



Биомедицинска електроника

Бранислав Геразов

Факултет за електротехника и информациски технологии
Универзитет Св. Кирил и Методиј во Скопје, Македонија

Биомедицинска електроника ~ Предавања и вежби v0.68

© Copyright by Бранислав Геразов, 2016 – 2019 г.

Скрипта од предавањата и вежбите по предметот Биомедицинска електроника

Институт за електроника

Факултет за електротехника и информациски технологии

Универзитет Св. Кирил и Методиј во Скопје, Македонија

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-
ShareAlike 4.0 International. [https://creativecommons.org/
licenses/by-sa/4.0/](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)



Сликата на насловната страна е логото на **Open Hand Project** <http://www.openhandproject.org/>

Содржина

1 Вовед	4
1.1 Историја на биомедицинското инженерство	4
2 Основи на човековата анатомија и физиологија	8
2.1 Структура на клетка	8
2.2 Деполаризација на клетка	11
2.3 Нервни импусли	13
2.4 Градба и работа на мускулите	17
2.5 Градба и работа на човековото срце	22
3 Електронски кола за мерење на биопотенцијалите	25
3.1 Електромиографија	25
3.2 Електрокардиограм	26
4 Обработка на биомедицинските сигнали	31
4.1 Процесирање на ЕМГ сигнали	31
4.2 Процесирање на ЕКГ сигнали	40
Додаток А Слободен и отворен софтвер за инженерска и научна работа	47
A.1 Слободен софтвер	47
A.2 Четири слободи	47
A.3 Предности на слободниот софтвер	48
A.4 Одржливост	49
A.5 Слободен софтвер за инженерска и научна работа	50
Додаток Б Питон за процесирање на биомедицинските сигнали	51
B.1 Основи поставки во ГНУ/Линукс	51
B.2 Основи на работата со Питон	52
B.3 Основи на Нумпай и Матплотлиб	55
Додаток В Дискретна Фуриеова трансформација	57
B.1 Основи на Фуриеовата анализа	57
B.2 Фуриеова трансформација на временски отсекоци ФТВО	64
Додаток Г Филтри	67
Г.1 Основи на дигиталните филтри	67

Поглавје 1

Вовед

Биомедицинската електроника е дел од областа биомедицинско инженерство која се занимава со примената на инженерските принципи и концепти на дизајнирање во медицината и биологијата во здравствени цели. Главната цел е да се употребат познавањата од електротехниката и информациските технологии, како и инженерските вештини за решавање на проблеми, за унапредување на здравството, вклучувајќи ја дијагнозата, набљудувањето и терапијата (Enderle et al., 2005). Биомедицинското инженерство е изразено **мултидисциплинарна област**. Инженерите кои работат во оваа област мора да имаат еднакво цврсти познавања од биологијата и медицината и обратно – лекарите и биолозите во оваа област мора да се и добри инженери. Биомедицинското инженерство е и изразено **хумана област** поради тоа што резултатите од работата на ова поле имаат директен удел во подобрувањето на здравјето, а со тоа и животите на луѓето. Така, едни од најизразените достигнувања во биомедицинското инженерство се развојот на биокомпактилни протези за лицата со хендикеп, најразлични уреди за набљудување на човековото тело како што се ултразвукот, ЕКГ (електрокардиограм), ЕЕГ (електроенцефалограм) и МР (магнетната резонанса), пејсмејкери, машини за дијализа, вештачки органи, како вештачкото срце, како и цела низа на медицински уреди за дијагностицирање и терапија. Според статистичките податоци на Националната академија за инженерство, во светот денес работат околу 32.000 биомедицински инженери.

1.1 Историја на биомедицинското инженерство

Биомедицинското инженерство постоело со векови, дури и милениуми. Првата вештачка **протеза** е вештачкиот палец на ногата направен од дрво и кожа најден на мушија од средовечна жена близу античкиот град Теба во Египет која датира од периодот меѓу **1070 – 670 г. п.н.е.**, Сл. 1.1. Уште еден важен показател за историјата на биоинженерството е бронзената нога од Капуа¹ најдена во Капуа, Италија, која потекнува од **300 г. п.н.е.**, чија реплика е прикажана на Сл. 1.2.

Во модерното време биомедицинското инженерство доживува забрзан развој. Во **1816** г. скромноста го натерала францускиот лекар **Рене Лаенек**² да употреби весник завиткан во фишек да ѝ го слушне срцето на една дама што подоцна го навело да го создаде првиот **стетосткоп**, Сл. 1.3.

Во **1848** германскиот лекар и физичар **Херман фон Хелмхолц**³ првпат ги употребил инженерските принципи на физиолошки проблем идентификувајќи ја електричната отпорност на мускулите и нервните ткива. Во **1895** германскиот физичар **Вилхелм Рентген**⁴ случајно открил дека катодна цевка можела да направи хартија покриена со слој од бариум

¹Wikipedia: Capua Leg https://en.wikipedia.org/wiki/Capua_Leg

²Wikipedia: René Laennec https://en.wikipedia.org/wiki/René%C3%A9_Laennec

³Wikipedia: Hermann von Helmholtz https://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_von_Helmholtz

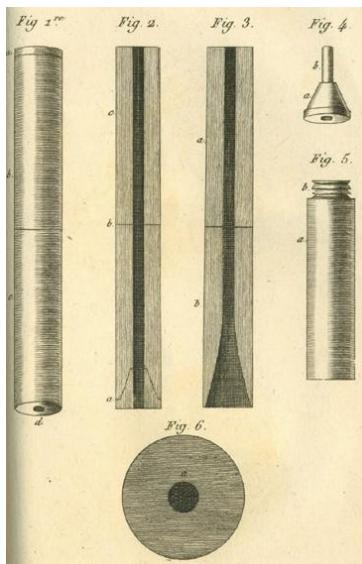
⁴Wikipedia: Wilhelm Röntgen https://en.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_R%C3%BCntgen



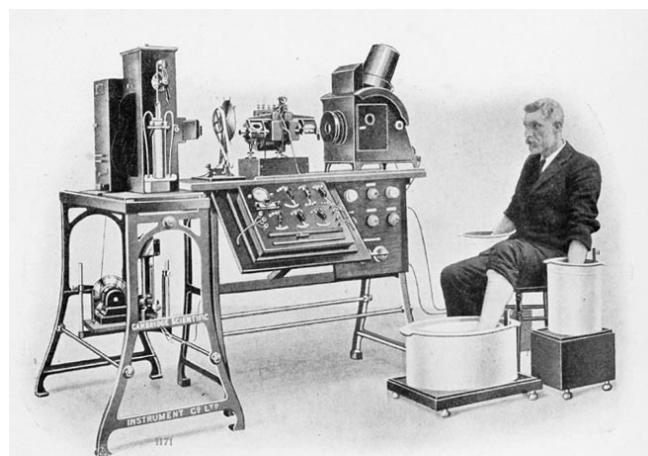
Сл. 1.1: Првата протеза – вештачки палец најден на мумија од стариот Египет.⁵



Сл. 1.2: Копија од ногата од Капуа од 300 г. п.н.е. пронајдена во Италија.⁶



Сл. 1.3: Првиот нацрт на стетоскоп од 1819 г.⁷



PHOTOGRAPH OF A COMPLETE ELECTROCARDIOGRAPH, SHOWING THE MANNER IN WHICH THE ELECTRODES ARE ATTACHED TO THE PATIENT, IN THIS CASE THE HANDS AND ONE FOOT BEING IMMESED IN JARS OF SALT SOLUTION

Сл. 1.4: Еден од најраните ЕКГ апарати направен во 1911 г. компанијата за научни инструменти од Кембриџ – *Cambridge Scientific Instrument Company*.⁸

платиноцијанид да свети, дури и кога тие се поставени во различни простории. Тој заклучил дека цевката мора да емитува некој вид на зраци кои ги нарекол „X“ зраци. По ова открытие, научната заедница започнува во голема мера да ги истражува пробивачките, но и уништувачките, својства на X-зраците. Овие истражувања резултираат со развојот на нивната примена за неинвазивно набљудување на човековото тело, речиси во целост елиминирајќи ја потребата од истражувачка хирургија. Брзиот напредок бил овозможен и од одлуката на Рентген да не ги патентира своите пронаоѓања. За нив, тој ја добива првата Нобелова награда по физика во 1901 г.

