



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»  
(ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики  
Кафедра: Теории управления и динамики систем

Направление подготовки: «Фундаментальная информатика и информационные  
технологии»  
Профиль подготовки: «Когнитивные системы»

## МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

На тему:  
«Кластерные вращательные режимы в системе глобально  
связанных фазовых осцилляторов с инерцией»

**Выполнил:** студент группы  
382006-3м  
Хорькин Дмитрий Сергеевич

---

подпись

**Научный руководитель:**  
зав. лаб., к.ф.-м.н.  
Смирнов Лев Александрович

---

подпись

Нижний Новгород  
2022

## АННОТАЦИЯ

В данной работе рассматриваются двухкластерные вращательные режимы в системе глобально связанных фазовых осцилляторов Курамото с инерцией. В частности, изучается вопрос существования и устойчивости двухкластерных вращательных режимов в зависимости от управляющих параметров. В ходе работы был реализован программный комплекс, позволяющий эффективно находить интересующие вращательные режимы в произвольных системах связанных фазовых элементов. В ходе исследования производилось численное моделирование с использованием вычислений на кластерных системах. Аналитические результаты подтверждаются прямым численным моделированием.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>АННОТАЦИЯ</b> .....	2
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	4
<b>ГЛАВА 1. Описание модели. Кластерные режимы</b> .....	<b>6</b>
1.1. Модель Курамото с инерцией .....	6
1.2. Двухкластерные вращательные режимы .....	6
<b>ГЛАВА 2. Устойчивость двухкластерных вращательных режимов</b> .....	<b>10</b>
2.1. Устойчивость двухкластерных вращательных движений с постоянной расстройкой фаз .....	10
2.2. Устойчивость двухкластерных вращательных движений с вращающей- ся расстройкой фаз .....	12
<b>ГЛАВА 3. Программный комплекс</b> .....	<b>23</b>
3.1. Описание алгоритмов нахождения вращательных движений и опреде- ления их устойчивости .....	23
3.2. Описание структуры программного комплекса .....	23
3.3. Модуль численного интегрирования .....	23
3.4. Модуль нахождения нулей многомерной функции .....	24
3.5. Модуль нахождения вращательных движений .....	25
3.6. Модуль определения устойчивости вращательных движений. ....	25
3.7. Ссылки на ресурсы .....	26
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	27
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	28

## ВВЕДЕНИЕ

Сети фазовых осцилляторов часто используются для моделирования коллективной динамики в различных биологических и искусственных системах, начиная от нейронных сетей [1] и популяций химических осцилляторов [2] до лазерных решеток [3] и электрических сетей [4]. Система фазовых осцилляторов Курамото первого порядка [5, 6] представляет собой широко адаптированную модель сети фазовых осцилляторов, которая может демонстрировать сложную пространственно–временную динамику при переходе от некогерентности к полной синхронизации [7–14]. Когда колебания в модели Курамото имеют неоднородные частоты, этот переход обычно сопровождается частичной синхронизацией, которая возникает, когда система распадается на кластеры когерентных и некогерентных осцилляторов [7, 14, 15].

Модель Курамото второго порядка с инерцией обычно используется для описания сетей осцилляторов, способных регулировать свои собственные частоты, как, например, в адаптивной частотной модели синхронизации светлячков [16] и системах электросетей [17]. Включение инерции приводит к двумерной собственной динамике осцилляторов, тем самым делая коллективную динамику модели Курамото второго порядка существенно более сложной по сравнению с динамикой классической модели первого порядка. Данная динамика, связанная с учетом инерции, включает сложные переходы от некогерентности к полной синхронизации [18–24], бистабильность синхронных кластеров [25], хаотическую межкластерную динамику [26], химеры [27–29] и уединенные состояния [30, 31].

В работе [25] аналитически было изучено возникновение и сосуществование устойчивых кластеров в двухпопуляционной сети идентичных осцилляторов Курамото второго порядка. Две популяции разных размеров  $K$  и  $M$  естественным образом разделяются на два кластера, внутри которых осцилляторы синхронизируются, создавая фазовый сдвиг между кластерами. Анализ, выполненный в [25], позволил получить необходимые и достаточные условия устойчивости двухкластерной синхронизации, характеризующейся постоянной разностью фаз между элементами кластеров, а также предоставил условие устойчивости для двухкластерной синхронизации с вращающейся разностью фаз.

В работе [39] были изучены так называемые уединенные состояния, они характеризуются тем, что элементы разделяются на два кластера, в одном из которых находится 1 элемент. Также в данной работе были выявлены зоны существования и устойчивости уединенных состояний. Целью данной работы является обобщение результатов работы [39], заключающееся в изучении произвольных двухкластерных вращательных режимов в системе Курамото с инерцией и запаздывающей по фазе связью Курамото–Сакагучи [33], для успешного достижения которой были поставлены следующие задачи:

- 1) определить области существования и типы возникающих двухкластерных вращательных режимов в зависимости от управляющих параметров.
- 2) Определить устойчивость и механизм разрушения устойчивости двухкластерных вращательных режимов в зависимости от управляющих параметров.
- 3) Реализовать программный комплекс, позволяющий эффективно находить интересую-

щие вращательные движения, а также определять их устойчивость в произвольных системах фазовых элементов.

## ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ. КЛАСТЕРНЫЕ РЕЖИМЫ

### 1.1. Модель Курамото с инерцией

В данной работе исследуется модель глобально связанных осцилляторов Курамото второго порядка, описываемая системой уравнений:

$$m\ddot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i = \omega + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_i - \alpha), i = \overline{1, N}, \quad (1.1)$$

где  $m$  – параметр инерции,  $\omega$  – постоянный вращающий момент,  $\alpha$  – фазовая задержка,  $N$  – общее число элементов. Предполагается, что осцилляторы являются идентичными, с частотой  $\omega$ , массой  $m$  и запаздыванием по фазе  $\alpha \in [0, \pi)$  [33]. В системе (1.1) имеется синфазный режим, который локально устойчив для любого  $\alpha \in [0, \pi/2)$  и неустойчив для любого  $\alpha \in [\pi/2, \pi)$  [7]. Поэтому принято считать связь притягивающей при  $\alpha < \pi/2$  и отталкивающей при  $\pi/2 \leq \alpha < \pi$ .

### 1.2. Двухкластерные вращательные режимы

Двухкластерный режим в модели (1.1) описывается системой:

$$\begin{cases} m\ddot{\psi}_1 + \dot{\psi}_1 = \omega + \frac{N-K}{N} \sin(\psi_2 - \psi_1 - \alpha) - \frac{K}{N} \sin \alpha, \\ m\ddot{\psi}_2 + \dot{\psi}_2 = \omega + \frac{K}{N} \sin(\psi_1 - \psi_2 - \alpha) - \frac{N-K}{N} \sin \alpha, \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $\psi_1, \psi_2$  – фазы элементов первого и второго кластера, соответственно,  $K$  – количество элементов в малом кластере. Введем новую переменную  $\beta = \frac{K}{N}$ , характеризующую долю элементов малого кластера относительно размера  $N$  всего ансамбля. Уравнение (1.2) переписывается в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{\psi}_1 + \dot{\psi}_1 = \omega + (1 - \beta) \sin(\psi_2 - \psi_1 - \alpha) - \beta \sin \alpha, \\ m\ddot{\psi}_2 + \dot{\psi}_2 = \omega + \beta \sin(\psi_1 - \psi_2 - \alpha) - (1 - \beta) \sin \alpha. \end{cases} \quad (1.3)$$

Введем величину  $X = \psi_1 - \psi_2$ , характеризующую расстройку фаз между элементами двух кластеров. Вычитая в (1.3) из первого уравнения второе, приходим к уравнению для отстройки  $X$ :

$$m\ddot{X} + \dot{X} = (1 - 2\beta) \sin \alpha - [(1 - \beta) \sin(X + \alpha) + \beta \sin(X - \alpha)]. \quad (1.4)$$

Заметим, что решение  $X = 0$  соответствует реализации синфазного вращательного режима. Ненулевое решение  $X \neq 0$  соответствует реализации двухкластерного режима.

Для дальнейшего анализа уравнения (1.4) произведем ряд замен, а именно:

$$\begin{aligned} R^2 &= (N - 2K)^2 \sin^2 \alpha + N^2 \cos^2 \alpha, \\ \rho &= \sqrt{\frac{N}{mR}}, \quad t = \hat{t} \frac{N}{\rho R}, \quad \gamma = \frac{N - 2K}{R} \sin \alpha, \\ \Phi &= X + \delta, \quad \delta = \arccos\left(\frac{N}{R} \cos \alpha\right), \end{aligned}$$

что приводит к:

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \rho \frac{d\Phi}{dt} + \sin \Phi = \gamma. \quad (1.5)$$

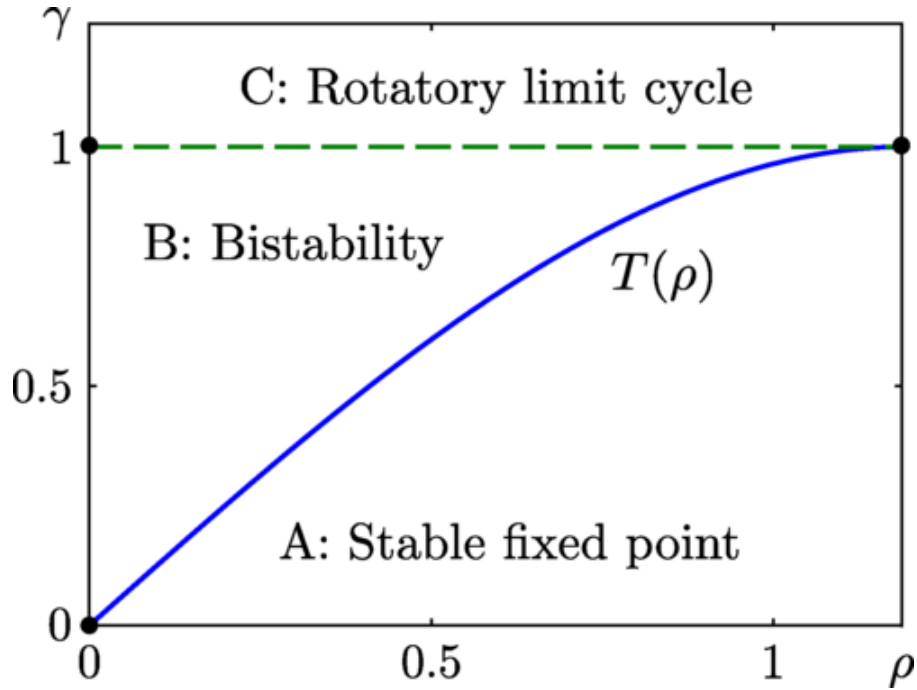


Рисунок 1.1. Бифуркационная диаграмма маятникового уравнения (1.5)

