Matrix Theory
University of Chinese Academy of Sciences
Fall 2023
Congying Han

Homework 1

Chenkai GUO

2024.3.11

1. 假定 x_1, x_2, x_3 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个基，试求由

$$y_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_3,\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3,\ y_3 = 4x_1 + 13x_2$$

生成的子空间 $L(y_1, y_2, y_3)$ 的基。

解：由题可得，$y_3 = 3y_2 - 2y_1$，因此 y_1, y_2 为 $L(y_1, y_2, y_3)$ 的一组基。

2. 在 $\mathbb{R}^2$ 中，设 $x = (\xi_1, \xi_2)$，证明 $T_1x = (\xi_2, -\xi_1)$ 与 $T_2x = (\xi_1, -\xi_2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的两个线性变换，并求 $T_1 + T_2$，T_1T_2 和 T_2T_1。

解：由题可得 *(1)* 唯一性显然，对 $T_1x = (\xi_2, -\xi_1)$ 与 $T_2x = (\xi_1, -\xi_2)$ 仅有唯一 $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ 与之对应；
(2) 任取 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; k, l \in \mathbb{R}$，有：

$$\begin{aligned} T_1(kx + ly) &= T_1[k(x_1, x_2) + l(y_1, y_2)] \\ &= T_1[(kx_1 + ly_1, kx_2 + ly_2)] \\ &= (kx_2 + ly_2, -kx_1 - ly_1) \\ &= k(x_2, -x_1) + l(y_2, -y_1) \\ &= kT_1(x) + lT_1(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(kx + ly) &= T_2[k(x_1, x_2) + l(y_1, y_2)] \\ &= T_2[(kx_1 + ly_1, kx_2 + ly_2)] \\ &= (kx_1 + ly_1, -kx_2 - ly_2) \\ &= k(x_1, -x_2) + l(y_1, -y_2) \\ &= kT_2(x) + lT_2(y) \end{aligned}$$

综上，$T_1x = (\xi_2, -\xi_1)$ 与 $T_2x = (\xi_1, -\xi_2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的两个线性变换，证毕。
任取 $x = (\xi_1, \xi_2)$，有 $(\xi_2, -\xi_1) = \xi_1(0, -1) + \xi_2(1, 0)$

$(\xi,-\xi z_2)=\xi_1(1,0)+\xi_2(0,-1)$，故：

$$\begin{aligned}T_1+T_2&=(\xi_1+\xi_2)(1,0)+(\xi_1+\xi_2)(0,-1),\xi\in\mathbb{R}\\T_1T_2&=T_1(T_2X)=(-\xi_2,-\xi_1)=\xi_1(0,-1)+\xi_2(-1,0)\\T_2T_1&=T_2(T_1X)=(\xi_2,\xi_1)=\xi_1(0,1)+\xi_2(-1,0)\end{aligned}$$

3. 在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中定义线性变换：

$$T_1\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\boldsymbol{X},\ T_2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix},\ T_3\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

求 T_1,T_2,T_3 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵。

解：由题可得,

$$\begin{cases}T_1E_{11}=aE_{11}+0E_{12}+cE_{21}+0E_{22}\\T_1E_{12}=0E_{11}+aE_{12}+0E_{21}+cE_{22}\\T_1E_{21}=bE_{11}+0E_{12}+dE_{21}+0E_{22}\\T_1E_{22}=0E_{11}+bE_{12}+0E_{21}+dE_{22}\end{cases}$$

因此 T_1 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为：$\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}T_2E_{11}=&aE_{11}+bE_{12}+0E_{11}+0E_{22}\\T_2E_{12}=&cE_{11}+dE_{12}+0E_{21}+0E_{22}\\T_2E_{21}=&0E_{11}+0E_{12}+aE_{21}+bE_{22}\\T_2E_{22}=&0E_{11}+0E_{12}+cE_{21}+dE_{22}\end{cases}$$

因此 T_2 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为：$\begin{pmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&a&c\\0&0&b&d\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}T_3E_{11}&=a^2E_{11}+abE_{12}+acE_{21}+bcE_{22}\\T_3E_{12}&=acE_{11}+adE_{12}+c^2E_{21}+cdE_{22}\\T_3E_{21}&=abE_{11}+b^2E_{12}+adE_{21}+bdE_{22}\\T_3E_{22}&=bcE_{11}+bdE_{12}+cdE_{21}+d^2E_{22}\end{cases}$$

因此 T_3 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为：$\begin{pmatrix} a^2 & ac & ab & bc \\ ab & ad & b^2 & bd \\ ac & c^2 & ad & bd \\ bc & cd & cd & d^2 \end{pmatrix}$