快速傅立葉轉換(FFT)

在離散傅立葉轉換中，一次會有 n 個值經由傅立葉矩陣進行傅立葉轉換得到新的 n 個值，進行傅立葉矩陣乘法時，離散傅立葉轉換的時間複雜度為 $O(n^2)$，快速傅立葉轉換可將時間複雜度降為 $O(n\log_2 n)$。

假設複數集$\{1,\omega,\omega^2,\omega^3, \omega^4, \ldots \omega^{n-1}\}$為 $Z^n = 1$ 的根，則複數集$\{1, \omega^2,\omega^4, \ldots, \omega^{n-2}\}$為 $Z^{n/2} = 1$ 的根，對於 $m = 2^k$，$k \in N$，$\{1, \omega^m,\omega^{2m}, \ldots, \omega^{n-m}\}$是 $Z^{n/m} = 1$ 的根(理論一)，利用此性質將傅立葉矩陣進行 divide and conquer。

由於 $\omega^{k+n/2}= e^{-2\pi i(k+n/2)/n} = \cos\left(2\pi\frac{k+\frac{n}{2}}{n}\right) - i\sin\left(2\pi\frac{k+\frac{n}{2}}{n}\right) = \cos\left(2\pi\frac{k}{n} + \pi\right) - i\sin\left(2\pi\frac{k}{n} + \pi\right)$

$$= -\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = -\left[\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right] = -\omega^k$$

故 $\omega^{k+n/2} = -\omega^k$ ，若 $n = 8$，則 $\omega^4 = -1$，$\omega^5 = -\omega$，$\omega^6 = -\omega^2$，$\omega^7 = -\omega^3$ (1)

下列用 8 × 8 傅立葉矩陣來當例子說明：

$$F_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 & \omega^7 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega & \omega^4 & \omega^7 & \omega^2 & \omega^5 \\ 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 \\ 1 & \omega^5 & \omega^2 & \omega^7 & \omega^4 & \omega & \omega^6 & \omega^3 \\ 1 & \omega^6 & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^6 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^7 & \omega^6 & \omega^5 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \text{(經由(1)替代)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & -1 & -\omega & -\omega^2 & -\omega^3 \\ 1 & \omega^2 & -1 & -\omega^2 & 1 & \omega^2 & -1 & -\omega^2 \\ 1 & \omega^3 & -\omega^2 & \omega & -1 & -\omega^3 & \omega^2 & -\omega \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega & \omega^2 & -\omega^3 & -1 & \omega & -\omega^2 & \omega^3 \\ 1 & -\omega^2 & -1 & \omega^2 & 1 & -\omega^2 & -1 & \omega^2 \\ 1 & -\omega^3 & -\omega^2 & -\omega & -1 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}$$

延續上列矩陣的 ω，則 4 × 4 傅立葉矩陣為：

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 \\ 1 & \omega^6 & \omega^4 & \omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & -1 & -\omega^2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega^2 & -1 & \omega^2 \end{bmatrix}$$

在此能發現，若將 F_8 的偶數行往前移動，會出現 F_4 矩陣，因此將 F_8 乘上排列矩陣(permutation matrix)。

令 $P_8^T = [e_0\ e_2\ e_4\ e_6\ e_1\ e_3\ e_5\ e_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$F_8P_8^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & -1 & -\omega^2 & \omega & \omega^3 & -\omega & -\omega^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \omega^2 & -\omega^2 & \omega^2 & -\omega^2 \\ 1 & -\omega^2 & -1 & \omega^2 & \omega^3 & \omega & -\omega^3 & -\omega \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \omega^2 & -1 & -\omega^2 & -\omega & -\omega^3 & \omega & \omega^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -\omega^2 & \omega^2 & -\omega^2 & \omega^2 \\ 1 & -\omega^2 & -1 & \omega^2 & -\omega^3 & -\omega & \omega^3 & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4 & D_4F_4 \\ F_4 & -D_4F_4 \end{bmatrix}$$

