МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики
Кафедра: Теории управления и динамики систем

Направление подготовки: «Фундаментальная информатика и информационные технологии»
Профиль подготовки: «Когнитивные системы»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

На тему:
«Двухкластерные режимы в системе Курамото с инерцией»

Выполнил(а): студент(ка)
группы 382006-3м
Хорькин Дмитрий Сергеевич

подпись

Научный руководитель:
доцент, к.ф.-м.н.
Смирнов Лев Александрович

подпись

Нижний Новгород
2022

АННОТАЦИЯ

В данной работе рассматриваются двух кластерные вращательные движения в системе Курамото с инерцией. В частности изучается вопрос существования и устойчивости двух кластерных вращательных режимов в зависимости от управляющий параметров. Также был реализован программный комплекс, позволяющий эффективно находить интересующие вращательные движения в произвольных системах связанных элементов. Было разработано web приложение, выполняющее прямое численное моделирование системы. Аналитические результаты подтверждены прямым численным моделированием.

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ 2
ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА 1. Модель Курамото. Двухкластерные вращательные режимы **5**
1.1. Модель Курамото с инерцией 5
1.2. Двух кластерные вращательные режимы. Существование и типы 5

ГЛАВА 2. Устойчивость двухкластерных вращательных режимов **7**
2.1. Устойчивость двух кластерных вращательных движений с постоянной расстройкой фаз 7
2.2. Устойчивость двух кластерных вращательных движений с периодической расстройкой фаз 8
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 13
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 14

ВВЕДЕНИЕ

Сети фазовых осцилляторов часто используются для моделирования совместной динамики в различных биологических и искусственных системах, начиная от нейронных сетей [1] и популяций химических осцилляторов [2] до лазерных решеток [3] и электрических сетей [4]. Система фазовых осцилляторов Курамото первого порядка [5, 6] представляет собой широко адаптированную модель сети фазовых осцилляторов, которая может демонстрировать сложную пространственно-временную динамику при переходе от некогерентности к полной синхронизации [7–14]. Когда колебания в модели Курамото имеют неоднородные частоты, этот переход обычно сопровождается частичной синхронизацией, которая возникает, когда система распадается на кластеры когерентных и некогерентных осцилляторов [7, 14, 15]. В случае идентичных осцилляторов частичная синхронизация может превратиться в химерные состояния, которые представляют собой захватывающие паттерны, в которых даже структурно идентичные осцилляторы могут распадаться на две, возможно, асимметричные группы когерентных и некогерентных осцилляторов [16-19]. Химерные состояния были тщательно изучены в модели Курамото, а также в других сетях колебательных систем [19-28], включая связанные химические генераторы [2], сети метрономов [29], связанные маятники [30], педали на мосту [31], оптические системы и лазеры [32] и непрерывные среды [33, 34].

Целью данной работы является изучение двухкластерных вращательных режимов в системе Курамото с инерцией и фазовой задержкой, для успешного достижения которой выделены следующие задачи:

1) Исследование существования и типов возникающих двухкластерных вращательных режимов в зависимости от управляющих параметров.

2) Исследование устойчивости двухкластерных вращательных режимов.

3) Реализация программного комплекса, позволяющего эффективно находить интересующие вращательные движения, а также определять их устойчивость в произвольных системах связанных элементов.

ГЛАВА 1

МОДЕЛЬ КУРАМОТО. ДВУХКЛАСТЕРНЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ

1.1. Модель Курамото с инерцией

$$m\ddot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i = \omega + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\varphi_j - \varphi_i - \alpha\right), i = \overline{1, N}, \tag{1.1}$$

где m - масса, ω - вращающий момент, α - фазовая задержка.

Предполагается, что осцилляторы являются идентичными, с идентичной частотой ω, массой m и запаздыванием по фазе $\alpha \in [0, \pi)$. В системе 1.1 имеется синфазный режим, который локально стабилен для любого $\alpha \in [0, \pi/2)$ и нестабилен для любого $\alpha \in [\pi/2, \pi)$ [7]. В результате связь определяется как притягивающая для $\alpha < \pi/2$ и отталкивающая для $\pi/2 \leq \alpha < \pi$.