⁵A prosthetic toe in the Cairo Museum by Jacky Finch <http://www.livescience.com/4555-world-prosthetic-egyptian-mummy-fake-toe.html>

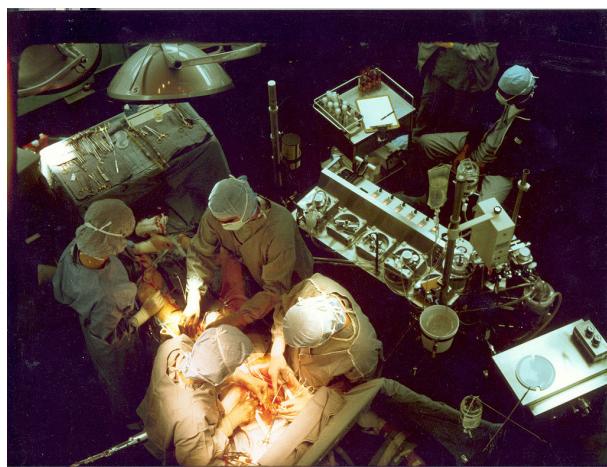
⁶By http://wellcomeimages.org/indexplus/ofb_images/9a/e9/fd5080571b64c69ab0dc7e574b82.jpg Gallery: <http://wellcomeimages.org/indexplus/image/M0012307.html>, CC BY 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=36352216>

⁷By René-Théophile-Hyacinthe Laennec - Cropped from Image:Rene-Theophile-Hyacinthe Laennec (1781-1826) Drawings stethoscope and lungs.jpg, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5443542>

⁸By http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Willem_Einthoven_ECG.jpg, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1153294>



Сл. 1.5: Оддел од респиратори за луѓе со детска парализа во 1953 г.¹¹



Сл. 1.6: Употреба на машина за кардиопулмонарен бајпас во коронарна хирургија.¹²

Иако Александар Муирхед за првпат во 1872 поврзал жици на раката на еден пациент за да му ги сними отчукувањата на срцето, првиот практично употреблив **електрокардиограм** (ЕКГ) го измислува во **1903** холандскиот лекар **Вилијам Ајндховен**⁹ за што ја добива Нобеловата награда за медицина во 1924 г. Еден таков уред е прикажан на Сл. 1.4. Неговиот изум – жичаниот галванометар, му овозможил за првпат да ги детектира и сними многу малите електрични струи произведени од човековото срце. Неговата машина давала точност која и ден денес е тешко достиглива од модерните ЕКГ апарати (Barold, 2003).

Биомедицинското инженерство за првпат се појавило како област во високото образование во **1921** г. при **Освалт Институтот за физика и медицина** во Франкфурт, Германија, а во **1969** г. е направена првата комбинирана **докторска програма** за доктор по медицински науки и филозофија (MD/PhD), при одделот за Биомедицинско инженерство во Универзитетот Кејс Вестерн Резерв во Кливленд, Охajo, САД.

Германскиот психијатар **Ханс Бергер**¹⁰ го измислува **електроенцефалограмот** (ЕЕГ) во **1924**. Тој е првиот што ги изучува различните бранови и ритми присутни кај нормалниот и абнормалниот мозок, кај луѓе кои страдаат од епилепсија, како што се α -брановите со опсег на фреквенции $7,812 - 13,28$ Hz. Првин тој вметнувал две електроди, една од предната страна и една од задната, под скалпот, за потоа да ги прицврсти на кожата со помош на гумени ластици. За своите мерења тој го користел жичаниот галванометар на Ајндховен, а подоцна и галванометарот за снимање на Сименс, кој му овозможил снимање на напони од редот на $100 \mu V$.

Во **1928** г. бил измислен **Дринкер респираторот**, којшто претставува еден тип на вентилатор со негативен притисок наречен и „челичен бел дроб“. Овој уред служи за овозможување на процесот на дишење кога човекот не може тоа да го направи тоа со сопствена сила. Првата примена на Дринкер респираторот била кај 8 годишно девојче заболено од детска парализа во Клиниката за деца во Бостон, САД. На Сл. 1.5 е прикажан еден цел оддел со вакви машини за луѓе со детска парализа во болницата Ранчо Лос Амигос во Калифорнија, САД во 1953 г.

Во **1950** г. бил измислен **електронскиот микроскоп**¹³ којшто можел да постигне многу големи резолуции поради тоа што електроните имаат 100.000 пати пократка бранова должина од видливата светлина. Во периодот **1950 – 1960** биле постигнати големи напредоци во

⁹Wikipedia: Willem Einthoven https://en.wikipedia.org/wiki/Willem_Einthoven

¹⁰Wikipedia: Hans Berger https://en.wikipedia.org/wiki/Hans_Berger

¹¹By Food and Drug Administration - <http://www.fda.gov/cber/summaries/cent092302pp.htm>, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3227578>

¹²By Jerry Hecht - <http://fmp.cit.nih.gov/hi/> - Image ID: 657 C, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=780261>

¹³Wikipedia: Electron microscope https://en.wikipedia.org/wiki/Electron_microscope



Сл. 1.7: Уред за магнетна резонанса.¹⁹



Сл. 1.8: Вештачко срце SynCardia.²⁰

нуклеарната медицина. Во 1953 била направена машината за **кардиопулмонарен бајпас**¹⁴ која првото времено може да ја превземе работата на срцето и белите дробови пред се за време на операции на срцето, и може да се искористи за воспоставување на контролирана хипотермија.

Во 1970 г. биле воведени техниките на **компјутерска томографија (СТ)**¹⁵ во која компјутерски се обработуваат повеќе Рентген слики за добивање на напречни пресеци на скенираниот дел од телото, како и **магнетна резонанса (MRI)**¹⁶ која преку употреба на силни магнетни полчиња може да ја опфати дистрибуцијата на молекулите на водата во телото, па со тоа да се набљудува неговата анатомија и физиолошките процеси, Сл. 1.7.

Техниката на **томографија со позитронска емисија (PET)**¹⁷ била воведена во 1980. Со која може да се снимат физиолошките процеси во телото преку анализа на гама зрачењето кое се внесува во телото преку биолошки активна молекула.

Првото **вештачко срце**¹⁸ успешно вградено во човек било срцето Јарвик-7, чиј наследник е прикажан на Сл. 1.8, во 1982 на Универзитетот во Јута. Срцето било вградено во 61-годишниот човек кој живеел со него 112 денови. Најдолготрајна успешна употреба на вештачко срце е 620 денови. Најчесто тоа се користи како првото времено решение пред да е можна трансплантирања на вистинско срце.

¹⁴Wikipedia: Cardiopulmonary bypass https://en.wikipedia.org/wiki/Cardiopulmonary_bypass

¹⁵Wikipedia: Computer Tomography - CT scan https://en.wikipedia.org/wiki/CT_scan

¹⁶Wikipedia: Magnetic resonance imaging https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_resonance_imaging

¹⁷Wikipedia: Positron emission tomography https://en.wikipedia.org/wiki/Positron_emission_tomography

¹⁸Wikipedia: Artificial heart https://en.wikipedia.org/wiki/Artificial_heart

¹⁹By Jan Ainali - Own work, CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3546051>

²⁰By SynCardia Systems, Inc. - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=22097831>

Поглавје 2

Основи на човековата анатомија и физиологија

Разбирањето на човековата анатомија и физиолошките процеси кои се одвиваат во човековиот организам е од големо значење за дизајнирањето на биомедицинските електронски системи. Од анатомски аспект потребно е познавање на структурата на различните ткива, односно нивните електрични карактеристики, за да може да се дизајнираат системи за нивно набљудување, како и стимулација. Од физиолошки аспект, пак, најзначајни се процесите кои генерираат промени во електричното поле во телото, а со тоа можат да бидат детектирани преку електроди. Со овие процеси се занимава областа **електрофизиологија**, а нивното познавање е важно за дизајнот на системи како што се електромиограмот (ЕМГ), електрокардиограмот (ЕКГ) и електроенцефалограмот (ЕЕГ).

2.1 Структура на клетка

Клетката е основната структурна и функционална единица на сите живи организми.¹ Таа е најмал жив биолошки систем.² Клетките се способни за саморепродукција, бидејќи го содржат целокупниот наследен материјал. Типичната градба на една клетка е дадена на Сл. 2.1.³ Иако основната градба на сите клетки во организмите е иста, сепак, во зависност од местото и функцијата клетките можат да се разликуваат по својата големина и облик. По големина клетките кај повеќеклеточните организми се движат помеѓу 10 и 100 μm , но можат да бидат и многу поголеми како што се мускулните клетки и невроните. По својот облик клетките исто така можат да бидат топчети, плочести, коцкасти, вртеновидни или пак разгранети. На пример: неврните клетки со своите долги продолжетоци многу се разликуваат од мускулните клетки или од прозирните клетки во очната леќа. Според местоположбата и функцијата во организмот, разликуваме епителна, неврна, мускулна, полова клетка итн.