Полученное уравнение (1.5) хорошо изучено в работе [32]. В зависимости от параметров  $\rho$  и  $\gamma$ , в системе (1.5) могут существовать два состояния равновесия: устойчивая точка  $\Phi_e = \arcsin \gamma$  и седло  $\Phi_s = \pi - \arcsin \gamma$ , а также некоторое устойчивое периодическое вращательное движение. Кривая  $\gamma = T(\rho)$  называется кривой Трикоми и определяет границу области существования вращательного движения (области В и С). Таким образом, в исходной системе могут существовать 2 типа двухкластерных вращательных режимов, первый характеризуется постоянной расстройкой фаз, второй характеризуется периодической на цилиндре расстройкой фаз. Область существования вращательного движения в уравнении (1.5) определяется соотношением:

$$\gamma \geq T(\rho), \quad (1.6)$$

где  $T(\cdot)$  – уравнение кривой Трикоми. В качестве аппроксимации для кривой Трикоми можно использовать выражение  $T(\rho) = \rho^{\frac{4}{\pi}} - 0.305\rho^3$ , полученное в [25]. Подставляя данную аппроксимацию кривой Трикоми в уравнение (1.6) получаем уравнения для границы области существования двухкластерного вращательного движения с периодической расстройкой фаз в области параметров  $\alpha$ ,  $m$ :

$$m = \frac{1}{\sqrt{(1-2\beta)^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \cdot T^{-1}\left(\frac{(1-2\beta) \sin \alpha}{\sqrt{(1-2\beta)^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}\right)}. \quad (1.7)$$

Заметим, что двухкластерный вращательный режим при  $\beta = 0.5$  не существует.

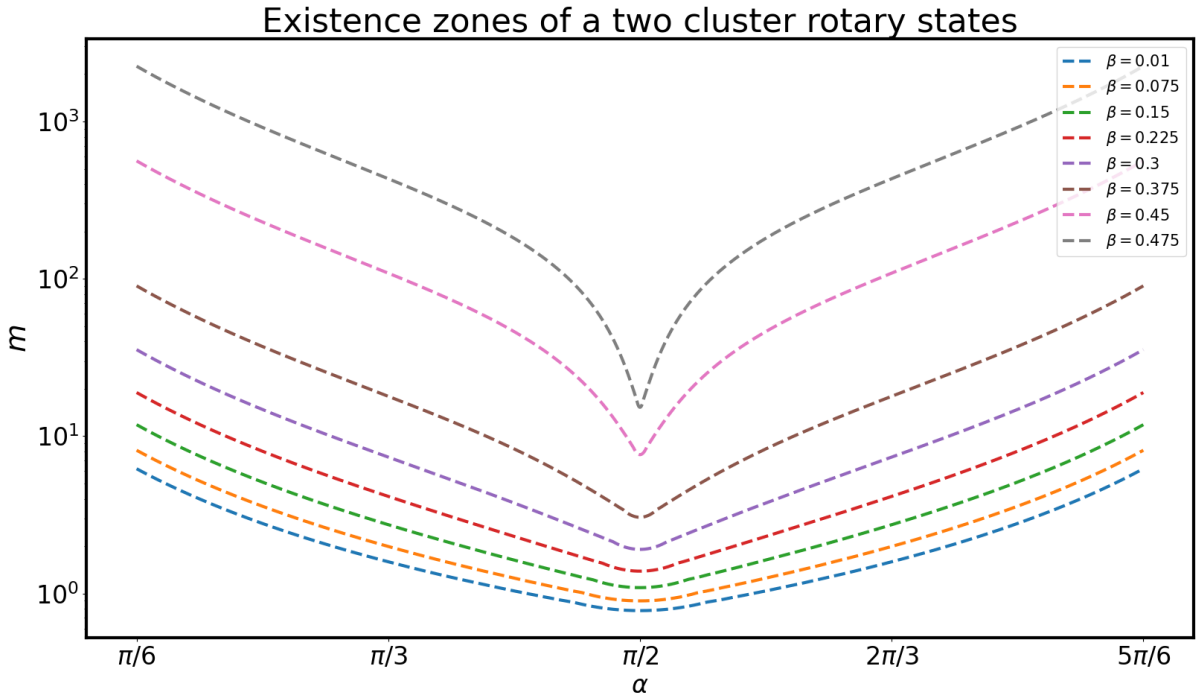


Рисунок 1.2. Границы зон устойчивости двухкластерного вращательного режима с вращающейся расстройкой фаз в зависимости от параметра  $\beta$

На рисунке 1.2 изображены границы зон устойчивости двухкластерного вращательного режима с вращающейся расстройкой фаз в зависимости от параметра  $\beta$ . Можно заметить, что при фиксированном  $N$  зона существования двухкластерного режима при размере малого кластера равного  $K_1$  полностью включена в зону существования двухкластерного режима при размере малого кластера равного  $K_2$  при  $K_1 > K_2$ . Наблюдается мультистабильность вращательных режимов.

На рисунке 1.3 изображены двухкластерные вращательные режимы в зависимости от параметра  $N$ . Каждая ячейка представляет собой определенный двухкластерный режим, характеризующийся параметром  $\beta$ , который записан в виде дроби в центре ячейки. Ячейки с одинаковым цветом, кроме серого, представляют собой один и тот же двухкластерный вращательный режим. Несложно заметить, что при фиксированном  $N = N^*$  двухкластерный вращательный режим, соответствующий  $\beta^* = A/B$ , где  $A/B$  – некоторая дробь, будет повторяться для всех  $N = N^* + k \cdot B$ .



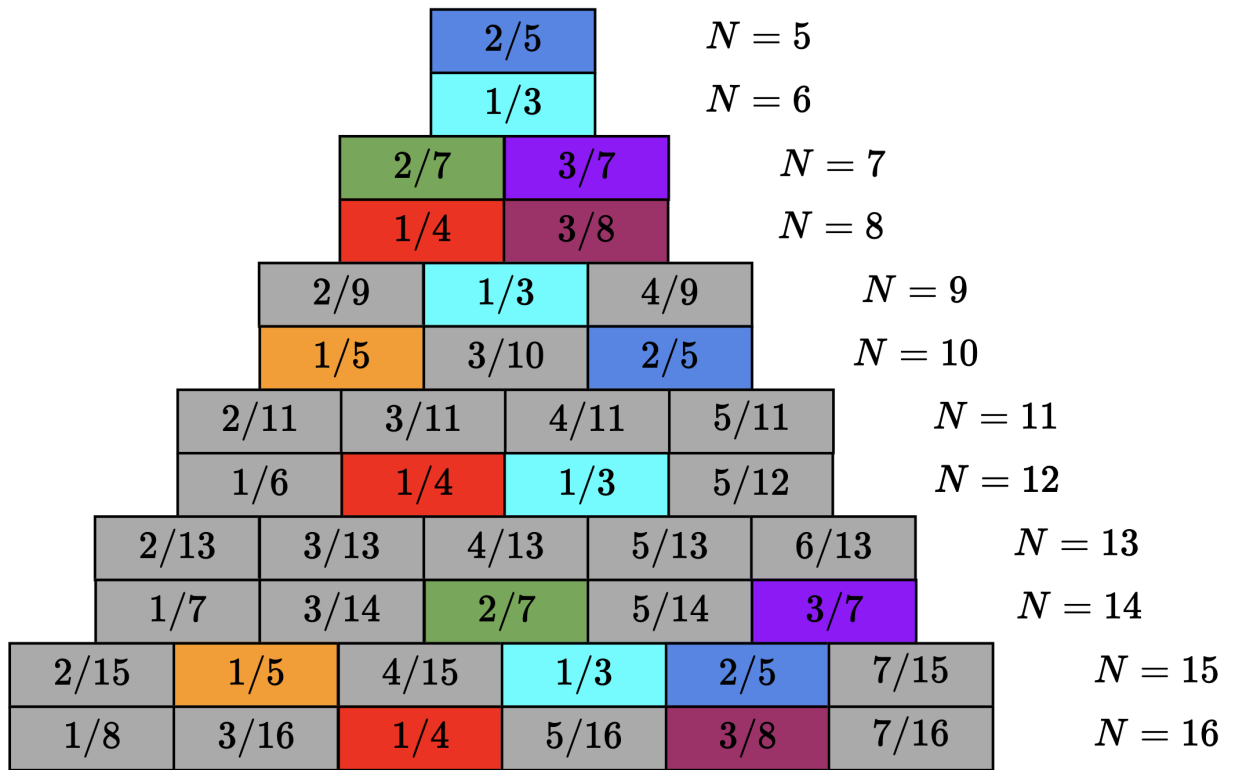


Рисунок 1.3. Двухкластерные вращательные режимы в зависимости от параметра  $N$ . Каждая ячейка представляет собой определенный двухкластерный режим, характеризующийся параметром  $\beta$ , который записан в виде дроби в центре ячейки. Ячейки с одинаковым цветом, кроме серого, представляют собой один и тот же двухкластерный вращательный режим

## УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХКЛАСТЕРНЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ

### 2.1. Устойчивость двухкластерных вращательных движений с постоянной расстройкой фаз

Перепишем (1.4) в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \frac{1}{m} [(1 - 2\beta) \sin \alpha (1 - \cos x) - \sin x \cos \alpha - y]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Выполним линеаризацию системы (2.1):

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m} [(1 - 2\beta) \sin \alpha \sin x_p - \cos \alpha \cos x_p] & -\frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где  $x_p$  – стационарные состояния системы (1.4). Характеристический многочлен системы (2.2):

$$\lambda^2 + \frac{1}{m} \lambda - \frac{1}{m} [(1 - 2\beta) \sin \alpha \sin x_p - \cos \alpha \cos x_p] = 0. \quad (2.3)$$

Из (2.3) можно заметить, что устойчивость стационарного состояния  $x_p$  определяется соотношением:

$$\cos \alpha \cos x_p - (1 - 2\beta) \sin \alpha \sin x_p > 0. \quad (2.4)$$

Несложно заметить, что стационарные состояния в уравнении (1.4) определяются выражением:

$$\sin(x_p + \varphi) = \frac{(1 - 2\beta) \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + (1 - 2\beta)^2 \sin^2 \alpha}},$$

