\tilde{r}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

Für ein P_1 , der im σ steht, würde es sein:

$$\begin{aligned} &\left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} (-\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \\ &\Rightarrow \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}} - \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &\Rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{II}(r_0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[2G(r) \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS \\ &\Rightarrow U_{II}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[G(r) \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_{II}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS$$

Für eine Kugelwelle:

$$\begin{aligned} U_{II}(r_0) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} \left(A \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) \right] dS \\ \Rightarrow U_{II}(r_0) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \cdot \left(ikA \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) \hat{n} \cdot \hat{r}' \right] dS \\ \Rightarrow U_{II}(r_0) &= \frac{ikA}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{ikr'}}{r'} \hat{n} \cdot \hat{r}' dS \end{aligned}$$

Dann hätten wir:

$$U_{II}(r_0) = -\frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \hat{n} \cdot \hat{r}'$$

6.12 Vergleichung der Kirchhoff und Rayleigh-Sommerfeld Theorien

Für diese Sektion nennen wir die Greensche Funktion, die Kirchhoff genutzt hat, G_k . In Σ haben wir:

$$G_+ = 2G_k \quad \frac{\partial G_-}{\partial n} = 2 \frac{\partial G_k}{\partial n}$$

Für Kirchhoff haben wir:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial U}{\partial n} G_k - U \frac{\partial G_k}{\partial n} \right) dS$$

Für Rayleigh-Sommerfeld:

$$U_I(r) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} -U \frac{\partial G_k}{\partial n} dS$$

$$\Rightarrow U_{II}(r) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial n} G_k dS$$

Das sieht aber ähnlich aus, wir könnten es schreiben:

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial n} G_k dS + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} -U \frac{\partial G_k}{\partial n} dS \\ \Rightarrow U(r) &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial n} G_k dS + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} -U \frac{\partial G_k}{\partial n} dS \right] \\ \Rightarrow U(r) &= \frac{1}{2} \cdot [U_{II} + U_I] \\ \therefore U(r) &= \boxed{\frac{U_{II} + U_I}{2}} \end{aligned}$$

Sodass die Kirchhoff-Lösung ist der Durchschnitt der beide Rayleigh-Sommerfeld Lösungen

Wir können auch alle drei simplifizierte Ergebnisse vergleichen:

$$U_k(r_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \left(\frac{\hat{n} \cdot \hat{r} - \hat{n} \cdot \hat{r}'}{2} \right) dS$$

$$U_I(r_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \hat{n} \cdot \hat{r} dS$$

$$U_{II}(r_0) = -\frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \hat{n} \cdot \hat{r}'$$

Wir können dann die Unregelmäßigkeits Faktor ψ definieren, sodass

$$U(r_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \psi dS$$

Wobei ψ durch folgendes definiert ist:

$$\psi = \begin{cases} \frac{\hat{n} \cdot \hat{r} - \hat{n} \cdot \hat{r}'}{2} & \text{Kirchhoff} \\ \hat{n} \cdot \hat{r} & \text{Rayleigh } G_- \\ -\hat{n} \cdot \hat{r}' & \text{Rayleigh } G_+ \end{cases}$$

Für eine weite Quelle, die rechtwinklige Ebene Welle Illumination produziert, hätten wir $-\hat{n} \cdot \hat{r} = 1$. und so wäre es:

$$\psi = \begin{cases} \frac{1 + \cos \theta}{2} & \text{Kirchhoff} \\ \cos \theta & \text{Rayleigh } G_- \\ 1 & \text{Rayleigh } G_+ \end{cases}$$

Wobei θ die Winkel inzwischen Vektoren \hat{r} und \hat{n}

In der Tätigkeit sind diese drei Lösungen wirklich nicht so anders, für solche ideale Situationen, wofür sie formuliert worden. Nur in der Nähe der Öffnung fangen die Unterschiede an um aufzutreten.

6.13 Der Huygens-Fresnels Grundsatz

Es ist durch folgendes definiert:

$$U(r_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(r') \frac{e^{ikr}}{r} \cos \theta dS$$

Wobei θ die Winkel inzwischen Vektoren n und r ist. Eine Ausdeutung dieses Ausdrucks ist, dass es die beachtet Feld $U(r_0)$ als eine Superposition der divergierende Kugelwelle $\frac{e^{ikr}}{r}$, die von sekundäre Quelle in jeder Punkt P_1 in Σ generiert werden. Diese Quellen haben die folgende Eigenschaften:

1. Sie hat eine komplexe Amplitude, die proportional zur Erregung $U(r')$ ist
2. Sie hat eine Amplitude, die umgekehrt proportional zu λ ist, oder genau so equivalent, proportional zur optische Frequenz ν
3. Sie hat eine Phasewinkel, die eine 90° Phasenunterschied mit der einfallenden Quelle hat
4. Jede sekundäre Quelle hat eine $\cos \theta$ Richtwirkungstruktur

Die erste Eigenschaft macht total Sinn, weil die Fortpflanzung der Wellen ist ein Linearphänomenon. Die zweite und dritte haben wir wegen der Abteilungen unserer Kugelwelle, die zur ν proportional sind. Die letzte Eigenschaft muss jetzt überhaupt keinen Sinn machen, noch nicht.

Man muss sich bemerken, dass dieser Grundsatz eine Superpositionsintegral ist. Wir können das deutlicher machen, indem wir eine Impulsantwort h definieren:

$$h(r) = \frac{e^{ikr}}{i\lambda r} \cos \theta$$

Sodass:

$$U(r_0) = \iint_{\Sigma} U(r') h(r) dS$$

In der Zukunft werden wir dieser Grundsatz als eine Convolutionsintegral sehen können.

6.14 Beugung bei der Ränder

In der Huygens-Fresnel Grundsatz haben wir in jeder Punkt in der Öffnung (in Fläche Σ) eine neue Quelle einer Kugelwelle gemacht, um den Superpositionsprinzip zu benutzen. Diese Quelle sind nur mathematische Bequemlichkeiten, denn sie haben keine echte Bedeutung oder physische Erklärung. Ein physischer Standpunkt wäre die beobachtete Feld als eine Superposition der einfallender Welle, die durch die Öffnung ungestört übertragen wurde, und eine gebeugte Welle, die im Rand des Öffnungs entsteht. Nur die Möglichkeit, eine neue Welle zu haben, die in der Rände der Öffnung entsteht, ist ein Schritt in der richtige Richtung. Zu, Beispiel, für ebene Welle, die Feld in der Schatten der Bildschirms hätte die Form eines Zylinders. Die gesamte Feld wäre dann die Superposition diese Ebene Welle und der Zylinder-welle.

6.15 Winkelspektrum der ebene Welle

Lass uns annehmen, dass eine Welle, die einfallend in einer transversaler (x, y) Ebene ist, wegen eines unspiezfiziertes Systems von monochromatische Quelle entsteht und mit einer Ausbreitungskomponente in der positiven z Richgung reist. Die komplexe Felde in dieser $z = 0$ Ebene

kann durch $U(x, y, 0)$ darstellt werden. Wir wollen die ergebende Felde $U(x, y, z)$ in einer neue parallele Ebene berechnen, die eine Distanz z von der vorheriger Ebene ist.

