

Tarea Chica 3: Máquinas de Turing

Profesores Vicente Domínguez y Luis Ramírez
16 de octubre de 2018

Indicaciones

- Fecha de Entrega: Martes 23 de octubre a las 23:59
 - Debes entregar la tarea en tu repositorio git privado (github)
 - Cada hora de atraso descuenta 5 décimas de la nota que obtengas.
 - La tarea es *individual*. La copia será sancionada con una nota 1.1 en el la tarea, además de las sanciones disciplinarias correspondientes.
-

Objetivo

Los objetivos de esta tarea son los siguientes:

- Entender el concepto de máquina de Turing.
- Entender la definición matemática formal de una máquina de Turing.
- Entender cómo se construye una máquina de Turing.
- Familiarizarse con el lenguaje $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$.

Introducción

La máquina de Turing es uno de los conceptos más importantes de la teoría de computación ya que consigue formalizar de una forma simple el concepto de computabilidad, o qué cosas son o no computables. La conjetura de Church-Turing postula que para todo proceso computable existe una máquina de Turing que es capaz de realizar el mismo proceso.

Consideramos una máquina de Turing como una cinta infinita de celdas y un cabezal con el que puede leer o escribir la celda en la posición actual. En la configuración inicial, la cinta contiene una palabra (con elementos de un alfabeto de entrada determinado) y el cabezal se encuentra leyendo la primera posición de esta palabra. Las celdas que están antes y después de la palabra contienen un elemento en blanco que representamos como B.

La máquina siempre se encuentra en algún estado $q \in Q$ el que junto con el elemento que está leyendo el cabezal en ese instante va a determinar la acción que realiza la máquina. Estas acciones se determinan con una función de transición propia de la máquina que toma el elemento en la cinta y el estado, y determina el nuevo estado q' al que va a pasar la máquina, el elemento que se va a escribir en la cinta y el movimiento del cabezal (que puede ser izquierda, derecha o no moverse).

Formalmente, esta máquina de Turing se define como la tupla

$$M = (Q, \Gamma, \Sigma, q_0, \delta, F)$$

donde

Q	Conjunto de estados
Γ	Alfabeto de la máquina
$\Sigma \subsetneq \Gamma$	Alfabeto de entrada
$q_0 \in Q$	Estado inicial de la máquina
$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow, -\}$	Función de transición
$F \subseteq Q$	Conjunto de estados de aceptación

Cuando una máquina M se encuentra en un estado q y un símbolo a , y no existe una transición $\delta(q, a)$ decimos que la máquina se detiene. Además, decimos que una palabra w es aceptada por la máquina M si la máquina se detiene y además el estado q en que queda detenida es un estado final ($q \in F$). El conjunto de todas las palabras aceptadas por M se conoce como el lenguaje definido por M .

Ejemplo

La siguiente máquina acepta exclusivamente palabras que contengan solo letras a:

$$M = (\{q_0, q_f\}, \{a, b, B\}, \{a, b\}, q_0, \delta, \{q_f\})$$

donde $\delta(q_0, a) = (q_0, a, \rightarrow)$ y $\delta(q_0, B) = (q_f, B, -)$

Notar que B representa la celda vacía y es un símbolo reservado que puede leer la máquina pero no puede ser usado en el alfabeto de entrada. Esta máquina tampoco altera el contenido de la palabra, porque cada vez que ve una a escribe esa misma letra, y lo mismo cuando ve un espacio en blanco.

En el alfabeto de entrada solo se permiten los símbolos a y b de modo que palabras como $aaab$, aba , b , aaa o $baba$ podrían ser entregadas a la máquina. Sin embargo ninguna de las transiciones define un comportamiento para cuando el cabezal lee una letra b , por lo que si aparece una b la máquina se detendrá en un estado no final y por lo tanto la palabra será rechazada. Otra opción es que el cabezal vaya avanzando por la palabra leyendo solo letras a y cuando llegue al final de la palabra y se encuentre con el símbolo B cambiaría su estado a q_f que tampoco tiene transiciones válidas por lo que se detendría. En este último caso la palabra sería aceptada porque q_f es estado final.

