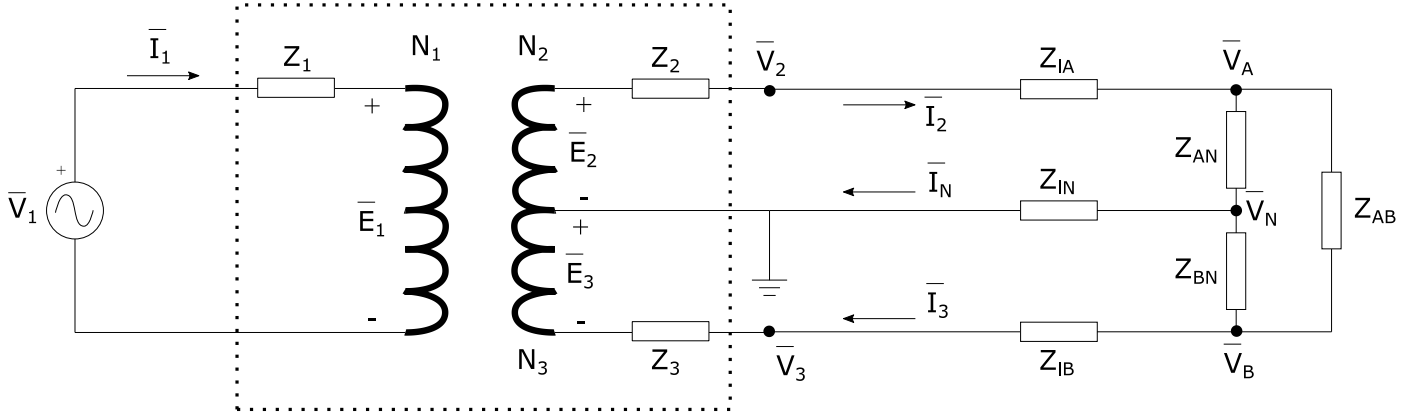


## Ejercicio: Transformador monofásico de fase partida alimentando circuito trifilar

IE0315 Máquinas Eléctricas I

Dr. Andrés Argüello Guillén

Considere el siguiente circuito trifilar (secundario de distribución), alimentado por un transformador monofásico de fase partida. El cliente no instaló, o le robaron, la varilla de tierra que fija la tensión del neutro.



### Planteamiento:

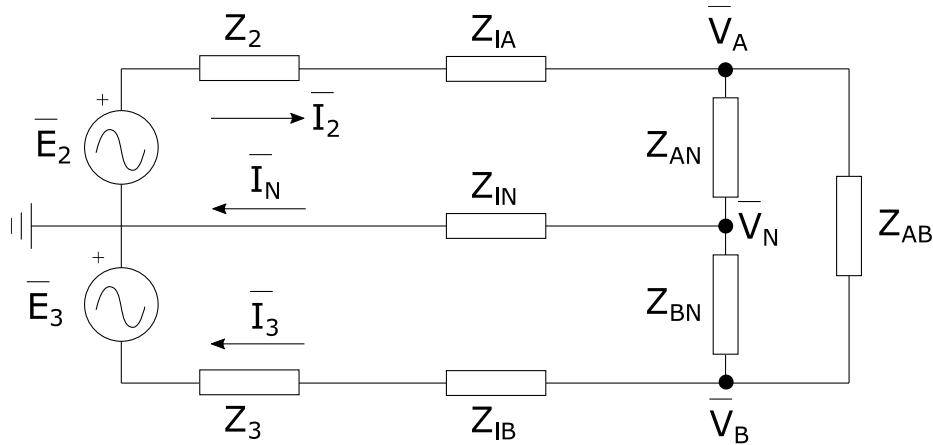
La relación de transformación que se conoce directamente es la de tensión por el encadenamiento de flujos (Ley de Faraday-Lenz). La relación de transformación de la corriente se debe obtener a partir de la conservación de energía:

$$a = \frac{N_1}{N_{23}} = \frac{N_1}{N_2 + N_3} \quad E_2 = E_3 = \frac{E_1}{2a}$$

$$S_1 = E_1 I_1 = S_2 + S_3 = E_2 I_2 + E_3 I_3 = \frac{E_1}{2a} I_2 + \frac{E_1}{2a} I_3$$

$$I_1 = \frac{I_2 + I_3}{2a}$$

Ahora, vamos a enfocarnos en el lado de baja tensión del transformador. El método más sencillo para analizar esta topología de circuito es analizar este circuito como un trifásico desbalanceado y aplicar el teorema de Millman, que sirve para obtener tensión de neutro flotante en las cargas.