1.2. Двух кластерные вращательные режимы. Существование и типы

Заметим, что двух кластерный режим описывается системой:

$$\begin{cases} m\ddot{\psi}_1 + \dot{\psi}_1 = \omega + \frac{N-K}{N}\sin\left(\psi_2 - \psi_1 - \alpha\right) - \frac{K}{N}\sin\alpha, \\ m\ddot{\psi}_2 + \dot{\psi}_2 = \omega + \frac{K}{N}\sin\left(\psi_1 - \psi_2 - \alpha\right) - \frac{N-K}{N}\sin\alpha, \end{cases} \tag{1.2}$$

где ψ_1, ψ_2 - фазы первого и второго кластера соответственно, K - количество элементов в малом кластере. Введем новую переменную $\beta = \frac{K}{N}$, характеризующую долю малого кластера относительно всех элементов. Уравнение 1.2 перепишется в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{\psi}_1 + \dot{\psi}_1 = \omega + (1-\beta)\sin\left(\psi_2 - \psi_1 - \alpha\right) - \beta\sin\alpha, \\ m\ddot{\psi}_2 + \dot{\psi}_2 = \omega + \beta\sin\left(\psi_1 - \psi_2 - \alpha\right) - (1-\beta)\sin\alpha. \end{cases} \tag{1.3}$$

Введем замену $X = \psi_1 - \psi_2$, характеризующую расстройку фаз между двумя кластерами. Вычитая из первого уравнения второе, 1.3 запишется в виде:

$$m\ddot{X} + \dot{X} = (1-2\beta)\sin\alpha - \left[(1-\beta)\sin\left(X + \alpha\right) + \beta\sin\left(X - \alpha\right)\right]. \tag{1.4}$$

Заметим, что $X = 0$ соответствует реализации синфазного вращательного режима. Если $X \neq 0$, это соответствует реализации двух кластерного режима.

Еще раз произведем замену переменных в уравнении 1.4:

$$R^2 = (N-2K)^2 \sin\alpha^2 + N^2 \cos\alpha^2,$$
$$\rho = \sqrt{\frac{N}{mR}},\ t = \hat{t}\frac{N}{\rho R}, \gamma = \frac{N-2K}{R}\sin\alpha,$$
$$\Phi = X + \delta,\ \delta = \arccos\left(\frac{N}{R}\cos\alpha\right).$$

Мы получаем:

$$\frac{d^2\Phi}{d\hat{t}^2} + \rho\frac{d\Phi}{d\hat{t}} + \sin\Phi = \gamma \tag{1.5}$$

Полученное уравнение 1.5 хорошо изучено. В зависимости от параметров ρ, γ, в системе 1.5 могут существовать два состояния равновесия: устойчивая точка $\Phi_e = \arcsin\gamma$ и седло $\Phi_s = \pi - \arcsin\gamma$, а также некоторое устойчивое периодическое вращательное движение. Данные соотношения определяются так называемой бифуркационной кривой Трикомми.

Таким образом в исходной системе могут существовать 2 типа двух кластерных вращательных режимов, первый характеризуются постоянной расстройкой фаз (стационарный), второй характеризуется периодической расстройкой фаз (нестационарный).

Область существования вращательного движения в уравнении 1.5 определяется соотношением:

$$\gamma \geq T(\rho), \tag{1.6}$$

где $T(\rho) = \rho\frac{4}{\pi} - 0.305\rho^3$ - уравнение, аппроксимирующее кривую Трикомми. Подставляя, получаем уравнения для границы области существования нестационарного вращательного движения в области параметров α, m:

$$m = \frac{1}{\sqrt{(1-2\beta)^2\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2} \cdot T^{-1}\left(\frac{(1-2\beta)\sin\alpha}{\sqrt{(1-2\beta)^2\sin\alpha^2+\cos\alpha^2}}\right)} \tag{1.7}$$

Заметим, что двухкластерный вращательный режим, соответствующий $\beta = 0.5$ не существует.

ГЛАВА 2

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХКЛАСТЕРНЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ

2.1. Устойчивость двух кластерных вращательных движений с постоянной расстройкой фаз

Запишем 1.4 в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \frac{1}{m}\left[(1-2\beta)\sin\alpha(1-\cos x) - \sin x\cos\alpha - y\right] \end{cases} \tag{2.1}$$

Выполним линеаризацию системы 2.1:

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m}\left[(1-2\beta)\sin\alpha\sin x_p - \cos\alpha\cos x_p\right] & -\frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Где x_p - стационарные состояния уравнения 1.4. Запишем характеристический многочлен системы 2.2:

$$\lambda^2 + \frac{1}{m}\lambda - \frac{1}{m}\left[(1-2\beta)\sin\alpha\sin x_p - \cos\alpha\cos x_p\right] = 0 \tag{2.3}$$