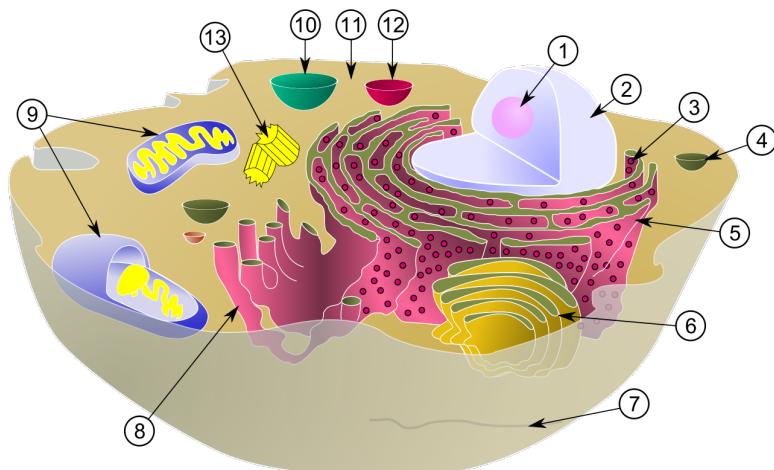
Однадвор клетката е обвиткана со **клеточна мембрана**.⁴ Ваквата мембрана е составена од два слоја на масти во кои се вметнати различни белковини и мало количество на шеќери. Клеточната мембрана е многу важна, бидејќи таа одредува што може да влезе, а што да излезе од клетката. Клеточната мембрана е многу тенка и е составена од фосфолипиди кои имаат еден хидрофобичен и еден хидрофиличен крај. Фосфолипидите се распоредени во бимолекуларен слој описан според течно-мозаичниот модел, а разните протеини се вметнати на различни места во овој бимолекуларен слој, види понатаму Сл. 2.3.

¹Текстот во делот 2.1 користи исечоци од Wikipedia: Клетка <https://mk.wikipedia.org/wiki/Клетка>

²Интересно видео за тоа колку ние сме клетките кои ги содржиме и обратно може да видите овде: Kurzgesagt – In a Nutshell: What Are You?<https://www.youtube.com/watch?v=JQVmDkZT4>

³Поучно видео за структурата на клетката може да видите овде: Biology: Cell Structure I Nucleus Medical Media <https://www.youtube.com/watch?v=URUJD5NEXC8>

⁴Wikipedia: Клеточна мембрана https://mk.wikipedia.org/wiki/Клеточна_мембрана



Сл. 2.1: Градба на клетката: 1) јадренце, 2) клеточно јадро, 3) рибозом, 4) везикула, 5) Груб ендоплазматичен ретикулум (ЕР), 6) Голциев систем, 7) цитоскелет, 8) Мазен ЕР, 9) митохондрија, 10) вакуола, 11) лизозом, 12) цитоплазма, 13) центриоли.⁷

Цитоплазмата е полутечна маса со зрнеста структура, изградена од вода и минерални соли, неоргански и органски материји: шеќери, масти и белковини. Таа содржи цитоскелет кој и го одржува обликот и овозможува транспорт на метии низ неа. Зрнестата структура на цитоплазмата ја сочинуваат посебни делчиња наречени органели во кои се вршат животните процеси. Познати органели се:

- **јадрото** е органела која ја има во секоја клетка. Јадрото е обвиткано со јадрена обивка со пори. Во јадрото се сместени хромозомите, а во нив гените кои во дезоксирибонуклеинската киселина (ДНК) ја носат генетската информација. Во гените се сместени и контролните механизми за управување со различните животни процеси кои се одвиваат во клетката,
- **рибозомите** се органелите кои се одговорни за произведување на протеините врз база на генетската информација⁵,
- **митохондриите** се клеточни органели во кои се врши аеробното разградување на материите и се ослободува енергија во вид на аденоzin трифосфат (АТФ)⁶. Митохондриите содржат свои гени и се способни сами да синтетизираат протеини и да се размножуваат,
- **вакуоли** претставуваат мали торбички што служат за складирање на резервни материји како вода, масти кај масните клетки и други органски материји. Вакуолите, воедно, служат и за исфрлање на непотребните материји од клетката,
- **гликоген** е сложен шеќер кој се складира како резервен шеќер во цитоплазмата на клетката,

Сите клетки се изградени од хемиски елементи кои се среќаваат и во неживата природа. Од над 100 познати хемиски елементи, околу 60 влегуваат во составот на клетките. При тоа, овие елементи количински не се застапени еднакво, па се разликуваат:

- **Макроелементи** – јаглерод С, кислород О, водород Н и азот N,
- **Микроелементи** – фосфор P, сулфур S, натриум Na, калциум Ca, магнезиум Mg, калиум K и хлор Cl,
- **Елементи во трагови** – јод I, флуор F, железо Fe, цинк Zn, манган Mn и др.

⁵Овој процес е претставен преку анимација во видеото: From DNA to protein - 3D <https://www.youtube.com/watch?v=gG7uCskUOrA>

⁶На английски Adenosine triphosphate (ATP).

⁷Од MesserWoland и Szczepan1990 — сопствено дело (создадена со Inkscape), CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1279365>

Табела 2.1: Застапеност на елементите во клетките на човекот.

Елемент	%	Елемент	%	Елемент	%
Водород	9,5	Сулфур	0,3	Железо	траги
Јаглерод	18,5	Калциум	1,5	Натриум	0,2
Азот	3,3	Магнезиум	0,1	Калиум	0,4
Кислород	65,0	Манган	траги	Јод	траги
Фосфор	1,0	Цинк	траги	Хлор	0,2

Процентната застапеност на некои од нив во клетките од човековиот организам е дадена во Табелата 2.1. Во составот на клетките, хемиските елементи се јавуваат во форма на соединенија - органски и неоргански. Биолошкото значење на овие хемиски елементи е големо, независно од нивната процентна застапеност. Недостигот на кој и да е елемент предизвикува нарушување во нормалното функционирање на клетките и на организмот.

Од неорганските соединенија најзастапена е водата, која е неопходна за животот. Таа во просек, во клетките е застапена со околу 80%, но некои клетки содржат повеќе, на пр. ембрионалните клетки содржат до 95%. Водата за клетката е значајна од неколку причини:

- метаболизмот во клетките е можен само во водна средина,
- таа е дисперзно средство за клеточните колоиди, т.е. мешавините од соединенија со една, две или повеќе фазни состојби,
- учествува во транспортот на материите,
- има голем топлински капацитет.

Други неоргански соединенија во клетката се минералните соли. Тие најчесто се јавуваат растворени, дисоциирани на јони, и тоа:

- **катјони** – Натриум Na^+ , Калиум K^+ , Калциум Ca^{2+} , и Магнезиум Mg^{2+} ,
- **анјони** – хлорид Cl^- , сулфат SO_4^{2-} , HCO_3^- , и фосфат PO_4^{3-} .

Јоните имаат важни функции во клетката. Тие учествуваат во одржувањето на осмотската хомеостаза, или рамнотежа, меѓу клетката и нејзината околина, одговорни се за ацидобазичната хомеостаза на клетката, а исто така ја регулираат и активноста на некои ензими.

Во клетките се јавуваат четири типа органски соединенија: јаглеидрати, липиди, протеини и нуклеински киселини.