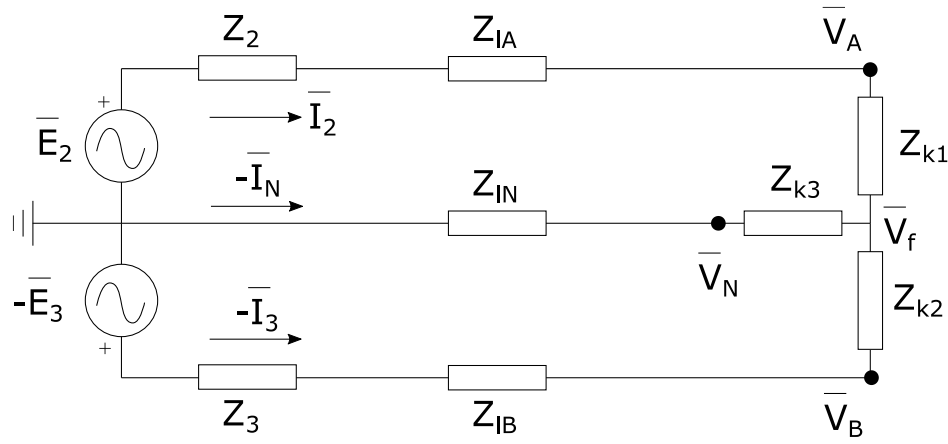


Sin embargo, para usar el teorema de Millman, debemos preparar el circuito primero. Por tener la carga en ab, debemos primero realizar una transformada de delta a estrella (producto de las impedancias que tocan el nodo, entre la suma de las tres impedancias), y se calcula la tensión de neutro ficticio. Además, vamos a darle vuelta a la tensión  $\bar{E}_3$  y a las corrientes  $\bar{I}_3$  e  $\bar{I}_N$ :

$$Z_{k1} = \frac{Z_{AN} Z_{AB}}{Z_{AN} + Z_{BN} + Z_{AB}}$$

$$Z_{k2} = \frac{Z_{BN} Z_{AB}}{Z_{AN} + Z_{BN} + Z_{AB}}$$

$$Z_{k3} = \frac{Z_{AN} Z_{BN}}{Z_{AN} + Z_{BN} + Z_{AB}}$$



Ahora, se calcula la tensión ficticia  $\bar{V}_f$  con teorema de Millman:

$$\bar{V}_f = \frac{(\bar{E}_2)(Z_2 + Z_{lA} + Z_{k1})^{-1} + (-\bar{E}_3)(Z_3 + Z_{lB} + Z_{k2})^{-1} + (0)(Z_{lN} + Z_{k3})^{-1}}{(Z_2 + Z_{lA} + Z_{k1})^{-1} + (Z_3 + Z_{lB} + Z_{k2})^{-1} + (Z_{lN} + Z_{k3})^{-1}}$$

$$\bar{V}_f = \frac{(\bar{E}_2)Y_1 + (-\bar{E}_3)Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

Lo que permite calcular las corrientes  $\bar{I}_2$ ,  $\bar{I}_3$  e  $\bar{I}_N$ :

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2 - \bar{V}_f}{Z_2 + Z_{lA} + Z_{k1}} \quad \bar{I}_3 = \frac{-\bar{E}_3 - \bar{V}_f}{Z_3 + Z_{lB} + Z_{k2}} \quad -\bar{I}_N = \frac{0 - \bar{V}_f}{Z_{lN} + Z_{k3}}$$

