Matrix Theory

University of Chinese Academy of Sciences

Spring 2024

Congying Han

Homework 6

Chenkai GUO

2024.4.27

1. 求出 *Givens* 变换将向量 $x = (2, 3, 0, 5)^T$ 变换为与 e_1 同方向。

   解：① 构造矩阵 $T_{12}(c, s), c = \frac{2}{\sqrt{13}}, s = \frac{3}{\sqrt{13}}$，则有：

$$T_{12} \cdot x = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{13} \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   ② 构造矩阵 $T_{14}(c, s), c = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{38}}, s = \frac{5}{\sqrt{38}}$，则有：

$$T_{14}(T_{12}X) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{38}} & 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{38}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{\sqrt{38}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{38}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{13} \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{38} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   因此所构造的 *Givens* 矩阵为：

$$\therefore T = T_{14} \cdot T_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{38}} & 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{38}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{\sqrt{38}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{38}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{38}} & \frac{3}{\sqrt{38}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{38}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{10}{\sqrt{494}} & -\frac{15}{\sqrt{494}} & 0 & \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{38}} \end{bmatrix}$$

2. 设变换 $Hx = x - a(x, w)w \ (\forall x \in \mathbb{R}^n)$，其中 w 是欧氏长度为 1 的向量。a 取何值时，H 是正交矩阵？

   解：由题可得，若 H 是正交矩阵，则有 $(Hx, Hx) = (x, x)$，因此：

$$x^2 = x^2 - 2a(x, w) \cdot (x, w) + a^2(x, w)^2 w^2 \iff (a^2 - 2a)(x, w)^2 = 0$$

因此可得，当 $a=0$ 或 $a=2$，H 是正交矩阵。

3. 已知向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T\in\mathbb{R}^n$，求初等反射矩阵 H，使 $Hx=(\xi_1,\eta_2,0,\cdots,0)^T$

解，由题可得，令向量 $y=(\xi_1,\eta_2,0,\cdots,0)^T$，因此 $Hx=y$，因为初等反射矩阵可将向量变换为与单位列向量同方向，因此需要构造单位列向量 z，使得 $Hx=|x|z$；令 z 为向量 y 单位化后的向量，有：

$$z=\frac{1}{|y|}\cdot y=\frac{1}{|Hx|}\cdot y=\frac{1}{|x|}\cdot y$$

构造使得 x 与 z 同方向的初等反射矩阵 H，则有：

$$Hx=|x|z=|x|\cdot\frac{1}{|x|}\cdot y=y$$

这里，$H=I-2uu^T, u=\frac{x-|x|z}{\left|x-|x|z\right|}=\frac{x-y}{|x-y|}$

4. 用 *Givens* 变换求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&1\\0&2&2\\2&1&2\end{bmatrix}$ 的 QR 分解。

解：取矩阵 A 的第一列向量 $x_1=[2,0,2]^T$ 对其作 *Givens* 变换使其与 e_1 同方向因此，构造 $T_1^{(13)}(c,s),c=\frac{\sqrt{2}}{2},s=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则有：

$$T_1^{(13)}x_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\therefore T_1=T_1^{(13)}(c,s)$，因此：

$$T_1A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&1\\0&2&2\\2&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}&\frac{3\sqrt{2}}{2}&\frac{3\sqrt{2}}{2}\\0&2&2\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

取矩阵 $A^{(1)}=\begin{bmatrix}2&2\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$，对其第一列向量 $x_2=[2,-\frac{\sqrt{2}}{2}]^T$ 作 *Givens* 变换使其与 e_1 同方向，因此构造 $T_2^{(12)}(c,s),c=\frac{2\sqrt{2}}{3},s=-\frac{1}{3}$，则有：

$$T_2^{(12)}x_2=\begin{bmatrix}\frac{2\sqrt{2}}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}$$

$\therefore T_2=T_2^{(12)}(c,s)$，因此可得所构造的 *Givens* 矩阵为：

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & T_2\end{bmatrix}T_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

因此，可求得所需的矩阵 R 和矩阵 Q，使得 $A=QR$:

$$R=TA=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{6}\\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

$$Q=T^{-1}=T^H=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

5. 用 *Householder* 变换求矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$ 的 QR 分解。

解：取矩阵 A 的第一列向量 $x_1=[0,1,0]^T$ 对其作 *Householder* 变换使其与 e_1 同方向，根据 $|x_1|=1, x_1-|x_1|e_1=[-1,1,0]^T, \big|x_1-|x_1|e_1\big|=\sqrt{2}$ 构造：

$$u_1=\frac{x_1-|x_1|e_1}{\big|x_1-|x_1|e_1\big|}=\frac{\sqrt{2}}{2}[-1,1,0]^T$$

$$H_1=I-2u_1u_1^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此可得：

$$H_1A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

第二步，取矩阵 $A^{(1)}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，取其第一列向量 $x_2=[4,3]^T$ 并作 *Householder* 变换使其与 e_1 同方向，根据 $|x_2|=5, x_2-|x_2|e_1=[-1,3]^T, \big|x_2-|x_2|e_1\big|=\sqrt{10}$ 构造：

$$u_2=\frac{x_2-|x_2|e_1}{\big|x_2-|x_2|e_1\big|}=\frac{\sqrt{10}}{10}[-1,3]^T$$

$$H_2=I-2u_2u_2^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

因此可得所构造的 *Householder* 矩阵为：

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \cdot H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

因此，可求得所需的矩阵 R 和矩阵 Q，使得 $A = QR$：

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = H^{-1} = H^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$