



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(ННГУ)

Институт информационных технологий, математики и механики
Кафедра: Теории управления и динамики систем

Направление подготовки: «Фундаментальная информатика и информационные
технологии»
Профиль подготовки: «Когнитивные системы»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

На тему:
«Двухкластерные режимы в системе Курамото с инерцией»

Выполнил(а): студент(ка)
группы 382006-3м
Хорькин Дмитрий Сергеевич

подпись

Научный руководитель:
доцент, к.ф.-м.н.
Смирнов Лев Александрович

подпись

Нижний Новгород
2022

АННОТАЦИЯ

В данной работе рассматриваются двух кластерные вращательные движения в системе Курамото с инерцией. В частности изучается вопрос существования и устойчивости двух кластерных вращательных режимов в зависимости от управляющих параметров. Также был реализован программный комплекс, позволяющий эффективно находить интересные вращательные движения в произвольных системах связанных элементов. Было разработано web приложение, выполняющее прямое численное моделирование системы. Аналитические результаты подтверждены прямым численным моделированием.

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ	2
ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. Модель Курамото. Двухкластерные вращательные режимы	5
1.1. Модель Курамото с инерцией	5
1.2. Двух кластерные вращательные режимы. Существование и типы	5
ГЛАВА 2. Устойчивость двухкластерных вращательных режимов	7
2.1. Устойчивость двух кластерных вращательных движений с постоянной расстройкой фаз	7
2.2. Устойчивость двух кластерных вращательных движений с периодиче- ской расстройкой фаз	8
ГЛАВА 3. Программный комплекс	13
3.1. Описание реализации	13
3.2. Ссылки на ресурсы	13
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	14
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	15

ВВЕДЕНИЕ

Сети фазовых осцилляторов часто используются для моделирования совместной динамики в различных биологических и искусственных системах, начиная от нейронных сетей [1] и популяций химических осцилляторов [2] до лазерных решеток [3] и электрических сетей [4]. Система фазовых осцилляторов Курамото первого порядка [5, 6] представляет собой широко адаптированную модель сети фазовых осцилляторов, которая может демонстрировать сложную пространственно-временную динамику при переходе от некогерентности к полной синхронизации [7–14]. Когда колебания в модели Курамото имеют неоднородные частоты, этот переход обычно сопровождается частичной синхронизацией, которая возникает, когда система распадается на кластеры когерентных и некогерентных осцилляторов [7, 14, 15].

Модель Курамото второго порядка с инерцией обычно используется для описания сетей генераторов, способных регулировать свои собственные частоты, как, например, в адаптивной частотной модели синхронизации светлячков [16] и системах электросетей [17]. Включение инерции приводит к двумерной внутренней динамике осциллятора, тем самым делая кооперативную динамику модели Курамото второго порядка существенно более сложной, чем ее классическая противоположная часть первого порядка. Эта динамика, вызванная инерцией, включает сложные переходы от некогерентности к полной синхронизации [18–24], бистабильность синхронных кластеров [25], хаотическую межкластерную динамику [26], химеры [27–29] и уединенные состояния [30, 31].

В работе [25] аналитически изучили возникновение и сосуществование стабильных кластеров в двухпопуляционной сети идентичных осцилляторов Курамото второго порядка. Две популяции разных размеров K и M естественным образом разделились бы на два кластера, где осцилляторы синхронизируются внутри кластера, создавая фазовый сдвиг между кластерами. Анализ, выполненный в [25], позволил получить необходимые и достаточные условия для стабильности двухкластерной синхронизации с постоянной фазой, а также предоставил условие устойчивости концепции для двухкластерной синхронизации с вращающимся фазовым сдвигом.

Целью данной работы является изучение двухкластерных вращательных режимов в системе Курамото с инерцией и запаздывающей по фазе связью Курамото-Сакагути [33], для успешного достижения которой выделены следующие задачи:

- 1) Исследование существования и типов возникающих двухкластерных вращательных режимов в зависимости от управляющих параметров.
- 2) Исследование устойчивости двухкластерных вращательных режимов в зависимости от управляющих параметров.
- 3) Реализация программного комплекса, позволяющего эффективно находить интересные вращательные движения, а также определять их устойчивость в произвольных системах связанных элементов.

МОДЕЛЬ КУРАМОТО. ДВУХКЛАСТЕРНЫЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ

1.1. Модель Курамото с инерцией

$$m\ddot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i = \omega + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_i - \alpha), i = \overline{1, N}, \quad (1.1)$$

где m - масса, ω - вращающий момент, α - фазовая задержка, N - общее число элементов.

Предполагается, что осцилляторы являются идентичными, с идентичной частотой ω , массой m и запаздыванием по фазе $\alpha \in [0, \pi)$ [33]. В системе 1.1 имеется синфазный режим, который локально стабилен для любого $\alpha \in [0, \pi/2)$ и нестабилен для любого $\alpha \in [\pi/2, \pi)$ [7]. В результате связь определяется как притягивающая для $\alpha < \pi/2$ и отталкивающая для $\pi/2 \leq \alpha < \pi$.

