有限元第二次编程作业

W Huang

日期：2023 年 11 月 23 日

1 编程第一题

1.1 求解设置

求解 PDE

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

取一个 L^2 可积但在 0 处不连续的右端项：

$$f(x) = \ln x. \tag{2}$$

导出精确解：

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x. \tag{3}$$

使用非均匀网格 $x_i = (i/N)^2$，取 $\mathcal{P}_1$ 元。使用预优共轭梯度法 (Preconditioned CG) 求解，用超松弛迭代 (SSOR) 作为预优因子，超松弛系数取 1.99999999。

右端项的数值积分由一阶高斯求积公式计算。

1.2 数值结果

单元数量	2^{14}	阶数	2^{15}	阶数	2^{16}	阶数	2^{17}
$\|\|u-u_h\|\|_{L_2}$	5.10e-10	2.05	1.23e-10	2.24	2.61e-11	-	5.47e-11
$\|\|u-u_h\|\|_{L_\infty}$	8.42e-10	2.04	2.05e-10	2.04	4.98e-11	-	9.28e-11
$\|\|u-u_h\|\|_{H_1}$	1.76e-05	1.00	8.81e-06	1.00	4.40e-06	1.00	2.20e-06
CG 迭代次数	18		19		20		21
装配耗时 (s)	0.024		0.050		0.067		0.14
求解耗时 (s)	0.0079		0.014		0.031		0.052

表 1: 预优共轭梯度法，预优因子：SSOR，超松弛系数：1.99999999。

收敛阶令人满意。由于网格尺寸太细，在机器精度的限制下，L_2 和 L_∞ 范数已经无法继续下降。另外可以看到，SSOR 作为预优因子效果非常好，随着网格加密，CG 迭代次数基本不会增加。换言之，当超松弛系数趋近于 2 时，在 SSOR 的作用下，迭代矩阵的条件数与网格尺寸几乎无关。

刚度矩阵条件数（二范数下）的数值结果如下，数值结果支持 $\kappa(A) \sim O(N^3)$：

单元数量	256	阶数	512	阶数	1024
$\kappa(A)$	1.93116e+06	2.99	1.53591e+07	3.00	1.22513e+08

表 2: 刚度矩阵的二范数条件数，即 $\kappa(A) = ||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2$。

为了测试刚度矩阵的条件数对求解性能的影响，我们不使用预优因子再进行一次测试。与预优 CG 相比，朴素 CG 的求解性能大大降低，我们只好将网格规模减小以进行测试。

单元数量	2^{12}	增长率	2^{13}	增长率	2^{14}
CG 迭代次数	42996	2.86	122781	2.85	350164
装配耗时 (s)	0.005		0.01		0.02
求解耗时 (s)	0.49		2.35		12.7

表 3: 朴素共轭梯度法。