In der $z = 0$ Ebene, die Funktion U hat eine 2D Fourier-Transformation die durch folgendes definiert ist:

$$A(u, v; 0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

Mann kann die Fourier-Transformation als eine Dekomposition einer komplizierten Funktion sehen, sodass diese Funktion durch einfachere komplexe-exponentielle Funktionen darstellen. Wir können, zum Beispiel, U so schreiben:

$$U(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A(u, v; 0) e^{i(ux+vy)} du dv$$

Um eine physische Bedeutung zur letzten Funktionen, können wir uns eine einfache ebene Welle vorstellen, die mit Wellenvektor \mathbf{k} reist, wobei

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z})$$

Und $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, sodass

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Solche Welle würde durch folgendes definiert werden:

$$p(x, y, z; t) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2\pi v t)}$$

Wir können ein Phasor schreiben, sodass

$$p(x, y, z; t) = P(x, y, z) e^{-i2\pi v t}$$

Solche Phasor wäre

$$P(x, y, z) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z)} = e^{\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)} e^{\frac{2\pi}{\lambda} \gamma z}$$

Wir können γ als folgendes schreiben

$$\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$$

Für die Ebene $z = 0$, eine Funktion $e^{i(ux+vy)}$ könnte eine ebene Welle darstellen, die mit:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2\pi} u \quad \beta = \frac{\lambda}{2\pi} v \quad \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2\pi} u\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2\pi} v\right)^2}$$

In die fouriersche Dekomposition der Funktion U , the komplexe Amplitude der ebene Welle Komponent mit spatiale Frequenzen (u, v) ist einfach nur $A(u, v; 0) du dv$, bewertet bei der Punkt:

$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha \quad v = \frac{2\pi}{\lambda} \beta$$

So nennen wir das der Winkelspektrum der Störung $U(x, y, 0)$:

$$A\left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; 0\right) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x + \frac{2\pi}{\lambda} \beta y\right)\right] dx dy$$

6.16 Propagation des Winkelspektrums

Lass uns jetzt eine Störung in einer Ebene (x, y) , als vorheriges Mal, aber diesmal eine Distanz z von der Ebene, sodass der Winkelspektrum der Funktion $U(x, y, z)$ durch folgendes definiert ist:

$$A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\beta; z\right) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x + \frac{2\pi}{\lambda}\beta y\right)\right] dx dy$$

Wir wollen die Relation zwischen $A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\beta; 0\right)$ und $A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\beta; z\right)$ finden, sodass die Effekte der Propagation der Welle im Winkelspektrum klar sein werden. Dafür können wir U so schreiben:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\beta; z\right) \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x + \frac{2\pi}{\lambda}\beta y\right)\right] du dv \\ U(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\beta; z\right) \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x + \frac{2\pi}{\lambda}\beta y\right)\right] d\frac{2\pi}{\lambda}\alpha d\frac{2\pi}{\lambda}\beta \end{aligned}$$

Außerdem muss U die Helmholtz Gleichung erfüllen:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0$$

für alle Punkte die keine Quelle sind.

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left\{ \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\beta; z\right) \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x + \frac{2\pi}{\lambda}\beta y\right)\right] d\frac{2\pi}{\lambda}\alpha d\frac{2\pi}{\lambda}\beta \right\} \\ \Rightarrow \nabla^2 U &= \left(\frac{i2\pi\alpha}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\beta; z\right) \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x + \frac{2\pi}{\lambda}\beta y\right)\right] d\frac{2\pi}{\lambda}\alpha d\frac{2\pi}{\lambda}\beta \\ &\quad + \left(\frac{2\pi\beta}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\beta; z\right) \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x + \frac{2\pi}{\lambda}\beta y\right)\right] d\frac{2\pi}{\lambda}\alpha d\frac{2\pi}{\lambda}\beta \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\beta; z\right) \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x + \frac{2\pi}{\lambda}\beta y\right)\right] d\frac{2\pi}{\lambda}\alpha d\frac{2\pi}{\lambda}\beta \right\} \\ \Rightarrow \nabla^2 U &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (-\alpha^2 - \beta^2) A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\beta; z\right) \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x + \frac{2\pi}{\lambda}\beta y\right)\right] \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\beta; z\right) \exp\left[-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x + \frac{2\pi}{\lambda}\beta y\right)\right] \right\} d\frac{2\pi}{\lambda}\alpha d\frac{2\pi}{\lambda}\beta \\ \Rightarrow \nabla^2 U &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (-\alpha^2 - \beta^2) A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\alpha, \frac{2\pi}{\lambda}\beta; z\right) \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) \right] \right\} \exp \left[-i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x + \frac{2\pi}{\lambda} \beta y \right) \right] d \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d \frac{2\pi}{\lambda} \beta$$

Und

$$\begin{aligned} k^2 U &= k^2 \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) \exp \left[-i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x + \frac{2\pi}{\lambda} \beta y \right) \right] d \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d \frac{2\pi}{\lambda} \beta \\ &\Rightarrow k^2 U = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) \exp \left[-i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x + \frac{2\pi}{\lambda} \beta y \right) \right] d \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d \frac{2\pi}{\lambda} \beta \end{aligned}$$

Sodass

$$\begin{aligned} \nabla^2 U + k^2 &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (-\alpha^2 - \beta^2) A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) \right] \right\} \exp \left[-i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x + \frac{2\pi}{\lambda} \beta y \right) \right] d \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d \frac{2\pi}{\lambda} \beta \\ &\quad + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) \exp \left[-i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x + \frac{2\pi}{\lambda} \beta y \right) \right] d \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d \frac{2\pi}{\lambda} \beta \\ &\Rightarrow \nabla^2 U + k^2 = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) \right] \right\} \exp \left[-i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x + \frac{2\pi}{\lambda} \beta y \right) \right] d \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d \frac{2\pi}{\lambda} \beta = 0 \end{aligned}$$

Oder einfach nur

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} W \exp \left[-i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x + \frac{2\pi}{\lambda} \beta y \right) \right] d \frac{2\pi}{\lambda} \alpha d \frac{2\pi}{\lambda} \beta = 0$$

Wobei

$$W = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) \right]$$

Falls diese Integral null ist, für jeder W , muss $W = 0$, sodass:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) \right] &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) A + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A &= 0 \end{aligned}$$

Wir finden eine Lösung für A :

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) \\ \Rightarrow \lambda &= i \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = i \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$$

Und eine Lösung wäre:

$$A = A_0 \exp \left(i \frac{2\pi z}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right)$$

Wobei $A_0 = A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; 0 \right)$. Dann haben wir:

$$A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) = A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; 0 \right) \exp \left(i \frac{2\pi z}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right)$$

