6.3 最終確認問題 11-15 の解答

問題 11

1. 積の法則は確率にも適用できるので、答えは $(1/2)^8 = \mathbf{1/256}$ となります。

2. まず、あるマスが白になる可能性も黒になる可能性も 1/2 なので、
   - 白マルの個数の期待値：$64 \times (1/2) = 32$
   - 黒マルの個数の期待値：$64 \times (1/2) = 32$

   となります。期待値の線形性（→**3.4.3項**）より、[白の個数の期待値] × 2 + [黒の個数の期待値] = $(32 \times 2) + 32 = \mathbf{96}$ です。

3. 期待値の線形性より、求める答えは以下の式で表されます。

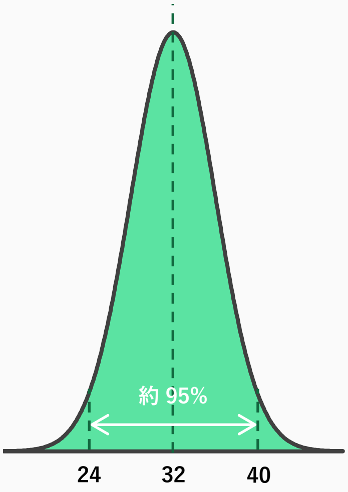
$$
\begin{aligned}
[\text{答え}] = &[1\ \text{行目が全部白になる確率}] + \cdots + [8\ \text{行目が全部白になる確率}] \\
&+ [1\ \text{列目が全部白になる確率}] + \cdots + [8\ \text{列目が全部白になる確率}] \\
&+ [1\ \text{つ目の対角線が全部白になる確率}] \\
&+ [2\ \text{つ目の対角線が全部白になる確率}]
\end{aligned}
$$

   そこで、すべての行・列・対角線は 8 個のマスから構成されるので、それぞれが全部白になる確率は $(1/2)^8 = 1/256$ です。したがって、答えは $1/256 + 1/256 + \cdots + 1/256 = 18 \times (1/256) = \mathbf{9/128}$ となります。

4. 各マスが白マルとなる確率は $p = 0.5$、マスの数は全部で $n = 64$ 個あるので、白マルの個数は

$$
\begin{aligned}
\text{平均 } \mu：& np = 64 \times 0.5 = 32 \\
\text{標準偏差 } \sigma：& \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{64 \times 0.5 \times 0.5} = 4
\end{aligned}
$$

   の正規分布に近似します（→**節末問題 3.5.1**）。そこで $\mu - 2\sigma = 24$、$\mu + 2\sigma = 40$ であるため、68-95-99.7則より白マスが 24 ~ 40 個となる確率は**約 95%** であるといえます。（右図参照）



問題 12

「123 を含まない数の個数」を考えると難しくなってしまうので、その余事象（→**5.4.1項**）に相当する「123 を含む数の個数」を考えてみましょう。

まず、123 を含む 999999 以下の数として、以下の 4 パターンが考えられます。ただし、場合分けが少なくなるように、5 桁以下のものは先頭を 0 で埋めた数を考えるものとします。（たとえば 1237 → 001237）

1	2	3	4
123???	?123??	??123?	???123
下 3 桁を決められるので 1000 通り（123 のみ）	3 つの桁を決められるので 1000 通り（123 のみ）	3 つの桁を決められるので 1000 通り（123 のみ）	3 つの桁を決められるので 1000 通り（123 のみ）

すべてのパターンについて、3 つの桁を 0 ~ 9 の範囲で自由に選べるので、積の法則（→**3.3.2項**）より $10 \times 10 \times 10 = 1000$ 通りがあります。そのため、「123 を含む数は全部で 4000 個だ」と思うかもしれません。

しかし、123123 という数はパターン 1 と 4 両方に数えられてしまっているため、実際の個数は $4000 - 1 = 3999$ 個です。

1	2	3	4
123123	?123??	??123?	123123

したがって、「123 を含む数の個数」は全体のパターン数 999999 から「123 を含む数の個数（3999 個）」を引いた値 **996000 個**となります。

問題 13

関数 `func(N)` の計算時間を a_N とすると、この関数が `func(N-1)`、`func(N-2)`、`func(N-3)`、`func(N-3)` を順に呼び出していることから、次式が成り立ちます。

$$a_N = a_{N-1} + a_{N-2} + a_{N-3} + a_{N-3}$$

そこで、$a_N = 2^N$ とすると $2^N = 2^{N-1} + 2^{N-2} + 2^{N-3} + 2^{N-3}$ となるため、つじつまが合います。したがって、`func(N)` の呼び出しの計算量は $O(2^N)$ です。

※注：「なんで $a_N = 2^N$ を当てはめる発想になるのだ！」と思った方は、実際に `func(N)` の実行時間を測定してみると答えのヒントが得られます。たとえば著者環境では、`func(25)` は 0.128 秒、`func(26)` は 0.259 秒であり、ほぼ 2 倍の差です。