1.2. Двух кластерные вращательные режимы. Существование и типы

Заметим, что двух кластерный режим описывается системой:

$$\begin{cases} m\ddot{\psi}_1 + \dot{\psi}_1 = \omega + \frac{N-K}{N} \sin(\psi_2 - \psi_1 - \alpha) - \frac{K}{N} \sin \alpha, \\ m\ddot{\psi}_2 + \dot{\psi}_2 = \omega + \frac{K}{N} \sin(\psi_1 - \psi_2 - \alpha) - \frac{N-K}{N} \sin \alpha, \end{cases} \quad (1.2)$$

где ψ_1, ψ_2 - фазы первого и второго кластера соответственно, K - количество элементов в малом кластере. Введем новую переменную $\beta = \frac{K}{N}$, характеризующую долю малого кластера относительно всех элементов. Уравнение 1.2 перепишется в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{\psi}_1 + \dot{\psi}_1 = \omega + (1 - \beta) \sin(\psi_2 - \psi_1 - \alpha) - \beta \sin \alpha, \\ m\ddot{\psi}_2 + \dot{\psi}_2 = \omega + \beta \sin(\psi_1 - \psi_2 - \alpha) - (1 - \beta) \sin \alpha. \end{cases} \quad (1.3)$$

Введем замену $X = \psi_1 - \psi_2$, характеризующую расстройку фаз между двумя кластерами. Вычитая из первого уравнения второе, 1.3 запишется в виде:

$$m\ddot{X} + \dot{X} = (1 - 2\beta) \sin \alpha - [(1 - \beta) \sin(X + \alpha) + \beta \sin(X - \alpha)]. \quad (1.4)$$

Заметим, что $X = 0$ соответствует реализации синфазного вращательного режима. Если $X \neq 0$, это соответствует реализации двух кластерного режима.

Еще раз произведем замену переменных в уравнении 1.4:

$$\begin{aligned} R^2 &= (N - 2K)^2 \sin^2 \alpha + N^2 \cos^2 \alpha, \\ \rho &= \sqrt{\frac{N}{mR}}, \quad t = \hat{t} \frac{N}{\rho R}, \quad \gamma = \frac{N - 2K}{R} \sin \alpha, \\ \Phi &= X + \delta, \quad \delta = \arccos\left(\frac{N}{R} \cos \alpha\right). \end{aligned}$$

Мы получаем:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\hat{t}^2} + \rho \frac{d\Phi}{d\hat{t}} + \sin \Phi = \gamma \quad (1.5)$$

Полученное уравнение 1.5 хорошо изучено [32]. В зависимости от параметров ρ, γ , в системе 1.5 могут существовать два состояния равновесия: устойчивая точка $\Phi_e = \arcsin \gamma$ и седло $\Phi_s = \pi - \arcsin \gamma$, а также некоторое устойчивое периодическое вращательное движение. Данные соотношения определяются так называемой бифуркационной кривой Трикомми [32].

Таким образом, в исходной системе могут существовать 2 типа двух кластерных вращательных режимов, первый характеризуется постоянной расстройкой фаз, второй характеризуется периодической расстройкой фаз.

Область существования вращательного движения в уравнении 1.5 определяется соотношением:

$$\gamma \geq T(\rho), \quad (1.6)$$

где $T(\rho) = \rho^{\frac{4}{\pi}} - 0.305\rho^3$ - уравнение, аппроксимирующее кривую Трикомми [25]. Подставляя, получаем уравнения для границы области существования двухкластерного вращательного движения с периодической расстройкой фаз в области параметров α, m :

$$m = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\beta)^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \cdot T^{-1}\left(\frac{(1 - 2\beta) \sin \alpha}{\sqrt{(1 - 2\beta)^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}\right)} \quad (1.7)$$

Заметим, что двухкластерный вращательный режим, соответствующий $\beta = 0.5$ не существует.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХКЛАСТЕРНЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ

2.1. Устойчивость двух кластерных вращательных движений с постоянной расстройкой фаз

Запишем 1.4 в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \frac{1}{m} [(1 - 2\beta) \sin \alpha (1 - \cos x) - \sin x \cos \alpha - y] \end{cases} \quad (2.1)$$

Выполним линеаризацию системы 2.1:

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m} [(1 - 2\beta) \sin \alpha \sin x_p - \cos \alpha \cos x_p] & -\frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Где x_p - стационарные состояния уравнения 1.4. Запишем характеристический многочлен системы 2.2:

$$\lambda^2 + \frac{1}{m} \lambda - \frac{1}{m} [(1 - 2\beta) \sin \alpha \sin x_p - \cos \alpha \cos x_p] = 0 \quad (2.3)$$

Из 2.3 можно заметить, что устойчивость стационарного состояния x_p определяется соотношением:

$$\cos \alpha \cos x_p - (1 - 2\beta) \sin \alpha \sin x_p > 0 \quad (2.4)$$

Несложно заметить, что стационарные состояния в уравнении 1.4 определяются:

$$\sin(x_p + \varphi) = \frac{(1 - 2\beta) \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + (1 - 2\beta)^2 \sin^2 \alpha}},$$