откуда:

$$x_{p1} = \begin{cases} 0, \alpha \in [-\pi/2, \pi/2), \\ 2 \arcsin \frac{(1-2\beta) \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + (1-2\beta)^2 \sin^2 \alpha}} - \pi, \alpha \in [\pi/2, 3\pi/2), \end{cases} \quad (2.5)$$

$$x_{p2} = \begin{cases} \pi - 2 \arcsin \frac{(1-2\beta) \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + (1-2\beta)^2 \sin^2 \alpha}}, \alpha \in [-\pi/2, \pi/2), \\ 0, \alpha \in [\pi/2, 3\pi/2). \end{cases} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5), (2.6) в (2.4) получаем, что  $x_{p1}$  – устойчива,  $x_{p2}$  – неустойчива. На рисунке 2.1 изображены стационарные состояния уравнения (1.4) при параметре  $\beta = 0.3$ . Синей пунктирной линией отмечены устойчивые стационарные состояния, красной сплошной – неустойчивые. При  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2)$   $x_{p1} = 0$  и является устойчивой, что соответствует устойчивому синфазному вращательному режиму в исходной системе. Это естественно, ведь при  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2)$  связь является притягивающей. Заметим, что при  $\beta$  стремящейся к 0.5 стационарные состояния с расстройкой фаз неравной нулю стремятся к  $\pi$ . (см.рис. 2.2). Стоит отметить, что в полной системе (1.1) двухкластерное вращательное движе-

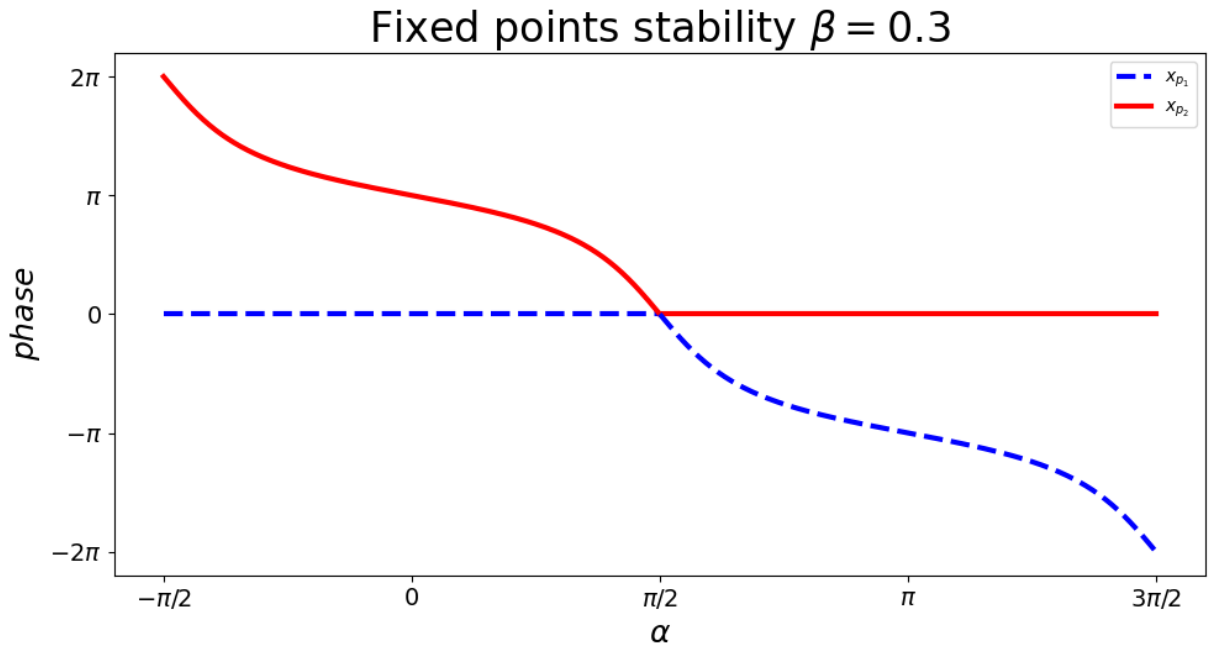


Рисунок 2.1. Устойчивость стационарных состояний. Синяя пунктирная линия – устойчивое состояние  $x_{p1}$ . Красная сплошная линия – неустойчивое состояние  $x_{p2}$ . Параметр  $\beta = 0.3$

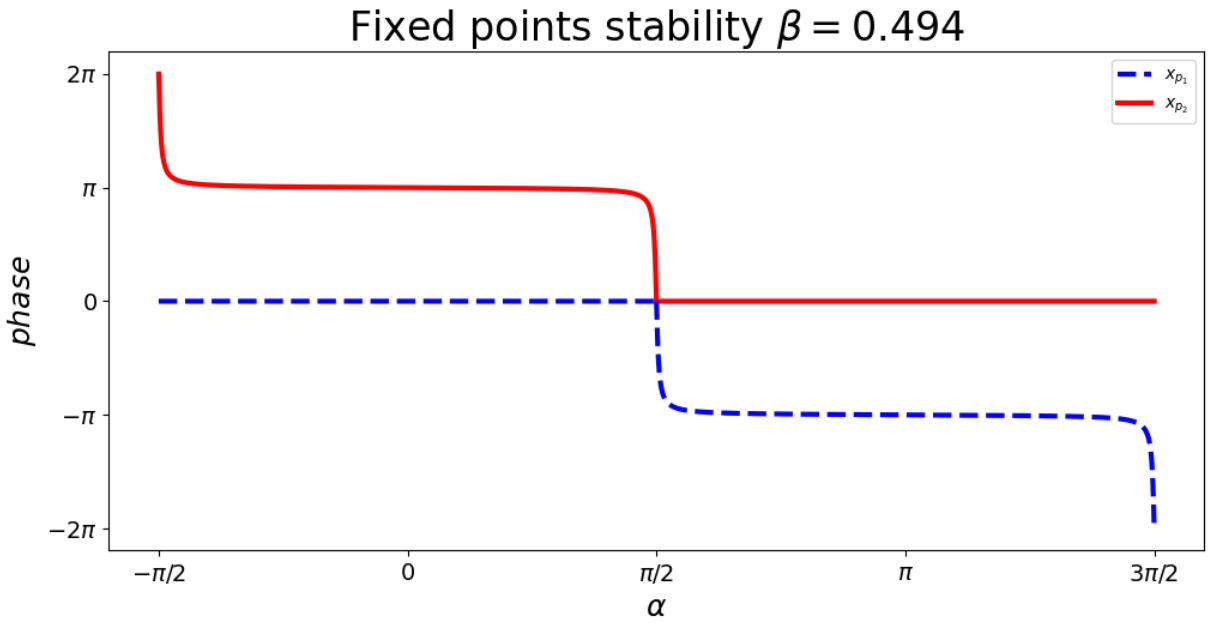


Рисунок 2.2. Устойчивость стационарных состояний. Синяя пунктирная линия – устойчивое состояние  $x_{p1}$ . Красная сплошная линия – неустойчивое состояние  $x_{p2}$ . Параметр  $\beta = 0.494$

ние с постоянной расстройкой фаз  $X = x_{p1}$  может терять свою устойчивость. Данный эффект будет продемонстрирован далее. Таким образом нас будет интересовать только устойчивость двухкластерных состояний с вращающейся расстройкой фаз.

## 2.2. Устойчивость двухкластерных вращательных движений с вращающейся расстройкой фаз

Выполним линеаризацию относительно произвольного вращательного движения  $\psi_i$  с помощью замены  $\varphi_i = \psi_i + \delta_i$ , где вариации  $\delta_i$  малы:

$$m\ddot{\delta}_i + \dot{\delta}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \cos(\psi_j - \psi_i - \alpha) \cdot (\delta_j - \delta_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.7)$$

для случая двухкластерного режима (1.2) система (2.7) запишется в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{\delta}_i + \dot{\delta}_i = \frac{1}{N} \left( \cos \alpha \sum_{j=1}^K (\delta_j - \delta_i) + \cos(X + \alpha) \sum_{j=K+1}^N (\delta_j - \delta_i) \right), \quad i = \overline{1, K}, \\ m\ddot{\delta}_i + \dot{\delta}_i = \frac{1}{N} \left( \cos(X - \alpha) \sum_{j=1}^K (\delta_j - \delta_i) + \cos \alpha \sum_{j=K+1}^N (\delta_j - \delta_i) \right), \quad i = \overline{K+1, N}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Выполняя замену:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \delta_i - \frac{1}{N-K} \sum_{i=K+1}^N \delta_i, \\ \eta_2 &= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \delta_i + \frac{1}{N-K} \sum_{i=K+1}^N \delta_i, \\ \xi_n &= \delta_{n+1} - \delta_n, \quad 1 \leq n \leq K-1, \\ \zeta_n &= \delta_{n+1} - \delta_n, \quad K+1 \leq n \leq N-1. \end{aligned}$$

Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}_1 + \dot{\eta}_1 + (\beta \cos(X - \alpha) + (1 - \beta) \cos(X + \alpha)) \eta_1 = 0, \\ m\ddot{\eta}_2 + \dot{\eta}_2 + ((1 - \beta) \cos(X + \alpha) - \beta \cos(X - \alpha)) \eta_2 = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_n + \dot{\xi}_n + ((1 - \beta) \cos(X + \alpha) + \beta \cos \alpha) \xi_n = 0, \\ m\ddot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n + ((1 - \beta) \cos \alpha + \beta \cos(X - \alpha)) \zeta_n = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Так как  $X$  периодична, мы можем применить теорию Флоке и найти мультипликаторы, определяющие асимптотическое поведение решений системы.

Проанализируем систему (2.9) (переменные  $\eta_1, \eta_2$ ). Из (1.4) следует, что одним из решений первого уравнения является  $\dot{X}$ . Так как  $X$  периодична, то один из мультипликаторов равен 1. Согласно формуле Лиувилля–Остроградского, второй мультипликатор первого уравнения равен  $\exp(-\frac{T_x}{m})$ . Кроме того, полная система имеет решение  $\eta_1 = 0, \eta_2 = \text{const}$ , откуда следует, что еще один мультипликатор равен единице. Вновь применяя формулу Лиувилля–Остроградского, но уже ко всей системе, находим четвертый мультипликатор, равный  $\exp(-\frac{T_x}{m})$ . Итак, рассматриваемый режим всегда внутренне устойчив.

Проанализируем систему (2.10) (переменные  $\xi, \zeta$ ). Переменная  $\xi$  соответствует ма-

лому кластеру, переменная  $\zeta$  соответствует большому кластеру. Они не связаны между собой. Благодаря такому разделению переменных, мы можем проследить как меняется устойчивость двухкластерного режима с вращающейся расстройкой фаз для каждого кластера. В зависимости от  $X$  устойчивость может пропасть или появиться только у одного или сразу у двух кластеров, благодаря чему мы можем понять каким образом двухкластерный режим будет разрушаться в случае потери устойчивости.