Actividades

Pregunta 1 (3 ptos)

En esta primera parte deberás definir formalmente una máquina que acepta palabras cuyo largo es un múltiplo de tres. Para tu construcción debes cumplir lo siguiente:

- El alfabeto de entrada Σ es un alfabeto arbitrario que no puedes suponer.
- El alfabeto de la máquina es $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$.
- La máquina no puede tener más 5 estados.
- El lenguaje aceptado por la máquina es $\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ es múltiplo de } 3\}$

Se espera que entregues una definición formal para Q , q_0 , δ y F .

Pregunta 2 (3 ptos)

Ahora que entiendes mejor la formalidad detrás de las máquinas de Turing deberás construir una máquina real que podrás probar. Para ello usarás un simulador al que puedes acceder en <https://turingmachinesimulator.com/>.

Se pide que construyas en el simulador una máquina que acepte solo aquellas palabras que cumplen las siguientes reglas:

- Tener una cantidad de a 's que sea múltiplo de dos.
- Tener una cantidad de b 's que sea múltiplo de tres.
- La cantidad a 's dividido en dos debe ser igual a la cantidad de b 's dividido en tres.

Formalmente podemos definir el lenguaje de la máquina como:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \exists k \in \mathbb{N}. 2 \cdot k = \#_a(w) \wedge 3 \cdot k = \#_b(w)\}$$

Donde $\#_a(w)$ y $\#_b(w)$ representan la cantidad de a 's y la cantidad de b 's respectivamente en la palabra w .

El alfabeto de esta máquina es $\Sigma = \{a, b\}$, es decir solo recibe como entrada palabras que contengan letras a y b .

Si bien en nuestra representación formal de máquina de Turing teníamos una sola cinta, en el simulador puedes usar más cintas y esto podría facilitar tu tarea.

Algunos ejemplos de entradas:

$a \rightarrow$ rechaza porque no tiene una cantidad par de a 's
 $aa \rightarrow$ rechaza porque $\#_a(w)/2 \neq \#_b(w)/3$
 $bbabaa \rightarrow$ rechaza porque no tiene una cantidad par de a 's
 $bbaba \rightarrow$ acepta porque se cumple la propiedad con $k = 1$
 $bbbaabaabb \rightarrow$ acepta porque se cumple la propiedad con $k = 2$
 $aabbaba \rightarrow$ rechaza porque $\#_a(w)/2 \neq \#_b(w)/3$

Se espera que escribas el código de la máquina en el simulador y pruebes varios ejemplos para corroborar que funciona bien.

Bonus (0.5 ptos)

Puedes optar a bono en la tarea si logras hacer la máquina de la pregunta 2 usando una sola cinta.

Entrega

El formato de entrega de la tarea es el siguiente:

- La pregunta 1 debe ser respondidas usando \LaTeX . Hemos creado un template para que lo uses de base para responder esta pregunta: <https://www.overleaf.com/read/gjdghrhtjzfq>. El template también contiene información útil sobre los comandos de \LaTeX . Como no tienes autorización para editar el template puedes crearte una cuenta en Overleaf y copiar el código base. Después de escribir tu respuesta debes guardar el documento en formato PDF y subirlo a tu repositorio con el nombre `preg1.pdf` además de incluir el archivo `.tex` que lo compila con el nombre `preg1.tex`.
- Podría aplicarse un descuento si la respuesta de la pregunta 1 está muy desordenada o no usa las funcionalidades que ofrece \LaTeX .
- La pregunta 2 se responde usando el simulador. El código que escribas en el simulador debes guardarlo como archivo de texto y subirlo a tu repositorio con el nombre `preg2.txt`.
- Con respecto al bono, se revisará cuántas cintas usaste en la pregunta 2 y según eso se hará efectivo.

El simulador establece en sus términos y condiciones que ejecuta un *script* para minar criptomonedas. Esto significa que mientras lo estés usando podría aumentar el uso de CPU en tu computador y consumir más rápidamente la batería. Si no estás de acuerdo puedes descargar una extensión en tu navegador para bloquear automáticamente ese tipo de *scripts*. En Google Chrome puedes descargar la extensión que se llama AdGuard.