Откуда:

$$x_{p1} = \begin{cases} 0, \alpha \in [-\pi/2, \pi/2) \\ 2 \arcsin \frac{(1-2\beta) \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + (1-2\beta)^2 \sin^2 \alpha}} - \pi, \alpha \in [\pi/2, 3\pi/2) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$x_{p2} = \begin{cases} \pi - 2 \arcsin \frac{(1-2\beta) \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + (1-2\beta)^2 \sin^2 \alpha}}, \alpha \in [-\pi/2, \pi/2) \\ 0, \alpha \in [\pi/2, 3\pi/2) \end{cases} \quad (2.6)$$

Подставляя 2.5, 2.6 в 2.4 получаем, что x_{p1} - устойчива, x_{p2} - неустойчива.

Заметим, что при β стремящейся к 0.5 стационарные состояния с расстройкой фаз неравной нулю стремятся к πk , $k \in \mathbb{Z}$. Стоит отметить, что в полной системе 1.1 стационарное двух кластерное состояние x_{p1} может терять свою устойчивость. Данный эффект будет показан ниже.

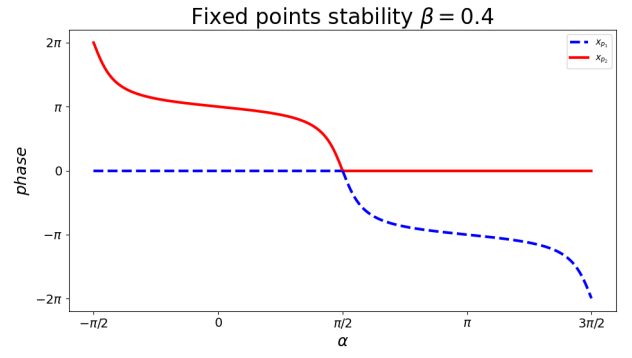
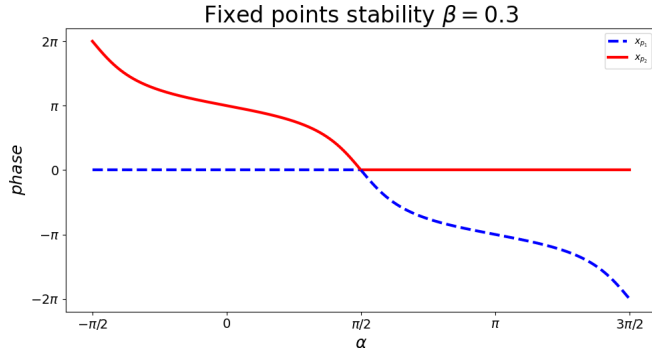


Рисунок 2.1. **Устойчивость стационарных состояний.** Синяя пунктирная линия - устойчивое состояние x_{p1} , Красная сплошная линия - неустойчивое состояние x_{p2} . $\beta = 0.3$, $\beta = 0.4$



Рисунок 2.2. **Устойчивость стационарных состояний.** Синяя пунктирная линия - устойчивое состояние x_{p1} , Красная сплошная линия - неустойчивое состояние x_{p2} . $\beta = 0.494$

2.2. Устойчивость двух кластерных вращательных движений с периодической расстройкой фаз

Выполним линейризацию относительно произвольного вращательного движения ψ_i с помощью замены $\varphi_i = \psi_i + \delta_i$:

$$m\ddot{\delta}_i + \dot{\delta}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \cos(\psi_j - \psi_i - \alpha) \cdot (\delta_j - \delta_i), \quad i = \overline{1, N} \quad (2.7)$$

Для случая двух кластерного режима 1.2 это запишется в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{\delta}_i + \dot{\delta}_i = \frac{1}{N} \left(\cos \alpha \sum_{j=1}^K (\delta_j - \delta_i) + \cos(X + \alpha) \sum_{j=K+1}^N (\delta_j - \delta_i) \right), & i = \overline{1, K}, \\ m\ddot{\delta}_i + \dot{\delta}_i = \frac{1}{N} \left(\cos(X - \alpha) \sum_{j=1}^K (\delta_j - \delta_i) + \cos \alpha \sum_{j=K+1}^N (\delta_j - \delta_i) \right), & i = \overline{K+1, N}, \end{cases} \quad (2.8)$$

Выполняя замену:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \delta_i - \frac{1}{N-K} \sum_{i=K+1}^N \delta_i, \\ \eta_2 &= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \delta_i + \frac{1}{N-K} \sum_{i=K+1}^N \delta_i, \\ \xi_n &= \delta_{n+1} - \delta_n, \quad 1 \leq n \leq K-1, \\ \zeta_n &= \delta_{n+1} - \delta_n, \quad K+1 \leq n \leq N-1.\end{aligned}$$

Мы получаем:

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}_1 + \dot{\eta}_1 + (\beta \cos(X - \alpha) + (1 - \beta) \cos(X + \alpha)) \eta_1 = 0, \\ m\ddot{\eta}_2 + \dot{\eta}_2 + ((1 - \beta) \cos(X + \alpha) - \beta \cos(X - \alpha)) \eta_1 = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_n + \dot{\xi}_n + ((1 - \beta) \cos(X + \alpha) + \beta \cos \alpha) \xi_n = 0, \\ m\ddot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n + ((1 - \beta) \cos \alpha + \beta \cos(X - \alpha)) \zeta_n = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Так как X периодична, мы можем применить теорию Флоке и найти мультипликаторы, определяющие асимптотическое поведение решений системы.