Из 2.3 можно заметить, что устойчивость стационарного состояния x_p определяется соотношением:

$$\cos\alpha\cos x_p - (1-2\beta)\sin\alpha\sin x_p > 0 \tag{2.4}$$

Несложно заметить, что стационарные состояния в уравнении 1.4 определяются:

$$\sin(x_p + \varphi) = \frac{(1-2\beta)\sin\alpha}{\sqrt{\cos\alpha^2 + (1-2\beta)^2\sin\alpha^2}},$$

Откуда:

$$x_{p_1} = \begin{cases} 0, \alpha \in [-\pi/2, \pi/2) \\ 2\arcsin\frac{(1-2\beta)\sin\alpha}{\sqrt{\cos\alpha^2 + (1-2\beta)^2\sin\alpha^2}} - \pi, \alpha \in [\pi/2, 3\pi/2) \end{cases} \tag{2.5}$$

$$x_{p_2} = \begin{cases} \pi - 2\arcsin\frac{(1-2\beta)\sin\alpha}{\sqrt{\cos\alpha^2 + (1-2\beta)^2\sin\alpha^2}}, \alpha \in [-\pi/2, \pi/2) \\ 0, \alpha \in [\pi/2, 3\pi/2) \end{cases} \tag{2.6}$$

Подставляя 2.5, 2.6 в 2.4 получаем, что x_{p_1} - устойчива, x_{p_2} - неустойчива.

Заметим, что при β стремящейся к 0.5 стационарные состояния с расстройкой фаз неравной нулю стремятся к π и $-\pi$. Стоит отметить, что в полной системе 1.1 стационарное двух кластерное состояние x_{p_1} может терять свою устойчивость. Данный эффект будет показан ниже.

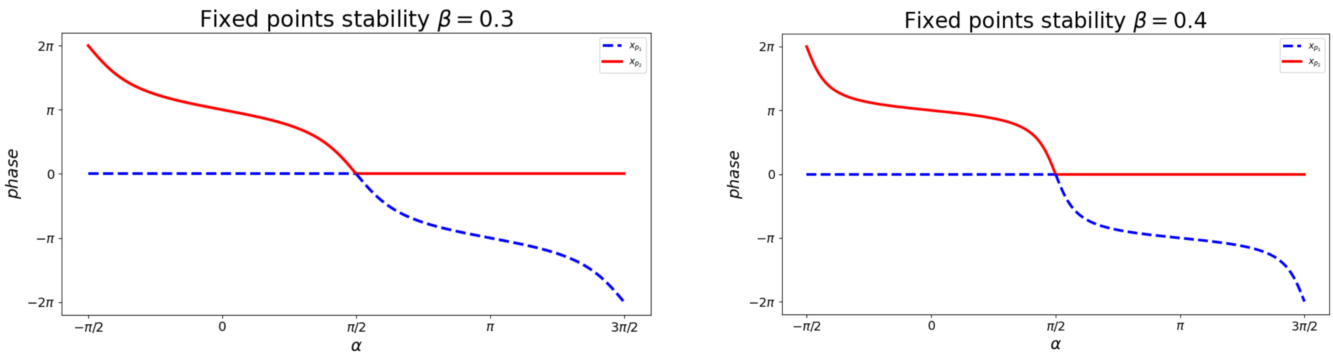

Рисунок 2.1. **Устойчивость стационарных состояний.** Синяя пунктирная линия - устойчивое состояние x_{p_1}, Красная сплошная линия - неустойчивое состояние x_{p_2}. $\beta = 0.3$, $\beta = 0.4$

