

## 2.3

## 節末問題 2.3 の解答

## 問題 2.3.1

この問題は、 $f(x)$  といった関数の表記（→2.3.1項）、多項式関数（→2.3.7項）の理解を問う問題です。答えは以下の通りです。

- $f(1) = 1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
- $f(5) = 5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
- $f(10) = 10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

なお、 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  の形で表される関数を **三次関数** といいます。この問題の  $f(x) = x^3$  も三次関数の一種です。

## 問題 2.3.2 (1)

この問題は、対数関数（→2.3.10項）の理解を問う問題です。

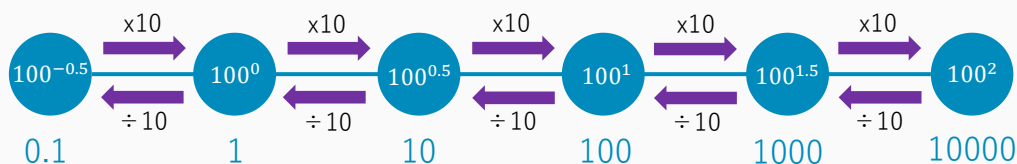
$2^3 = 8$  であるため、答えは  $\log_2 8 = 3$  です。（36 ページの例を参照）

## 問題 2.3.2 (2)

この問題は、べき乗の拡張（→2.3.8項）の理解を問う問題です。

一般に、 $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$  が成り立つため、 $a = 100, n = 3, m = 2$  を代入することで、

答えが  $100^{1.5} = \sqrt{100^3} = \sqrt{1000000} = 1000$  だと分かります。



## 問題 2.3.2 (3)

この問題は、床関数・天井関数（→2.3.11項）の理解を問う問題です。

$[20.21]$  は 20.21 以下の最大の整数 **20** です。

$\lceil 20.21 \rceil$  は 20.21 以上の最小の整数 **21** です。

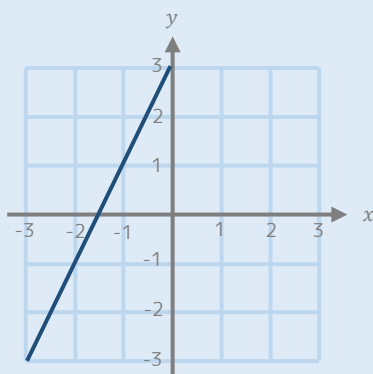
### 問題 2.3.3

この問題は、関数のグラフ（→2.3.4項）の理解を問う問題です。答えは下図のようになります。以下の点に注意するとグラフが描きやすいです。

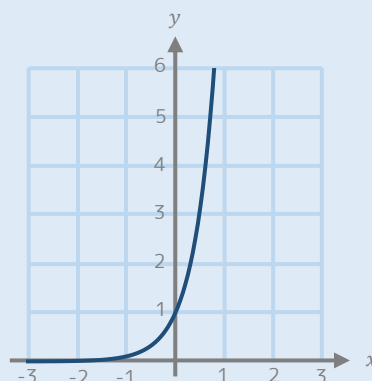
- 一次関数のグラフは直線である
- 指数関数は単調増加であり、増加ペースも急増する
- 対数関数は単調増加であるが、増加ペースは遅くなる

なお、3つ目のグラフと4つ目のグラフはまったく同一であることに注意してください。底の変換公式より、 $\log_4 x = \log_2 x \div \log_2 4 = (\log_2 x)/2$  が成り立ちます。

