Matrix Theory
University of Chinese Academy of Sciences
Spring 2024
Congying Han

Homework 4

Chenkai GUO

2024.4.4

1. 设矩阵 $S \in C^{m\times n}$ 列满秩，给定 C^m 上的一种向量范数 $||\cdot||$，证明：

$$\|x\|_s = \|Sx\| \quad (\forall x \in C^n)$$

是 C^n 上的向量范数。

解，由题可得，根据向量范数的性质，依次证明：①非负性：当 $x=\mathbf{0}$ 时，显然 $\|x\|_s = \|S\cdot\mathbf{0}\| = 0$
当 $x \neq \mathbf{0}$ 时，因为 S 列满秩，所以 $Sx \neq \mathbf{0}$，故 $\|x\|_s = \|Sx\| > 0$
②齐次性：取 $\forall a \in K, x \in C^n$，有：$\|ax\|_s = \|S\cdot ax\| = a\|Sx\|$
③三角不等式：取 $\forall x, y \in C^n$，有：

$$\|x+y\|_s = \|S(x+y)\| = \|Sx+Sy\| \leq \|Sx\| + \|Sy\|$$

2. 设可逆方阵 $S \in C^{n\times n}$，且知 $\|x\|_s = \|Sx\|_2$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的向量范数。若 $\|A\|_s$ 表示 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上从属于向量范数 $\|x\|_s$ 的矩阵范数，试导出 $\|A\|_s$ 与矩阵 2-范数之间的关系式。

解，根据从属范数的定义有：

$$\|A\|_s = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|_s = \max_{\|Sx\|=1}\|SAS^{-1}Sx\|_2 = \|SAS^{-1}\|_2$$

3. 证明：$A \in C^{n\times n}, B \in C^{n\times n}$，若对某种矩阵范数有 $\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$，则 $A+B$ 可逆。

解，根据 *Cauchy-Schwartz* 不等式可得：

$$||-A^{-1}B|| = ||A^{-1}B|| \leq ||A^{-1}||\cdot||B|| < ||A^{-1}||\cdot\frac{1}{||A^{-1}||} = 1$$

构造序列 $S_k = I + E + E^2 + \cdots + E^k, k = -A^{-1}B$，利用等比求和公式则有：

$$S_k = \sum_0^k E^k = (I-E)^{-1} = (I+A^{-1}B)^{-1}$$

故可得矩阵 $I + A^{-1}B$ 可逆，因此有：

$$A + B = A \cdot (I + A^{-1}B)$$

又因为 A 是可逆矩阵，可逆矩阵的乘积一定为可逆矩阵，故矩阵 $A + B$ 为可逆矩阵，证毕

（实际上，上述构造序列法即为 *Von Neumann* 引理内容）