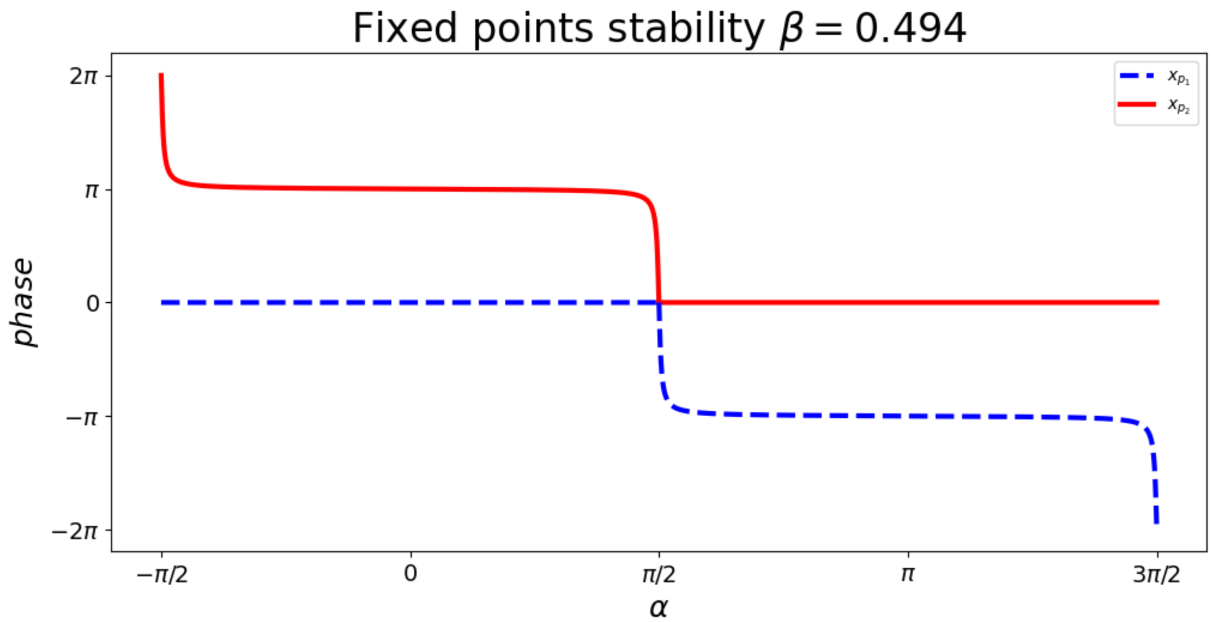

Рисунок 2.2. **Устойчивость стационарных состояний.** Синяя пунктирная линия - устойчивое состояние x_{p_1}, Красная сплошная линия - неустойчивое состояние x_{p_2}. $\beta = 0.494$

2.2. Устойчивость двух кластерных вращательных движений с периодической расстройкой фаз

Выполним линеаризацию относительно произвольного вращательного движения ψ_i с помощью замены $\varphi_i = \psi_i + \delta_i$:

$$m\ddot{\delta}_i + \dot{\delta}_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \cos\left(\psi_j - \psi_i - \alpha\right) \cdot \left(\delta_j - \delta_i\right) \tag{2.7}$$

Для случая двух кластерного режима 1.2 это запишется в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{\delta}_i + \dot{\delta}_i = \frac{1}{N}\left(\cos\alpha \sum_{j=1}^{K}(\delta_j - \delta_i) + \cos\left(X + \alpha\right)\sum_{j=K+1}^{N}(\delta_j - \delta_i)\right), \ i = \overline{1, K}, \\ m\ddot{\delta}_i + \dot{\delta}_i = \frac{1}{N}\left(\cos\left(X - \alpha\right)\sum_{j=1}^{K}(\delta_j - \delta_i) + \cos\alpha \sum_{j=K+1}^{N}(\delta_j - \delta_i)\right), \ i = \overline{K+1, N}, \end{cases} \tag{2.8}$$

Выполняя замену:

$$\eta_1 = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\delta_i - \frac{1}{N-K}\sum_{i=K+1}^{N}\delta_i,$$
$$\eta_2 = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\delta_i + \frac{1}{N-K}\sum_{i=K+1}^{N}\delta_i,$$
$$\xi_n = \delta_{n+1} - \delta_n,\ 1 \le n \le K-1,$$
$$\zeta_n = \delta_{n+1} - \delta_n,\ K+1 \le n \le N-1.$$

Мы получаем:

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}_1 + \dot{\eta}_1 + (\beta\cos(X-\alpha) + (1-\beta)\cos(X+\alpha))\,\eta_1 = 0, \\ m\ddot{\eta}_2 + \dot{\eta}_2 + ((1-\beta)\cos(X+\alpha) - \beta\cos(X-\alpha))\,\eta_1 = 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_n + \dot{\xi}_n + ((1-\beta)\cos(X+\alpha) + \beta\cos\alpha)\,\xi_n = 0, \\ m\ddot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n + ((1-\beta)\cos\alpha + \beta\cos(X-\alpha))\,\zeta_n = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Так как X периодична, мы можем применить теорию Флоке и найти мультипликаторы, определяющие асимптотическое поведение решений системы.

Проанализируем систему 2.9 (переменные η_1, η_2). Из 1.4 следует, что одним из решений первого уравнения является $\dot{X}$. Так как X периодична, то один из мультипликаторов равен 1. Согласно формуле Лиувилля-Остроградского, второй мультипликатор первого уравнения равен $\exp(-\frac{T_x}{m})$. Кроме того, полная система имеет решение $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = const$, откуда следует, что еще один мультипликатор равен единице. Вновь применяя формулу Лиувилля-Остроградского, но уже ко всей системе, находим четвертый мультипликатор, равный $\exp(-\frac{T_x}{m})$. Итак, режим всегда внутренне устойчив.

