

Matrix Theory

University of Chinese Academy of Sciences

Spring 2024

Congying Han

Homework 1

Chenkai GUO

2024.3.11

1. 假定 x_1, x_2, x_3 是 \mathbb{R}^2 的一个基, 试求由

$$y_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_3, \quad y_2 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, \quad y_3 = 4x_1 + 13x_2$$

生成的子空间 $L(y_1, y_2, y_3)$ 的基。

解: 由题可得, $y_3 = 3y_2 - 2y_1$, 因此 y_1, y_2 为 $L(y_1, y_2, y_3)$ 的一组基。

2. 在 \mathbb{R}^2 中, 设 $x = (\xi_1, \xi_2)$, 证明 $T_1x = (\xi_2, -\xi_1)$ 与 $T_2x = (\xi_1, -\xi_2)$ 是 \mathbb{R}^2 的两个线性变换, 并求 $T_1 + T_2$, T_1T_2 和 T_2T_1 。

解: 由题可得 (1) 唯一性显然, 对 $T_1x = (\xi_2, -\xi_1)$ 与 $T_2x = (\xi_1, -\xi_2)$ 仅有唯一 $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ 与之对应;

(2) 任取 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; k, l \in \mathbb{R}$, 有:

$$\begin{aligned} T_1(kx + ly) &= T_1[k(x_1, x_2) + l(y_1, y_2)] \\ &= T_1[(kx_1 + ly_1, kx_2 + ly_2)] \\ &= (kx_2 + ly_2, -kx_1 - ly_1) \\ &= k(x_2, -x_1) + l(y_2, -y_1) \\ &= kT_1(x) + lT_1(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(kx + ly) &= T_2[k(x_1, x_2) + l(y_1, y_2)] \\ &= T_2[(kx_1 + ly_1, kx_2 + ly_2)] \\ &= (kx_1 + ly_1, -kx_2 - ly_2) \\ &= k(x_1, -x_2) + l(y_1, -y_2) \\ &= kT_2(x) + lT_2(y) \end{aligned}$$

综上, $T_1x = (\xi_2, -\xi_1)$ 与 $T_2x = (\xi_1, -\xi_2)$ 是 \mathbb{R}^2 的两个线性变换, 证毕。

任取 $x = (\xi_1, \xi_2)$, 有 $(\xi_2, -\xi_1) = \xi_1(0, -1) + \xi_2(1, 0)$

$(\xi, -\xi z_2) = \xi_1(1, 0) + \xi_2(0, -1)$, 故:

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &= (\xi_1 + \xi_2)(1, 0) + (\xi_1 + \xi_2)(0, -1), \xi \in \mathbb{R} \\ T_1 T_2 &= T_1(T_2 X) = (-\xi_2, -\xi_1) = \xi_1(0, -1) + \xi_2(-1, 0) \\ T_2 T_1 &= T_2(T_1 X) = (\xi_2, \xi_1) = \xi_1(0, 1) + \xi_2(-1, 0) \end{aligned}$$

3. 在 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 中定义线性变换:

$$T_1 \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathbf{X}, \quad T_2 \mathbf{X} = \mathbf{X} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad T_3 \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathbf{X} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

求 T_1, T_2, T_3 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵。

解: 由题可得,

$$\begin{cases} T_1 E_{11} = aE_{11} + 0E_{12} + cE_{21} + 0E_{22} \\ T_1 E_{12} = 0E_{11} + aE_{12} + 0E_{21} + cE_{22} \\ T_1 E_{21} = bE_{11} + 0E_{12} + dE_{21} + 0E_{22} \\ T_1 E_{22} = 0E_{11} + bE_{12} + 0E_{21} + dE_{22} \end{cases}$$

因此 T_1 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为:
$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} T_2 E_{11} = aE_{11} + bE_{12} + 0E_{21} + 0E_{22} \\ T_2 E_{12} = cE_{11} + dE_{12} + 0E_{21} + 0E_{22} \\ T_2 E_{21} = 0E_{11} + 0E_{12} + aE_{21} + bE_{22} \\ T_2 E_{22} = 0E_{11} + 0E_{12} + cE_{21} + dE_{22} \end{cases}$$

因此 T_2 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为:
$$\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} T_3 E_{11} &= a^2 E_{11} + ab E_{12} + ac E_{21} + bc E_{22} \\ T_3 E_{12} &= ac E_{11} + ad E_{12} + c^2 E_{21} + cd E_{22} \\ T_3 E_{21} &= ab E_{11} + b^2 E_{12} + ad E_{21} + bd E_{22} \\ T_3 E_{22} &= bc E_{11} + bd E_{12} + cd E_{21} + d^2 E_{22} \end{cases}$$

因此 T_3 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为:

$$\begin{pmatrix} a^2 & ac & ab & bc \\ ab & ad & b^2 & bd \\ ac & c^2 & ad & bd \\ bc & cd & cd & d^2 \end{pmatrix}$$