問題 14 (1)

5 人の順位の組合せは $5! = 120$ 通りですが、4 回の質問の結果（誰が一番速いか）の組合せは $3^4 = 81$ 通りしかありません。後者の方が小さいため、4 回で当てることはできません。

問題 14 (2)

この問題には様々な解法が考えられるので、そのうち一つを紹介します。

ステップ 1

まず、5 人のうち最も速かった選手を、以下の方法によって調べます。

1. A・B・C を選び、誰が一番速かったかを聞く。
2. D・E・(1. で一番速かった選手) を選び、誰が一番速かったかを聞く。

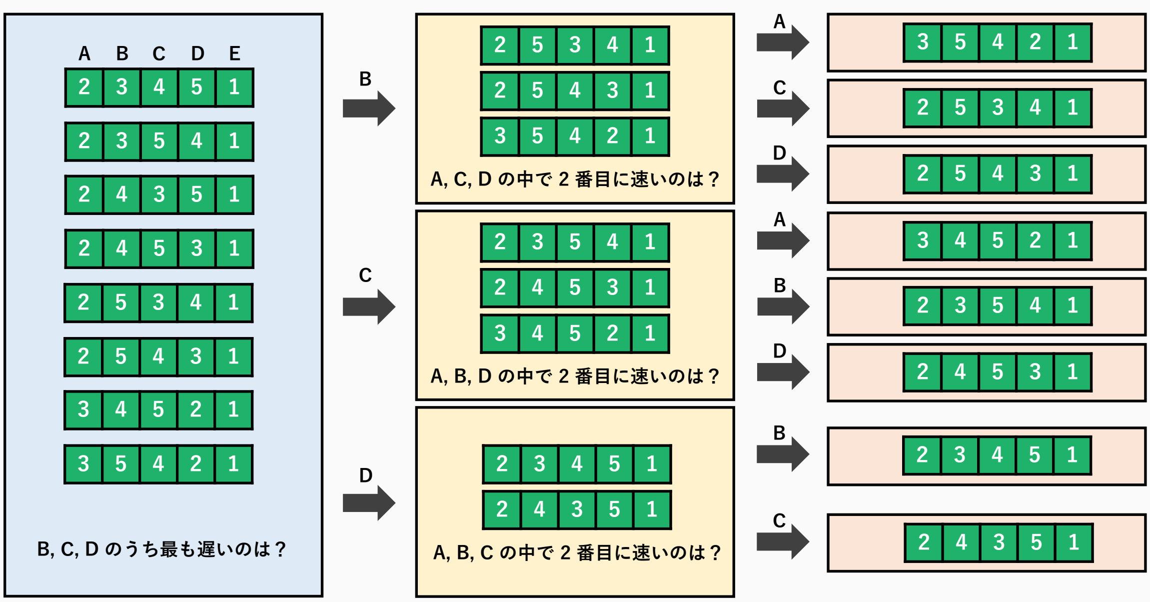
そうすると、残った 4 人の選手の順位を 3 回で当てる問題になります。以降、最も速かった選手を E であると仮定します。

ステップ 2

A・B・C の中で最も速い選手を聞きます。それが A である場合、順位の組合せは以下の 8 通りに絞られます。（数字は順位）

A	B	C	D	E
2	3	4	5	1
2	3	5	4	1
2	4	3	5	1
2	4	5	3	1
2	5	3	4	1
2	5	4	3	1
3	4	5	2	1
3	5	4	2	1

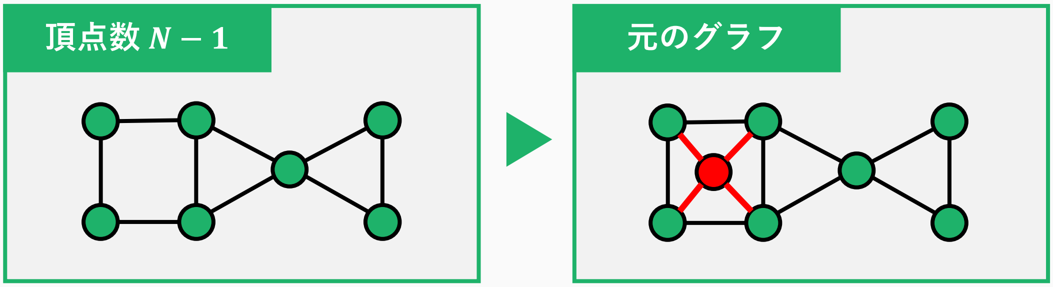
その後は以下のように質問することで、必ず 2 回で当てることが可能です。このようなプロセスにより、5 人全員の順位を計 5 回で当てることができました。