Проанализируем систему 2.10 (переменные ξ, ζ). Переменная ξ соответствует малому кластеру, переменная ζ соответствует большому кластеру. Они не связанны между собой. Благодаря такому разделению переменных, мы можем проследить как меняется устойчивость двух кластерного режима с периодической расстройкой фаз для каждого кластера. В зависимости от X устойчивость может пропасть или появится только у одного или сразу у двух кластеров, благодаря чему мы можем понять каким образом двух кластерный режим будет разрушаться в случае потери устойчивости.

С помощью уравнений 2.10 определим устойчивость стационарного двух кластерного вращательного режима, соответствующего состоянию x_{p_1}. Уравнения запишутся в виде:

$$x_{p_1} = 0,\ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2] : \begin{cases} m\ddot{\xi}_n + \dot{\xi}_n + \cos\alpha\xi_n = 0, \\ m\ddot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n + \cos\alpha\zeta_n = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

$$x_{p_1} = 2\arcsin\frac{(1-2\beta)\sin\alpha}{\sqrt{\cos\alpha^2 + (1-2\beta)^2\sin\alpha^2}} - \pi, \alpha \in [\pi/2, 3\pi/2) :$$
$$: \begin{cases} m\ddot{\xi}_n + \dot{\xi}_n + A(\alpha,\beta)\xi_n = 0, \\ m\ddot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n - A(\alpha,\beta)\zeta_n = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Где A - некоторый коэффициент. Заметим, что при $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2)$, x_{p_1} - устойчива в исходной системе, при $\alpha \in [\pi/2, 3\pi/2)$, x_{p_1} - неустойчива в исходной системе.

Получается, что в исходной системе двухкластерный вращательный режим с постоянной расстройкой фаз всегда является неустойчивым. Таким образом дальнейший анализ устойчивости мы будем проводить только для двухкластерных вращательных движений с периодической расстройкой фаз.

В результате численного моделирования были получены карты устойчивости двух кластерных вращательных режимов с периодической расстройкой фаз в области параметров α, m.

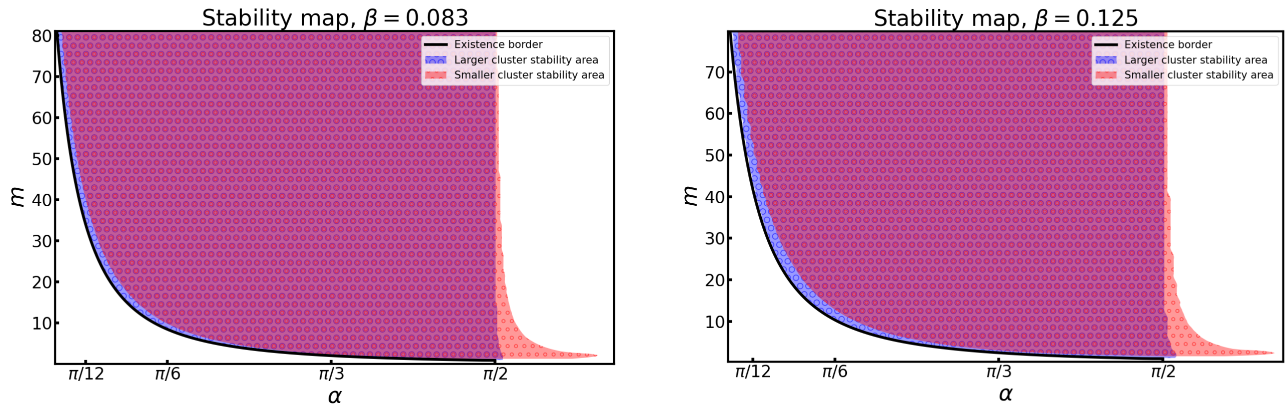

Рисунок 2.3. **Карта устойчивости двух кластерных вращательных состояний с периодической расстройкой фаз.** Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двух кластерный вращательный режим с периодической расстройкой фаз является устойчивым