С помощью уравнений (2.10) определим устойчивость стационарного двухкластерного вращательного режима, соответствующего состоянию  $x_{p1}$ . Уравнения запишутся в виде:

$$x_{p1} = 0, \alpha \in [-\pi/2, \pi/2] : \begin{cases} m\ddot{\xi}_n + \dot{\xi}_n + \cos \alpha \xi_n = 0, \\ m\ddot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n + \cos \alpha \zeta_n = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

$$x_{p1} = 2 \arcsin \frac{(1 - 2\beta) \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + (1 - 2\beta)^2 \sin^2 \alpha}} - \pi, \alpha \in [\pi/2, 3\pi/2] : \begin{cases} m\ddot{\xi}_n + \dot{\xi}_n + A(\alpha, \beta)\xi_n = 0, \\ m\ddot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n - A(\alpha, \beta)\zeta_n = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

где  $A$  – некоторый коэффициент. Заметим, что при  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $x_{p1}$  – устойчива в исходной системе, при  $\alpha \in [\pi/2, 3\pi/2]$ ,  $x_{p1}$  – неустойчива в исходной системе.

Получается, что в исходной системе двухкластерный вращательный режим с постоянной расстройкой фаз всегда является неустойчивым. Таким образом дальнейший анализ устойчивости мы будем проводить только для двухкластерных вращательных движений с вращающейся расстройкой фаз.

В результате численного моделирования были получены карты устойчивости двухкластерных вращательных режимов с вращающейся расстройкой фаз в области параметров  $\alpha$ ,  $m$ . Из рисунка 2.3 видно, что устойчивость двухкластерного режима разрушается из – за потери устойчивости у одного из кластеров: как большого при больших значениях параметра  $\alpha$ , так и малого при меньших значениях параметра  $\alpha$ . Можно заметить, что внутри зоны устойчивости большого кластера появляется зона параметрической неустойчивости при  $\beta \approx 0.25$  (см. рис. 2.5), которая разрастается с увеличением параметра  $\beta$  (см. рис. 2.6, 2.7). При  $\beta \approx 0.375$  (см. рис. 2.8) зона устойчивости большого кластера распадается на две несвязных компоненты. При увеличении параметра  $\beta$  область устойчивости двухкластерного вращательного движения смещается в область отталкивающей связи. На рисунке 2.9 изображена пространственно–временная диаграмма для  $N = 24$  элементов из области параметров, когда двухкластерный вращательный режим является устойчивым. Моделирование системы выполнялось с начальными условиями близкими к реализации двухкластерного вращательного режима. Из рисунка 2.9 видно, что даже при наличии возмущений, спустя некоторое время в системе устанавливается двухкластерный вращательный режим с вращающейся расстройкой фаз, что согласуется с картой устойчивости

2.4. Результаты других пространственно–временных диаграмм также согласуются с картами устойчивости двухкластерного вращательного режима. Таким образом корректность карт устойчивости, которые были получены с помощью редуцированной системы, подтверждены прямым численным моделированием в полной системе (см. рис. 2.9, 2.10, 2.11, 2.13). На рисунке 2.14 изображена карта устойчивости двухкластерных вращательных состояний с периодической расстройкой фаз в зависимости от размеров малого кластера. Более темный цвет характеризуется большей степенью мультистабильности двухкластерных вращательных движений. Чем больше размер малого кластера, тем меньше соответствующая зона устойчивости. Также при увеличении размеров малого кластера увеличивается максимально возможное значение параметра  $\alpha$ , при котором двухкластерное вращательное движение сохраняет свою устойчивость. Наблюдается небольшая область устойчивости двухкластерного вращательного движения при параметрах  $\alpha > \pi/2$ , что соответствует реализации отталкивающей связи. При увеличении размеров малого кластера эта область также увеличивается в размерах.

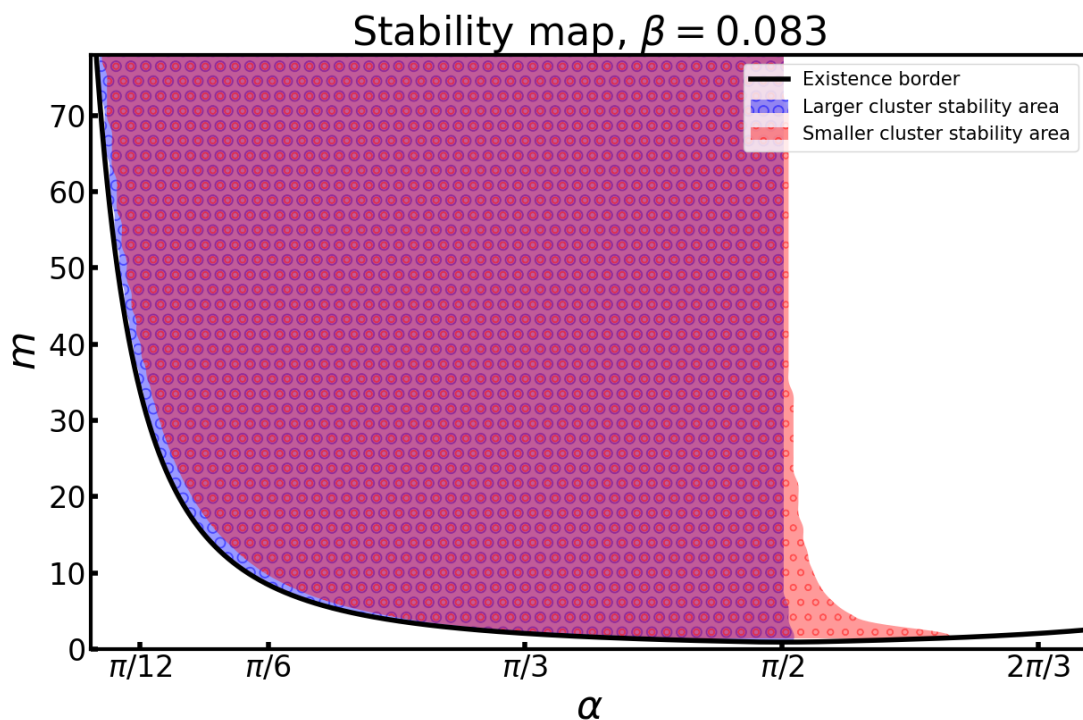


Рисунок 2.3. Карта устойчивости двухкластерных вращательных состояний с вращающейся расстройкой фаз. Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двухкластерный вращательный режим с вращающейся расстройкой фаз является устойчивым

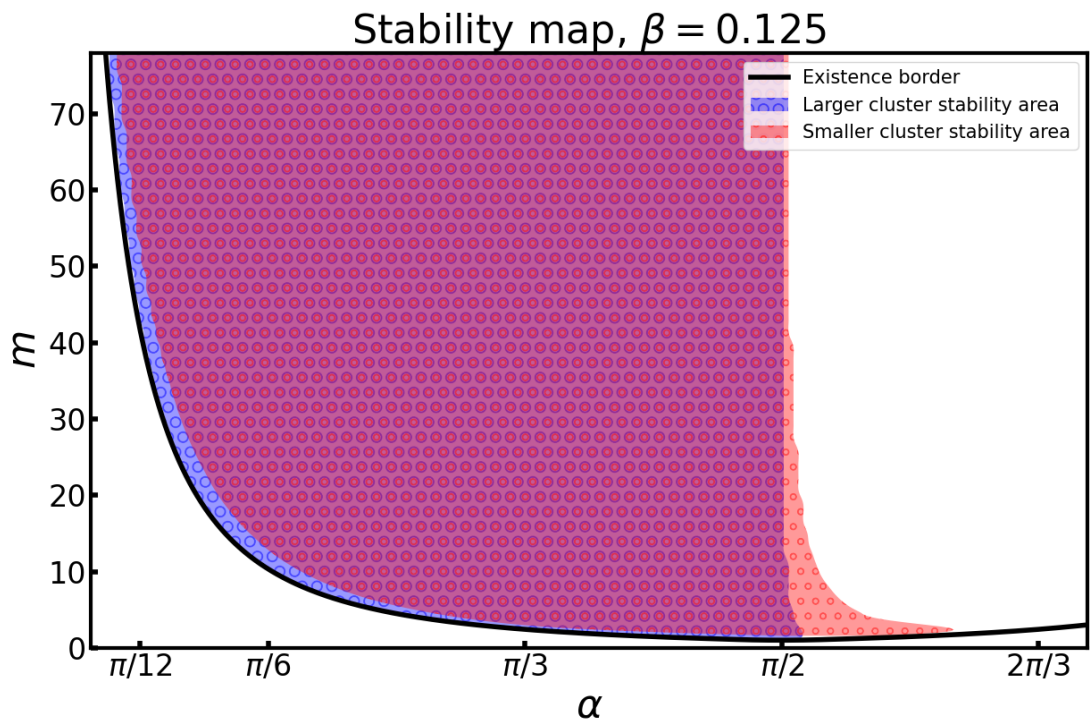


Рисунок 2.4. Карта устойчивости двухкластерных вращательных состояний с вращающейся расстройкой фаз. Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двухкластерный вращательный режим с вращающейся расстройкой фаз является устойчивым

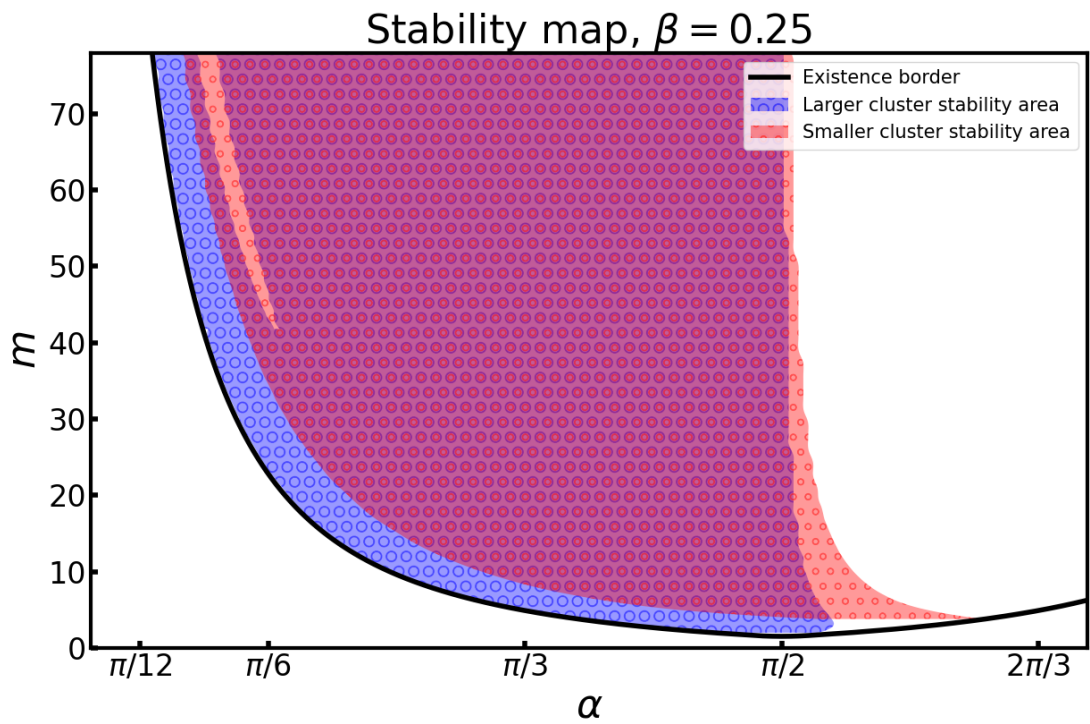


Рисунок 2.5. Карта устойчивости двухкластерных вращательных состояний с вращающейся расстройкой фаз. Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двухкластерный вращательный режим с вращающейся расстройкой фаз является устойчивым



