

1. 设矩阵 $S \in C^{m \times n}$ 列满秩, 给定 C^m 上的一种向量范数 $\|\cdot\|$, 证明:

$$\|x\|_s = \|Sx\| \quad (\forall x \in C^n)$$

是 C^n 上的向量范数。

2. 设可逆方阵 $S \in R^{n \times n}$, 且知 $\|x\|_s = \|Sx\|_2$ 是 R^n 上的向量范数。若 $\|A\|_s$ 表示 $R^{n \times n}$ 上从属于向量范数 $\|x\|_s$ 的矩阵范数, 试导出 $\|A\|_s$ 与矩阵 2-范数之间的关系式。

3. 证明: $A \in C^{n \times n}$, $B \in C^{n \times n}$, 若对某种矩阵范数有 $\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, 则 $A+B$ 可逆。