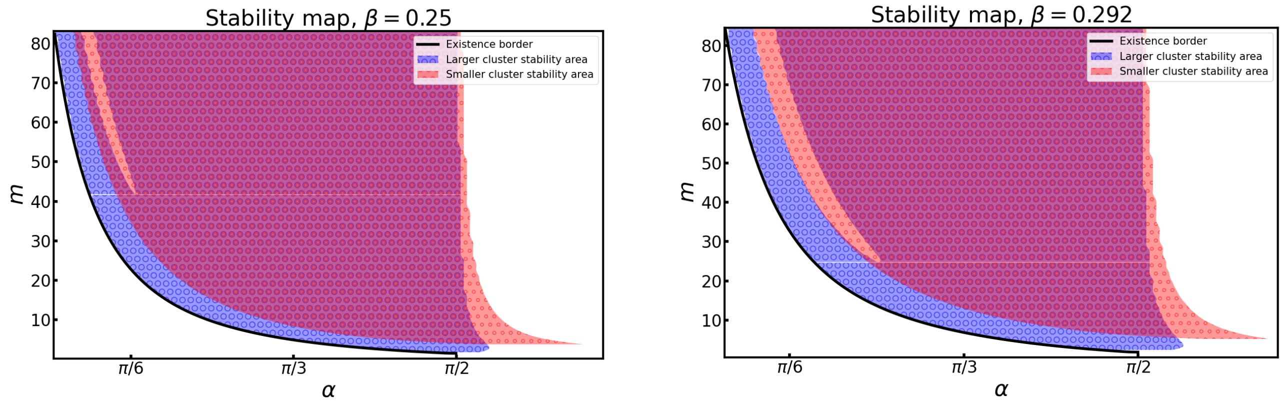

Рисунок 2.4. **Карта устойчивости двух кластерных вращательных состояний с периодической расстройкой фаз.** Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двух кластерный вращательный режим с периодической расстройкой фаз является устойчивым

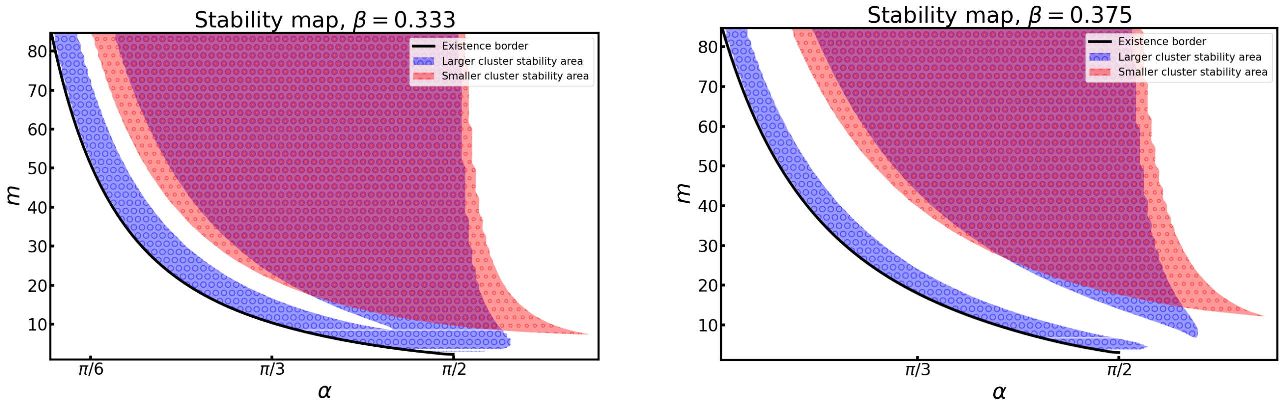

Рисунок 2.5. **Карта устойчивости двух кластерных вращательных состояний с периодической расстройкой фаз.** Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двух кластерный вращательный режим с периодической расстройкой фаз является устойчивым

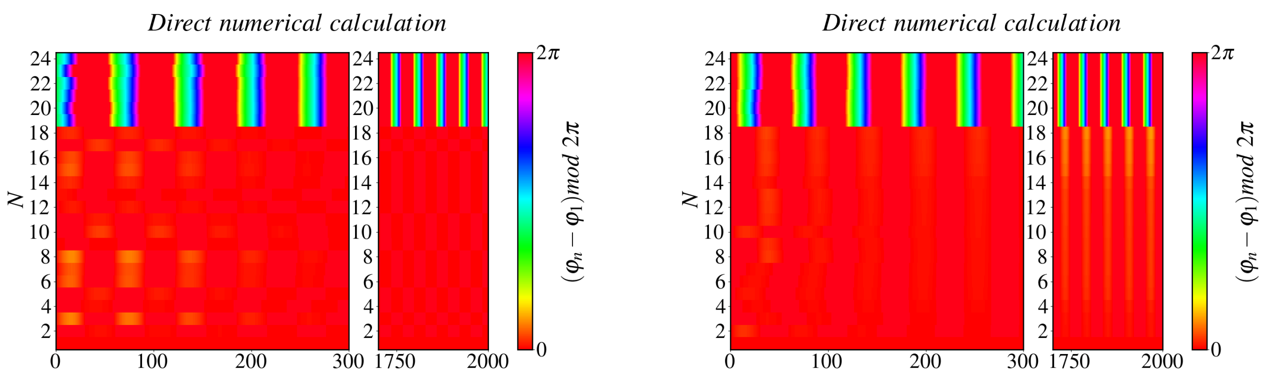

Рисунок 2.6. **Карта устойчивости двух кластерных вращательных состояний с периодической расстройкой фаз.** Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двух кластерный вращательный режим с периодической расстройкой фаз является устойчивым