- **Јаглеидратите**, или шеќерите, се органски соединенија изградени од јаглерод, водород и кислород. Од моносахаридите, најпознати соединенија во клетката се пентозите рибоза и деоксирибоза и хексозите глукоза, која клетките ја користат најчесто за добивање енергија, и фруктоза. Од дисахаридите значајна е сахарозата, или трсчен шеќер, додека од полисахаридите најзначајни се гликогенот во животинските клетки и скробот во растителните клетки, и целулозата кај растенијата. Ошто земено, јаглеидратите се извор на енергија на клетките. Со нивното разложување, како краен производ се добива јаглероден диоксид и вода и се ослободува енергија.⁸ Освен тоа, тие влегуваат во составот на мембраниите, клеточниот сид и други клеточни структури.
- **Липидите**, или масните материји, се група органски соединенија за кои е карактеристично што се хидрофобни, односно нерастворливи во вода, а се раствораат во органски растворувачи, на пр. етер, ацетон, бензин и др. Липидите се извор на енергија и затоа во

⁸Фруктозата, која заедно со глукозата влегува во составот на сахарозата, не може директно да се метаболизира во човековиот организам, туку мора првин да биде претворена во масти во црниот дроб кои потоа можат да бидат искористени за енергија или наталожени. Robert H. Lustig – Sugar: The Bitter Truth <https://www.youtube.com/watch?v=dBnniuab-oM>

клетките најчесто се јавуваат како резерви. По потреба, особено при подолгото гладување, тие се разложуваат до CO_2 и H_2O , ослободувајќи притоа големо количство енергија. Освен енергетска, овие соединенија имаат и структурна и заштитна функција, бидејќи учествуваат во изградбата на клеточната мембрана и другите мембрански системи во клетката. Разликуваме прости липиди кои во својот состав содржат виши масни киселини кои се делат на незаситени и заситени⁹, и сложени липиди кои содржат и нелипидно соединение. Еден пример за сложени липиди се фосфолипидите кои содржат фосфорната киселнина која им дава хидрофиличен крај. Попознати липиди во составот на клетката се неутралните масти и липоидите.

- **Протеините**, или белковините, имаат огромно биолошко значење, како за клетката, така и за организмот. По водата, количински се најзастапени во клетката. Тие не можат лесно да бидат искористени за добивање енергија но од нив зависат основните особини на клетката, метаболизам и градба:

- учество во градбата на клеточните структури: мембрани, органели и др.,
- учество во различни движења на клетката – главно во мускулните клетки, тоа се протеините актин и миозин,
- антителата, кои се протеини, имаат заштитна функција,
- протеините во вид на ензими, ги убрзуваат биохемиските процеси во клетката итн.

- **Нуклеинските киселини** се соединенија со големо биолошко значење, бидејќи го изградуваат наследниот материјал и имаат централна улога во синтезата на протеините, а преку нив ги определуваат главните особини и карактеристики на клетката. Има два типа нуклеински киселини: ДНК (деоксирибонуклеинска киселина) и РНК (рибонуклеинска киселина).

2.2 Деполаризација на клетка

Во основата зад електричните промени кои настануваат во организмот, којшто може да бидат детектирани преку соодветни сензори, стои процесот на деполаризација на една клетка. **Деполаризацијата**¹⁰ во биолошки смисол, подразбира кога во клетката настанува ненадејна и драматична промена во електричен домен, Сл. 2.2. Во својата стационарна состојба, клетките ја одржуваат својата внатрешност на негативен електричен потенцијал, споредено со нивното опкружување, преку одржувањето на различна концентрација на позитивните и негативните јони.

Во ошт случај, без влијание на надворешното електрично поле, непосредно од внатрешната страна на клеточната мембрана се натрупува вишок негативни јони, а позитивните јони се натрупуваат на надворешната страна на мембраната. На тој начин во близина на мембраната доаѓа до формирање на двоен електричен слој. По своите електрични својства клетката и нејзината околина може да се прикажат како кондензатор. Цитоплазмата и течноста што ја опколува, кои имаат висока спроводливост, се двете електроди, а клеточната мембрана со својата мала спроводливост ја има улогата на диелектрик кој ги разделува електродите.¹²

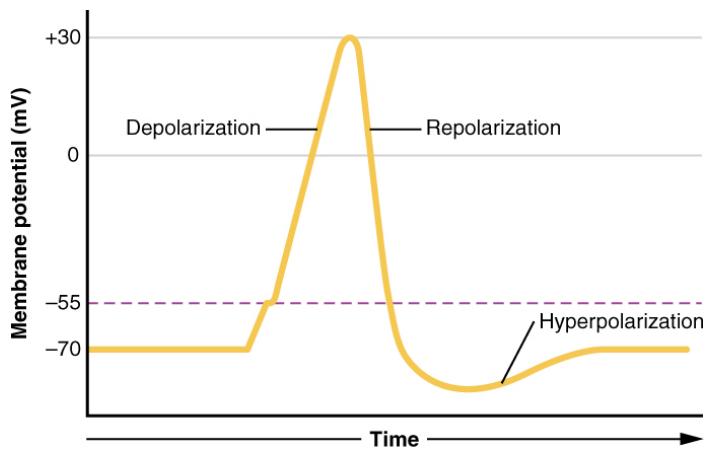
Разликата во потенцијалите помеѓу внатрешноста и надворешноста на клетката се нарекува **потенцијал на клеточната мембрана** или **биоелектричен потенцијал во**

⁹Заситените масти кои претежно се од животинско потекло се посебно штетни за човековиот кардиоваскуларен систем. Michael Greger M.D. – Low-Carb Diets & Coronary Blood Flow <https://nutritionfacts.org/video/low-carb-diets-and-coronary-blood-flow/>.

¹⁰Wikipedia: Depolarization <https://en.wikipedia.org/wiki/Depolarization>

¹¹By OpenStax College - Anatomy & Physiology, Connexions Web site. <http://cnx.org/content/col11496/1.6/>, Jun 19, 2013., CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=30147928>

¹²Текстот во овој поднаслов користи исчеоци од Wikipedia: Биоелектричен потенцијал https://mk.wikipedia.org/wiki/Биоелектричен_потенцијал



Сл. 2.2: Деполаризација на една клетка.¹¹

мирување. Сите електрични процеси во човековото тело се должат на промената на овие потенцијали (Гершановски). Големината на биоелектричниот потенцијал може да се мери со помош на специјална микро-електрода со која се пробива клеточната мембра на и таа се внесува во нејзината внатрешност. Втората електрода се поставува во течноста на меѓуклеточниот простор. Биоелектричните потенцијали се движат околу -70 mV , но немаат секогаш иста големина.

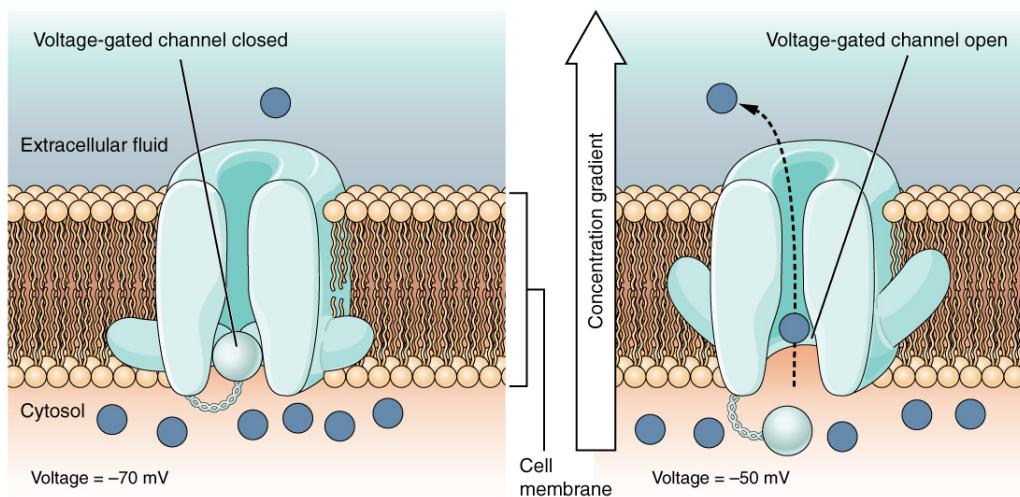
Најважна улога во создавањето на биоелектричниот потенцијал има дифузијата на натриумовите Na^+ и калиумовите K^+ јони преку клеточната мембра, која е резултат на дејството на таканаречените **натриум-калиумови пумпи**. Преку нив за секои два внесени K^+ јони, од клетката се испуштуваат три Na^+ јони со употреба на еден молекул на АТФ.¹³ На овој начин не само што се намалува електричниот потенцијал на клетката, туку и се создаваат услови за нејзина брза деполаризација. Така, екстрацелуларната течност содржи голема концентрација на Na^+ јони кои не можат да продрат во клетката поради тоа што пропустливоста на мемраната на Na^+ јони е 100 пати поголема од пропустливоста за K^+ јони. Оваа нерамнотежка ја одржуваат и **напонски регулираните јонски канали** кои биоелектричниот потенцијал ги држи затворени, Сл. 2.3. И покрај високата концентрација на K^+ во внатрешноста на клетката, таа вообичаено содржи и негативно наелектризирани честички кои ја воспоставуваат негативната поларизација.

