

有限元第一次编程作业

W Huang

日期: 2023 年 10 月 30 日

1 有限元推导

求解 PDE

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

其中区域 $\Omega = [0, 1]^2$, 取精确解:

$$u(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y). \quad (2)$$

导出右端项:

$$f(x, y) = (2\pi^2 + 1) \cos(\pi x) \cos(\pi y). \quad (3)$$

变分公式: 求 $u \in H^1(\Omega)$, 使得,

$$(u, v) + (\nabla u, \nabla v) = (f, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (4)$$

使用三角网格 \mathcal{T}_h , 取 \mathcal{P}_1 元, 有限元逼近空间为:

$$V_h = \{u_h \in C(\bar{\Omega}) : u_h|_K \in \mathcal{P}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega). \quad (5)$$

求得的数值解 $u_h \in V_h$ 可写为:

$$u_h = \sum_{j=1}^N U_j \Phi_j. \quad (6)$$

其中 N 为顶点个数, Φ_j 为顶点 j 的线性节点基函数。我们需要装配离散系统

$$AU = F. \quad (7)$$

其中,

$$A_{ij} = (\Phi_i, \Phi_j) + (\nabla \Phi_i, \nabla \Phi_j), \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$F_i = (\Phi_i, f), \quad i = 1, \dots, N. \quad (9)$$

积分需要遍历所有函数值非零的三角形单元, 将结果累加。在每个三角形中, 积分值由二阶 Gauss quadrature formula 计算, 由于我们采用的是 \mathcal{P}_1 元, 因此这样算出来的 (Φ_i, Φ_j) 与 $(\nabla \Phi_i, \nabla \Phi_j)$ 都是精确的。

2 数值测试

用 deal.ii 自带的函数生成正方形网格, 再进行三角化, 生成米字形三角网格。按上节所述方式装配离散系统, 用 deal.ii 的共轭梯度求解器解离散系统, 当代数误差达到 $10^{-6} \|F\|_2$ 时停止

迭代，最终结果如下。（米字形网格的误差分布非常有意思）

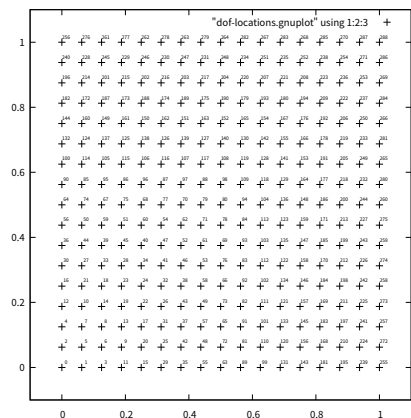


图 1: $h = \frac{1}{16}$ 时的网格点编号

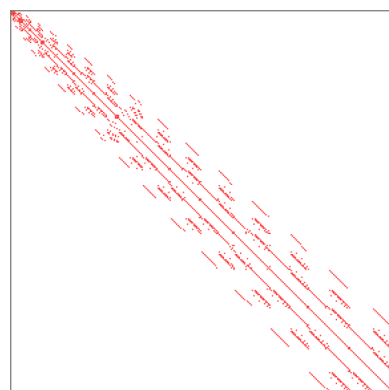


图 2: $h = \frac{1}{16}$ 时得到的离散系统

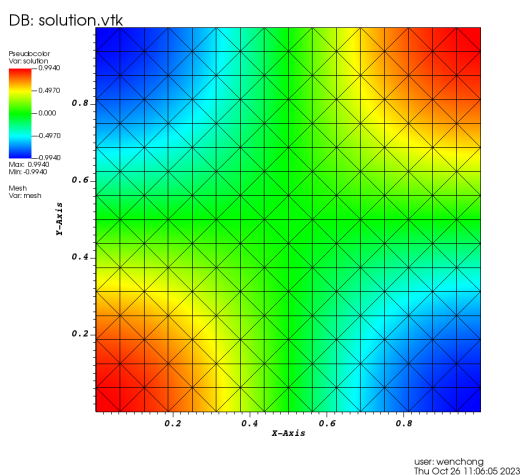


图 3: $h = \frac{1}{16}$ 时的数值解

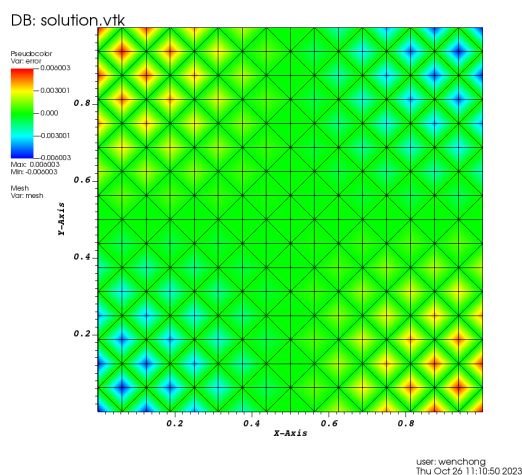


图 4: $h = \frac{1}{16}$ 时数值解与真解的误差

h	$\frac{1}{64}$	Rate	$\frac{1}{128}$	Rate	$\frac{1}{256}$	Rate	$\frac{1}{512}$
$\ u - u_h\ _{L_1}$	0.00024153	2.00	6.03922e-05	2.00	1.50985e-05	2.00	3.77466e-06
$\ u - u_h\ _{L_2}$	0.00028299	2.00	7.07562e-05	2.00	1.76896e-05	2.00	4.42243e-06
$\ u - u_h\ _{L_\infty}$	0.00240764	2.00	0.000602272	2.00	0.000150591	2.00	3.76491e-05
$ u - u_h _{H_1}$	0.0513983	1.00	0.0257014	1.00	0.012851	1.00	0.00642551
$\ u - u_h\ _{H_1}$	0.0513991	1.00	0.0257015	1.00	0.012851	1.00	0.00642551
CPU Time (s)	0.0145		0.0346		1.160		4.884

误差范数用积分计算，积分值在每个三角形单元里都由二阶 Gauss quadrature formula 计算。完全符合理论分析的结果。