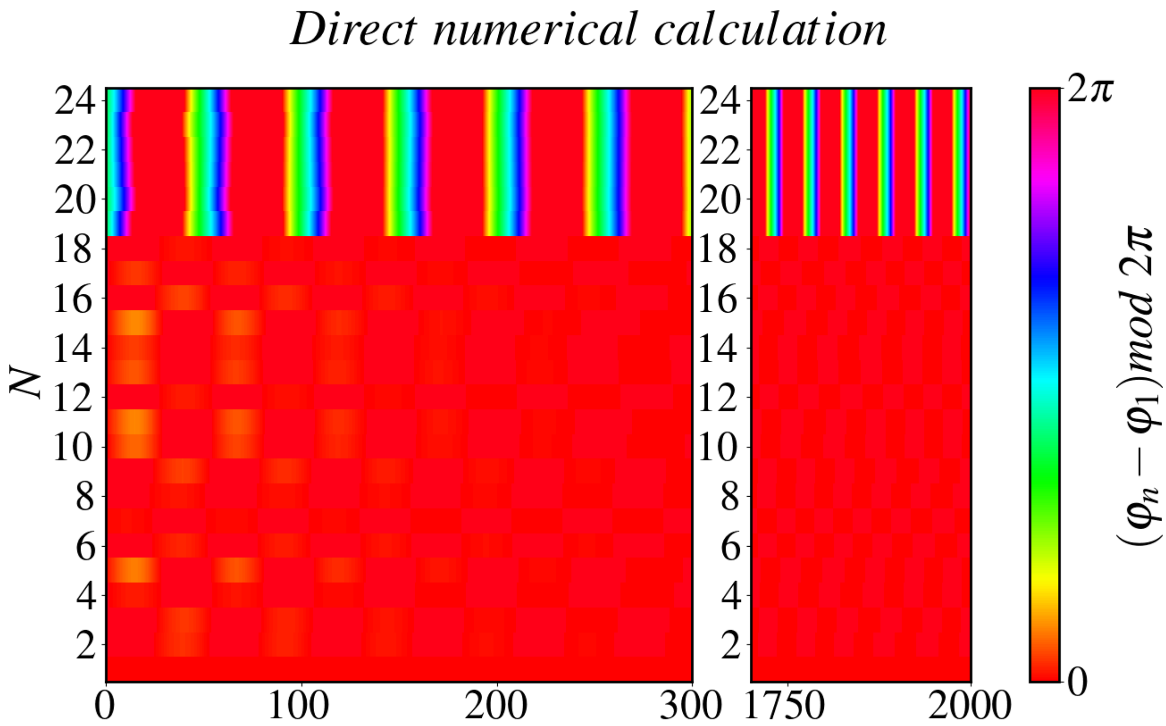

Рисунок 2.7. **Пространственно временная диаграмма.** Пространственно временные диаграммы изображены для каждого элемента, относительно первого элемента. Цвет характеризует фазу элемента. Параметры: $N = 24$, $m = 50$, $\omega = 1$, $\alpha = 0.54$ (см. рис. 2.4)