Откако клетката ќе го воспостави биолектричниот потенцијал на мирување, таа може да биде побудена и да оствари деполаризација. Побудувањето на клетките може да се оствари на повеќе начини и тоа под:

- механичко дејство,
- хемиско дејство,
- електрично дејство и друго.

При деполаризацијата, за време помало од 1 ms, надворешната страна на клеточната мембра станува негативна во однос на внатрешната, Сл. 2.2. Промената на мембранныот потенцијал при побудување на клетките се нарекува **акционен потенцијал**. Во почетниот стадиум на деполаризација, преку отворање на напонски регулираните јонски канали предизвикано од електричната побуда, Сл. 2.3, се зголемува пропустливоста на мемраната на јоните на натриумот Na^+ па тие во голем број навлегуваат во клетката поларизирајќи ја позитивно нејзината внатрешност. Ова се случува поради отворање на напонски регулираните јонски канали предизвикано од побудата на клетката, Сл. 2.3. Деполаризацијата завршува кога внатрешноста на клетката ќе постигне позитивна поларизација. Ваквата прераспределба на електричните полнежи трае се додека трае и побудената состојба на клетките, после која повторно се воспоставува мембранныот потенцијал на мирување.

¹³Овој процес, како и целиот процес на деполаризација кај нервните импулси се претставени како анимација во видеото Nerve Impulse Molecular Mechanism [3D Animation] <https://www.youtube.com/watch?v=fHRC8S1LcHO>



Сл. 2.3: Напонски регулирани јонски канали.¹⁴

Брзата дифузија на натриумовите јони трае од 0,1 до 1 ms. Создадениот позитивен полнеж во внатрешната страна на мемраната го забавува натамошното навлегување на натриумовите јони. Тој исто така ги активира и каналите за K^+ со што калиумовите јони започнуваат да ја напуштаат клетката. Како последица од ова повторно се воспоставува биоелектричниот потенцијал на мирување. Овој процес се нарекува **реполаризација**. Низ целиот овој процес на деполаризација и реполаризација натриум-калиумовите пумпи постојано работат.¹⁵

Процесот на реполаризација предизвикува натфрлање, всушност потфрлање, бидејќи калиумовите јони продолжуваат да излегуваат од клетката снижувајќи го нејзиниот потенцијал под оној во мирување. Ова потфрлање се нарекува **хиперполаризација**. Хиперполаризацијата престанува со затворањето на сите напонски контролирани јонски пумпи, со што на натриум-калиумовите пумпи, кои работат целото време, им се дава простор да го воспостават потенцијалот на мирување.

Веднаш по хиперполаризацијата напонски-контролираните натриумови пумпи се во состојба во која не можат да бидат побудени, дури и при доаѓање на нов надворешна побуда, како на пример надворешен акционен потенцијал. Ова време се нарекува **време на непобудливост** и тоа игра клучна улога во еднонасочното простирање на акционите потенцијали.

Промената на биоелектричниот потенцијал за време на деполаризацијата го овозможува преносот на електрични импусли во клетките, како кај невроните, но и помеѓу нив. Со тоа деполаризацијата како начин на комуникација е од особено значење за работата на многу видови на клетки, но и на човековиот организам во целина.

2.3 Нервни импусли

Градба на неврон

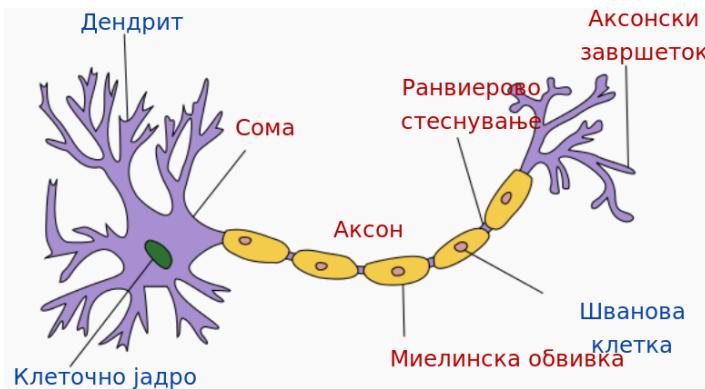
Нервните клетки или **невроните** се основните градбени единки на нервниот систем.¹⁶ За разлика од другите клетки во телото, невроните се карактеризираат со надразливост, осетливост и спроводливост. Овие карактеристики се во согласност со нивната специфична функција. Градбата на невроните е прикажана на Сл. 2.4 и содржи:

- тело на нервната клетка или невроцит,

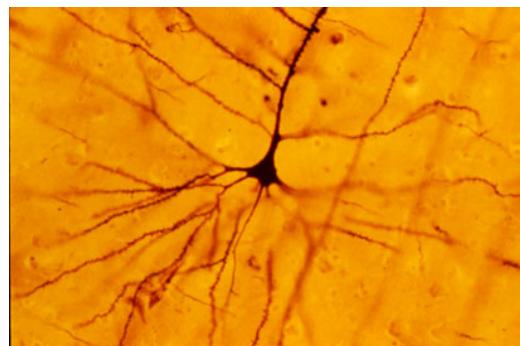
¹⁴By OpenStax College - Anatomy & Physiology, Connexions Web site. <http://cnx.org/content/col11496/1.6/>, Jun 19, 2013., CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=30147924>

¹⁵Уште една убава претстава на целиот процес на деполаризација и реполаризација е дадена во видеото Action Potential Animation https://www.youtube.com/watch?v=-h_kWFm2faQ

¹⁶Текстот во овој параграф користи исечоци од Wikipedia: Неврон <https://mk.wikipedia.org/wiki/Неврон>



Сл. 2.4: Градба на невроните.¹⁷



Сл. 2.5: Човечки неврон виден под микроскоп.¹⁸

- дендрити (влезови), и
- нервно влакно или аксон (излез).

На Сл. 2.5 е прикажан неокортikalен пирамidalен неврон обоеан по методот на Голци. Се забележуваат многубројните дендрити кои излегуваат, всушност водат кон невроцитот.

Побудување и движење на нервните импулси

Побудите кај невроните можат да бидат физички, електрични и хемиски, но тие освен што можат да извршат побудување на невронот, можат и да го инхибираат истиот. Така, инхибиторската побуда наместо да предизвика промени во невронот во насока на деполаризација, таа врши негова хиперполаризација. Оваа хиперполаризација предизвикува пад на биоелектричниот потенцијал на невронот под овој на мирување. Оваа додатна негативна поларизација мора да се надмине за да настане деполаризација, со што таа е отежната. Позитивните побуди пак, го зголемуваат напонот во невронот, што предизвикува невронот да може полесно да биде однесен во деполаризација во однос на неговата состојба во мирување.

Без разлика од поларитетот на побудите, тие секогаш патуваат од дендритите кон телото на невронот и конвергираат кон коренот на аксонот, Сл. 2.6. Тука се врши нивно сумирање, односно еден вид на биолошка интеграција, за да се одреди одсивот на невронот. Ако сумата на побудите достигне одреден напон наречен **напон на праг**, доаѓа до деполаризација којашто започнува да се простира од коренот на аксонот кон неговиот врв. Овој бран на деполаризација долж аксонот се нарекува **акциски потенцијал** или **нервен импулс**.

Простирањето на деполаризацијата долж невронот е прикажана на Сл. 2.7, а фазите во простирањето на Сл. 2.8.²⁰ Таа се одликува со попречна струја насочена навнатре кон клетката на местото на простирање.

