2.5 節末問題 2.5 の解答

問題 2.5.1

この問題は、シグマ記号（→**2.5.9項**）の理解を問う問題です。

答えは以下の通りになります。

$$\sum_{i=1}^{100} i = (1+2+3+\cdots+100) = 5050$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} ij = (1+2+3+2+4+6+3+6+9) = 36$$

なお、1 から 100 までの総和は 1.1 節にも記されていますが、和の公式（→**2.5.10項**）を用いて $100 \times 101 \div 2 = 5050$ と計算することもできます。

問題 2.5.2

集合の基本（→**2.5.5項**）の理解を問う問題です。答えは以下のようになります。

1. $|S| = 3, |T| = 4$
2. $S \cup T = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$（一方に含まれる部分）
3. $S \cap T = \{2\}$（両方に含まれる部分）
4. 空でない部分集合は $\{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2,4\}, \{2,7\}, \{4,7\}, \{2,4,7\}$ の 7 つ

分からない人は、58 ページに戻って確認しましょう。

問題 2.5.3

階乗 $N! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times N$ であるため、for 文を用いて掛け算を行うプログラムを書けば良いです。なお、$N = 20$ のとき $N! = 2.4 \times 10^{18}$ 程度となり、`int` 型などの 32 ビット整数ではオーバーフローを起こすことに注意してください。（次のソースコードでは、代わりに `long long` 型を使っています）

```
#include <iostream>
using namespace std;
```

```cpp
int main() {
    long long N;
    long long Answer = 1;
    cin >> N;
    for (int i = 2; i <= N; i++) Answer *= i; // Answer に i を掛ける
    cout << Answer << endl;
    return 0;
}
```

※ Python などのソースコードは GitHub の codes フォルダをご覧ください。

問題 2.5.4

以下のようなプログラムを書くと正解が得られます。なお、関数 `isprime(x)` は 2 以上の整数 x が素数であるかどうかを判定する関数であり、素数の場合 `true`、そうでない場合 `false` を返します。また、

- x は 2 で割り切れますか？
- x は 3 で割り切れますか？

  ：

- x は $N-1$ で割り切れますか？

といった感じで 1 つずつ調べていくことで、素数判定を行っています。

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

bool isprime(int x) {
    for (int i = 2; i <= x - 1; i++) {
        // x を i で割った余りが 0 のとき、x は i で割り切れる
        if (x % i == 0) return false;
    }
    return true;
}

int main() {
    int N, Answer = 0;
    cin >> N;
    for (int i = 2; i <= N; i++) {
        if (isprime(i) == true) cout << i << endl;
    }
    return 0;
}
```

※ Python などのソースコードは GitHub の codes フォルダをご覧ください。

問題 2.5.5

この問題の答えは 1000 です。

最も単純な方法として、$1 \leq a \leq 4, 1 \leq b \leq 4, 1 \leq c \leq 4$ に含まれる整数の組 (a, b, c) すべてについて計算する方法がありますが、これでは面倒です。

$a = 1$ のとき 合計 100

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

$a = 2$ のとき 合計 200

2	4	6	8
4	8	12	16
6	12	18	24
8	16	24	32

$a = 3$ のとき 合計 300

3	6	9	12
6	12	18	24
9	18	27	36
12	24	36	48

$a = 4$ のとき 合計 400

4	8	12	16
8	16	24	32
12	24	36	48
16	32	48	64

そこで、以下の二重シグマの値を考えましょう。合計は 100 です。

$$\sum_{b=1}^{4} \sum_{c=1}^{4} bc = 100$$

各 a における abc の合計を考えると、以下のようになります。

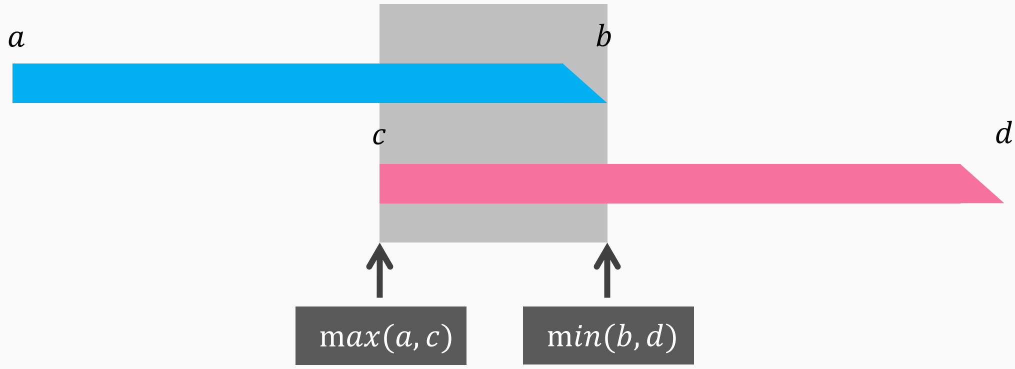
- $a = 1$ のときの $abc\ (= 1 \times bc)$ の合計：$1 \times 100 = 100$
- $a = 2$ のときの $abc\ (= 2 \times bc)$ の合計：$2 \times 100 = 200$
- $a = 3$ のときの $abc\ (= 3 \times bc)$ の合計：$3 \times 100 = 300$
- $a = 4$ のときの $abc\ (= 4 \times bc)$ の合計：$4 \times 100 = 400$

求める三重シグマは、上の 4 つをすべて足した値 1000 となります。

問題 2.5.6

共通部分を持つことの必要十分条件は、$\max(a,c) < \min(b,d)$ を満たすことです。

max 関数、min 関数が分からない人は、2.3.2 項に戻って確認しましょう。



問題 2.5.7

それぞれの `i` の値における「`cnt` が増える回数」は以下の通りです。

- `i=1` のとき：$2 \leq j \leq N$ なので $N-1$ 回
- `i=2` のとき：$3 \leq j \leq N$ なので $N-2$ 回

  ：
- `i=N-1` のとき：1 回
- `i=N` のとき：0 回

よって、実行終了時の `cnt` の値は、和の公式（→**2.5.10項**）より、

$$(N-1)+(N-2)+\cdots+1+0=\frac{(N-1)\times N}{2}\left(=\frac{1}{2}N^2-\frac{1}{2}N\right)$$

となります。`cnt` の値の中で最も重要な項は $(1/2)\times N^2$ であるため、このプログラムの計算量は $O(N^2)$ です。（→**2.4.8項**）