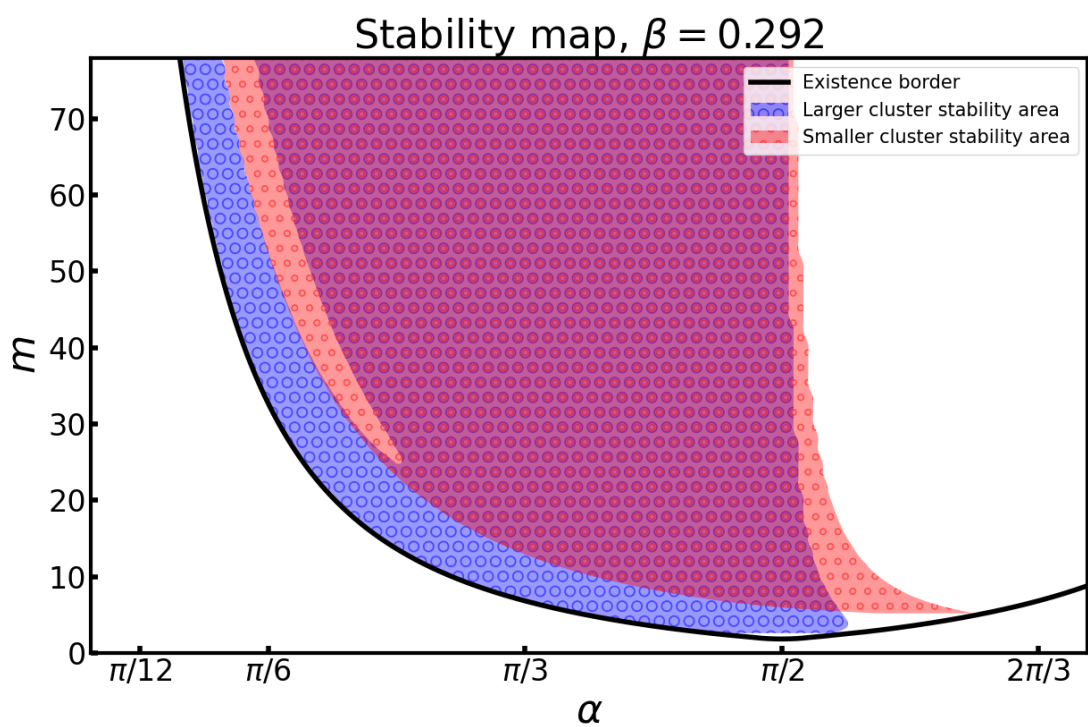


Рисунок 2.6. Карта устойчивости двухкластерных вращательных состояний с вращающейся расстройкой фаз. Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двухкластерный вращательный режим с вращающейся расстройкой фаз является устойчивым

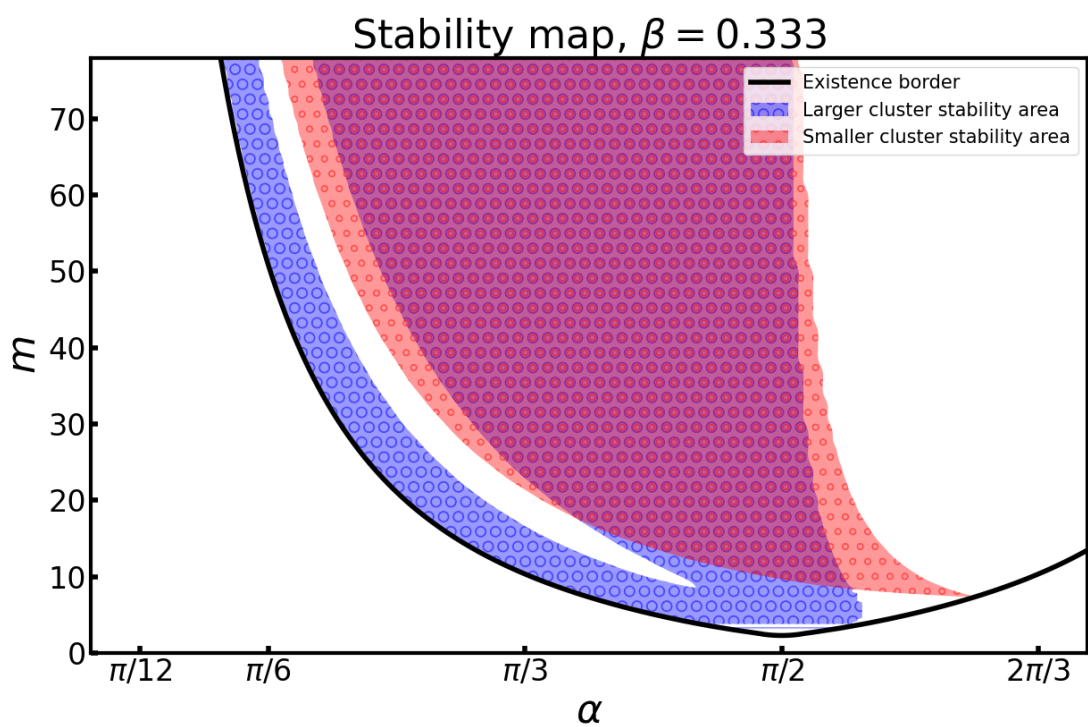


Рисунок 2.7. Карта устойчивости двухкластерных вращательных состояний с вращающейся расстройкой фаз. Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двухкластерный вращательный режим с вращающейся расстройкой фаз является устойчивым

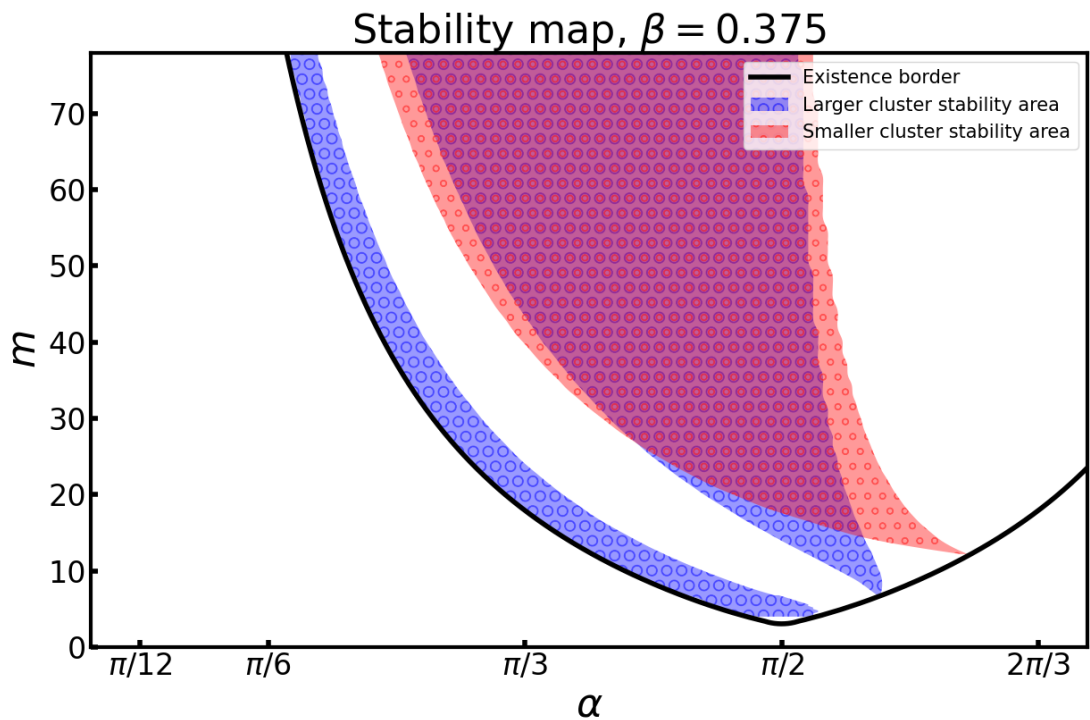


Рисунок 2.8. Карта устойчивости двухкластерных вращательных состояний с вращающейся расстройкой фаз. Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двухкластерный вращательный режим с вращающейся расстройкой фаз является устойчивым

