6.2 最終確認問題 6-10 の解答

問題 6

(1) $1/x$ の積分（→**4.3.4項**）より、

$$\int_1^{10000} \frac{1}{x} dx = \log_e 10000 = 9.2103 \ldots$$

となります。これを小数第一位で四捨五入すると、答えは 9 です。

(2) それぞれの i におけるプログラムのループ回数は、次の通りです。

- $i = 1$ のとき：$\lfloor N/1 \rfloor + 1000$ 回
- $i = 2$ のとき：$\lfloor N/2 \rfloor + 1000$ 回
- $i = 3$ のとき：$\lfloor N/3 \rfloor + 1000$ 回
- ：
- $i = N$ のとき：$\lfloor N/N \rfloor + 1000$ 回

よって、全体のループ回数 L は次のようになります。

$$\underline{\underline{\left\lfloor \frac{N}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{N}{N} \right\rfloor}} + 1000N$$

逆数の和の性質（→**4.4.4項**）より、下線部分の総和はおよそ $N \log_e N$ です。したがって $L \fallingdotseq N \log_e N + 1000N$ となります。これをランダウの O 記法を用いて表すと、計算量は $\boldsymbol{O(N \log N)}$ です。

問題 7

答えは次の表のようになります。

関数	N^2	N^3	2^N	3^N	$N!$
1 億	10000	**465**	**27**	**18**	**12**
5 億	22361	**794**	**29**	**19**	**13**
10 億	31623	**1000**	**30**	**19**	**13**

問題 8

(1) 答えは以下の通りです。前から一つずつ計算すると良いです。（→**3.7.1項**）

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	1	5	9	29	65	181	441	1165	2929

(2) 答えは以下の通りです。分からない人は、4.7 節に戻って確認しましょう。

$$A+B=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&8\\10&20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+5&4+8\\1+10&0+20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&12\\11&20\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&8\\10&20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times5+4\times10&1\times8+4\times20\\1\times5+0\times10&1\times8+0\times20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}45&88\\5&8\end{bmatrix}$$

(3) 答えは以下の通りです。分からない人は、4.7 節に戻って確認しましょう。

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\1&4\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}5&4\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&20\\5&4\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3\times A=\begin{bmatrix}9&20\\5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29&36\\9&20\end{bmatrix}$$

$$A^5=A^4\times A=\begin{bmatrix}29&36\\9&20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}65&181\\29&36\end{bmatrix}$$

(4) これは行列累乗でフィボナッチ数列が表せることと同じような理由です。まず、$a_n=a_{n-1}+4a_{n-2}$、$a_{n-1}=a_{n-1}$ より、次式が成り立ちます。

$$\begin{bmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\a_{n-2}\end{bmatrix}$$

この式を繰り返し適用させると、以下のように累乗を用いた式で表されます。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}a_n\\a_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n-1}\\a_{n-2}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}a_{n-2}\\a_{n-3}\end{bmatrix}\\&=\cdots\\&=\begin{bmatrix}1&4\\1&0\end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix}a_2\\a_1\end{bmatrix}=A^{n-2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

よって、a_n の値は A^{n-2} の $(1,1)$ 成分と $(1,2)$ 成分を足した値と等しいです。

（次ページへ続く）

そこで、次の式が成り立つため、「A^{n-2} の $(1,1)$ 成分と $(1,2)$ 成分を足した値」は「A^{n-1} の $(1,1)$ 成分」と一致します。

$$
\begin{aligned}
A^{n-2} \times A &= \begin{bmatrix} (1,1)\text{ 成分} & (1,2)\text{ 成分} \\ (2,1)\text{ 成分} & (2,2)\text{ 成分} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1,1)\text{ 成分} + (1,2)\text{ 成分} & (1,1)\text{ 成分} \times 4 \\ (2,1)\text{ 成分} + (2,2)\text{ 成分} & (2,1)\text{ 成分} \times 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

これが、$(1,1)$ 成分の値が数列に出現する値になっている理由です。

問題 9

1 XOR 2 XOR 3 XOR $\cdots$ XOR N の値を、いきなり $N = 1000000007$ のケースで求めるのは難しいので、まずは小さいケースで調べてみましょう（→**5.2節**）。

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答え	1	3	0	4	1	7	0	8	1	11	0

$N = 3, 7, 11$ では 1 XOR 2 XOR $\cdots$ XOR $N = 0$ であるため、この時点で「N を 4 で割ると 3 余るのではないか」という規則性が頭に浮かぶと思います。

それでは、この規則性は N が大きくなっても成り立つのでしょうか。答えは Yes であり、以下のようにして証明できます。

まず、x を 4 の倍数とするとき、以下の式が成り立ちます。

$$
\begin{aligned}
&\ x \text{ XOR } (x+1) \text{ XOR } (x+2) \text{ XOR } (x+3) \\
&= \underline{\{x \text{ XOR } (x+1)\}} \text{ XOR } \underline{\{(x+2) \text{ XOR } (x+3)\}} \\
&= 1 \text{ XOR } 1 = 0
\end{aligned}
$$

したがって、$N \bmod 4 = 3$ であるとき、求めるべき値は以下の通りです。

$$
\begin{aligned}
&\underline{1 \text{ XOR } 2 \text{ XOR } 3} \text{ XOR } \underline{4 \text{ XOR } 5 \text{ XOR } 6 \text{ XOR } 7} \text{ XOR } \cdots \text{ XOR } \underline{(N-3) \text{ XOR } (N-2) \text{ XOR } (N-1) \text{ XOR } N} \\
&= \quad 0 \quad \text{XOR} \quad 0 \quad \text{XOR} \cdots \text{XOR} \quad 0 \\
&= \quad 0
\end{aligned}
$$

そこで、$1000000007 \bmod 4 = 3$ であるため、答えは **0** です。

問題 10

この問題は直接計算しても解けますが、プログラミングを使わなければ面倒です。そこで、上から i 番目・左から j 番目のマスに $4i+j$ が書かれていることを使って、以下のように各マスの値を分解しましょう。

4	4	4	4	4	4	4	4
8	8	8	8	8	8	8	8
12	12	12	12	12	12	12	12
16	16	16	16	16	16	16	16
20	20	20	20	20	20	20	20
24	24	24	24	24	24	24	24
28	28	28	28	28	28	28	28
32	32	32	32	32	32	32	32

+

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8

すべてのマスの総和

64 個のマス全体では、$[4,8,12,16,20,24,28,32]$ が 8 回ずつ、$[1,2,3,4,5,6,7,8]$ が 8 回ずつ足されています。したがって、求める答えは以下の通りです。

$$
\begin{aligned}
&(4+8+12+16+20+24+28+32)\times 8+(1+2+3+4+5+6+7+8)\times 8 \\
&= 144\times 8+36\times 8 \\
&= \mathbf{1440}
\end{aligned}
$$

緑色のマスの総和

すべての行・すべての列について、8 個中 4 個（半分）が緑色で塗られています。すなわち $[4,8,12,16,\ldots]$ などが足された回数も半分になるため、求める答えは $1440\div 2=\mathbf{720}$ です。

※足された回数を考えるテクニックが分からない人は、5.7 節を確認してください。