По пристигнувањето на нервните импулси на крајот од аксонот, тие предизвикуваат ослободување на неуротрансмитери од невронот. Овие неуротрансмитери претставуваат побуда за дендрити на други неврони или пак за мускулни клетки. По простирањето на нервниот импулс низ аксонот на невронот, невронот мора повторно да го воспостави биолектричниот потенцијал

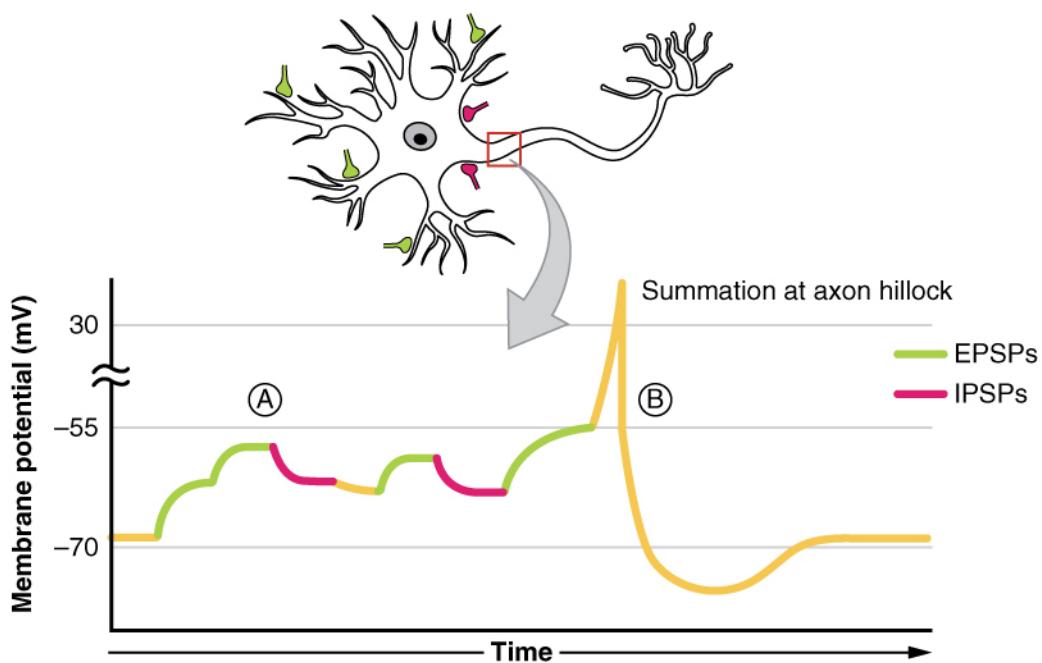
¹⁷ Wikipedia: Неврон <https://mk.wikipedia.org/wiki/Неврон>, оригинал од Quasar Jarosz на Википедија на англиски, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7616130>

¹⁸ Original uploader was Cahass at en.wikipedia — Transferred from en.wikipedia, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=651365>

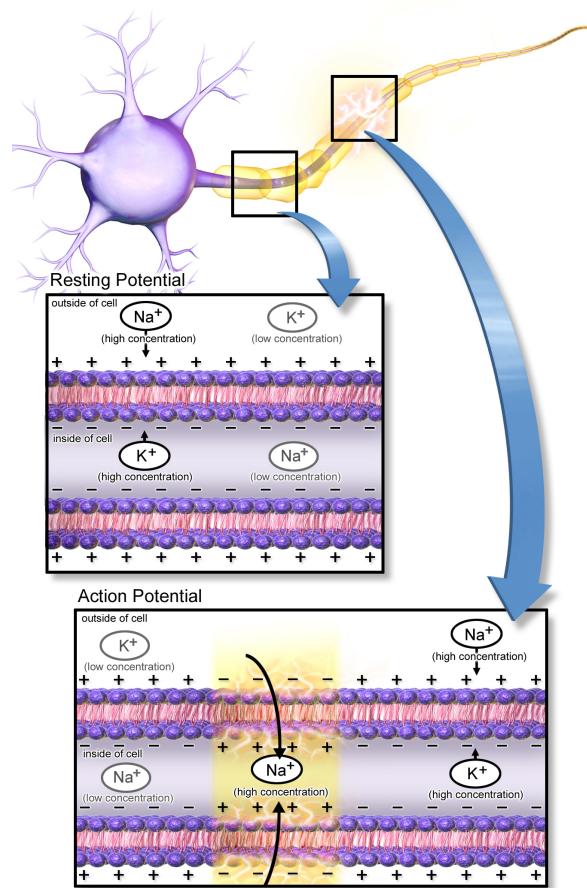
¹⁹ By OpenStax College - Anatomy & Physiology, Connexions Web site. <http://cnx.org/content/col11496/1.6/>, Jun 19, 2013., CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=30147931>

²⁰ Wikipedia: Action potential https://en.wikipedia.org/wiki/Action_potential

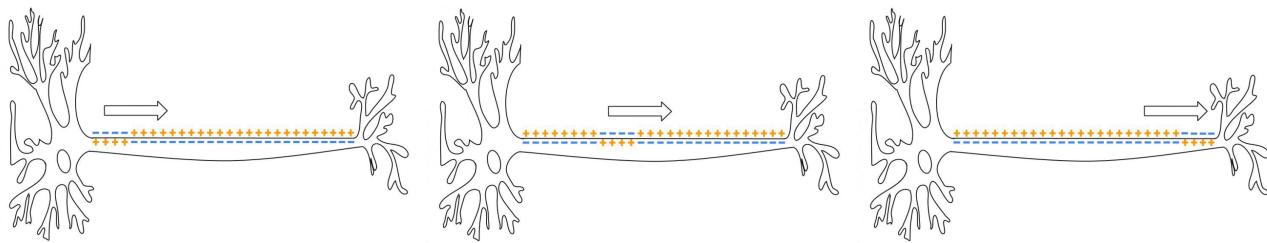
²¹ Blausen.com staff. "Blausen gallery 2014". Wikiversity Journal of Medicine. DOI:10.15347/wjm/2014.010. ISSN 20018762. - Own work, CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=29452220>



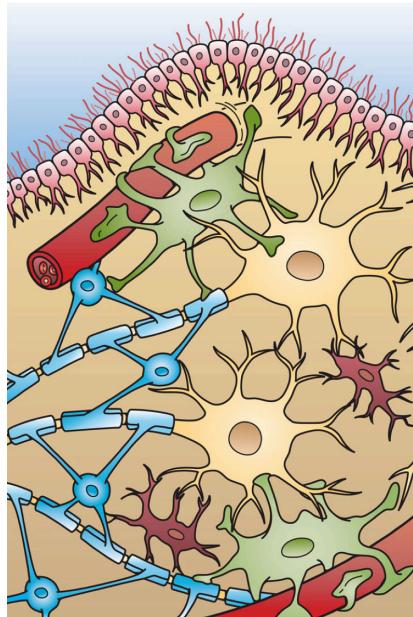
Сл. 2.6: Интегрирање на побудите во телото на невронот.¹⁹



Сл. 2.7: Простирање на нервниот импулс.²¹



Сл. 2.8: Фази од простирањето на нервниот импулс.²²



Сл. 2.9: Глиа клетки во централниот нервен систем (од горе надолу): епендимални клетки (розово), астроцити (зелено), микроглиални клетки (темно црвено) и олигодендроцити (сино).²⁵

во мирување. Пред невронот да може да проследи нов нервен импулс, треба да помине **времето на непобудливост**.²³

Глиа клетки

Швановите клетки преставуваат еден вид на **глиа клетки** кои се задолжени за создавање на миелинската обвивка, види подолу. Глиа клетките се од суштинско значење за правилната работа на невроните.²⁴

Уште повеќе, според некои истражувања нивното моделирање во вештачките невронски мрежи носи подобрени перформанси (Porto-Pazos et al., 2011). Некои од поважните типови на глиа клетки, претставени на Сл. 2.9, се:

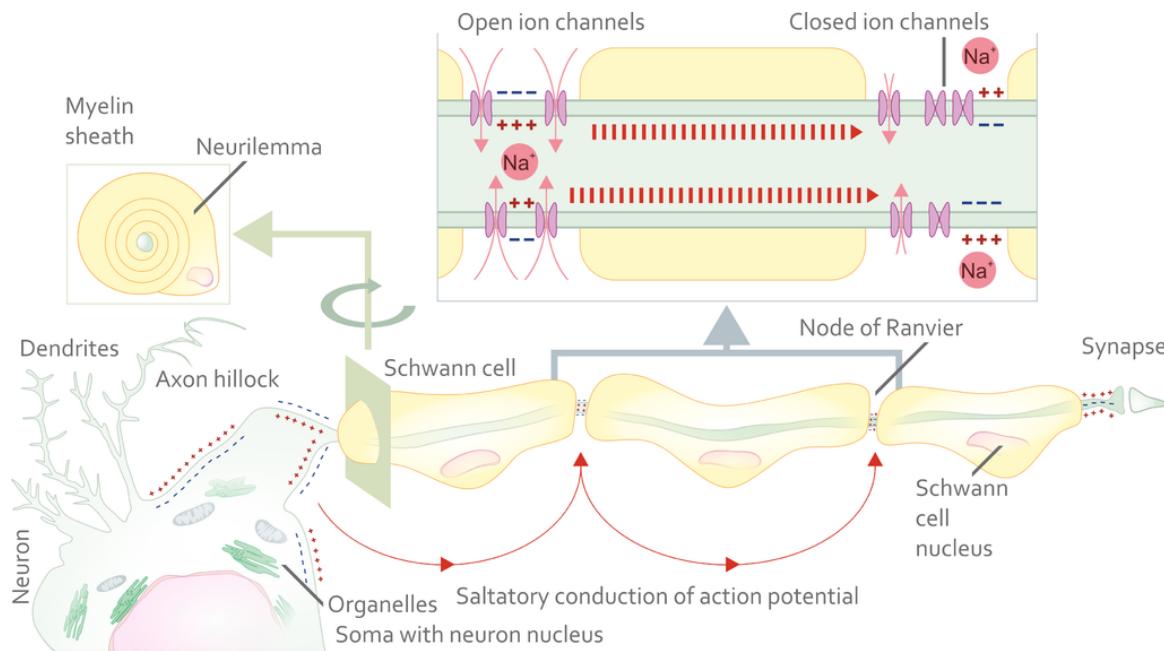
- епендималните клетки – одговорни за излачување и придвижување на мозочно-спиналната течност,
- астроцитите – задолжени за пренос на хранливите материји од капиларите до невроните и отпадните материји од невроните во спротивна насока тие се чуварите на мозочно-крвната бариера,