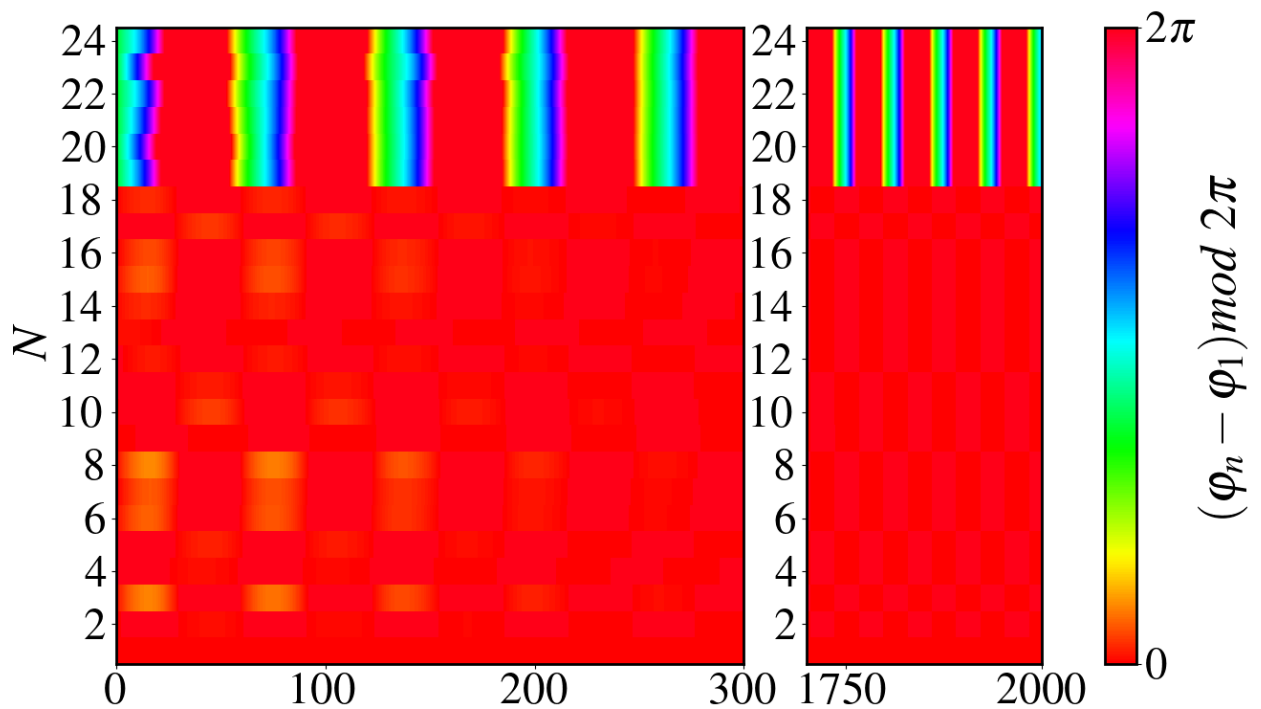


Рисунок 2.9. Пространственно-временная диаграмма разностей фаз  $(\varphi_n - \varphi_1) \bmod 2\pi$ . Двухкластерный вращательный режим сохраняется со временем. Параметры:  $N = 24$ ,  $m = 50$ ,  $\omega = 1$ ,  $\alpha = 0.4586$  (см. рис. 2.5)

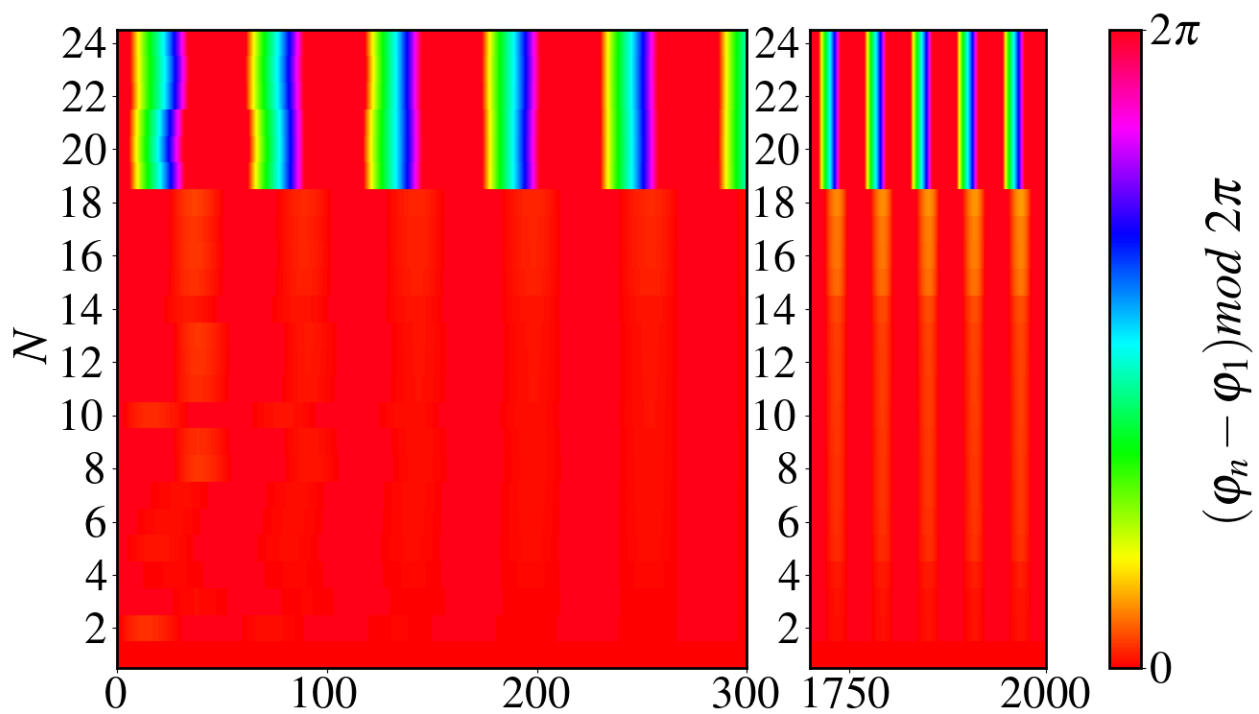


Рисунок 2.10. Пространственно–временная диаграмма разностей фаз  $(\varphi_n - \varphi_1) \bmod 2\pi$ . Наблюдается разрушение большого кластера. Параметры:  $N = 24$ ,  $m = 50$ ,  $\omega = 1$ ,  $\alpha = 0.4946$  (см. рис. 2.5)

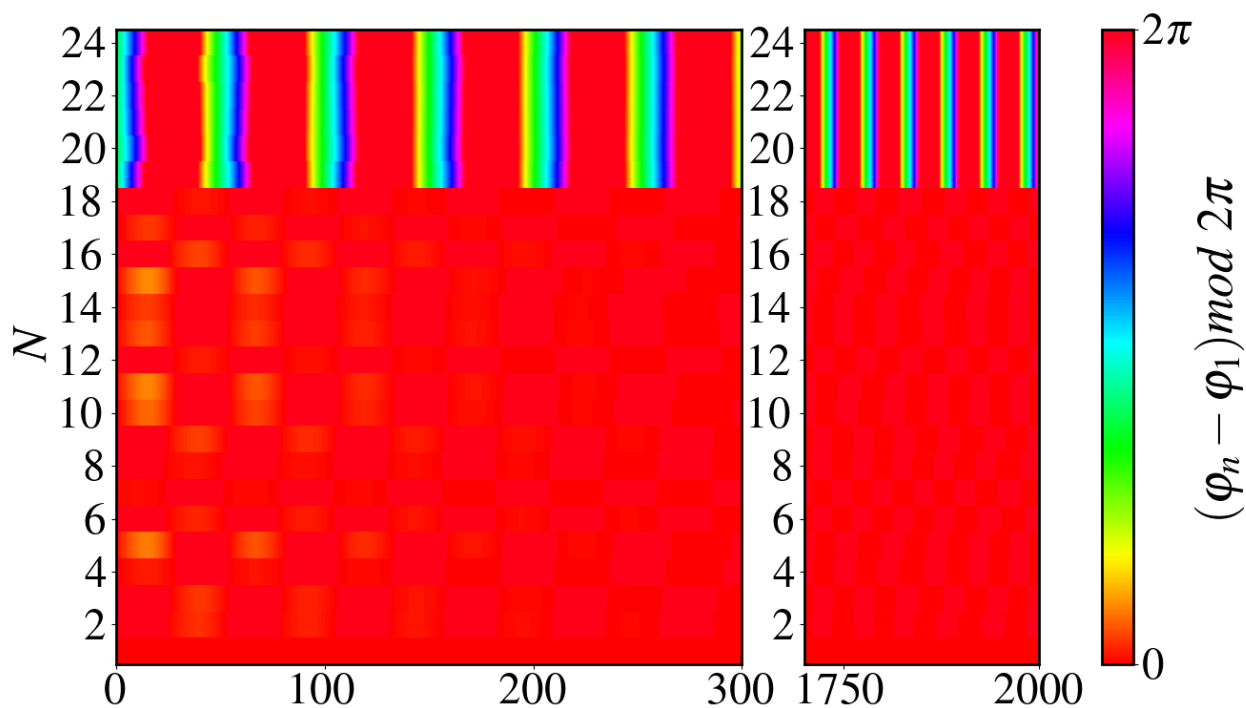


Рисунок 2.11. Пространственно–временная диаграмма разностей фаз  $(\varphi_n - \varphi_1) \bmod 2\pi$ . Двухкластерный вращательный режим сохраняется со временем. Параметры:  $N = 24$ ,  $m = 50$ ,  $\omega = 1$ ,  $\alpha = 0.54$  (см. рис. 2.5)

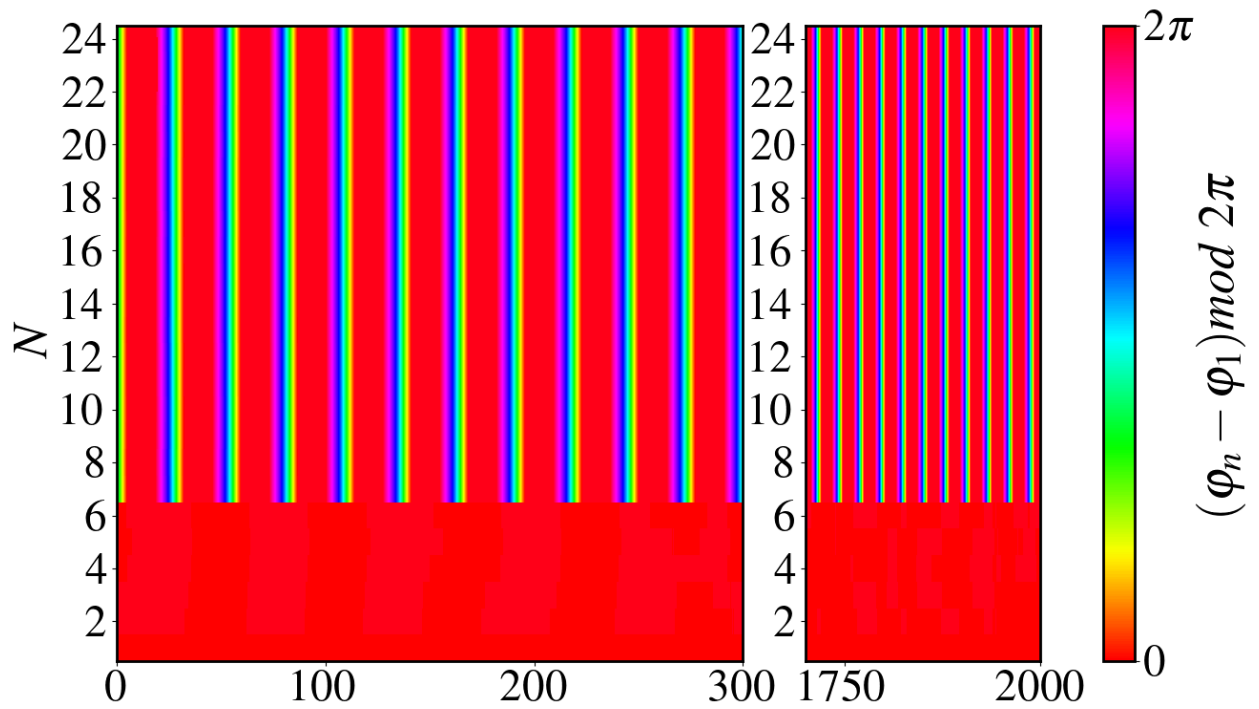


Рисунок 2.12. Пространственно–временная диаграмма разностей фаз  $(\varphi_n - \varphi_1) \bmod 2\pi$ . Двухкластерный вращательный режим сохраняется со временем. Параметры:  $N = 24$ ,  $m = 6.6$ ,  $\omega = 1$ ,  $\alpha = 1.6$  (см. рис. 2.5)