Wir definieren μ sodass

$$\mu = \frac{2\pi z}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$$

Und dann haben wir

$$A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; z \right) = A \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; 0 \right) e^{i\mu z}$$

6.17 Effekte einer Beugungsöffnung in der Winkelspektrum

Nun haben wir eine unendliche Bildschirm in Ebene $z = 0$ und wollen die Effekte dieses Bildschirms in der Winkelspektrum der Störung. Wir definieren eine Amplitude-Transmition Funktion der Öffnung als der Ratio der Amplitude der gesendete Feld $U_t(x, y; 0)$ zur einfallender Amplitude der Feld $U_i(x, y; 0)$ als folgendes:

$$t_A(x, y) = \frac{U_t(x, y; 0)}{U_i(x, y; 0)}$$

Sodass:

$$U_t(x, y; 0) = U_i(x, y; 0) t_A(x, y)$$

Wir können die Faltungssatz benutzen:

$$A_t \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; 0 \right) = A_i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta; 0 \right) * T \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta \right)$$

Wobei

$$T \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta \right) = \iint_{-\infty}^{\infty} t_A(x, y) \exp \left[-i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x + \frac{2\pi}{\lambda} \beta y \right) \right] dx dy$$

In der Fall einer einheitsamplitude ebene Welle, die der Bildschirm rechtwinklig illuminiert, haben wir

$$A_i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta \right) = \delta \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta \right)$$

Sodass:

$$A_t \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta \right) = \delta \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta \right) * T \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta \right) = T \left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \beta \right)$$

Der gesendete Winkelspektrum können wir direkt finden, indem wir eine Fourier-Transformation zur Amplitude-Transmition Funktion machen.

7 Fresnel und Fraunhofer Beugung

7.1 Lichtstärke einer Feld

In der optischen Region des Spektrums, ein Fotodetektor reagiert direkt zur optischen Leistung, die in seiner Fläche fällt. Wenn eine optische Leistung \mathcal{P} in der lichtempfindlichen Region einfallend ist, die Aufnahme eines Photons generiert einen Elektronen in das Leistungsband und ein Loch in das Valenzband. In der Einfluss von inneren und äußeren Feldern, das Loch und der Elektron bewegen sich genau umgekehrt. Das generiert einen Photostrom i_p , wegen des absorbierten Photons. In viele Fällen ist dieser Strom zur Leistung proportional:

$$i_p = \mathcal{R} \mathcal{P}$$

Sei nicht verwirrt. Hier hat \mathcal{R} überhaupt nichts mit dem Widerstand zu tun, sondern ist es eine Proportionalitätskonstante, die wir die Empfindlichkeit des Detektors nennen und die durch folgendes definiert ist:

$$\mathcal{R} = \frac{\eta_{qe} q}{h\nu}$$

Wobei η_{qe} der Quanteneffizienz des Fotodetektors ist, q die Ladung des Elektrons ist ($1.602 \times 10^{-19} [\text{C}]$) ist, h die Planksche Konstante ist ($6.626196 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}]$) und ν die optische Frequenz ist.

Die Anzahl, die in Optik ausmessbar ist, ist die optische Leistung. Es ist wichtig, solche Leistung zur komplexen Skalarfelde $u(r, t)$ und $U(r)$ verbinden. Um diese Verbindung zu verstehen benötigen wir eine elektromagnetische Darstellung des Problems.

Lassen uns ein isotropes Mittel und eine monochromatische Elektromagnetischtransversalwelle haben, sodass $\mathcal{E}, \mathcal{H}, k$ orthogonal sind und die Elektrisch- und Magnetischfeld durch folgendes darstellt werden können:

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \operatorname{Re} [E_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}] \\ \mathcal{H} &= \operatorname{Re} [H_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}] \end{aligned}$$

Wobei E_0 und H_0 in der Nähe konstant sind und komplexe Hochzahlen haben. Die Leistung fließt in der Richtung des Vektors k und die Leistungsdichte kann durch folgendes darstellt werden.

$$p = \frac{|E_0|}{2\eta} = \frac{E_0 \cdot E_0^*}{2\eta} = \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2}{2\eta}$$

Wobei η die Wellenimpedanz des Mittels ist:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Im Vakuum ist η gleich 377Ω . Die gesamte einfallende Leistung in einer Fläche A ist das Integral des Leistungsdichten in A . Für dieses Integral muss man beachten, dass die Richtung der Leistungsfluss dieselbe Richtung des Vektors k ist. Dann hätten wir:

$$\mathcal{P} = \iint_A p \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{k}|} dx dy = \iint_A p \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dx dy$$

Wobei \hat{n} ein Einheitsvektor in der Richtung des Areavektors A und \hat{k} ein Einheitsvektor in der Richtung der Leistungsfluss. In der Fal dass \hat{k} (fast) orthogonal zur Fläche ist, wären \hat{k} und \hat{n} (fast) parallel zueinander, und so wäre $\hat{k} \cdot \hat{n} \approx 1$, sodass:

$$\mathcal{P} \approx \iint_A pdxdy$$

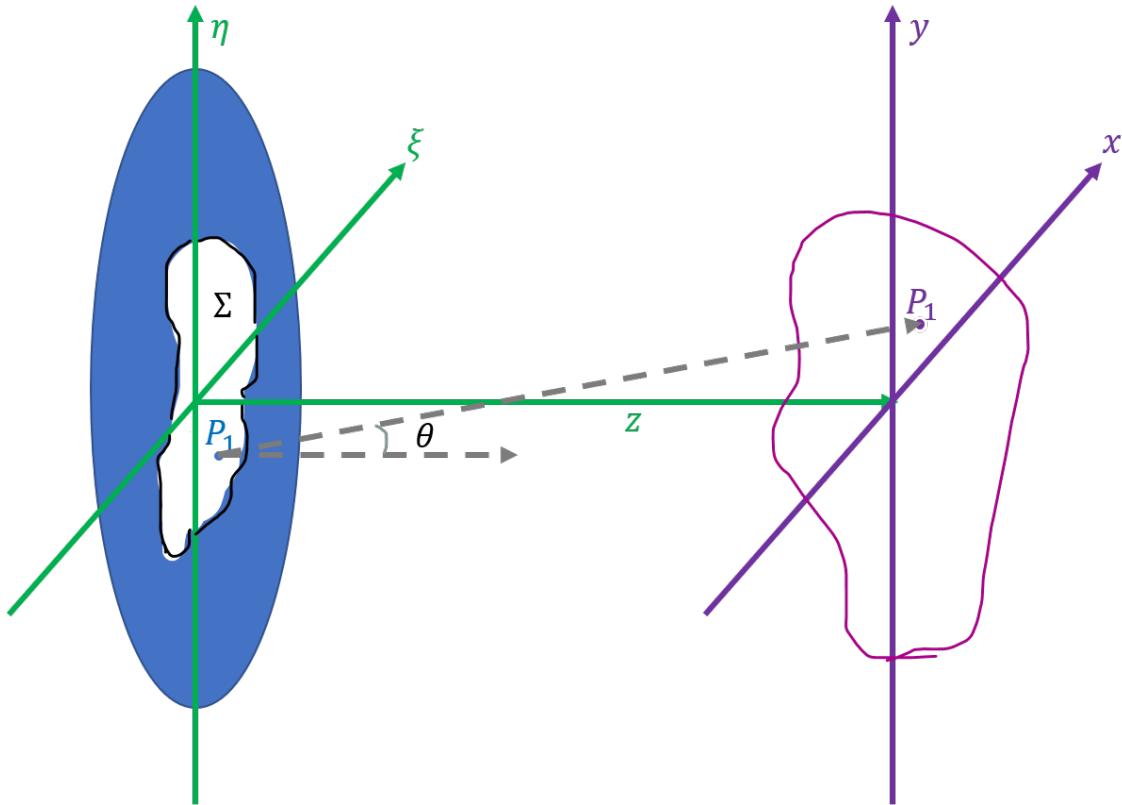
Wir könnten auch die Intensität definieren, indem wir eine monochromatische Welle beachten, sodass sie durch folgendes definiert werden kann:

$$I(r) = |U(r)|^2$$

Zuerst muss es erklärt werden, dass Insensität und Leistung nicht dieselbe Sache sind. Aber sie sind verbundeten und normalerweise ist es einfacher, die Intensität einer Wellenfeld zu messen.

7.2 Huygens-Fresnel Prinzip in kartesische Koordinaten

Bevor wir eine Menge Approximationen des Huygens-Frensel Prinzips vorstellen, lass uns zuerst eine deutlicher Form des Prinzips darstellen, in der Fall von kartesischen Koordinaten. Wir haben die folgende Situation:



Figur XVII: Huygens-Fresnel Prinzip in kartesische Koordinaten

Wir haben eine Beugungsöffnung, die in Ebene $\xi\eta$ steht und in der Richtung von \hat{z} illuminiert ist. Wir werden die Wellenfeld in der xy Ebene rechnen, die parallel zur Ebene $\xi\eta$ ist und einer

Distanz z entfernt ist. Wir haben dann folgendes:

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr}}{r} \cos \theta dS$$

Wobei θ der Winkel zwischen der Normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ und der Vektor \mathbf{r} , der P_1 und P_0 verbindet. Wir können die Sinusfunktion durch folgendes darstellen:

$$\cos \theta = \frac{z}{r}$$

Und so hätten wir:

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \frac{z}{r} dS = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{e^{ikr}}{r^2} dS$$

In P_0 haben wir Koordinaten (x, y) und in P_1 haben wir (ξ, η) . Also, Σ steht auf dem $\xi\nu$ Ebene, und so hätten wir:

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{ikr}}{r^2} d\xi d\eta$$

Wobei

$$r = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

7.3 Fresnels Approximation

Wir können die Distanz r approximieren, indem wir die Binomialexpansion beachten:

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots$$

Wir schreiben unser Ausdruck so:

$$r = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2}$$

Dann hätten wir:

$$b = \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2$$

Und unsere Approximation, indem wir nur den ersten Wert beachten, wäre:

$$r \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right] = z + \frac{(x - \xi)^2}{2z} + \frac{(y - \eta)^2}{2z} = z + \frac{1}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]$$

Nun müssen wir uns entscheiden, ob wir der ganzen Ausdruck benutzen werden. Für r^2 können wir etwas einfacheres haben, indem wir nur z lassen, sodass $r^2 \approx z^2$. Das hier hat, normalerweise, sehr winzige Fehlern. Aber für r in der Exponent ist das leider unmöglich, weil k normalerweise ein großer Zahl ist (zB 5×10^7). Dann würde unser Ausdruck so aussehen:

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ ikz + \frac{ik}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} \frac{1}{z^2} d\xi d\eta$$

$$\Rightarrow U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta$$

Aber moment mal, wir haben hier eine Art Faltung. Erinnern wir:

$$U(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

Das Integral das wir vorher haben kann auch einfach so geschrieben werden:

$$\Rightarrow U(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \cdot \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta$$

Wir könnten der Kernel durch folgendes definieren:

$$h(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right]$$

Sodass

$$h(x - \xi, y - \eta) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\}$$

Oder auch können wir es anders schreiben:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left[\frac{ik}{2z} (x^2 - 2x\xi + \xi^2 + y^2 - 2y\eta + \eta^2) \right] d\xi d\eta \\ \Rightarrow U(x, y) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} [U(\xi, \eta) e^{\frac{ik}{2z}(\xi^2+\eta^2)}] e^{-\frac{ik}{z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \end{aligned}$$

Wir nennen

$$f(x, y) = e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}$$

Dann hätten wir:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} f(x, y) \iint_{-\infty}^{\infty} [U(\xi, \eta) f(\xi, \eta)] e^{-\frac{ik}{z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta$$

Aber das ist eine Art Fourier-Transform. Beide Ergebnisse kennen wir als das Fresnel Beugungsintegral.

7.3.1 Positive und negative Phasenwinkel

In Fresnel Approximationen wird es gewöhnlich sein, Kugelwelle als Exponentials mit Quadratischerphasenwinkel. Aber nun steht die Frage: sollte die Phasenwinkel negativ oder positiv sein? Also, das geht auch für andere Kugelwelle oder Ebenewelle, es ist generell.

Wir müssen eine Methode entwickeln, sodass wir das Sign der Phasenwinkel bestimmen können. Zuerst ist es wichtig daran zu erinnern, dass die Phasoren eine Drehung im Uhrzeigersinn folgen, i.e. die Zeitabhängigkeit ist der Form $e^{-i\omega t}$. Aus diesem Grund, wenn wir uns im Raum in solche Weise bewegen, sodass wir die Teile einer Wellenfeld abfangen, die später in der Zeit emmitiert würden, der Phasor würde sich im Uhrzeigersinn bewegt und so muss es noch negativer sein. Aber im Gegensatz, wenn die Teile früher in der Zeit emmitiert würden, der Phasor würde sich gegen den Uhrzeigersinn bewegt und so muss es weniger negativer (positiver) sein.

7.3.2 Genauigkeit des Fresnels Approximations

Wir müssen uns daran erinnern, dass wir nur die erste Begriffe der Binomalexpansion benutzt haben. Deshalb ist es nötig zu definieren, wie genau diese Approximation ist. Die Genauigkeit hängt davon ab, dass die Fehler der größer Ordnung Begriffe nicht so groß sind. Es sollte reichen, dass der zweite Begriff viel kleiner als 1 ist, nähmlich:

$$\begin{aligned} 1 &\gg kz \frac{b^2}{8} \\ \Rightarrow 1 &\gg \frac{kz}{8} \left[\left(\frac{x-\xi}{z} \right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z} \right)^2 \right]^2 \\ \Rightarrow 1 &\gg \frac{\pi}{4\lambda z^3} \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right]^2 \\ \Rightarrow z^3 &\gg \frac{\pi}{4\lambda} \left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right]^2 \end{aligned}$$

Das kann auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} z^3 &\gg \frac{\pi}{4\lambda} [d^2]^2 \\ \Rightarrow z^3 &\gg \frac{\pi d^4}{4\lambda} \end{aligned}$$

Wobei d der größte Distanz ist.