問題 15

まず、平面グラフには「頂点数が辺の数の 3 倍未満である」という性質があるため、次数が 5 以下の頂点が少なくとも一つ存在します。

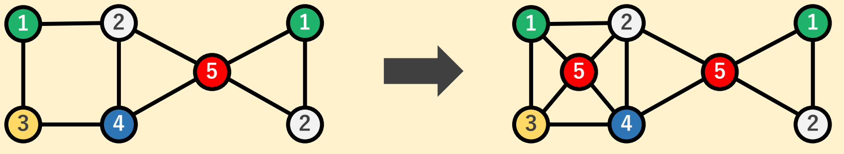
ですから、頂点数が $N-1$ の平面グラフに次数 5 以下の頂点を追加することで、元のグラフを作ることができます。



そこで、頂点数 $N-1$ の平面グラフを 5 彩色できると仮定した場合、頂点を追加したグラフが 5 彩色できることを証明しましょう（★）。以下のようになります。

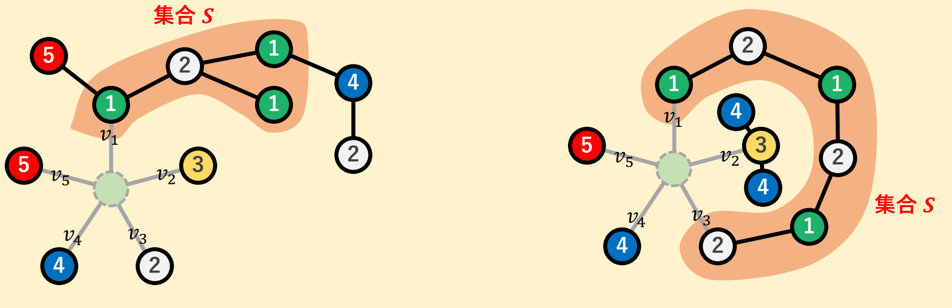
パターン 1：追加した頂点 u の次数が 4 以下である場合

下図のように、隣り合うどの頂点とも異なる色を塗れば良い。（色の選択肢は 5 つあるため、このような色は必ず存在する）



パターン 2：追加した頂点 u の次数が 5 である場合

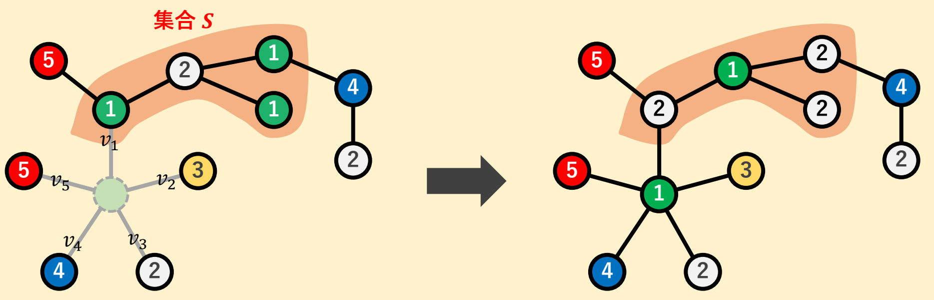
u に隣接する頂点を時計回りに v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 とし、v_1 の色を 1、v_3 の色を 2 とする。また、（頂点数 $N-1$ のグラフにおいて）頂点 v_1 から色 $1, 2$ の頂点だけを通ってたどり着ける頂点の集合を S とする。



そこで、v_3 が集合 S に含まれていなかった場合、以下の操作を行うと、色 1 が空く（追加頂点 u を色 1 に設定することができるという意味）。

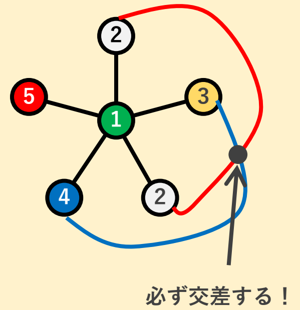
- S に含まれる色 1 の頂点をすべて色 2 にする。
- S に含まれる色 2 の頂点をすべて色 1 にする。

下図は、操作の具体例を示している。



一方、v_3 が集合 S に含まれている場合は、頂点 v_2（色 3）と v_4 （色 4）で同じことをやれば良い。具体的には、頂点 v_2 から色 3, 4 の頂点だけを通ってたどり着ける頂点の集合を T として、

- T に含まれる色 3 の頂点をすべて色 4 にする
- T に含まれる色 4 の頂点をすべて色 3 にする



という操作を行うと、色 3 が空く。なお、

- 頂点 v_1 から v_3 へ行く、頂点 u を通らない経路
- 頂点 v_2 から v_4 へ行く、頂点 u を通らない経路

は必ず交差するため、v_4 は絶対に集合 T に含まれない。

最後に、頂点数 1 のグラフは 5 彩色可能なので、（★）より頂点数 2 のグラフは OK、頂点数 3 のグラフは OK、頂点数 4 のグラフは OK･･･ となり、最終的に元のグラフも 5 彩色可能であることが証明できました。

なお、より分かりやすい証明を知りたい方は、chap6-11_15.md に掲載されている「高校数学の美しい物語」のWebサイトをご覧ください。