Matrix Theory

University of Chinese Academy of Sciences

Spring 2024

Congying Han

Homework 2

Chenkai GUO

2024.3.18

1. 试计算 $2A^8+3A^5+A^4+A^2-4I$, 其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ (提示：考虑用 *Hamilton-Caley* 定理)

   解，由题可得：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&2\\0&\lambda+1&1\\0&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+1&1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-2\lambda+1$$

   根据 *Hamilton-Caley* 定理可知，$A^3-2A+I=0$，因此有：

$$\begin{array}{r|l}
 & 2A^5+4A^3+A^2+9A-2I \\ \hline
A^3-2A+I & 2A^8+3A^5+A^4+A^2-4I \\
 & 2A^8-4A^6+2A^5 \\ \hline
 & \quad 4A^6+A^5+A^4+A^2-4I \\
 & \quad 4A^6-8A^4+4A^3 \\ \hline
 & \qquad A^5+9A^4-4A^3+A^2-4I \\
 & \qquad A^5-2A^3+A^2 \\ \hline
 & \qquad\quad 9A^4-2A^3-4I \\
 & \qquad\quad 9A^4-18A^2+9A \\ \hline
 & \qquad\qquad -2A^3+18A^2-9A-4I \\
 & \qquad\qquad -2A^3+4A-2I \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 18A^2-13A-2I
\end{array}$$

因此：

$$2A^8+3A^5+A^4+A^2-4I=18A^2-13A-2I=\begin{bmatrix}3 & 36 & 10\\ 0 & 47 & -31\\ 0 & -31 & 16\end{bmatrix}$$

2. 给定线性空间 V^6 的基及线性变换 *T:*

$$T(x_i)=x_i+2x_{7-i}(i=1,2,\cdots,6)$$

求 T 的全体特征值与特征向量（利用已知基表示）；判断是否存在另一个基，使得 T 在该基下的矩阵为对角矩阵？若存在，把它构造出来（利用已知基表示）。

解，由题可得：取线性空间 V^6 的一组基 $\mathbf{X}_1=[1,0,0,0,0,0];\mathbf{X}_2=[0,1,0,0,0,0];\mathbf{X}_3=[0,0,1,0,0,0];\mathbf{X}_4=[0,0,0,1,0,0];\mathbf{X}_5=[0,0,0,0,1,0];\mathbf{X}_6=[0,0,0,0,0,1]$，故 T 在基 $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_4,\mathbf{X}_5,\mathbf{X}_6$ 下映射和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分别为：

$$\begin{aligned}T(\mathbf{X}_1)&=\mathbf{X}_1+2\mathbf{X}_6, & T(\mathbf{X}_4)&=\mathbf{X}_4+2\mathbf{X}_3\\ T(\mathbf{X}_2)&=\mathbf{X}_2+2\mathbf{X}_5, & T(\mathbf{X}_5)&=\mathbf{X}_5+2\mathbf{X}_2\\ T(\mathbf{X}_3)&=\mathbf{X}_3+2\mathbf{X}_4, & T(\mathbf{X}_6)&=\mathbf{X}_6+2\mathbf{X}_1\end{aligned}$$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & \lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}(\lambda-3)^3(\lambda+1)^3=0$$

故矩阵 $\mathbf{A}$ 有 *6* 个特征值：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3,\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=-1$，因此：

$$|3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

可得 3 个特征向量为：$[1,0,0,0,0,-1];[0,1,0,0,-1,0];[0,0,1,-1,0,0]$

$$|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

可得 3 个特征向量为：$[1,0,0,0,0,1]; [0,1,0,0,1,0]; [0,0,1,1,0,0]$

因此得到可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}_{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中：

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

根据 $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4, \mathbf{Y}_5, \mathbf{Y}_6) = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_6)\boldsymbol{P}$ 可求得使得线性变换 T 在下述基下的表示为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$：

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_6 = [1,0,0,0,0,-1] \\ \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_5 = [0,1,0,0,-1,0] \\ \mathbf{Y}_3 &= \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_4 = [0,0,1,-1,0,0] \\ \mathbf{Y}_4 &= \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_4 = [0,0,1,1,0,0] \\ \mathbf{Y}_5 &= \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_5 = [0,1,0,0,1,0] \\ \mathbf{Y}_6 &= \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_6 = [1,0,0,0,0,1] \end{aligned}$$

3. 求下列矩阵的若当标准形 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

解，由题可得：

$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -(\lambda+1) \\ 0 & -2(\lambda-2) & (\lambda+1)(\lambda-2) \\ 0 & \lambda-5 & 2(\lambda+1) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -(\lambda+1) \\ 0 & -(\lambda+1) & 0 \\ 0 & \lambda-5 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)
\end{aligned}
$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值 $-1,1,2$，故可得 *Jordan* 标准形为：

$$
\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{J} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}
$$