Beispiel

Für eine Kreisöffnung mit Radius 1cm, eine Beobachtungsregion mit der Form eines Kreises mit Radius 1cm und eine Wellenlänge $0.5\mu\text{m}$ können wir die minimale z rechnen, sodass unser Ergebnis hohe Genauigkeit hat. Die größte Distanz zwischen Punkten in der Ebene $\xi\eta$ und Punkten in der Ebene xy wäre 1cm. Dann hätten wir:

```
[8]: d = 1e-2 # Größte Distanz (m)
lambda = 0.5e-6 # Wellenlänge (m)
z = ((pi*d^4)/(4*lambda))^(1/3)
print("z >> ", round(z*100,digits=3), " cm") # x100 für cm##
```

$z >> 25.044 \text{ cm}$

So z , der Distanz zwischen den Ebenen, muss viel größer als 25cm sein. Das klingt überhaupt nicht so nützlich, aber in Realität ist es nicht so schlimm. Später werden wir sehen, dass es nicht so nötig ist, dass die größer Ordnung Begriffe klein sind, sondern nur dass sie nicht die Wert des

Integrals bezeichnenderweise ändern. Wir können dann die Faltungsform des Integrals beachten, sodass die wichtigste Werte des Integrals die Punkte $\xi \approx x$ und $\eta \approx y$ sind.

Um genauer zu sein, wir können die Quadratischephasenwinkel-Exponential in $h(x,y)$ analysieren, indem wir den Ausdruck entwickeln:

$$\frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right] = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \cos \left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right] + \frac{e^{ikz}}{\lambda z} \sin \left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right]$$

8 Gerchberg-Saxton Algorithmus

```
[2]: using Plots  
using FFTW  
Plots.theme(:ggplot2)
```

Ich habe einen Beitrag in Gighub gefunden, indem jemand einen Gerchberg-Saxton Algorithmus programmiert hat. Leider war es nicht in Julia programmiert, sondern in Python, aber ich habe es als Herausforderung genommen, es auf Julia zu übersetzen... ohne Erfolg. Also das Programm funktioniert, in Theorie, ich habe alles überprüft, jeder individueller Schritt, aber zussammenhängt funktioniert es nicht, wahrscheinlich wegen der Unterschiede zwischen Python und Julia und wie die beide Sprache die Datei händeln.

```
[9]: using Random  
# Meshgrid  
function meshgrid(xin::Array,yin::Array)  
nx=length(xin)  
ny=length(yin)  
xout=zeros(ny,nx)  
yout=zeros(ny,nx)  
for jx=1:nx  
    for ix=1:ny  
        xout[ix,jx]=xin[jx]  
        yout[ix,jx]=yin[ix]  
    end  
end  
return (x=xout, y=yout)  
end  
# Multi-spot Gerchberg-Saxton Algorithm  
  
function GS_ms(x,y,z,f,d,lambda,r,n)  
    f = f * 1e3  
    slm = collect(range(-1,1,length=r))  
    x_slm,y_slm = meshgrid(slm,slm)  
    pup_x = []  
    pup_y = []  
    for i in 1:r  
        for j in 1:r  
            if x_slm[i,j]^2+y_slm[i,j]^2<1  
                pup_x = vcat(pup_x,[i])  
                pup_y = vcat(pup_y,[j])  
            end  
        end  
    end  
    pup = hcat(pup_x,pup_y)'  
    x_l = length(x)  
    pists = rand!(zeros(x_l))*2pi
```

```

x_slm = x_slm*d*r/2
y_slm = y_slm*d*r/2
phi = zeros(x_l,r)
for i in 1:x_l
    phi[i,:] = 2*pi/(lambda*f)*(x[i]*x_slm[pup[1,:],pup[2,:]][1,:]
→)+y[i]*y_slm[pup[1,:],pup[2,:]][1,:]
    +(pi*z[i])/(lambda*f^2)*(x_slm[pup[1,:],pup[2,:]][1,:]^2+y_slm[pup[1,:]
→],pup[2,:])[1,:]^2)
end
# Main GS Loop
for i in 1:n
    F = sum((1/r*exp.(im*(phi+pists)))',dims=2)
    Phi = angle.(F)
    F_s = sum((1/r*exp.(im*(Phi-phi))),dims=2)
    pists = angle.(F_s)
    IN = abs(F_s)^2
end
out = zeros(res,res)
out[pup[1,:],pup[2,:]][1,:] = Phi
return out
end

```

[9]: GS_ms (generic function with 1 method)

```

[15]: x = (rand(25).-0.5)*100
y = (rand(25).-0.5)*100
z = (rand(25).-0.5)*10
phase = GS_ms(x,y,z,20.0,15.0,0.488,512,30)

```

```

OutOfMemoryError()

Stacktrace:
 [1] Array at .\boot.jl:408 [inlined]
 [2] Array at .\boot.jl:416 [inlined]
 [3] similar at .\array.jl:380 [inlined]
 [4] similar at .\abstractarray.jl:630 [inlined]
 [5] _unsafe_getindex(::IndexLinear, ::Array{Float64,2}, ::Array{Int64,1}, ::Array{Int64,1}) at .\multidimensional.jl:755
 [6] _getindex at .\multidimensional.jl:743 [inlined]
 [7] getindex(::Array{Float64,2}, ::Array{Int64,1}, ::Array{Int64,1}) at .\abstractarray.jl:1060
 [8] GS_ms(::Array{Float64,1}, ::Array{Float64,1}, ::Array{Float64,1}, ::Float64, ::Float64, ::Float64, ::Int64, ::Int64) at .\In[8]:39
 [9] top-level scope at In[15]:4
 [10] include_string(::Function, ::Module, ::String, ::String) at .\loading.jl:1091

```

```
[10]: function pol2cart(rho,theta)
    s = length(theta)
    x = zeros(s)
    y = zeros(s)
    for i in 1:s
        x[i],y[i] = rho[i]*cos(theta[i]),rho[i]*sin(theta[i])
    end
    return x,y
end
function meshgrid(x, y)
    X = [i for i in x, j in 1:length(y)]
    Y = [j for i in 1:length(x), j in y]
    return X, Y
end
x = LinRange(-3,3,512)
y = LinRange(-3,3,512)
X,Y = meshgrid(x,y)
omega = 1
m = 1
fun(x,y) = ((x^2+y^2)/omega)^abs(m)*exp(-(x^2+y^2)/omega^2)*exp(im*m*atan(y,x))
```

