Matrix Theory

University of Chinese Academy of Sciences

Spring 2024

Congying Han

Homework 8

Chenkai GUO

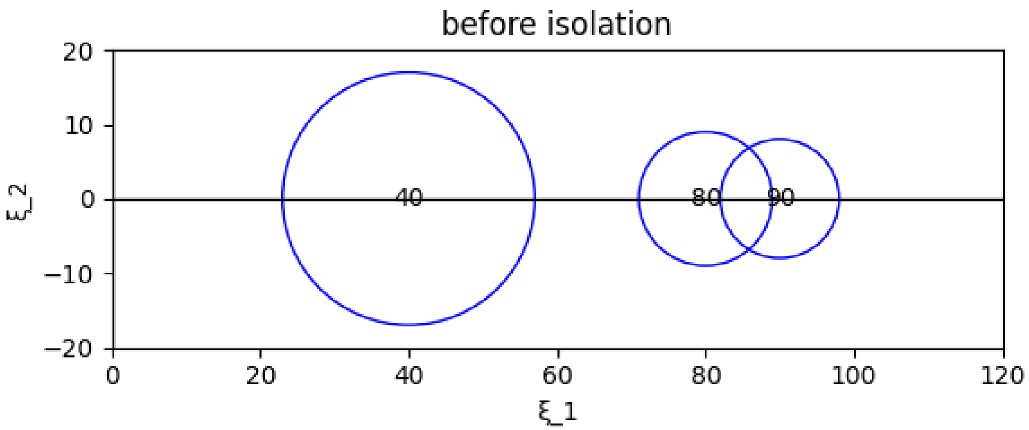
2024.5.10

1. 用盖尔圆定理隔离 $A = \begin{bmatrix} 90 & 1 & 7 \\ 1 & 80 & 8 \\ 15 & 2 & 40 \end{bmatrix}$ 的特征值（画图表示），并根据实矩阵特征值的性质改进所得结果。

   解：由题可得，根据盖尔圆的定义可得矩阵 A 的 3 个盖尔圆是：

$$G_1 : |z - 90| \leq 8$$
$$G_2 : |z - 80| \leq 9$$
$$G_3 : |z - 40| \leq 17$$

其可视化展示为：



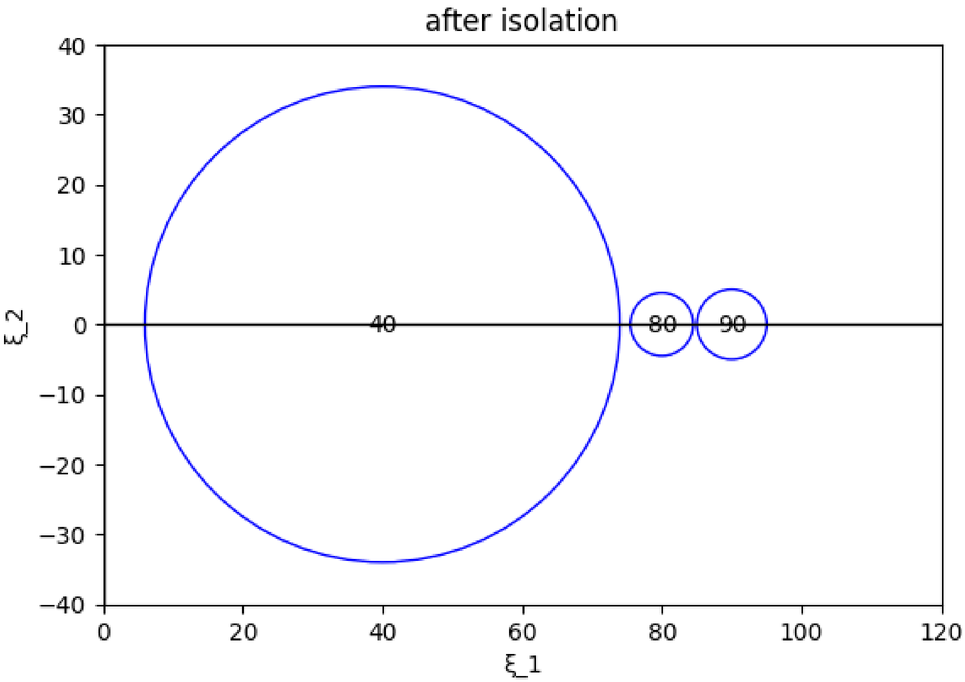
构造矩阵 $D = diag[1, 1, 2]$ 可得：

$$B = DAD^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90 & 1 & 7 \\ 1 & 80 & 8 \\ 15 & 2 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 1 & 3.5 \\ 1 & 80 & 4 \\ 30 & 4 & 40 \end{bmatrix}$$

因为相似矩阵拥有相同的特征值，因此矩阵 B 和矩阵 A 的特征值相同，此时矩阵 B 的盖尔圆为：

$$G_1 : |z - 90| \leq 4$$
$$G_2 : |z - 80| \leq 4.5$$
$$G_3 : |z - 40| \leq 34$$

即得到隔离后的特征值范围，示意图如下所示：



2. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，如果 A 的 n 个盖尔圆互不相交,$\lambda(A)$ 是实数

证明：根据 *Gerschgorin* 第二定理，矩阵 A 的盖尔圆连通部分由 k 个盖尔圆组成，则该连通部分有且仅有矩阵 A 的 k 个特征值；又 $\because$ 矩阵 A 的 n 个盖尔圆互不相交，则每个盖尔圆有且仅有矩阵 A 的 1 个特征值；因此，若矩阵 A 存在复数特征值 λ，则其共轭复数 $\bar{\lambda}$ 亦为矩阵 A 的特征值，则包含特征值 λ 的盖尔圆将会包含矩阵 A 的 2 个特征值：λ 和 $\bar{\lambda}$，与所给条件矛盾，因此 $\lambda(A)$ 是实数，证毕。

3. 应用 *Ostrowski* 定理 (或推论)，证明矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

的谱半径 $\rho(A) < 13$。

解：由题可得：

$$\rho_1(A) = 14, \rho_2(A) = 10, \rho_3(A) = 16, \rho_4(A) = 8$$
$$\rho_1(A^T) = 9, \rho_2(A^T) = 16, \rho_3(A^T) = 8, \rho_4(A^T) = 14$$

根据 *Ostrowski* 定理的 *Farnell A B* 推论 $\rho(A) \leq \max_i [\rho_i(A)\rho_i(A^T)]^{\frac{1}{2}}$ 可得：

$$\rho(A) \leq \sqrt{160} < 13$$

证毕