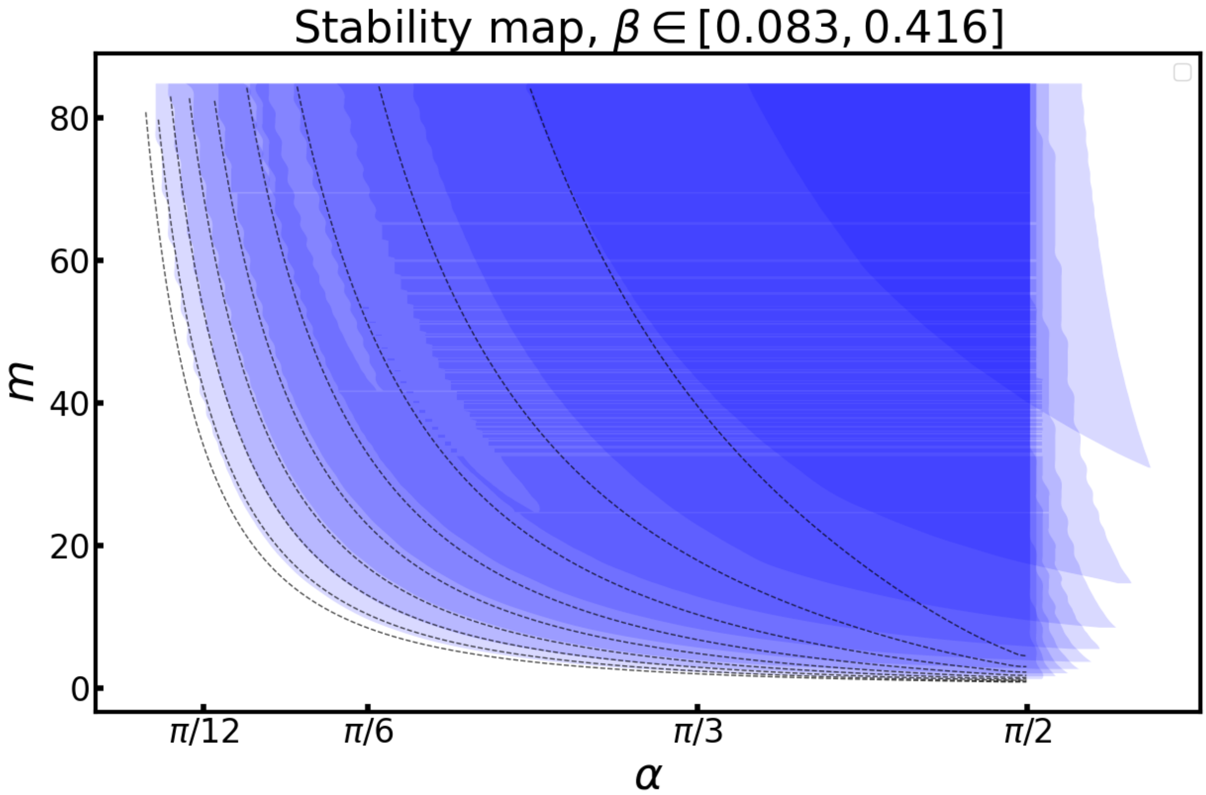

Рисунок 2.8. **Карта устойчивости двух кластерных вращательных состояний с периодической расстройкой фаз в зависимости от параметра** β**.** Внутри синей зоны двух кластерный режим является устойчивым. $\beta = 0.494$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены двух кластерные вращательные движения в системе Курамото с инерцией. Были определены типы возникающих двух кластерных режимов. Исследовали вопрос существования и устойчивости двух кластерных вращательных режимов в зависимости от управляющий параметров. Аналитические результаты подтверждены прямым численным моделированием. Также разработано web приложение, выполняющее прямое численное моделирование системы, доступное по ссылке

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich, Weakly connected neural networks, vol. 126 (Springer Science Business Media, 2012).
2. M. R. Tinsley, S. Nkomo, and K. Showalter, Nature Physics 8, 662 (2012).
3. J. Ding, I. Belykh, A. Marandi, and M.-A. Miri, Physical Review Applied 12, 054039 (2019).
4. F. Dörfler, M. Chertkov, and F. Bullo, Proceedings of the National Academy of Sciences 110, 2005 (2013).
5. Y. Kuramoto, in International Symposium on Mathemat- ical Problems in Theoretical Physics (Springer, 1975), pp. 420–422.
6. S. H. Strogatz, Physica D: Nonlinear Phenomena 143, 1 (2000).
7. J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ri- tort, and R. Spigler, Reviews of Modern Physics 77, 137 (2005).
8. E. Barreto, B. Hunt, E. Ott, and P. So, Physical Review E 77, 036107 (2008).
9. E. Ott and T. M. Antonsen, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 18, 037113 (2008).
10. H. Hong, H. Chaté, H. Park, and L.-H. Tang, Physical Review Letters 99, 184101 (2007).
11. A. Pikovsky and M. Rosenblum, Physical Review Letters 101, 264103 (2008).
12. Y. Maistrenko, O. Popovych, O. Burylko, and P. Tass, Physical Review Letters 93, 084102 (2004).
13. F. Dörfler and F. Bullo, SIAM Journal on Applied Dy- namical Systems 10, 1070 (2011).
14. E. A. Martens, E. Barreto, S. Strogatz, E. Ott, P. So, and T. Antonsen, Physical Review E 79, 026204 (2009).