Matrix Theory

University of Chinese Academy of Sciences

Spring 2024

Congying Han

Homework 3

Chenkai GUO

2024.3.23

1. 求下列矩阵的特征多项式和最小多项式

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

解，由题可得：矩阵 A 的特征多项式为

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & -4 \\ 4 & -8-\lambda & -1 \\ -4 & -1 & -8-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+9) \begin{vmatrix} 7-\lambda & 8 & 0 \\ 4 & -7-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda+9)(\lambda-9)^2$$

又因为：

$$A^2 = \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}$$

代入易得矩阵 A 的最小多项式为 $(\lambda+9)(\lambda-9) = \lambda^2 - 81$

2. 写出如下矩阵的 *Jordan* 标准形

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

解，由题可得：

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 2-\lambda & 1 \\ -7 & -6 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

由此，求得该 λ 矩阵的不变因子为：$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=1, d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$
故该矩阵的 *Jordan* 标准形为：

$$J=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

3. 设 $A_1=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\-8&8&-1\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}A_1&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&A_2\end{bmatrix}$

(1) 求 A 的 *Jordan* 标准形 J

(2) 求可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP=J$

(1) 解，由题可得：

$$|A_1-\lambda I|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-4&3-\lambda&0\\-8&8&-1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)\,(\lambda-1)^2$$

矩阵 A_1 的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=1$

$$|A_2-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2$$

矩阵 A_2 的特征值为 $\lambda_4=\lambda_5=1$
综上，A 的 *Jordan* 标准形为：

$$J=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(2) 解：分别求矩阵 A_1 和 A_2 的可逆矩阵 P_1, P_2，使得 $P_1^{-1}A_1P_1=J_1, P_2^{-1}A_2P_2=J_2$
由 *(1)* 可得方程组：

$$\begin{cases}(A_1-\lambda_1 I)x_1=0\\(A_1-\lambda_2 I)x_2=0\\(A_1-\lambda_3 I)x_3=x_2\end{cases}, \quad \begin{cases}(A_2-\lambda_4 I)x_4=0\\(A_2-\lambda_5 I)x_5=x_4\end{cases}$$

解得：$x_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},x_2=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},x_3=k_1\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix},x_4=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},x_5=k_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

故可得：

$$P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&4&2\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

因此可逆矩阵 P 为：

$$P=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\1&4&2&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

4. 设线性空间 V^3 的一个基为 x_1,x_2,x_3，线性变换 T 在这组基下的矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&3&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

令 $y_1=x_1+x_2,\quad y_2=x_1+x_2+x_3$，证明空间 $W=L(y_1,y_2)$ 是 T 的不变子空间。

解，由题可得：空间 W 的基 y_1,y_2 作线性变换 T 可得：

$$A[y_1,y_2]=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&3&1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\2&3\\0&1\end{bmatrix}=[z_1,z_2]$$

又因为 $z_1=2y_1,z_2=2y_1+y_2$ 因此基 y_1,y_2 经过线性变换 T 后仍在空间 $W=L(y_1,y_2)$ 中，可得空间 W 是 T 的不变子空间。