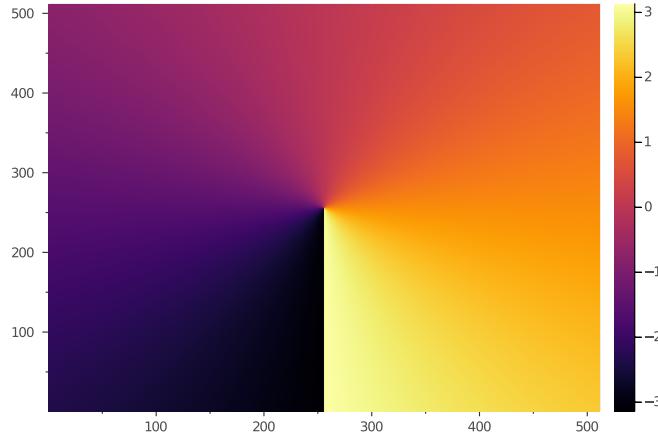
[10]: fun (generic function with 1 method)

Wir definieren hier einen Laguerre-Gauß-Strahl durch folgendes:

$$E(x,y) = \left(\frac{x^2 + y^2}{\omega} \right)^{|m|} e^{-\frac{x^2+y^2}{\omega^2}} e^{im \arctan(\frac{y}{x})}$$

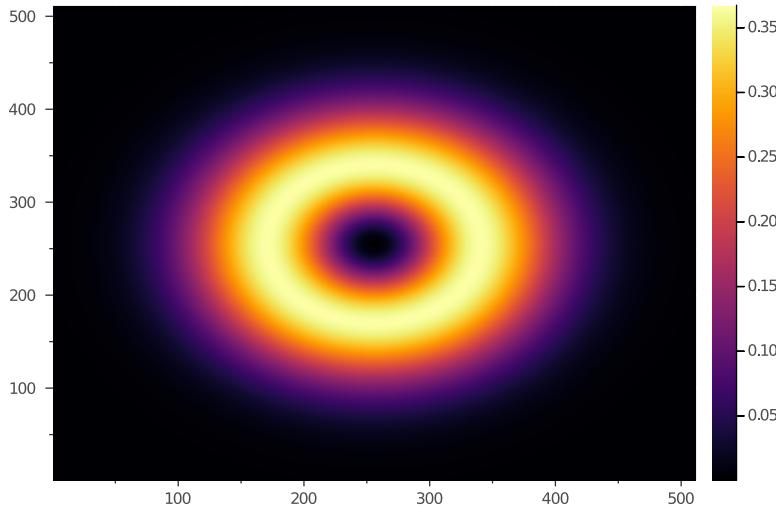
Als nächstes darstellen wir die Phasenwinkel graphisch und auch die Größe des Strahls.

```
[45]: Haz = fun.(X,Y)
heatmap(angle.(Haz))
savefig("Haz_phi.pdf")
```



Figur XVIII: Laguerre-Gauß-Strahl Phasenwinkel

```
[46]: heatmap(abs.(Haz))
savefig("Haz_abs.pdf")
```



Figur XIX: Laguerre-Gauß-Strahl Größe

Und jetzt wieder mit dem Gerchberg-Saxton Algorithmus, aber dieses Mal benutzen wir die Fourier-Transformation. Diese Version funktioniert nur für eine Ebene, statt für 3D Punkte als in der vorheriges Algorithmus, aber es funktioniert trotzdem.

```
[13]: function GS_FT(Sc,Tg,n)
    # Source = Haz
    # Target = Image
    A = ifft(Tg)
    for i in 1:n
        B = abs.(Sc).*exp.(im*angle.(A))
        C = fft(B)
```

```

D = abs.(Tg).*exp.(im*angle.(C))
A = ifft(D)
end
return angle.(A)
end

```

[13]: GS_FT (generic function with 1 method)

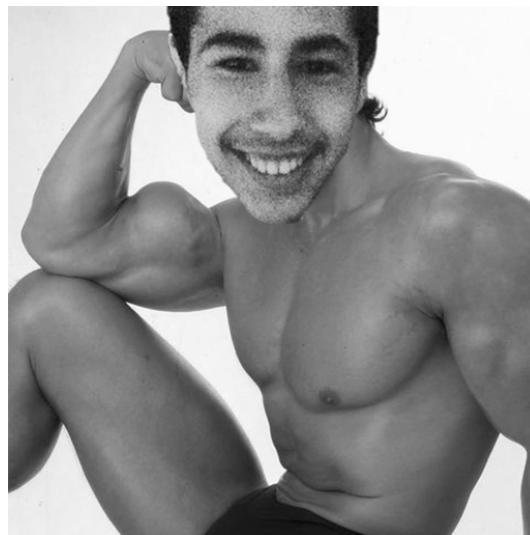
Es gibt nicht viel zu erklären, ich habe es einfach nur programmiert, als man es in Wikipedia ein Pseudoprogramm sehen kan. Es wirkte zu funktionieren, aber dafür müssen wir es testen. Ich habe ein paar Bilder in Julia geladen mithilfe der Einheit "Images", mit der man Bilder manipulieren kann. Hier habe ich es in Schwarz/Weiß geladen, sodass es einfacher ist um zu benutzen. Dannach habe ich die Datei des Bilds als einen Matrix darstellt mithilfe des Funktions "Float64" und "Gray". Nur für Spaß habe ich auch das Fourier-Transformation gerechnet und graphisch darstellt.

[47]:

```

using Images
diego = load("diego_mamado512.png")
savefig("diego-mamado.pdf")