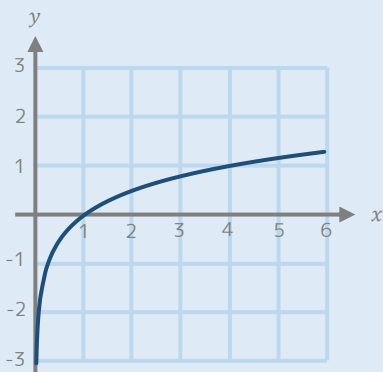
関数  $y = 2x + 3$



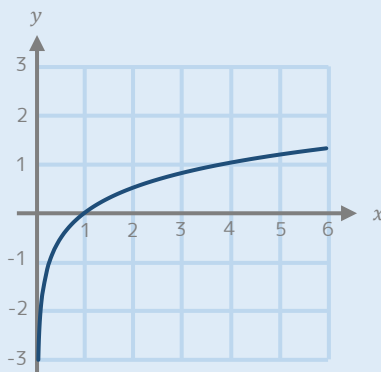
関数  $y = 10^x$



関数  $y = \log_4 x$



関数  $y = \frac{\log_2 x}{2}$



### 問題 2.3.4

この問題は、指数法則（→2.3.9項）の理解を問う問題です。答えは以下の通りです。

1.  $f(x) = 2^x$  のとき  $f(20) = 2^{20} = 1048576$
2. 指数法則より  $2^{20} = 2^{10} \times 2^{10}$  である。 $2^{10}$  がおよそ 1000 ということは、 $2^{20}$  はおよそ  $1000 \times 1000 = 1000000 (= 10^6)$  である。

問題 2.3.5 (1)

この問題は、対数関数（→2.3.10項）の理解を問う問題です。

$10^6 = 1000000$  より、 $g(1000000) = \log_{10} 1000000 = 6$  となります。

問題 2.3.5 (2)

この問題は、対数関数の公式（→2.3.10項）の理解を問う問題です。

$$\begin{aligned} &\log_2 16N - \log_2 N \\ &= \log_2 \left( \frac{16N}{N} \right) \\ &= \log_2 16 = 4 \end{aligned}$$

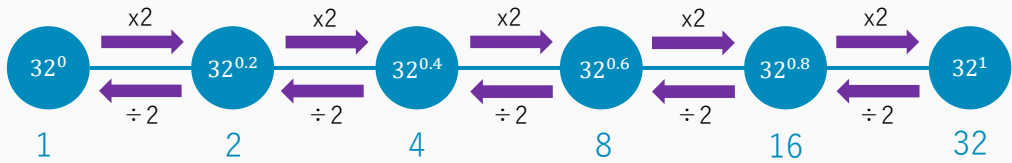
より、答えは 4 となります。なお、対数関数  $\log_a b$  には「真数  $b$  が定数倍（2 倍など）されると値が一定だけ増える」という性質があります。

問題 2.3.6

この問題は、指数が小数の場合のべき乗の公式（→2.3.8項）、指数法則（→2.3.9項）を使いこなせるかどうかを問う問題です。それぞれの問題の答えは以下のようになります。

番号	マグニチュード	差が何倍か？	答え
1.	6.0 vs 5.0	$32^{6.0-5.0} = 32^{1.0}$	= 32 倍
2.	7.3 vs 5.3	$32^{7.3-5.3} = 32^{2.0}$	= 1024 倍
3.	9.0 vs 7.2	$32^{9.0-7.2} = 32^{1.8}$	= 512 倍

なお、 $32^{1.8}$  の値は、 $32^{1.0} \times 32^{0.8} = 32 \times 16 = 512$  と計算することができます。また、 $32^{0.8}$  などは 2.3.8 項の図を見れば分かります。



### 問題 2.3.7

この問題の答えは  $y = \lfloor \log_2 x \rfloor + 1$  です。これは以下のようにして導出できます。

#### ステップ 1

ある整数  $x$  が 2 進法で  $n$  桁となるための条件は、 $2^{n-1} \leq x < 2^n$  を満たすことである。具体例は以下の通りである。

- 3 桁となる条件は、 $2^2 = 4$  以上  $2^3 = 8$  未満であること
- 4 桁となる条件は、 $2^3 = 8$  以上  $2^4 = 16$  未満であること
- 5 桁となる条件は、 $2^4 = 16$  以上  $2^5 = 32$  未満であること

#### ステップ 2

ステップ 1 を言い換えると、 $n - 1 \leq \log_2 x < n$  のとき、2 進法で  $n$  桁となります。すなわち  $\lfloor \log_2 x \rfloor = n - 1$  であるため、2 進法での桁数  $n$  は  $\lfloor \log_2 x \rfloor + 1$  桁です。

### 問題 2.3.8

答えの例として、たとえば  $f(x) = 1/(1 + 2^{-x})$  などが考えられます。なお、似たような関数として、機械学習などでよく使われる**シグモイド関数**があるので、興味のある人はぜひ調べてみましょう。

