Fourier Transform

在傅立葉級數裡，我們得到 f(x)週期為 2π 的指數傅立葉級數為 $F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k\, e^{ikx}$，

$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$，若將週期推廣為 T，$x = \frac{2\pi t}{T}$代入，函數 f(t)週期為 T 的指數傅立葉級數為：

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{2\pi ikt/T}\text{，其中傅立葉係數 } C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi ikt/T}dt \qquad (1)$$

到這邊為止所探討的都是週期函數，接下來我們將進入非週期函數的世界。如果有一函數為非週期函數，可視為其函數週期無限大，探討上列的傅立葉級數(1)，將 $T \to \infty$，則此傅立葉級數就推廣成了傅立葉轉換(fourier transform)。

一週期為 T 的函數 f(t)，其傅立葉級數為 F(t)，在 $-T/2 \le t \le T/2$ 時，f(t) = F(t)，另 $v_k = k/T$，$\Delta v = v_{k+1} - v_k = 1/T$，F(t)為：

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{2\pi i v_k t}\text{，其中 } C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi i v_k t}dt$$

將 C_k 帶回 F(t)，得到 $F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi i v_k t}dt]e^{2\pi i v_k t}$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}[\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi i v_k t}dt]e^{2\pi i v_k t}\,\Delta v$$

當 $T \to \infty$，Δv 為微量 dv，v_k 趨近於連續量 v，改寫式子為積分形式：

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ivt}\,dt\right]e^{2\pi ivt}dv \qquad (2)$$

(2)式中的$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ivt}$ dt 為 f(t)的傅立葉轉換，令此函數為 $f(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ivt}dt$，v 為頻率，因此得到 $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{2\pi ivt}dv$，為 f(v)的逆傅立葉轉換，也就是說當 T 趨近於無限大時，原本傅立葉級數裡的傅立葉係數就成了傅立葉轉換，而原本的傅立葉級數就變成了逆傅立葉轉換。

因此計算離散傅立葉轉換時，我們計算的是在[0,T]區間裡，傅立葉級數裡的傅立葉係數 C_k，$C_k = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dt$，由於電腦只能處理有限維向量，因此我們需要將連續轉為離散：上面連續變數 t 為[0,T]的連續點，我們將[0,T]劃分為 n 個等區間數值，即

t = jT/n，j = 0,1,2,3,…n-1，在一般離散傅立葉轉換中 T=1，因此離散的傅立葉轉換可寫成下列式子：

$$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-2\pi ikj/n} \qquad (3)$$

此式子為離散傅立葉轉換，y_k 為傅立葉轉換後的結果，x_k為輸入值。在(3)式中另 $\omega = e^{-2\pi i/n}$，y_k 與 x_k 的關係為線性轉換，可用矩陣形式(y = Fx)表示：

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (4)$$

上面 F 為 $n \times n$ 矩陣，為傅立葉矩陣，可以看的出是一對秤矩陣($F^T = F$)。我們將介紹 F 矩陣的特殊性質，並利用此性質求出 F^{-1} 矩陣。由於複數集$\{1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots. \omega^{n-1}\}$為方程式 $Z^n = 1$ 的根，當 $k > n$ 時，$\omega^k = \omega^{k \% n}$ 稍待一會會利用此性質證明 $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = 0$：

$$\omega^k \times \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = \omega^k \times (1 + \omega^k + \omega^{2k} + \ldots + \omega^{(n-1)k}) = \omega^k + \omega^{2k} + \ldots + \omega^{(n-1)k} + \omega^{nk}$$

$$= \omega^k + \omega^{2k} + \ldots + \omega^{(n-1)k} + \omega^{nk \% n} = \omega^k + \omega^{2k} + \ldots + \omega^{(n-1)k} + 1$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk}$$

$\rightarrow (\omega^k - 1) \times \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = 0$，當 $k \% n \neq 0$，$\omega^k \neq 1$，可得 $\quad \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk} = 0 \quad (5)$。

接下來讓 F 成為 unitary matrix，以利求得 F^{-1}。

$$\overline{\omega^k} = \overline{e^{-2\pi ik/n}} = \overline{\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = e^{2\pi k/n} = \omega^{-k} \quad (6)$$

令 f_p f_q 為 F 的第 p 行與第 q 行，兩者內積為：

$$\langle f_p, f_q \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\omega^{pj}}\, \omega^{qj} = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-pj}\, \omega^{qj} = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(q-p)} = 0 \qquad \text{(利用(5)(6)式子結果)}$$

自身長度為：

$\|f_p\|^2 = \langle f_p, f_q \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\omega^{pj}}\, \omega^{pj} = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{j(p-p)} = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n$，$\|f_p\| = \sqrt{n}$，故$\frac{1}{\sqrt{n}}$F 為 unitary matrix，滿足$\overline{U}^T U = I$，由於 $F^T = F$，$(\frac{1}{\sqrt{n}} F)^{-1} = (\frac{1}{\sqrt{n}} F)^* = \overline{\frac{1}{\sqrt{n}} F} = \frac{1}{\sqrt{n}} \overline{F} \qquad (7)$

由(7)可得知：$\frac{1}{\sqrt{n}} F \times \frac{1}{\sqrt{n}} \overline{F} = I$，$F \times \frac{1}{n} \overline{F} = I$，故 $F^{-1} = \frac{1}{n} \overline{F}$，矩陣為下：

$$F^{-1} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(n-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(n-1)} & \omega^{-2(n-1)} & \cdots & \omega^{-(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

逆離散傅立葉運算可用離散傅立葉矩陣來運算：$x = F^{-1}y = \frac{\overline{F}y}{n} = \frac{1}{n}\overline{F\overline{y}} \quad (8)$

而逆離散傅立葉轉換 $x = F^{-1}y$ 可表達為下列式子：

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k e^{2\pi ikj/n} \quad (9)$$

參考來源：傅立葉級數(下) 離散傅立葉轉換