```



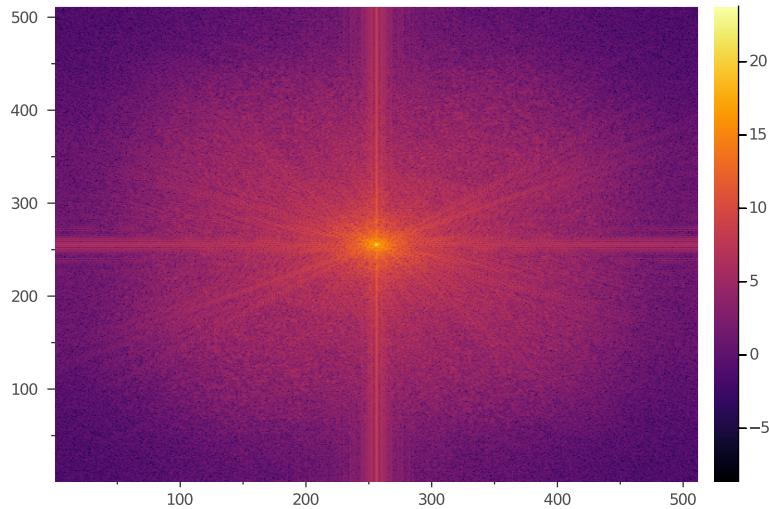
Figur XX: Beispiel Bild

[48]:

```

diego64 = Float64.(Gray.(diego))
F = fftshift(fft(diego64))
heatmap(log.(abs.(F.*F)))
savefig("diego-fft.pdf")

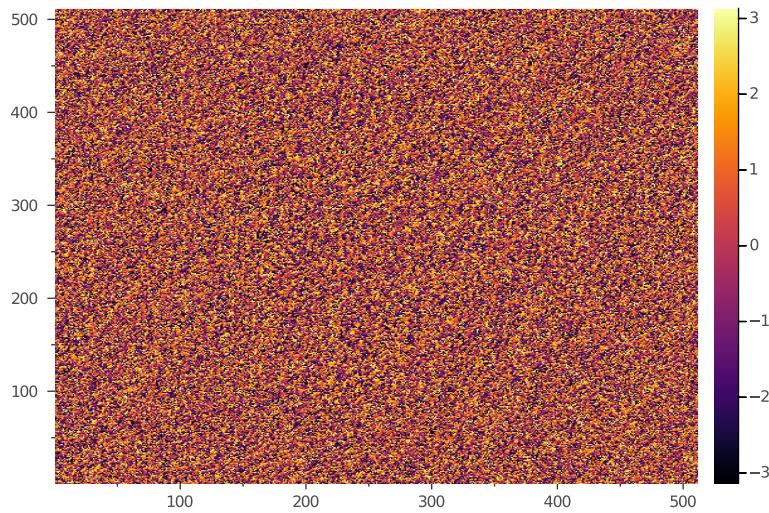
```



Figur XXI: Beispiel Bild (FFT)

Endlich testen wir unser Algorithmus:

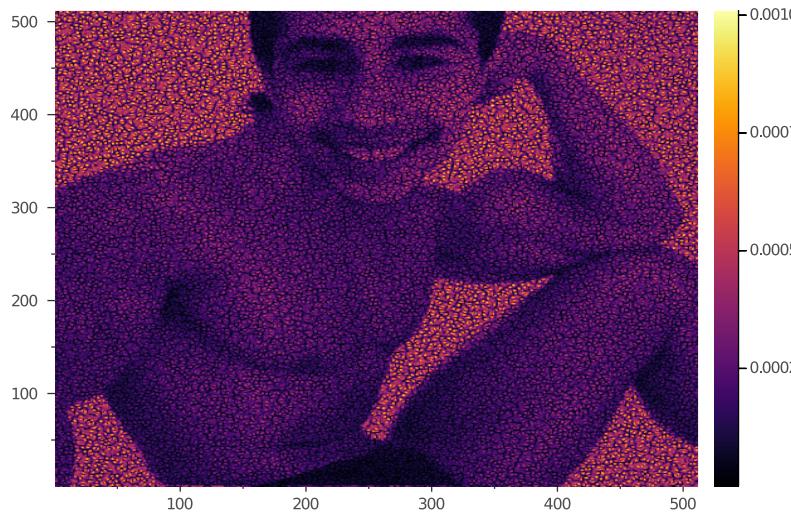
```
[49]: Sc = Haz
Tg = diego64
n = 50
phis = GS_FT(Sc,Tg,n)
heatmap(phis)
savefig("diego-phi.pdf")
```



Figur XXII: GS Algorithmus Ergebnisse (Phasenwinkeln)

Zuerst rechnen wir die Phasenwinkeln. Es sieht nicht so schön aus, weil das nicht unseres Bild ist, aber wenn man wieder der Strahl mit diesen Phasenwinkeln benutzt, und man die inverse Fourier-Transformation rechnet, bekommt man wieder das Bild!

```
[50]: img = (Haz.*exp.(im*phis))
heatmap(abs.(ifft(img)))
savefig("diego-gs.pdf")
```

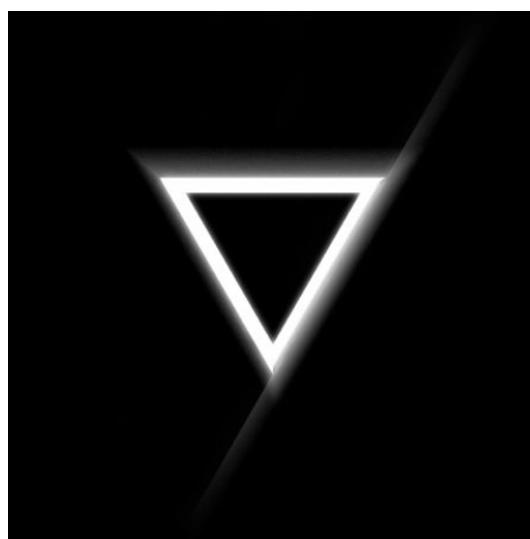


Figur XXIII: Strahl mit Ergebnissephasenwinkel aus GS Algorithmus

Etwas merkwürdig ist, dass das Bild in eine andere Richtung ist, in der horizontalen Axis. Außerdem ist es sehr gut geworden.

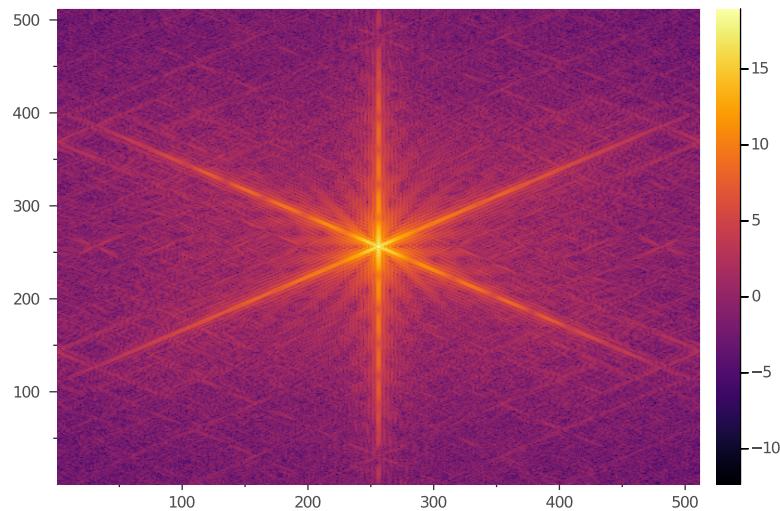
Probieren wir dann mit einem einfacheren Beispiel: ein Dreieck.

```
[53]: triangle = load("triang_ray.png")
triangle
savefig("tri.pdf")
```



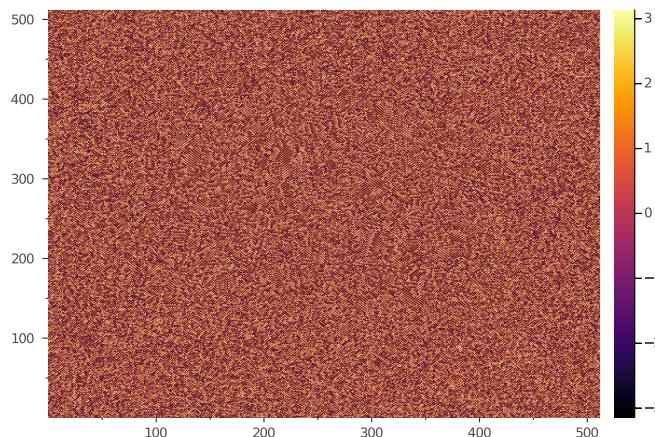
Figur XXIV: Beispiel Bild

```
[52]: tri64 = Float64.(Gray.(triangle))
F_tri = (fft(tri64))
F_tri_plot = log.(abs.(fftshift(F_tri)).^2)
heatmap(F_tri_plot)
savefig("tri-fft.pdf")
```



