

# 有限元第二次编程作业

W Huang

日期: 2023 年 11 月 24 日

## 1 编程第一题

### 1.1 求解设置

求解 PDE

$$\begin{cases} -u'' = f, & \text{in } \Omega = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

取一右端项  $f \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ :

$$f(x) = \frac{1}{x}. \quad (2)$$

显然  $f$  在 0 处不连续, 且  $f \notin L^2(\Omega)$ 。我们导出精确解:

$$u(x) = x \ln x. \quad (3)$$

注意到  $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 。使用非均匀网格  $x_i = (i/N)^2$ , 取  $\mathcal{P}_1$  元。使用预优共轭梯度法 (Preconditioned CG) 求解, 用超松弛迭代 (SSOR) 作为预优因子, 超松弛系数取  $2 - \varepsilon$ , 其中  $\varepsilon = 10^{-12}$ 。右端项的数值积分由一阶高斯求积公式计算。注意: 对于  $x_0 = 0$  的节点基函数  $\Phi_0$ , 我们知道  $\langle f, \Phi_0 \rangle$  是发散的, 但在 Dirichlet 边界条件下, 我们不需要这一项。

### 1.2 编译说明

请安装 deal.ii 及其依赖库, 见 <https://www.dealii.org/developer/readme.html>; 安装完毕后, 在本文档目录下打开终端, 依次运行:

```
cd src-p1
mkdir build
cd build
cmake ..
make release
make
```

等待编译完成后, 用以下命令执行测试:

```
./elliptic 10 u
```

上述测试采用 1.1 节所述的非均匀网格, 规模为  $N = 2^{10}$ , 如果需要改变网格规模, 将 10 换成别的正整数即可。另外, 如果想测试均匀网格, 只需将上述命令中的 `u` 删去即可。

### 1.3 数值结果

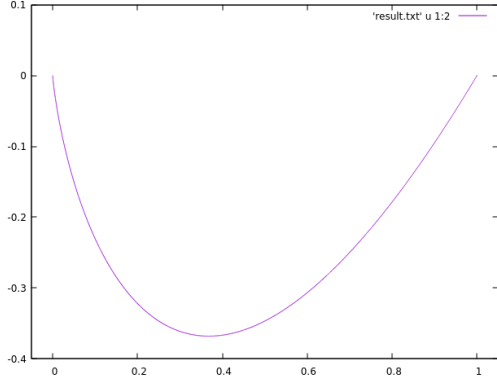


图 1:  $N = 2^{14}$  时非均匀网格的数值解  $u_h$

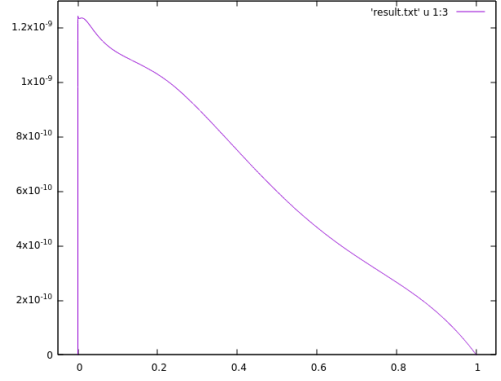


图 2:  $N = 2^{14}$  时非均匀网格的误差  $u_h - u$

可以看到，误差集中在奇异点附近。

单元数量	$2^{14}$	阶数	$2^{15}$	阶数	$2^{16}$	阶数	$2^{17}$
$\ u - u_h\ _{L_2}$	1.90e-09	1.92	5.02e-10	1.51	1.76e-10	2.16	3.95e-11
$\ u - u_h\ _{L_\infty}$	2.91e-09	2.00	7.30e-10	1.59	2.42e-10	1.18	1.07e-10
$\ u - u_h\ _{H_1}$	1.60e-04	0.96	8.24e-05	0.96	4.25e-05	0.96	2.19e-05
CG 迭代次数	14		16		17		19
装配耗时 (s)	0.019		0.035		0.072		0.15
求解耗时 (s)	0.0051		0.010		0.024		0.048

表 1: 预优共轭梯度法，预优因子：SSOR，超松弛系数： $2 - \varepsilon$  ( $\varepsilon = 10^{-12}$ )。

由于网格尺寸太细，在机器精度的限制下， $L_2$  和  $L_\infty$  范数已经无法继续下降。另外可以看到，SSOR 作为预优因子效果非常好，随着网格加密，CG 迭代次数基本不会增加。换言之，当超松弛系数趋近于 2 时，在 SSOR 的作用下，迭代矩阵的条件数与网格尺寸几乎无关。

刚度矩阵条件数（二范数下）的数值结果如下，数值结果支持  $\kappa(A) \sim O(N^3)$ ：

单元数量	256	阶数	512	阶数	1024
$\kappa(A)$	1.93116e+06	2.99	1.53591e+07	3.00	1.22513e+08

表 2: 刚度矩阵的二范数条件数，即  $\kappa(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$ 。

为了测试刚度矩阵的条件数对求解性能的影响，我们不使用预优因子再进行一次测试。与预优 CG 相比，朴素 CG 的求解性能大大降低，我们只好将网格规模减小以进行测试。

单元数量	$2^{12}$	增长率	$2^{13}$	增长率	$2^{14}$
CG 迭代次数	42996	2.86	122781	2.85	350164
装配耗时 (s)	0.005		0.01		0.02
求解耗时 (s)	0.49		2.35		12.7

表 3: 朴素共轭梯度法。

## 2 编程第二题

### 2.1 求解设置

求解 PDE

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & \text{in } \Omega = (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

取精确解：

$$u(x) = \cos(\pi x). \quad (5)$$

导出右端项：

$$f(x) = (1 + \pi^2) \cos(\pi x). \quad (6)$$

其余设置与题目所述一致。

### 2.2 编译说明

由于 deal.ii 的多重网格与题目所述的 big Gauss-Seidel 有所不同，为了按题目要求来实现，在这题中我们不再使用 deal.ii，而是使用 matlab，所以无需编译，直接运行即可。