Проанализируем систему 2.9 (переменные η_1, η_2). Из 1.4 следует, что одним из решений первого уравнения является \dot{X} . Так как X периодична, то один из мультипликаторов равен 1. Согласно формуле Лиувилля-Остроградского, второй мультипликатор первого уравнения равен $\exp(-\frac{T_x}{m})$. Кроме того, полная система имеет решение $\eta_1 = 0, \eta_2 = \text{const}$, откуда следует, что еще один мультипликатор равен единице. Вновь применяя формулу Лиувилля-Остроградского, но уже ко всей системе, находим четвертый мультипликатор, равный $\exp(-\frac{T_x}{m})$. Итак, режим всегда внутренне устойчив.

Проанализируем систему 2.10 (переменные ξ, ζ). Переменная ξ соответствует малому кластеру, переменная ζ соответствует большому кластеру. Они не связаны между собой. Благодаря такому разделению переменных, мы можем проследить как меняется устойчивость двух кластерного режима с периодической расстройкой фаз для каждого кластера. В зависимости от X устойчивость может пропасть или появиться только у одного или сразу у двух кластеров, благодаря чему мы можем понять каким образом двух кластерный режим будет разрушаться в случае потери устойчивости.

С помощью уравнений 2.10 определим устойчивость стационарного двух кластерного вращательного режима, соответствующего состоянию x_{p1} . Уравнения запишутся в виде:

$$x_{p1} = 0, \quad \alpha \in [-\pi/2, \pi/2] : \begin{cases} m\ddot{\xi}_n + \dot{\xi}_n + \cos \alpha \xi_n = 0, \\ m\ddot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n + \cos \alpha \zeta_n = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

$$x_{p_1} = 2 \arcsin \frac{(1 - 2\beta) \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + (1 - 2\beta)^2 \sin^2 \alpha}} - \pi, \alpha \in [\pi/2, 3\pi/2) : \quad (2.12)$$

$$: \begin{cases} m\ddot{\xi}_n + \dot{\xi}_n + A(\alpha, \beta)\xi_n = 0, \\ m\ddot{\zeta}_n + \dot{\zeta}_n - A(\alpha, \beta)\zeta_n = 0. \end{cases}$$

Где A - некоторый коэффициент. Заметим, что при $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2)$, x_{p_1} - устойчива в исходной системе, при $\alpha \in [\pi/2, 3\pi/2)$, x_{p_1} - неустойчива в исходной системе.

Получается, что в исходной системе двухкластерный вращательный режим с постоянной расстройкой фаз всегда является неустойчивым. Таким образом дальнейший анализ устойчивости мы будем проводить только для двухкластерных вращательных движений с периодической расстройкой фаз.

В результате численного моделирования были получены карты устойчивости двух кластерных вращательных режимов с периодической расстройкой фаз в области параметров α , m .

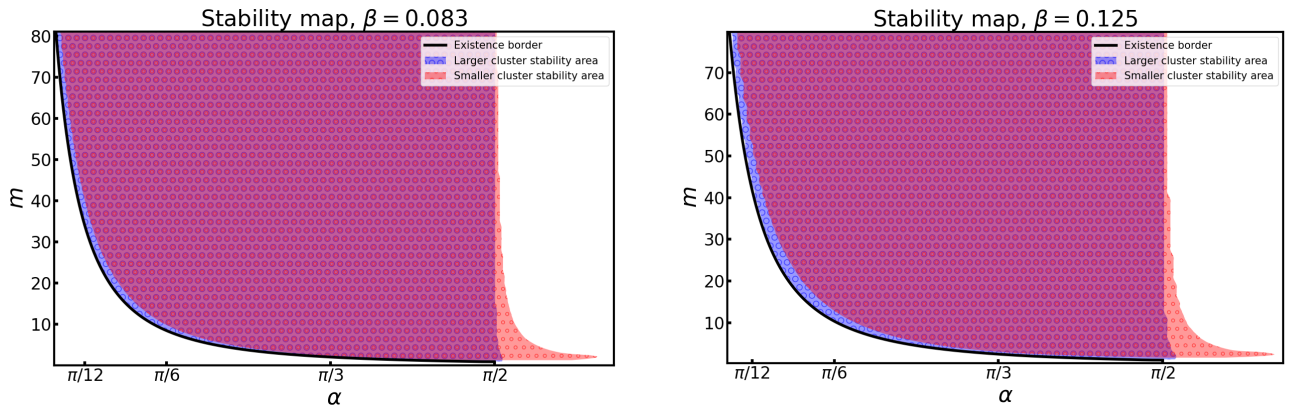


Рисунок 2.3. Карта устойчивости двух кластерных вращательных состояний с периодической расстройкой фаз. Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двух кластерный вращательный режим с периодической расстройкой фаз является устойчивым

