Matrix Theory

University of Chinese Academy of Sciences

Spring 2024

Congying Han

Homework 2

Chenkai GUO

2024.3.18

1. 试计算 $2A^8+3A^5+A^4+A^2-4I$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$（提示：考虑用 *Hamilton-Caley* 定理）

   解，由题可得：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda+1&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+1&1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-2\lambda+1$$

   根据 *Hamilton-Caley* 定理可知，$A^3-2A+I=0$，因此有：

$$\begin{array}{r|l}
 & 2A^5+4A^3+A^2+9A-2I \\ \hline
A^3-2A+I & 2A^8+3A^5+A^4+A^2-4I \\
 & 2A^8-4A^6+2A^5 \\ \cline{2-2}
 & 4A^6+A^5+A^4+A^2-4I \\
 & 4A^6-8A^4+4A^3 \\ \cline{2-2}
 & A^5+9A^4-4A^3+A^2-4I \\
 & A^5-2A^3+A^2 \\ \cline{2-2}
 & 9A^4-2A^3-4I \\
 & 9A^4-18A^2+9A \\ \cline{2-2}
 & -2A^3+18A^2-9A-4I \\
 & -2A^3+4A-2I \\ \cline{2-2}
 & 18A^2-13A-2I
\end{array}$$

因此：

$$2A^8+3A^5+A^4+A^2-4I=18A^2-13A-2I=\begin{bmatrix}3&36&10\\0&47&-31\\0&-31&16\end{bmatrix}$$

2. 给定线性空间 V^6 的基及线性变换 T:

$$T(x_i)=x_i+2x_{7-i}(i=1,2,\cdots,6)$$

求 T 的全体特征值与特征向量（利用已知基表示）；判断是否存在另一个基，使得 T 在该基下的矩阵为对角矩阵？若存在，把它构造出来（利用已知基表示）。

解，由题可得：取线性空间 V^6 的一组基 $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_4,\mathbf{X}_5,\mathbf{X}_6$，故 T 在该基下映射和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分别为：

$$\begin{aligned}T(\mathbf{X}_1)&=\mathbf{X}_1+2\mathbf{X}_6,\quad T(\mathbf{X}_4)=\mathbf{X}_4+2\mathbf{X}_3\\T(\mathbf{X}_2)&=\mathbf{X}_2+2\mathbf{X}_5,\quad T(\mathbf{X}_5)=\mathbf{X}_5+2\mathbf{X}_2\\T(\mathbf{X}_3)&=\mathbf{X}_3+2\mathbf{X}_4,\quad T(\mathbf{X}_6)=\mathbf{X}_6+2\mathbf{X}_1\end{aligned}$$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0&0&0&-2\\0&\lambda-1&0&0&-2&0\\0&0&\lambda-1&-2&0&0\\0&0&-2&\lambda-1&0&0\\0&-2&0&0&\lambda-1&0\\-2&0&0&0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(\lambda-3)^3(\lambda+1)^3=0$$

故矩阵 $\mathbf{A}$ 有 *6* 个特征值：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3,\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=-1$，因此：

$$|3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0&0&0&0&-2\\0&2&0&0&-2&0\\0&0&2&-2&0&0\\0&0&-2&2&0&0\\0&-2&0&0&2&0\\-2&0&0&0&0&2\end{vmatrix}$$

可得 3 个特征向量为：$[1,0,0,0,0,1];[0,1,0,0,1,0];[0,0,1,1,0,0]$

$$|-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

可得 3 个特征向量为：$[1,0,0,0,0,-1];[0,1,0,0,-1,0];[0,0,1,-1,0,0]$

因此得到可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}_{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中：

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

根据 $(\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\mathbf{Y}_3,\mathbf{Y}_4,\mathbf{Y}_5,\mathbf{Y}_6) = (\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_4,\mathbf{X}_5,\mathbf{X}_6)\boldsymbol{P}$ 可求得使得线性变换 T 在下述基下的表示为对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$：

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_6,\ \mathbf{Y}_2 = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_5$$
$$\mathbf{Y}_3 = \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_4,\ \mathbf{Y}_4 = \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_4$$
$$\mathbf{Y}_5 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_5,\ \mathbf{Y}_6 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_6$$

3. 求下列矩阵的若当标准形 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

解，由题可得：

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -(\lambda+1) \\ 0 & -2(\lambda-2) & -(\lambda+1)(\lambda-2) \\ 0 & \lambda+3 & 2(\lambda+1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -(\lambda+1) \\ 0 & -(\lambda+1) & 0 \\ 0 & \lambda+3 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值 $-1, 1, 2$，故可得 *Jordan* 标准形为：

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{J} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$