Matrix Theory

University of Chinese Academy of Sciences

Spring 2024

Congying Han

Homework 9

Chenkai GUO

2024.5.30

1. 设 $\mathbb{R}^3$ 的子空间 L 是由向量 $e_1 = (1,0,0)^T$ 生成

 (*1*) 若子空间 M 由 $\alpha = (1,1,0)^T$ 和 $\beta = (1,1,1)^T$ 生成，求投影矩阵 $P_{L,M}$ 和向量 $x = (2,3,1)^T$ 沿着 M 到 L 的投影。

 (*2*) 求正交投影矩阵 P_L 和向量 $x = (2,3,1)^T$ 在 L 上的正交投影。

 解：(*1*) 令 $X = \{e_1\}, Y = \{\alpha, \beta\}$，则有：

$$P_{L,M} = \left[\begin{array}{c:c} X & O \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} X & Y \end{array}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P_{L,M}(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

 (*2*) 由题可得：

$$P_L = P_{L,L^\perp} = e_1(e_1^H e_1)^{-1}e_1^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P_L(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. 证明满足以下三个矩阵方程

$$AX = B,\ XA = D,\ XAX = X$$

的矩阵 X 是唯一的（如果存在的话）。

证明：假设满足题干的三个矩阵方程的矩阵 X 不唯一，设其中任意两个满足的矩阵为 X_1 和 X_2，则有：

$$X_1 = X_1AX_1 = DX_1 = X_2AX_1 = X_2B = X_2AX_2 = X_2$$

与假设矛盾，故满足题干的三个矩阵方程的矩阵 X 唯一