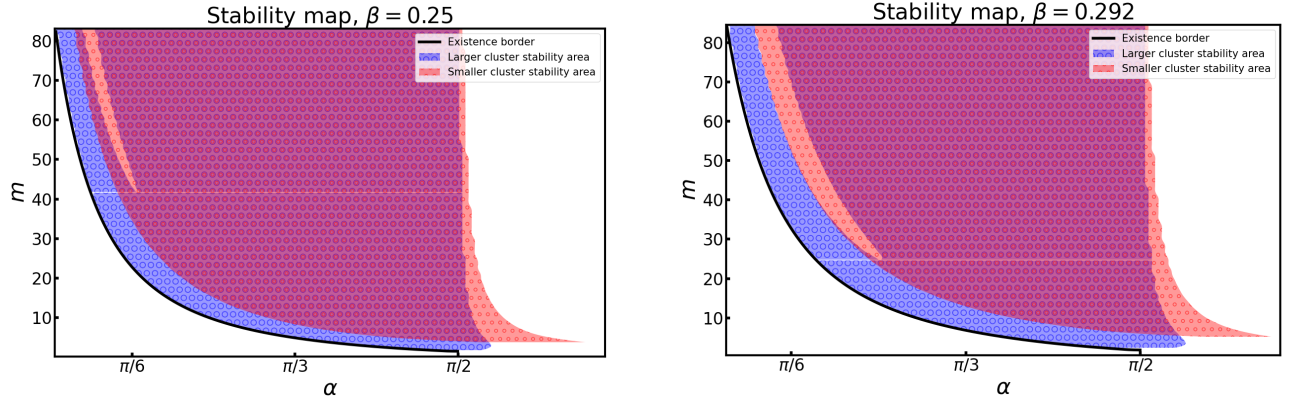


Рисунок 2.4. Карта устойчивости двух кластерных вращательных состояний с периодической расстройкой фаз. Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двух кластерный вращательный режим с периодической расстройкой фаз является устойчивым

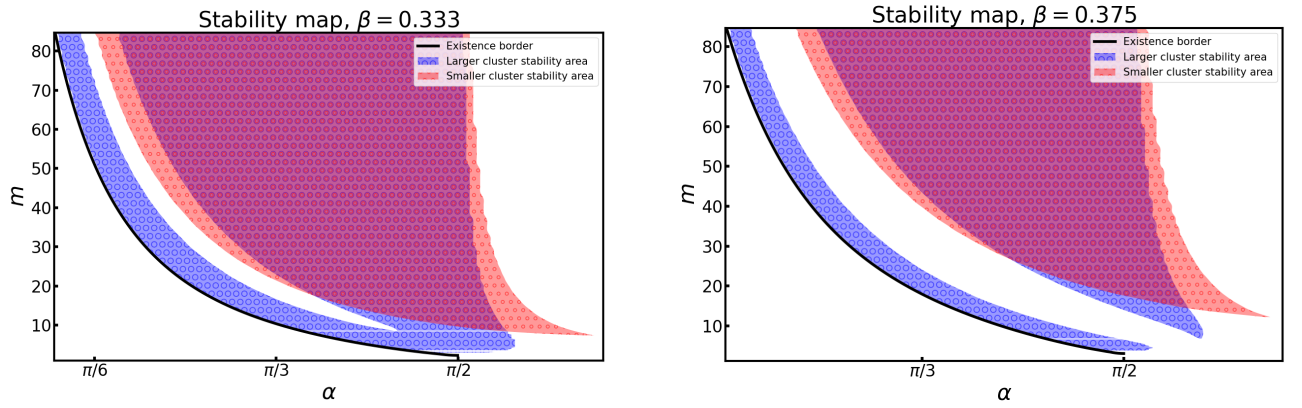


Рисунок 2.5. Карта устойчивости двух кластерных вращательных состояний с периодической расстройкой фаз. Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двух кластерный вращательный режим с периодической расстройкой фаз является устойчивым