上式的 D_4 為 diagonal matrix，$D_4 = \mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2, \omega^3)$，對角元素為 $Z^8 = 1$ 的前 4 個根。

一般狀況可表示為下：$\omega = e^{2\pi i/n}$ ，對於 $m = 2^k \le n$，$k \in N$，由於 permutation matrix 屬於 orthogonal matrix，具有 $P_\pi P_\pi^T = P_\pi^T P_\pi = I$ 性值，故傅立葉矩陣 F_m 分塊表示法如下：

$$F_m = \begin{bmatrix} F_{\frac{m}{2}} & D_{\frac{m}{2}}F_{\frac{m}{2}} \\ F_{\frac{m}{2}} & -D_{\frac{m}{2}}F_{\frac{m}{2}} \end{bmatrix} P_m \qquad (2)$$

其中 $F_{m/2}$ 為 $m/2 \times m/2$ 傅立葉矩陣，從(理論一)來看，對於 $a = 2^k$，$k \in N$，$\{1, \omega^a, \omega^{2a}, \ldots, \omega^{n-a}\}$是 $Z^{n/a} = 1$ 的根，令 $m = n / a$，$a = n / m$，複數集$\{1, \omega^{n/m}, \omega^{2n/m}, \ldots, \omega^{n-n/m}\}$為 $Z^m = 1$ 的根，$D_{m/2}$ 為 $Z^m = 1$ 的前 $\frac{m}{2}$ 個根，故 $D_{m/2} = \mathrm{diag}(1, \omega^{n/m}, \omega^{2n/m}, \ldots, \omega^{n/2-n/m})$，

而 $P_m^T = [e_0 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_{m-2} \quad e_1 \quad e_3 \quad \cdots \quad e_{m-1}]$ 。

以下以 n = 8 展示快速傅立葉矩陣：

$X_8 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad P_8X_8 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_4^{(0)} \\ -- \\ X_4^{(1)} \end{bmatrix}$ 其中 $X_4^{(0)}$與 $X_4^{(1)}$分別為 X_8 的奇數元與偶數元組成

要計算 F_8X_8，利用分塊表示法可得：

$$F_8X_8 = \begin{bmatrix} F_4 & D_4F_4 \\ F_4 & -D_4F_4 \end{bmatrix} P_8X_8 = \begin{bmatrix} F_4 & D_4F_4 \\ F_4 & -D_4F_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_4{}^{(0)} \\ -- \\ X_4{}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4X_4{}^{(0)} + D_4F_4X_4{}^{(1)} \\ F_4X_4{}^{(0)} - D_4F_4X_4{}^{(1)} \end{bmatrix}$$

用同樣步驟繼續分解 F_4X_4，最終得到 F_2X_2，此時 F_8X_8 被拆解為 4 個 F_2X_2。在計算 X_2 時，不必實際乘上排列矩陣做運算，規則如下：

表一　元素次序表

X_8	X_4	X_2
0(000)	0(000)	0(000)
1(001)	2(010)	4(100)
2(010)	4(100)	2(010)
3(011)	6(110)	6(110)
4(100)	1(001)	1(001)
5(101)	3(011)	5(101)
6(110)	5(101)	3(011)
7(111)	7(111)	7(111)

表一中括弧內為該數字的二進位表示法，表中可以看出，當 X_8 第一次經過排序變為 X_4 時，X_4 排列為固定最後一個位元，前兩個位元為自然排序，當 X_4 在經過一次排序後變為 X_2，X_2 排列為固定最後兩個位元，第一個位元為自然排序，依此規則來產生 X_n。而 D_n 為 diagonal matrix，進行矩陣乘法時直接乘上對角元素就好，以 D_4 為例：

令 $d_4 = [1\ \omega\ \omega^2\ \omega^3]^T$，$D_4Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = d_4Z = \begin{bmatrix} z_0 \\ \omega z_1 \\ \omega^2 z_2 \\ \omega^3 z_3 \end{bmatrix}$

參考來源：快速傅立葉轉換　排列矩陣　Diagonal Matrix