

Matrix Theory

University of Chinese Academy of Sciences

Spring 2024

Congying Han

Homework 3

Chenkai GUO

2024.4.4

1. 设矩阵 $S \in C^{m \times n}$ 列满秩, 给定 C^m 上的一种向量范数 $\|\cdot\|$, 证明:

$$\|x\|_s = \|Sx\| \quad (\forall x \in C^n)$$

是 C^n 上的向量范数。

解, 由题可得, 根据向量范数的性质, 依次证明: ①非负性: 当 $x = \mathbf{0}$ 时, 显然 $\|x\|_s = \|S \cdot \mathbf{0}\| = 0$

当 $x \neq \mathbf{0}$ 时, 因为 S 列满秩, 所以 $Sx \neq \mathbf{0}$, 故 $\|x\|_s = \|Sx\| > 0$

②齐次性: 取 $\forall a \in K, x \in C^n$, 有: $\|ax\|_s = \|S \cdot ax\| = a\|Sx\|$

③三角不等式: 取 $\forall x, y \in C^n$, 有:

$$\|x + y\|_s = \|S(x + y)\| = \|Sx + Sy\| \leq \|Sx\| + \|Sy\|$$

2. 设可逆方阵 $S \in C^{n \times n}$, 且知 $\|x\|_s = \|Sx\|_2$ 是 \mathbb{R}^n 上的向量范数。若 $\|A\|_s$ 表示 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上从属于向量范数 $\|x\|_s$ 的矩阵范数, 试导出 $\|A\|_s$ 与矩阵 2-范数之间的关系式。

解, 根据从属范数的定义有:

$$\|A\|_s = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_s = \max_{\|Sx\|=1} \|SAS^{-1}Sx\|_2 = \|SAS^{-1}\|_2$$

3. 证明: $A \in C^{n \times n}, B \in C^{n \times n}$, 若对某种矩阵范数有 $\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, 则 $A + B$ 可逆。

解, 根据 Cauchy-Schwartz 不等式可得:

$$\| -A^{-1}B \| = \|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B\| < \|A^{-1}\| \cdot \frac{1}{\|A^{-1}\|} = 1$$

构造序列 $S_k = I + E + E^2 + \cdots + E^k, k = -A^{-1}B$, 利用等比求和公式则有:

$$S_k = \sum_{0}^k E^k = (I - E)^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1}$$

故可得矩阵 $I + A^{-1}B$ 可逆，因此有：

$$A + B = A \cdot (I + A^{-1}B)$$

又因为 A 是可逆矩阵，可逆矩阵的乘积一定为可逆矩阵，故矩阵 $A + B$ 为可逆矩阵，证毕

(实际上，上述构造序列法即为 *Von Neumann* 引理内容)