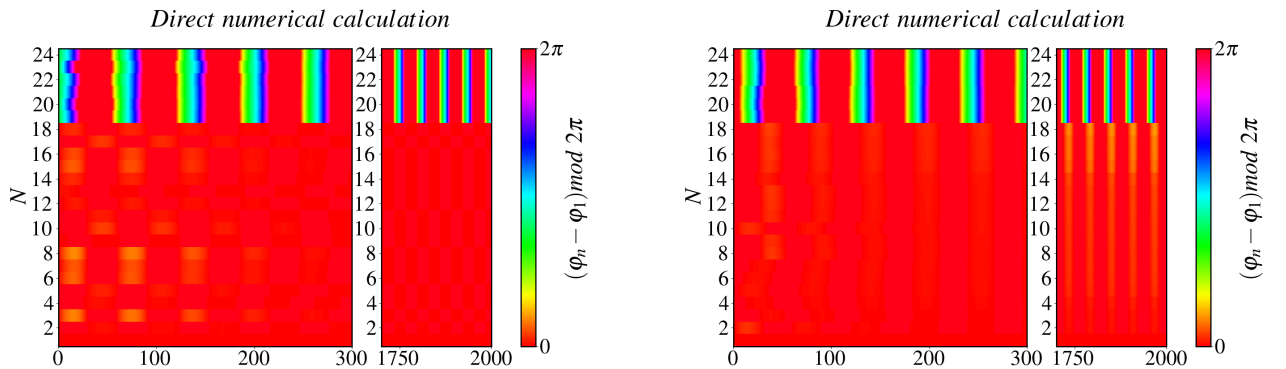


Рисунок 2.6. Карта устойчивости двух кластерных вращательных состояний с периодической расстройкой фаз. Область с малыми маркерами соответствует устойчивости малого кластера. Область с большими маркерами соответствует устойчивости большого кластера. На пересечении этих областей двух кластерный вращательный режим с периодической расстройкой фаз является устойчивым

Direct numerical calculation

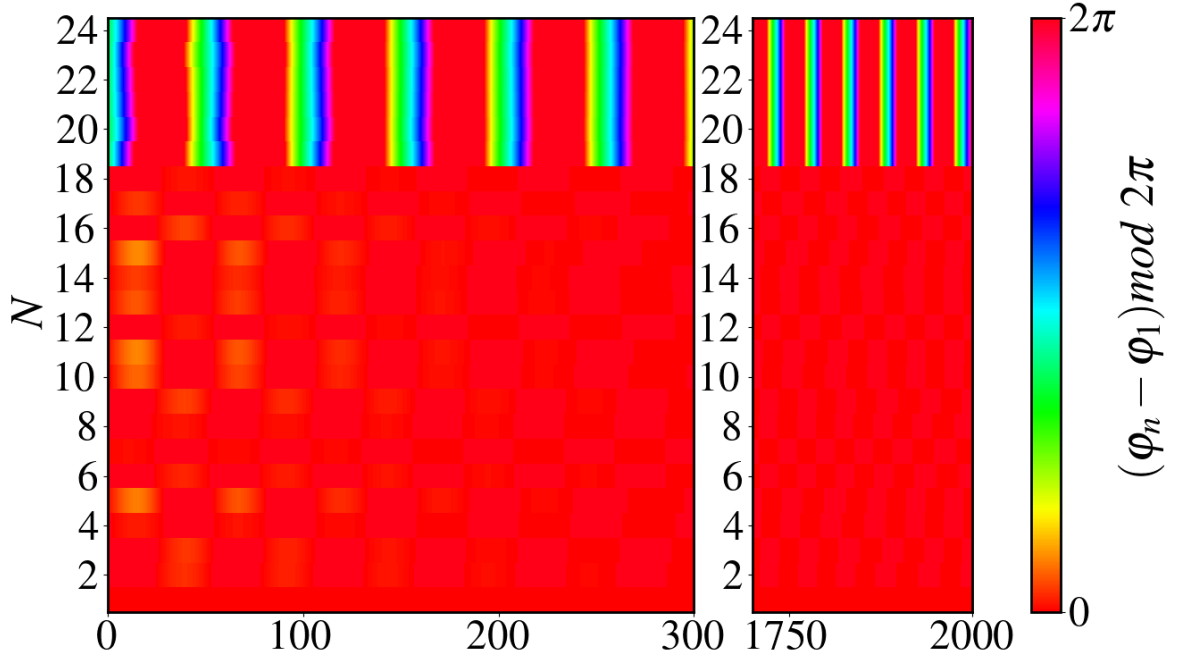


Рисунок 2.7. **Пространственно временная диаграмма.** Пространственно временные диаграммы изображены для каждого элемента, относительно первого элемента. Цвет характеризует фазу элемента. Параметры: $N = 24$, $m = 50$, $\omega = 1$, $\alpha = 0.54$ (см. рис. 2.4)