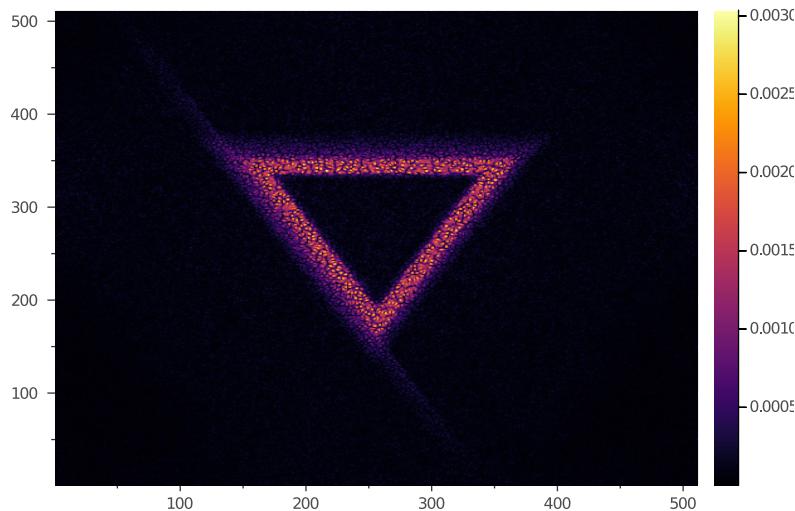
Figur XXV: Beispiel Bild (FFT)

```
[54]: Sc = Haz
Tg = tri64
n = 100
phis = GS_FT(Sc,Tg,n)
heatmap(phis)
savefig("tri-phi.pdf")
```



Figur XXVI: GS Algorithmus Ergebnisse (Phasenwinkel)

```
[55]: img = (Haz.*exp.(im*phis))
heatmap(abs.(ifft(img)))
savefig("tri-gs.pdf")
```



Figur XXVII: Strahl mit Ergebnissephasenwinkel aus GS Algorithmus

Als letztes benutzen wir ein Beispielbild, das sehr bekannt ist.

```
[56]: test = load("cameraman.tif")
test
savefig("test.pdf")
```



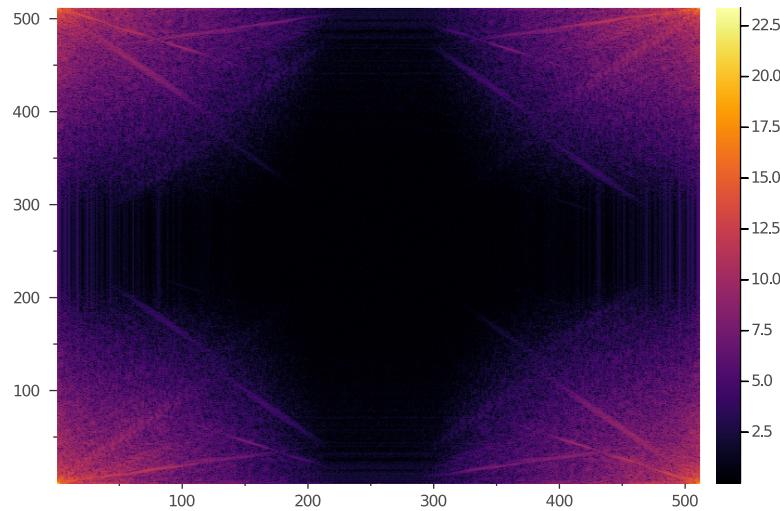
Figur XXVIII: Beispiel Bild

```
[57]: test64 = Float64.(Gray.(test))
F_test = fftshift(fft(test64))
```

```

F_test_plot = log.(abs.(fftshift(F_test)).^2 .+1)
heatmap(F_test_plot)
savefig("test-fft.pdf")

```

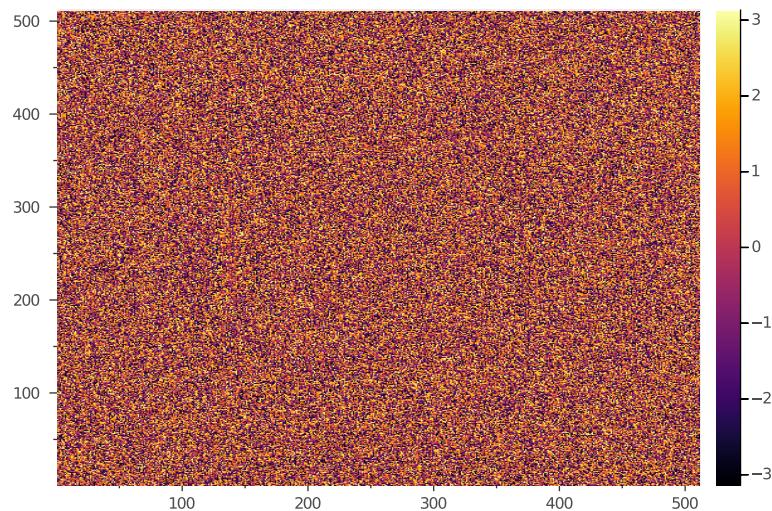


Figur XXIX: Beispiel Bild (FFT)

```

[58]: Sc = Haz
Tg = test64
n = 100
phis = GS_FT(Sc,Tg,n)
heatmap(phis)
savefig("test-phi.pdf")

```



Figur XXX: GS Algorithmus Ergebnisse (Phasenwinkeln)

```
[59]: img = (Haz.*exp.(im*phis))
heatmap(abs.(ifft(img)))
savefig("test-gs.pdf")
```



Figur XXXI: Strahl mit Ergebnissephasenwinkel aus GS Algorithmus

Alles klappt. Ein sehr interessantes Projekt auf jeden Fall.

Am Ende dieses Semesters habe ich wirklich viel gelernt und ich muss dafür mein Lehrer Benjamin zu danken. Es war eine Herausforderung, besonders weil ich den Optik Fächer schon nicht genommen habe und fast alle die Begriffe und Theorie waren für mich neu. Auch musste ich Julia lernen, um alles hier zu programmieren, und es war ziemlich schwierig, aber es hat sich gelohnt. Alle diese Arbeit, die ich während des Semesters gemacht habe, hat mir viel beigebracht und ich hoffe die nächste zwei Semestern, die ich noch weiter mit dem Projekt arbeiten werde, auch so angenehm sein werden.