Y posteriormente las tensiones nodales  $\bar{V}_A$ ,  $\bar{V}_B$  y  $\bar{V}_N$

$$\bar{V}_A = \bar{E}_2 - \bar{I}_2(Z_2 + Z_{lA}) \quad \bar{V}_B = -\bar{E}_3 - \bar{I}_3(Z_3 + Z_{lB}) \quad \bar{V}_N = 0 - \bar{I}_N Z_{lN}$$

Y las tensiones entre terminales en la carga:

$$\bar{V}_{AN} = \bar{V}_A - \bar{V}_N \quad \bar{V}_{BN} = \bar{V}_B - \bar{V}_N \quad \bar{V}_{AB} = \bar{V}_A - \bar{V}_B$$

Posteriormente, se utiliza la conservación de potencia en el transformador ideal para encontrar la corriente por el primario.

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{I}_2 + \bar{I}_3}{2a} \quad \bar{E}_2 = \frac{\bar{E}_1}{2a} \quad \bar{E}_3 = \frac{\bar{E}_1}{2a}$$

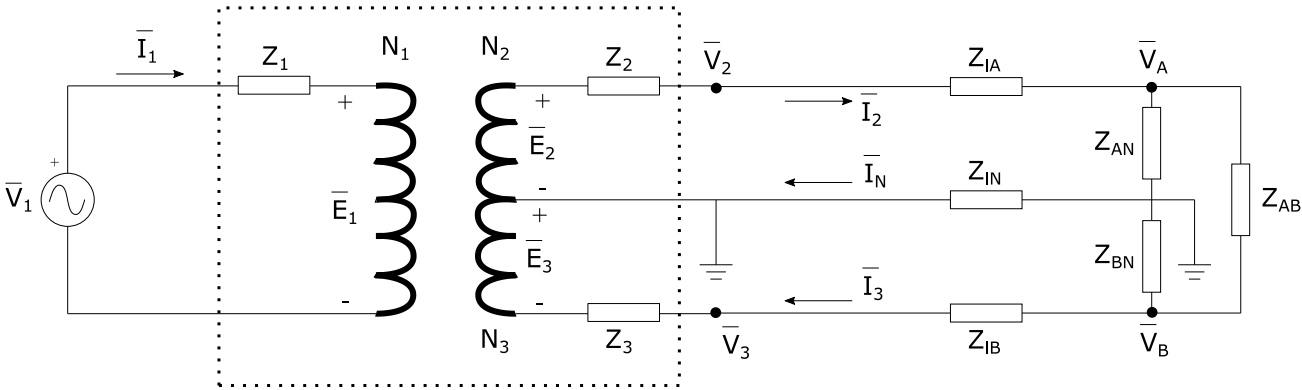
Y finalmente, incorporamos la tensión de entrada de la red de media tensión con la siguiente expresión:

$$\bar{E}_1 = \bar{V}_1 - Z_1 \bar{I}_1$$

Recapitulando, tenemos las siguientes incógnitas  $\bar{E}_1$ ,  $\bar{E}_2$ ,  $\bar{E}_3$ ,  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$ ,  $\bar{I}_3$ ,  $\bar{V}_f$ . Y con las 7 ecuaciones **destacadas**, formamos un sistema 7x7 que nos otorga la solución.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{V}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3} & \frac{-Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{Z_2 + Z_{lA} + Z_{k1}} & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{-1}{Z_2 + Z_{lA} + Z_{k1}} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{Z_3 + Z_{lB} + Z_{k2}} & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{Z_3 + Z_{lB} + Z_{k2}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} & 0 \\ \frac{1}{2a} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2a} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & Z_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \\ \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \\ \bar{V}_f \end{pmatrix}$$

Por otro lado, si el cliente si cuenta con la varilla de neutro y la instalación es adecuada, la tensión de neutro en la carga es nula, y se esperaría que no fluya corriente por el neutro, sino por la tierra.