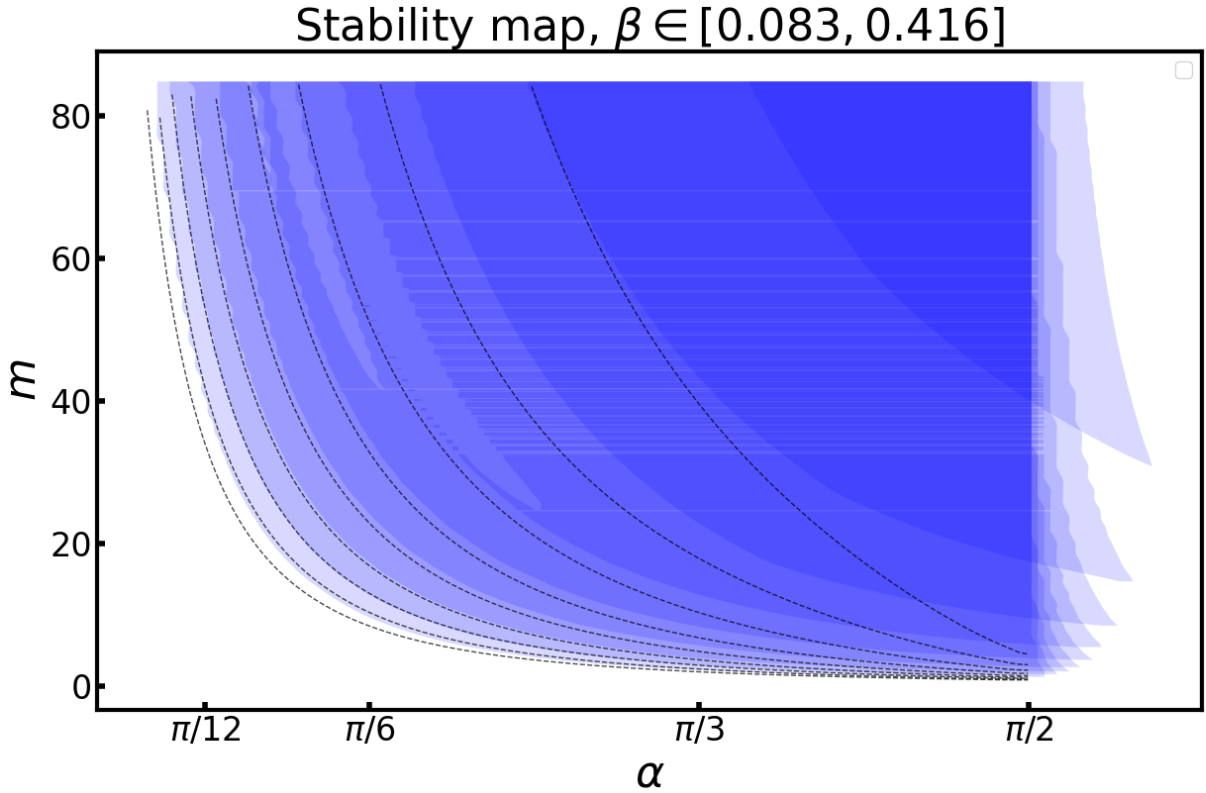


Рисунок 2.8. **Карта устойчивости двух кластерных вращательных состояний с периодической расстройкой фаз в зависимости от параметра β .** Внутри синей зоны двух кластерный режим является устойчивым. $\beta = 0.494$

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС

Программный комплекс, описываемый в этой главе, позволяет находить вращательные движения и определять их устойчивость в системах связанных элементов, которые описываются системой однородных дифференциальных уравнений. Основная идея была описана в предыдущей работе [34].

3.1. Описание реализации

Программный комплекс написан на языке программирования python с использованием таких библиотек как `scipy` [35], `numru` [36] и `numba` [37]. Были реализованы три главных численных метода: интегрирование систем методом Рунге-Кутты 4-го порядка, метод Ньютона для многомерного случая а также расчет матрицы Монодромии. Реализация этих методов была необходима для достижения максимальной производительности. Особый интерес представляет библиотека `numba`, которая реализует процедуру компиляции python кода в машинный код во время исполнения (jit compilation). В частности, компиляция во время исполнения выполняется для функции описывающую динамику системы. Благодаря этому нахождение вращательных движений и определение их устойчивости реализованно эффективно. В программном комплексе присутствует набор тестов [38], проверяющих корректность работы главных алгоритмов.

3.2. Ссылки на ресурсы

Исходный код: https://github.com/unn-dynamic-systems/rotary_states/

Проект на pypi: https://pypi.org/project/rotary_states/

Тестирование: https://github.com/unn-dynamic-systems/rotary_states/actions/

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой главе был изучен вопрос о существовании двухкластерных вращательных движений. В частности было получено уравнение, описывающее границы областей существования интересующего вращательного движения (см. 1.7). Было показано, что существует два типа двухкластерных вращательных движений. Первый характеризуется постоянной расстройкой фаз, второй характеризуется периодической расстройкой фаз.