²³Како што кажавме погоре, добра илустрација на целиот процес на простирање на нервните импулси е дадена во видеото Nerve Impulse Molecular Mechanism [3D Animation] <https://www.youtube.com/watch?v=fHRC8S1LcH0>

²⁴By Laurentaylorj - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=26311114>

²⁵Wikipedia: Glia <https://en.wikipedia.org/wiki/Glia>

²⁵By Artwork by Holly Fischer - <http://open.umich.edu/education/med/resources/second-look-series/materials> - CNS Slide 4, CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=24367125>



Сл. 2.10: Простирање на нервниот импулс во миелизиран неврон со скокови.²⁶

- микроглиалните клетки – одговорни за инфраструктурно позиционирање на невроните, и
- олигодендроцитите (во периферниот нервен систем тоа се Швановите клетки) – одговорни за создавање на миелинската обвивка.

Миелинска обвивка

Миелинската обвивка се состои од низа на сегменти одделени со стеснувања наречени **јазли на Ранвиер**. Нејзината задача е да ја намали капацитивноста на мембраната и да ја зголеми нејзината отпорност во деловите помеѓу два соседни јазли преку попречување на движењето на јоните низ мембраната на аксонот. На тој начин, единствената размена на јони се случува во немиелизираните јазли, Сл. 2.10. Пропагацијата на акцискиот потенцијал долж деловите покриени со миелин се одвива преку струја во цитоплазмата која е доволно силна да предизвика деполаризацијата во соседниот јазол на Ранвиер. На овој начин деполаризацијата се простира со потскокнување од јазол до јазол.²⁷ Миелинот со тоа овозможува забрзан пренос на нервните импулси, како и поголема енергетска ефикасност на целиот процес. Последново е особено важно ако се има во предвид дека нервниот систем користи околу 20% од енергијата на човековиот организам.

Миелинизацијата ја зголемува средната брзина на простирање на нервните импулси која се движи од 1 m/s до преку 100 m/s и расте со зголемување на дијаметарот на аксонот. Брзината на простирање во зависност од дијаметарот на аксонот во μm и миелинизацијата е дадена на Сл. 2.11. Брзината v на миелинираните неврони зависи линеарно од дијаметарот на аксонот d , т.е. $v \propto d$, додека брзината на немиелинизираните неврони зависи од квадратниот корен на дијаметарот $v \propto \sqrt{d}$. На графикот екстраполираните вредности се прикажани со испрекинати линии.

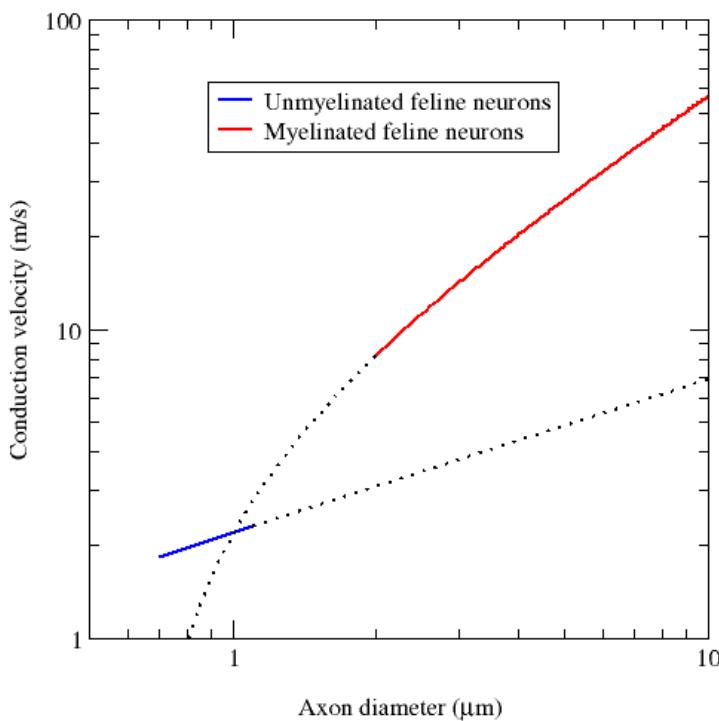
2.4 Градба и работа на мускулите

Мускулите претставуваат ткива составени од мноштво спонзори на **мускулни влакна**, кои ја имаат способноста да генерираат сила и движење преку контракција. Тие го сочинуваат

²⁶By Helixitta - Own work, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=44043108>

²⁷Wikipedia: Saltatory conduction https://en.wikipedia.org/wiki/Saltatory_conduction

²⁸By WillowW - Own work, CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3844705>



Сл. 2.11: Влијание на миелинската обвивка врз брзината на простирање на нервниот импулс.²⁸

активниот дел на локомоторниот апарат.²⁹ Постојат три видови на мускулни ткива во човековиот организам:

- **напречно-пругасто** ткиво од кое се изградени скелеталните мускули кои преку **тетиви** се врзани за скелетот на човекот, имаат голема брзина на контракција и овозможуваат движење преку свесна контрола,
- **мазно** ткиво кое ги формира сидовите на внатрешните органи, на пр. гастроинтестиналниот тракт и уринарниот систем; тие имаат бавна брзина на контракција и работат без наша волја, и
- **срцево** ткиво кое го формира сидовите на срцевите празнини, т.е. комори. По градбата е слично на напречно-пругастото, а по функција на мазното мускулно ткиво, со средна брзина на контракција и вон наша свесна контрола.

Структурата и составот на мускулните влакна од напречно-пругастото ткиво е прикажан на Сл. 2.13. Може да се види дека мускулните влакна се клетки со повеќе клеточни јадра. Нивната основна градбена единка се протеинските нишки наречени **миофилили**. Миофилилите се обвиткани од **саркоплазмичен ретикулум (СР)** и се составени од наизменична низа на напречни структури изградени од тенки нишки на **актин** и дебели нишки на **миозин**. Елементарниот дел на оваа повторувачка структура се нарекува **саркомер**. Поради внатрешната структура на миофилилите, скелеталните, а и срцевите мускулни влакна имаат пругаст, т.е. стриест изглед.