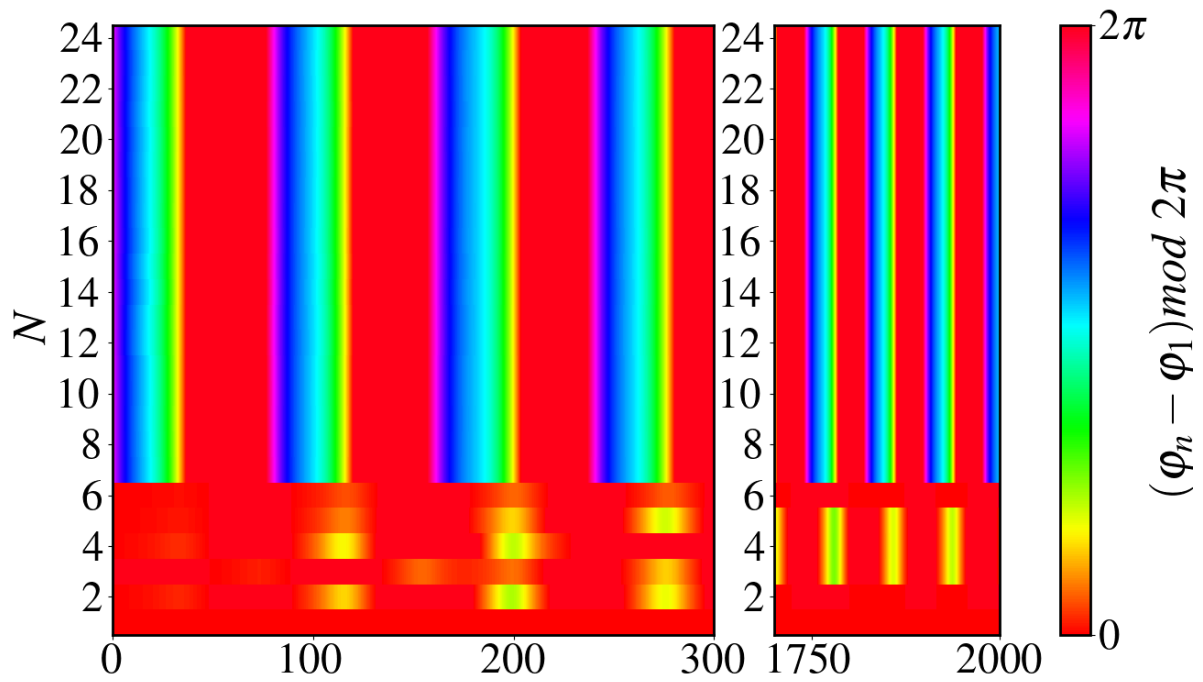


Рисунок 2.13. Пространственно–временная диаграмма разностей фаз  $(\varphi_n - \varphi_1) \bmod 2\pi$ . Наблюдается разрушение малого кластера. Параметры:  $N = 24$ ,  $m = 60$ ,  $\omega = 1$ ,  $\alpha = 0.36$  (см. рис. 2.5)

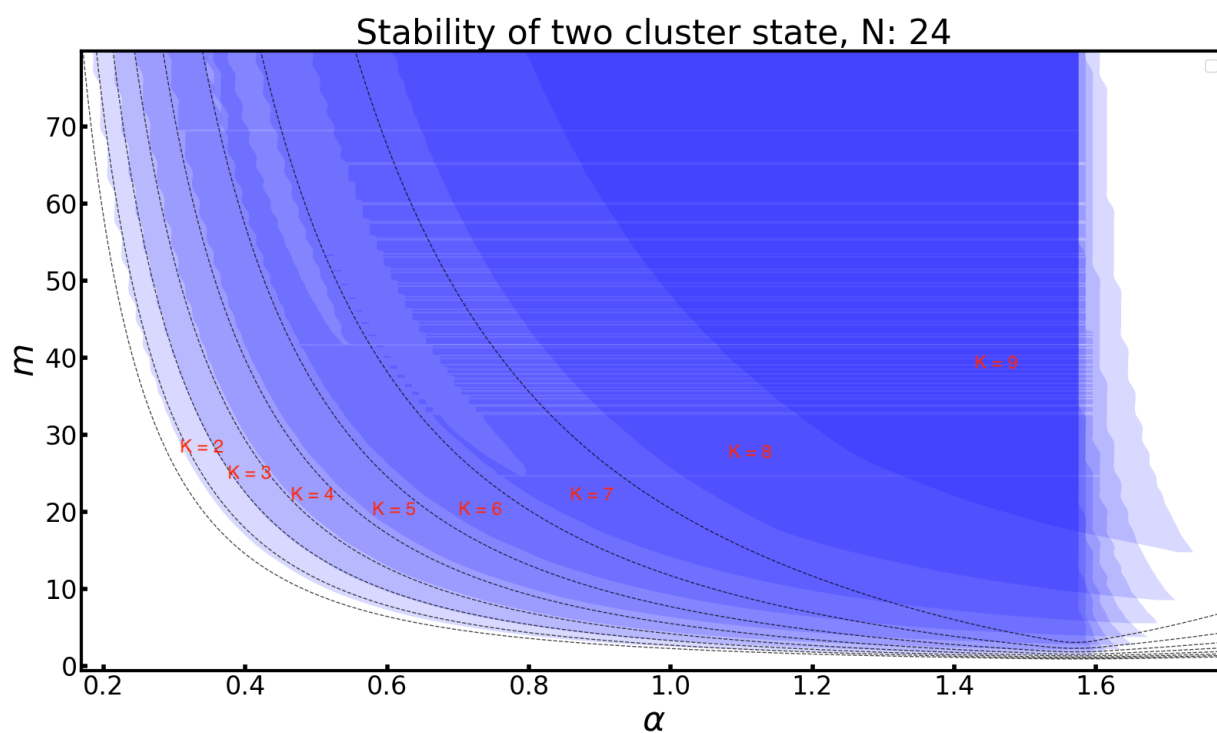


Рисунок 2.14. Карта устойчивости двухкластерных вращательных состояний с вращающейся расстройкой фаз в зависимости от размеров малого кластера. Количество элементов  $N = 24$ . Внутри синей зоны двухкластерный режим является устойчивым. Черная пунктирная линия показывает границы существования двухкластерного вращательного режима. Текст, выделенный красным цветом, показывает количество элементов в малом кластере и располагается над соответствующей зоной устойчивости

## ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС

Программный комплекс, описываемый в этой главе, позволяет находить вращательные движения и определять их устойчивость в системах связанных фазовых элементов, которые описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

### 3.1. Описание алгоритмов нахождения вращательных движений и определения их устойчивости

Для того, чтобы воспроизвести интересное вращательное движение, необходимо иметь начальные условия и период вращательного движения. Для нахождения этих величин предлагается использовать алгоритмы для нахождения нулей некоторой многомерной функции, подробное устройство которой описано в [34]. Для этого можно использовать метод Ньютона. Анализ устойчивости может быть произведен в рамках теории Флоке. Для этого необходимо найти собственные числа матрицы монодромии некоторой линейной системы с периодическими коэффициентами. Данная линейная система описывает динамику вариаций относительно найденного вращательного режима. Если все собственные числа матрицы монодромии находятся в пределах единичной окружности комплексной плоскости, рассматриваемый вращательный режим является линейно устойчивым. Стоит отметить тот факт, что для нахождения матрицы монодромии происходит интегрирование сразу двух систем одновременно: полной, в которой реализуется вращательное движение, а также линейной, из которой составляется матрица монодромии.

### 3.2. Описание структуры программного комплекса

Программный комплекс написан на языке программирования python с использованием таких библиотек как `scipy` [35], `numru` [36] и `numba` [37]. Были реализованы три главных модуля: модуль интегрирования, модуль нахождения нулей многомерной функции, модуль, выполняющий расчет матрицы монодромии. Особый интерес представляет библиотека `numba`, которая реализует процедуру компиляции python кода в машинный код во время исполнения (jit compilation). В частности, компиляция во время исполнения выполняется для функций, описывающих динамику системы. Благодаря этому нахождение вращательных движений и определение их устойчивости реализовано эффективно. В программном комплексе присутствует набор тестов [38], проверяющих корректность работы главных алгоритмов.

### 3.3. Модуль численного интегрирования

Данный модуль позволяет произвести численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений, тем самым решить задачу Коши:

$$\dot{X} = F(X, t), \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad X(t_0) = X_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad X_0 \in \mathbb{R}^n$$

Интегрирование производится наиболее часто используемым методом Рунге–Кутты 4-го порядка.

Входные параметры:

$$F(X, t, \dots args), t_0, X_0, t_{end}, args = (), h = 0.001,$$

где  $F(X, t, \dots args)$  – правая часть системы.

$t_0$  – начальный момент времени.

$X_0$  – начальные условия в момент времени  $t_0$ .

$args$  – вектор параметров, используемый в  $F(X, t, \dots args)$ . Значение по умолчанию пустой вектор.  $t_{end}$  – конечный момент времени.

$h$  – шаг численного метода. Значение по умолчанию  $h = 0.001$ .

Выходные параметры:

$$q \in \mathbb{R}^n,$$

где  $q$  – вектор состояния в момент времени  $t_{end}$ .

В данном модуле применяется такая техника, как «компиляция во время исполнения» для функций  $F(X, t, \dots args)$ , описывающих правую часть системы. Компиляция сохраняется в кэш, тем самым предотвращая повторные компиляции  $F(X, t, \dots args)$  для разных вызовов. Техника компиляции во время исполнения отнимает некоторое время на старте программы, но в конечном итоге ускоряет вычисления.

### 3.4. Модуль нахождения нулей многомерной функции

Данный модуль позволяет найти нули некоторой многомерной функции  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  соответствующим методом Ньютона. В своей основе использует предыдущий модуль.

