Fourier series

在了解傳立葉級數之前，我們先了解正交基底(orthonormal basis)的概念。考慮一向量空間 V，$\beta = \{V_1, V_2, \cdots\cdots, V_n\}$為 V 的一基底，$x \in V$，則 x 可表示為向量 β 的組合：

$$x = C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots\cdots + C_nV_n \qquad (1)$$

若 β 為正交基底，(任意 $x,y \in V$ 的內積記為 $<x , y>$)，則 $<V_i , V_i> = 1$，$<V_i , V_j> = 0$，利用這兩特性可使用內積求得 $C_1 \sim C_n$ ：

$$\begin{aligned}<V_i , x> &= <V_i , (C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots + C_nV_n)> \\ &= C_1 <V_i , V_1> + \cdots + C_i <V_i , V_i> + \cdots + C_n <V_n , V_n> \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots + C_i \times 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 \\ &= C_i\end{aligned}$$

故 x 有正交分解展開式：

$$x = < V_1 , x> V_1 + < V_2 , x> V_2 + \cdots + < V_n , x> V_n \qquad (2)$$

Fourier 提出：所有週期性函式都能表示為傳立葉級數，以無窮多個 cos、sin 做為正交基底線性組合而成，下列式子為 f(x)週期在 2π 時的傳立葉級數：

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \qquad (3)$$

a_k、b_k 稱為傳立葉係數，定義兩實數函式 f、g 內積為：

$$<f , g> = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \qquad (4)$$

以式子(2)來看為 F(x)分別與 cos、sin 做內積：

$$a_k = <f(x) , \cos(kx)> = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,dx$$

$$b_k = <f(x) , \sin(kx)> = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(kx)\,dx$$

週期為 T 時，利用變數轉換 $\frac{t}{T} = \frac{x}{2\pi}$ ， $x = \frac{2\pi t}{T}$ 替換，將式子(3)改為：

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\frac{2\pi kt}{T}) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{2\pi kt}{T})$$

$dx = \frac{2\pi}{T}$ dt 替換 a_k、b_k

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\, dt$$

著名的 Euler's formula 將傅立葉級數以指數型態呈現：

令 $Z = \cos x + i\sin x$

$\frac{dz}{dx} = -\sin x + i\cos x$

$= i(i\sin x + \cos x)$

$= iZ$

$\ln Z = \int \frac{1}{Z}\, dZ = \int \frac{iZ}{Z}\, dx = \int i\, dx = ix$

$\rightarrow e^{ix} = Z = \cos x + i\sin x$ (5)

$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x$ (6)

(5) + (6) $\rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ (7)

(5) – (6) $\rightarrow \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ (8)

利用(7)(8)將式子(3)裡面的 cos(kx)與 sin(kx)改寫：

$$a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = a_k \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}\right) + b_k \left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right)$$

$$= a_k \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}\right) + ib_k \left(\frac{-e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\right) e^{ikx} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2}\right) e^{-ikx}$$

令 $C_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ ，$C_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$ 代入

$\rightarrow a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = C_k\, e^{ikx} + C_{-k}\, e^{-ikx}$ 改寫式子(3)，$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k\, e^{ikx}$，這邊 C_k 為複數，複數函式的內積定義為：

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

$C_k = \langle e^{ikx}, f(x)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$

參考來源：[傅立葉級數(上)] [傅立葉級數(下)]