Во второй главе был изучен вопрос об устойчивости двухкластерных вращательных движений. Было показано, что двухкластерное вращательное движение с постоянной расстройкой фаз является неустойчивым при любых значениях управляющих параметров. Также благодаря замене переменных была получена система (см. 2.10), независимо описывающая устойчивость каждого кластера. Благодаря чему были построены карты устойчивости двух кластерного режима в области параметров m, α в зависимости от параметра $\beta = K/N$. Было показано, что устойчивость двухкластерного режима часто может теряться из-за потери устойчивости у одного из кластеров, как малого, так и большого. При этом другой кластер сохраняет свою устойчивость. Результаты были подтверждены в рамках прямого численного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich, Weakly connected neural networks, vol. 126 (Springer Science Business Media, 2012).
2. M. R. Tinsley, S. Nkomo, and K. Showalter, *Nature Physics* 8, 662 (2012).
3. J. Ding, I. Belykh, A. Marandi, and M.-A. Miri, *Physical Review Applied* 12, 054039 (2019).
4. F. Dörfler, M. Chertkov, and F. Bullo, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 110, 2005 (2013).
5. Y. Kuramoto, in *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics* (Springer, 1975), pp. 420–422.
6. S. H. Strogatz, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 143, 1 (2000).
7. J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, *Reviews of Modern Physics* 77, 137 (2005).
8. E. Barreto, B. Hunt, E. Ott, and P. So, *Physical Review E* 77, 036107 (2008).
9. E. Ott and T. M. Antonsen, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 18, 037113 (2008).
10. H. Hong, H. Chaté, H. Park, and L.-H. Tang, *Physical Review Letters* 99, 184101 (2007).
11. A. Pikovsky and M. Rosenblum, *Physical Review Letters* 101, 264103 (2008).
12. Y. Maistrenko, O. Popovych, O. Burylko, and P. Tass, *Physical Review Letters* 93, 084102 (2004).
13. F. Dörfler and F. Bullo, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 10, 1070 (2011).
14. E. A. Martens, E. Barreto, S. Strogatz, E. Ott, P. So, and T. Antonsen, *Physical Review E* 79, 026204 (2009).
15. C. R. Laing, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 238, 1569 (2009).
16. B. Ermentrout, *Journal of Mathematical Biology* 29, 571 (1991).
17. L. Tumash, S. Olmi, and E. Schöll, *Chaos* 29, 123105 (2019).
18. H.-A. Tanaka, A. J. Lichtenberg, and S. Oishi, *Physical Review Letters* 78, 2104 (1997).
19. H.-A. Tanaka, A. J. Lichtenberg, and S. Oishi, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 100, 279 (1997).
20. P. Ji, T. K. Peron, F. A. Rodrigues, and J. Kurths, *Scientific Reports* 4 (2014).
21. V. Munyaev, L. Smirnov, V. Kostin, G. Osipov, and A. Pikovsky, *New Journal of Physics* 22, 023036 (2020).
22. M. Komarov, S. Gupta, and A. Pikovsky, *EPL (Europhysics Letters)* 106, 40003 (2014).
23. S. Olmi, A. Navas, S. Boccaletti, and A. Torcini, *Physical Review E* 90, 042905 (2014).
24. N. V. Barabash, V. N. Belykh, G. V. Osipov, and I. V. Belykh, *Chaos* 31 (2021).
25. I. V. Belykh, B. N. Brister, and V. N. Belykh, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 26, 094822 (2016).
26. B. N. Brister, V. N. Belykh, and I. V. Belykh, *Physical Review E* 101, 062206 (2020).
27. S. Olmi, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 25, 123125 (2015).
28. Y. Maistrenko, S. Brezetsky, P. Jaros, R. Levchenko, and T. Kapitaniak, *Physical Review E* 95, 010203 (2017).

29. G. S. Medvedev and M. S. Mizuhara, *Journal of Statistical Physics* 182, 1 (2021).
30. P. Jaros, Y. Maistrenko, and T. Kapitaniak, *Physical Review E* 91, 022907 (2015).
31. P. Jaros, S. Brezetsky, R. Levchenko, D. Dudkowski, T. Kapitaniak, and Y. Maistrenko, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 28, 011103 (2018).
32. A. A. Andronov, A. A. Vitt, and S. E. Khaikin, *Theory of Oscillators: Adiwes International Series in Physics*, vol. 4 (Elsevier, 2013).
33. H. Sakaguchi, *Physical Review E* 73, 031907 (2006).
34. Khorkin, D., Bolotov, M., Smirnov, L. et al. Phase Control for the Dynamics of Connected Rotators. *Autom Remote Control* 81, 1499–1506 (2020).
35. Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T.E. et al. SciPy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nat Methods* 17, 261–272 (2020).
36. Harris, C.R., Millman, K.J., van der Walt, S.J. et al. Array programming with NumPy. *Nature* 585, 357–362 (2020). <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>
37. Siu Kwan Lam, stuartarchibald, Antoine Pitrou, Mark Florisson, Stan Seibert, Graham Markall, esc, Todd A. Anderson, rjenc29, Guilherme Leobas, luk-f-a, Jay Bourque, Aaron Meurer, Michael Collison, Travis E. Oliphant, densmirn, njwhite, Ehsan Toton, Ethan Pronovost, ... Pedro Morales Maries. (2022). numba/numba: Version 0.55.0 (0.55.0). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.5847553>
38. Jamil, Abid & Arif, Muhammad & Abubakar, Normi & Ahmad, Akhlaq. (2016). Software Testing Techniques: A Literature Review. 177-182. 10.1109/ICT4M.2016.045.