Входные параметры:

$$F(X, \dots args), X_0, \epsilon = 0.001, K\_MAX = 100,$$

$$yacoby\_matrix = False, args = (),$$

где  $F(X, \dots args)$  – многомерная функция.

$X_0$  – начальная точка.

$\epsilon$  – точность метода, участвует в критерии останова вида  $\|d\|^2 \leq \epsilon$ , где  $d$  – вектор смещения для новой точки:  $X_{k+1} = X_k + d$ . Значение по умолчанию  $\epsilon = 0.001$ .

$K\_MAX$  – максимальное количество итераций метода. Значение по умолчанию  $K\_MAX = 100$ .

$yacoby\_matrix$  – матрица Якоби для  $F(X, \dots args)$ . Значение по умолчанию  $yacoby\_matrix = False$  что означает, не задана пользователем.

$args$  – вектор параметров, используемый в  $F(X, \dots args)$ . Значение по умолчанию пустой вектор.



Выходные параметры:

$$q \in \mathbb{R}^n,$$

где  $q$  вектор, такой, что  $F(q, \dots args) \approx 0$ .

В данном модуле также применяется техника, компиляции во время исполнения для функций  $F(X, \dots args)$ . Компиляция также сохраняется в кэш, тем самым предотвращая повторные компиляции  $F(X, \dots args)$  для разных вызовов.

### 3.5. Модуль нахождения вращательных движений

Данный модуль позволяет найти произвольные вращательные движения. В своей основе использует предыдущие модули.

Входные параметры:

$$F(X, t, \dots args), args, IC_0, T_0, phase\_period = 2\pi, h = 0.001, \epsilon = 0.001,$$

где  $F(X, t, \dots args)$  – правая часть системы.

$args$  – вектор параметров, используемый в  $F(X, t, \dots args)$ . Значение по умолчанию пустой вектор.  $IC_0$  – начальные значения для реализации искомого вращательного движения, необходимы для метода Ньютона.

$T_0$  – начальный период искомого вращательного движения, необходим для метода Ньютона.

$phase\_period$  – период вращательных движений по фазе. Значение по умолчанию  $phase\_period = 2\pi$ .

$h$  – шаг численного метода. Значение по умолчанию  $h = 0.001$ .

$\epsilon$  – точность метода, необходим для метода Ньютона. Значение по умолчанию  $\epsilon = 0.001$ .

Выходные параметры:

$$T, IC,$$

где  $T$  – период искомого вращательного движения.

$IC_0$  – начальные значения для реализации искомого вращательного движения.

### 3.6. Модуль определения устойчивости вращательных движений.

Данный модуль позволяет определить устойчивость найденных вращательных движений. В своей основе использует предыдущие модули.

Входные параметры:

$$F(X, t, \dots args_{orig})_{orig}, F(X, t, \dots args_{linear})_{linear}, args_{orig}, args_{linear}, IC, T, h = 0.001,$$

где  $F(X, t, \dots args_{orig})_{orig}$  – правая часть исходной системы.

где  $F(X, t, \dots args_{linear})_{linear}$  – правая часть линеаризованной системы.

$args_{orig}$  – вектор параметров, используемый в  $F(X, t, \dots args_{orig})_{orig}$ . Значение по умолчанию пустой вектор.

$args_{linear}$  – вектор параметров, используемый в  $F(X, t, \dots args_{linear})_{linear}$ . Значение по умолчанию пустой вектор.

$IC$  – начальные значения для реализации искомого вращательного движения.

$T$  – начальный период искомого вращательного движения.

$h$  – шаг численного метода. Значение по умолчанию  $h = 0.001$ .

Выходные параметры:

$$M$$

где  $M$  – матрица монодромии.

### 3.7. Ссылки на ресурсы

Исходный код: [https://github.com/unn-dynamic-systems/rotary\\_states/](https://github.com/unn-dynamic-systems/rotary_states/)

Проект на pypi: [https://pypi.org/project/rotary\\_states/](https://pypi.org/project/rotary_states/)

Тестирование: [https://github.com/unn-dynamic-systems/rotary\\_states/actions/](https://github.com/unn-dynamic-systems/rotary_states/actions/)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы был проведен анализ двухкластерных вращательных режимов в ансамбле глобально связанных фазовых осцилляторов с инерцией. В первой главе был изучен вопрос о существовании двухкластерных вращательных движений. В частности было получено уравнение, описывающее границы областей существования интересующего вращательного движения (см. (1.7)). Было показано, что существует два типа двухкластерных вращательных движений. Первый характеризуется постоянной расстройкой фаз, второй характеризуется периодической расстройкой фаз.

Во второй главе был изучен вопрос устойчивости двухкластерных вращательных движений. Было показано, что двухкластерное вращательное движение с постоянной расстройкой фаз является неустойчивым при любых значениях управляющих параметров. Также благодаря замене переменных была получена система (см. (2.10)), независимо описывающая устойчивость каждого кластера. Благодаря чему были построены карты устойчивости двухкластерного режима в области параметров  $m$ ,  $\alpha$  в зависимости от параметра  $\beta = K/N$ . Было показано, что устойчивость двухкластерного режима часто может теряться из-за потери устойчивости у одного из кластеров, как малого, так и большого. При этом другой кластер сохраняет свою устойчивость. Результаты были подтверждены в рамках прямого численного моделирования.

В третьей главы был описан программный комплекс, позволяющий находить произвольные вращательные движения в системах связанных фазовых элементов и определять их устойчивость. Представлено краткое описание главных алгоритмов. Были описаны основные модули, а также основные подходы, которые использовались при реализации. Реализованный программный комплекс размещен на веб-сервисе для хостинга IT-проектов и их совместной разработки GitHub.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich, Weakly connected neural networks, vol. 126 (Springer Science Business Media, 2012).
2. M. R. Tinsley, S. Nkomo, and K. Showalter, *Nature Physics* 8, 662 (2012).
3. J. Ding, I. Belykh, A. Marandi, and M.-A. Miri, *Physical Review Applied* 12, 054039 (2019).
4. F. Dörfler, M. Chertkov, and F. Bullo, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 110, 2005 (2013).
5. Y. Kuramoto, in *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics* (Springer, 1975), pp. 420–422.
6. S. H. Strogatz, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 143, 1 (2000).
7. J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, *Reviews of Modern Physics* 77, 137 (2005).
8. E. Barreto, B. Hunt, E. Ott, and P. So, *Physical Review E* 77, 036107 (2008).
9. E. Ott and T. M. Antonsen, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 18, 037113 (2008).
10. H. Hong, H. Chaté, H. Park, and L.-H. Tang, *Physical Review Letters* 99, 184101 (2007).
11. A. Pikovsky and M. Rosenblum, *Physical Review Letters* 101, 264103 (2008).
12. Y. Maistrenko, O. Popovych, O. Burylko, and P. Tass, *Physical Review Letters* 93, 084102 (2004).
13. F. Dörfler and F. Bullo, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 10, 1070 (2011).
14. E. A. Martens, E. Barreto, S. Strogatz, E. Ott, P. So, and T. Antonsen, *Physical Review E* 79, 026204 (2009).
15. C. R. Laing, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 238, 1569 (2009).
16. B. Ermentrout, *Journal of Mathematical Biology* 29, 571 (1991).
17. L. Tumash, S. Olmi, and E. Schöll, *Chaos* 29, 123105 (2019).
18. H.-A. Tanaka, A. J. Lichtenberg, and S. Oishi, *Physical Review Letters* 78, 2104 (1997).
19. H.-A. Tanaka, A. J. Lichtenberg, and S. Oishi, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 100, 279 (1997).
20. P. Ji, T. K. Peron, F. A. Rodrigues, and J. Kurths, *Scientific Reports* 4 (2014).
21. V. Munyaev, L. Smirnov, V. Kostin, G. Osipov, and A. Pikovsky, *New Journal of Physics* 22, 023036 (2020).
22. M. Komarov, S. Gupta, and A. Pikovsky, *EPL (Europhysics Letters)* 106, 40003 (2014).
23. S. Olmi, A. Navas, S. Boccaletti, and A. Torcini, *Physical Review E* 90, 042905 (2014).
24. N. V. Barabash, V. N. Belykh, G. V. Osipov, and I. V. Belykh, *Chaos* 31 (2021).
25. I. V. Belykh, B. N. Brister, and V. N. Belykh, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 26, 094822 (2016).
26. B. N. Brister, V. N. Belykh, and I. V. Belykh, *Physical Review E* 101, 062206 (2020).
27. S. Olmi, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 25, 123125 (2015).
28. Y. Maistrenko, S. Brezetsky, P. Jaros, R. Levchenko, and T. Kapitaniak, *Physical Review E* 95, 010203 (2017).

29. G. S. Medvedev and M. S. Mizuhara, *Journal of Statistical Physics* 182, 1 (2021).
30. P. Jaros, Y. Maistrenko, and T. Kapitaniak, *Physical Review E* 91, 022907 (2015).
31. P. Jaros, S. Brezetsky, R. Levchenko, D. Dudkowski, T. Kapitaniak, and Y. Maistrenko, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 28, 011103 (2018).
32. A. A. Andronov, A. A. Vitt, and S. E. Khaikin, *Theory of Oscillators: Adiwes International Series in Physics*, vol. 4 (Elsevier, 2013).
33. H. Sakaguchi, *Physical Review E* 73, 031907 (2006).
34. Khorkin, D., Bolotov, M., Smirnov, L. et al. Phase Control for the Dynamics of Connected Rotators. *Autom Remote Control* 81, 1499–1506 (2020).
35. Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T.E. et al. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nat Methods* 17, 261–272 (2020).
36. Harris, C.R., Millman, K.J., van der Walt, S.J. et al. Array programming with NumPy. *Nature* 585, 357–362 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>
37. Siu Kwan Lam, stuartarchibald, Antoine Pitrou, Mark Florisson, Stan Seibert, Graham Markall, esc, Todd A. Anderson, rjenc29, Guilherme Leobas, luk-f-a, Jay Bourque, Aaron Meurer, Michael Collison, Travis E. Oliphant, densmirn, njwhite, Ehsan Toton, Ethan Pronovost, ... Pedro Morales Maries. (2022). numba/numba: Version 0.55.0 (0.55.0). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.5847553>
38. Jamil, Abid & Arif, Muhammad & Abubakar, Normi & Ahmad, Akhlaq. (2016). Software Testing Techniques: A Literature Review. 177-182. 10.1109/ICT4M.2016.045.
39. Munyaev V.O., Bolotov M.I., Smirnov L.A., Osipov G.V., Belykh I. Stability of rotatory solitary states in Kuramoto networks with inertia // *Physical Review E*. V. 105. 2022. P. 024203. 18 February 2022.