2.4 節末問題 2.4 の解答

問題 2.4.1

答えは以下の通りです。なお、O 記法で表した値は、「最も重要な項を消した後、定数倍（$7N^2$ の 7 の部分）を消す」という操作で求められます（→**2.4.8項**）。

1. $T_1(N) = O(N^3)$
2. $T_2(N) = O(N)$
3. $T_3(N) = O(2^N)$
4. $T_4(N) = O(N!)$

問題 2.4.2

このプログラムは二重ループを行っており、各変数は以下のような値をとります。

- 変数 i：$1, 2, 3, \ldots, N$ の N 通り
- 変数 j：$1, 2, 3, \ldots, 100N$ の $100N$ 通り

したがって、合計ループ回数は $N \times 100N = 100N^2$ 回であり、すなわち計算量は $O(N^2)$ となります。なお、ループ回数が掛け算で表される理由は、変数 i、j の取り方を長方形状に並べると理解しやすいです（→**2.4.5項**）。

問題 2.4.3

$\log_2 N$ と $\log_{10} N$ が定数倍の差しかないことを確認するため、$\log_2 N$ を $\log_{10} N$ で割ってみましょう。底の変換公式（→**2.3.10項**）より、次式が成り立ちます。

$$\frac{\log_2 N}{\log_{10} N} = \frac{\log_2 N}{\log_2 N \div \log_2 10} = \log_2 10 \fallingdotseq 3.32$$

したがって、$\log_2 N$ は $\log_{10} N$ の約 3.32 倍であることが分かります。このようなことが、対数を O 記法で表すときに $O(\log N)$ と底を省略した表記を使う理由の一つになっています。

問題 2.4.4

答えは以下のようになります。なお、$N \log N$ は $N \times \log N$ と同じ意味です。

計算回数	$N \log N$	N^2	2^N
10^6 回以内	$N \leq 60000$	$N \leq 1000$	$N \leq 20$
10^7 回以内	$N \leq 500000$	$N \leq 3000$	$N \leq 23$
10^8 回以内	$N \leq 4000000$	$N \leq 10000$	$M \leq 26$
10^9 回以内	$N \leq 40000000$	$N \leq 30000$	$N \leq 30$

問題 2.4.5

N が 2 増えると実行時間がおよそ 9 倍になっているため、計算量は $O(3^N)$ だと考えるのが自然です。なお、$O(N \times 3^N)$ や $O(10^{N/2})$ なども不自然ではないため、別解として扱います。

N	14	16	18	20
実行時間	0.049 秒	0.447 秒	4.025 秒	36.189 秒

9.12 倍　**9.00 倍**　**8.99 倍**

問題 2.4.6

直観的な方法として、"a" → "aardvark" → "aback" → "abalone" → "abandon" → … といった感じで、前に載っている単語から 1 つずつ調べていくことが考えられます。しかし、単語数を N とするときのステップ数は最悪 N 回です。$N = 100000$ もあれば、人間にはとても無理があります。そこで、たとえば以下の方法を使えば効率的です（→**2.4.7項**）。

> 「現時点で考えられる範囲の中央の単語を見て、それより前にあるか後ろにあるかを調べる」ことを繰り返す。下図は単語数が 100000 個の場合の手順のイメージを示している。

これは二分探索法と非常に似た手法であり、わずか $\lceil \log_2 N \rceil$ ステップで目的の単語を見つけることができます。
なお、実用上は「50000 個目の単語がどこにあるか」といったことを調べるのも面倒なので、たとえば最初の質問では、だいたい中央のページにある単語と比べれば良いです。皆さんも辞書で単語を調べるとき、ぜひ一度二分探索を使ってみましょう。