### Datos numéricos para el ejercicio:

Suponga un transformador monofásico entrelazado de fase partida de 50 kVA, con una relación de 34.5kV : 120/240 V. La tensión primaria de la red es de 34.5 kV. De las tablas, se extrae la impedancia de corto-circuito del transformador a 60 Hz  $R_{cc,\%}=1\%$ ,  $X_{cc,\%}=5\%$ . Posteriormente se utiliza la siguiente fórmula para separar las impedancias de cada devanado:

$$\begin{bmatrix} Z_{1,pu} \\ Z_{2,pu} \\ Z_{3,pu} \end{bmatrix} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 0.5R_{cc,\%} + j0.8X_{cc,\%} \\ R_{cc,\%} + j0.4X_{cc,\%} \\ R_{cc,\%} + j0.4X_{cc,\%} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 + 0.04j \\ 0.01 + 0.02j \\ 0.01 + 0.02j \end{bmatrix}$$

Y se debe pasar de porcentajes a SI con las respectivas bases de cada devanado:

$$Z_1 = Z_{1,pu} \frac{34500^2}{50000} \qquad Z_2 = Z_{2,pu} \frac{120^2}{50000} \qquad Z_3 = Z_{3,pu} \frac{120^2}{50000}$$

Las líneas secundarias (pentagrama) son 1/0 AWG AAC (que soporta 150 A “ampacidad”) de 50 metros. Sus características son de  $R_{lin/m} = 7 \times 10^{-4} \, \Omega/m$  y  $L_{lin/m} = 2.5 \times 10^{-3} \, mH/m$ .

$$Z_{lA} = Z_{lB} = Z_{lN} = 50(R_{lin/m} + j2\pi fL_{lin/m})$$

La carga AB es un horno de 30 kW, 240 V. La carga entre A y N es de iluminación, de 5 kW con factor de potencia 0.9 en atraso. La carga BN es un motor de 10 hp con factor de potencia 0.8 en atraso. Suponiendo que las tres cargas se modelan como impedancias y que los datos corresponden a tensión nominal, los equivalentes son los siguientes:

$$Z_{AB} = \frac{240^2}{20000}$$

$$\overline{I_{AN}} = \left( \frac{3000}{120} \left( 1 + j \sqrt{\left( \frac{1}{0.9} \right)^2 - 1} \right) \right)^* \rightarrow Z_{AN} = \frac{120}{\overline{I_{AN}}}$$

$$\overline{I_{BN}} = \left( \frac{10 \cdot 745.7}{120} \left( 1 + j \sqrt{\left( \frac{1}{0.7} \right)^2 - 1} \right) \right)^* \rightarrow Z_{BN} = \frac{120}{\overline{I_{BN}}}$$

Finalmente, se puede comparar el escenario sin varilla de tierra contra el escenario con varilla de tierra. Al final se pone una métrica de eficiencia del sistema en términos de la potencia de las cargas, para contabilizar las pérdidas por el transformador y las líneas.

Escenario	$\overline{V_{AN}}, V$	$\overline{V_{BN}}, V$	$\overline{V_{AB}}, V$	$\overline{V_N}, V$	$\overline{I_1}, A$	$\overline{I_2}, A$	$\overline{I_3}, A$	$\overline{I_N}, A$	$\eta, \%$
Sin	113.12<-5.32	107.96<174.69	221.07<-5.31	1.66<174.08	1.15<-15.92	155.59<-12.34	176.11<-19.08	28.3<120.68	94.04
Con	111.49<-5.3	109.55<174.67	221.04<-5.31	0	1.15<-15.97	154.98<-12.26	177.04<-19.22	0	94.1

Note que la corriente por los conductores es alta. Calculando las tensiones de la carga en pu, es posible ver que están por debajo de 95% del valor nominal (120/240 V). Para entender el motivo, se hace el siguiente diagnóstico con el script disponible en mediación:

- Revise la potencia en la carga con respecto a la potencia nominal del transformador (Hacer el cálculo en pu). Verá que el transformador opera por debajo de su capacidad nominal de 50 kVA.
- Confirme la ampacidad del cable 1/0 AWG (150 A) con tablas en internet. Considere aumentar el calibre del conductor para soportar la corriente y reducir la caída de tensión.
- Para elevar la tensión de la carga a un valor más cercano de 100%, considere cambiar el tap del transformador en el devanado primario. Tiene las opciones de 0.95, 0.975, 1, 1.025, 1.05 pu.