Matrix Theory

University of Chinese Academy of Sciences

Spring 2024

Congying Han

Homework 5

Chenkai GUO

2024.4.13

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & c & c \\ c & 0 & c \\ c & c & 0 \end{bmatrix} (c \in \mathbb{R})$，讨论 c 取何值时，A 为收敛矩阵。

   解：根据收敛矩阵的充要条件可得，$\rho(A) < 1$，故：

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & c & c \\ c & -\lambda & c \\ c & c & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2c)(\lambda + c)^2$$

   因此 $\rho(A) = \max_i |\lambda_i| = 2|c| < 1$，故 $-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$

2. 证明：若 A 为实反对称矩阵 *($A^T = -A$)*，则 e^A 为正交矩阵。

   解，由题可得：$\because$ 对 $\forall k \in \mathbb{Z}^+$，有 $(A^k)^T = (A^T)^k$

   因此，根据矩阵指数函数公式可得：

$$\begin{aligned} (e^A)^T &= (I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(A^k))^T \\ &= I + A^T + \frac{1}{2!}(A^2)^T + \cdots + \frac{1}{k!}(A^k)^T \\ &= I + A^T + \frac{1}{2!}(A^T)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(A^T)^k \\ &= e^{A^T} = e^{-A} \end{aligned}$$

   因此有 $(e^A)^T \cdot e^A = e^{-A} \cdot e^A = e^{\mathbf{0}} = I$，故 e^A 为正交矩阵，证毕。

3. 设 $f(z) = \ln Z$，求 $f(A)$，这里 A 为：

   (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，*(2)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解：*(1)* 由题可得：对矩阵 A 进行 *Jordan* 标准化

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4 = 0$$

因此 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$，又 $\therefore d_1(\lambda)=1,\ d_2(\lambda)=1,\ d_3(\lambda)=1,\ d_4(\lambda)=(1-\lambda)^4$，因此矩阵 A 只有一个 *Jordan* 块：

$$J_1 = J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

接下来求可逆矩阵 P 使得 $A=PJP^{-1}$，根据 *Jordan* 矩阵可得下列方程组和解：

$$\begin{cases} (A-I)x_1 = 0 \\ (A-I)x_2 = x_1 \\ (A-I)x_3 = x_2 \\ (A-I)x_4 = x_3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此可逆矩阵 P 及其逆矩阵 P^{-1} 为：

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此可得：

$$\begin{aligned} f(A) = Pf(J)P^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 由题可得：对矩阵 A 进行 *Jordan* 标准化

$$|A-\lambda I| = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2 = 0$$

因此 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=\lambda_4=2$，因此矩阵 A 有两个 *Jordan* 块，其 *Jordan* 矩阵和 *Jordan* 块分别为：

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

接下来求可逆矩阵 P 使得 $A = PJP^{-1}$，根据 *Jordan* 矩阵可得下列方程组和解：

$$\begin{cases} (A-I)x_1 = 0 \\ (A-I)x_2 = x_1 \\ (A-2I)x_3 = 0 \\ (A-2I)x_4 = x_3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此可逆矩阵 P 及其逆矩阵 P^{-1} 为：

$$P = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此可得：

$$f(A) = P\begin{bmatrix} f(J_1) & 0 \\ 0 & f(J_2) \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \ln 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \ln 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \ln 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$