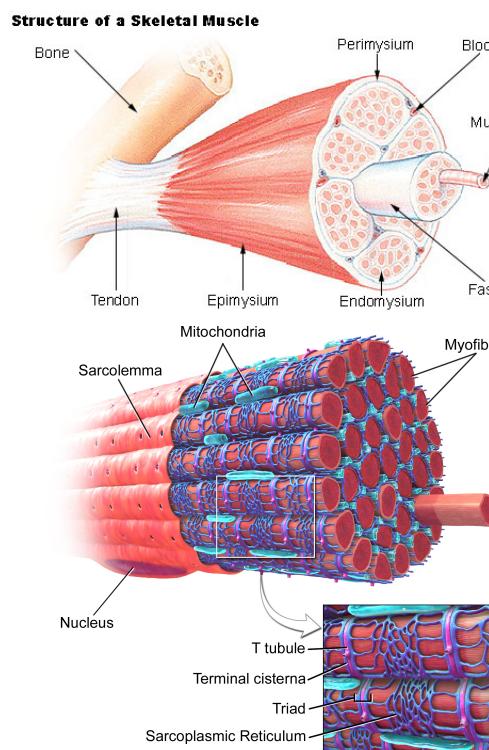
Контракциите на скелетните мускули се **неврогенични**, односно тие се предизвикани од нервни

²⁹ Википедија – Мускул <https://mk.wikipedia.org/wiki/Мускул>

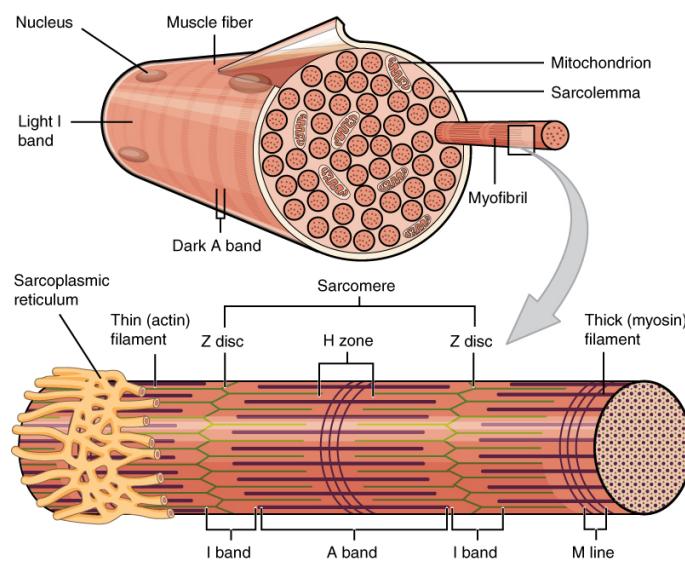
³⁰ Illu muscle structure – Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1197565>

Skeletal Muscle Fiber – By BruceBlaus. Blausen.com staff (2014). "Medical gallery of Blausen Medical 2014". WikiJournal of Medicine 1 (2). DOI:10.15347/wjm/2014.010. ISSN 2002-4436. - Own work, CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=29452230>

³¹ Organization of skeletal muscle – By OpenStax - <https://cnx.org/contents/FPtK1zmh@8.25:fEI3C80t@10/Preface>, CC BY 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=30015051>



Сл. 2.12: Структура и состав на скелеталните мускули.³⁰



Сл. 2.13: Структура и состав на скелеталните мускулни влакна.³¹

импулси на моторните неврони, наречени мотоневрони, кои предизвикуваат деполаризација на мускулните влакна, а со тоа и нивна **контракција**.³² Притоа, мотоневроните се разгрануваат и инервираат повеќе мускулни влакна, активирајќи ги истовремено. Збирот на мотоневрон со мускулните влакна кои ги инервира се нарекува **моторна единица**. Останатите два типа на мускули се **миогенични** што значи дека тие самите се одговорни за предизвикување на сопствената контракција, иако нивната работа може да биде модулирана од автономниот нервен систем.

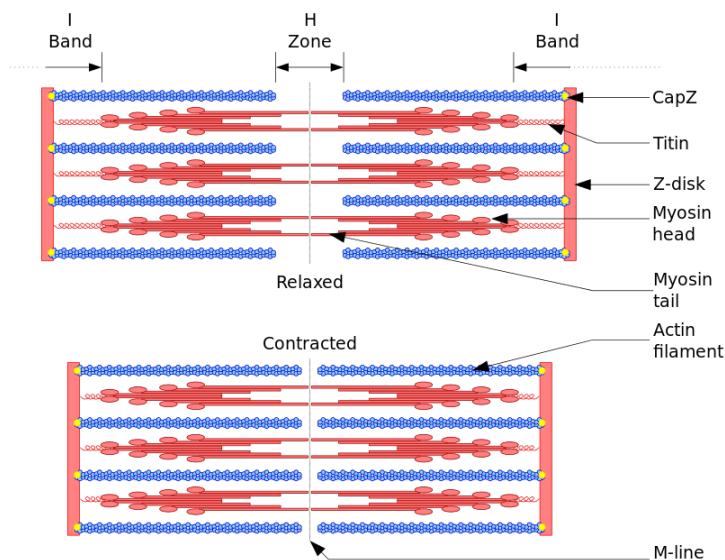
Покрај различниот тип на влезна побуда на која реагираат, контракцијата на сите три типа на мускулно ткиво се должи на истиот физиолошки механизам. Имено, при активација протеинските нишки на **актин и миозин** во мускулните влакна според **теорија на лизгање на нишките**, тие лизгаат едни покрај други генерирајќи сила и придвижување, т.е. контракција. На Сл. 2.14 е прикажана меѓусебната положба на протеинските нишки при релаксација, односно контракција на мускулните влакна.

Физиолошкиот процес којшто го овозможува лизгањето на нишките, односно контракцијата на мускулите, е прикажан чекор по чекор на Сл. 2.15.³⁴ Деполаризацијата на мускулното влакно ја предизвикува надворешниот акционен потенцијал на мотоневронот. Таа се пренесува низ Т тубулите и ги активира напонски контролирани калциумови помпи во саркоплазмичниот ретикулум, кој е одговорен за чување на калциумот во мускулните влакна. Ова предизвикува ослободување на калциумови Ca^{2+} јони од СР. Синхронизираното ослободување на калциум од илјадниците СР предизвикува зголемување на калциумот во целата мускулна клетка. Ако концентрацијата на калциум се зголеми во опсег $1 - 40 \mu\text{mol}/\text{dm}^3$, тој ја започнува контракцијата преку врзување за тропонинот. Оваа врска предизвикува промена во положбата

³²Wikipedia: Muscle Contraction. https://en.wikipedia.org/wiki/Muscle_contraction

³³By Slashme at English Wikipedia. Richfield, David. "Medical gallery of David Richfield 2014". Wikiversity Journal of Medicine 1 (2). DOI:10.15347/wjm/2014.009. ISSN 2001-8762. - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2264027>

³⁴Анимирана илустрација на целиот процес е дадена во: McGraw-Hill Animations – Muscle Contraction Process [HD Animation] <https://www.youtube.com/watch?v=ousflr0zQHc>



Сл. 2.14: Меѓусебната положба на протеинските нишки при релаксација, односно контракција.³³

на тропомиозинот со што се ослободуваат локациите на актинот на којшто може да се врзе миозинот.

Во тој момент, миозинот, кој е во високо-енергетската состојба со врзана молекула на аденоzin дифосфат (АДФ) и неоргански фосфор Р, резултат на хидролизата на **аденоzin трифосфат (АТФ)** молекулата³⁶, се врзува за актинот. При врзувањето се ослободуваат АДФ и Р молекулите во два чекори – во првиот се ослободува Р а потоа се ослободува останатиот АДФ. Ова предизвикува виткање на миозинот кој го повлекува актинот, генерирајќи сила, како и движење, кое изнесува околу 7 nm. Со ова миозинот ја добива својата ниско-енергетската состојба.

Во следниот чекор нова АТФ молекула се врзува за миозинот, што го ослободува од актинот.³⁷ Неговата хидролиза на АДФ и Р го враќа во почетната високо-енергетска состојба. Ако тропомиозинот сеуште не го покрива актинот, целиот процес се повторува. Во целиот процес калциумот Ca^{2+} активно се впумпува во саркоплазмичниот ретикулум, па при недостиг на надворешен акционен потенцијал за активирање на неговото ослободување, неговата концентрација паѓа со што тропомиозинот се враќа во првичната состојба и мускулот преминува во состојба на релаксација.

Деполаризацијата на скелеталните мускули е слична со онаа на невроните.³⁸ Таа настапува поради активацијата на натриумовите канали, што предизвикува навлегување на натриумовите јони Na^+ во внатрешноста на клетката. Овој процес престанува со затворањето на овие канали, а до реполаризација на клетката доаѓа поради истекувањето на калиумовите јони K^+ нанадвор. Напонот на мирување е поголем во однос на оној на невроните и изнесува околу -90 mV, а при деполаризација може да достигне и до +75 mV. Акциониот потенцијал трае околу 2 – 4 ms, максималниот период на непобудливост околу 1 – 3 ms, а брзината на пренос на потенцијалот долж мускулот изнесува околу 5 m/s. Елементарна контракција на мускулно влакно предизвикана од единечен нервен импулс е прикажана на **миограмот** на Сл. 2.16. Може да се види дека потребно е да помине одредено време, кое е од редот на 10 ms, за побудата да пропагира во мускулното влакно пред тоа да ја започне неговата контракцијата.

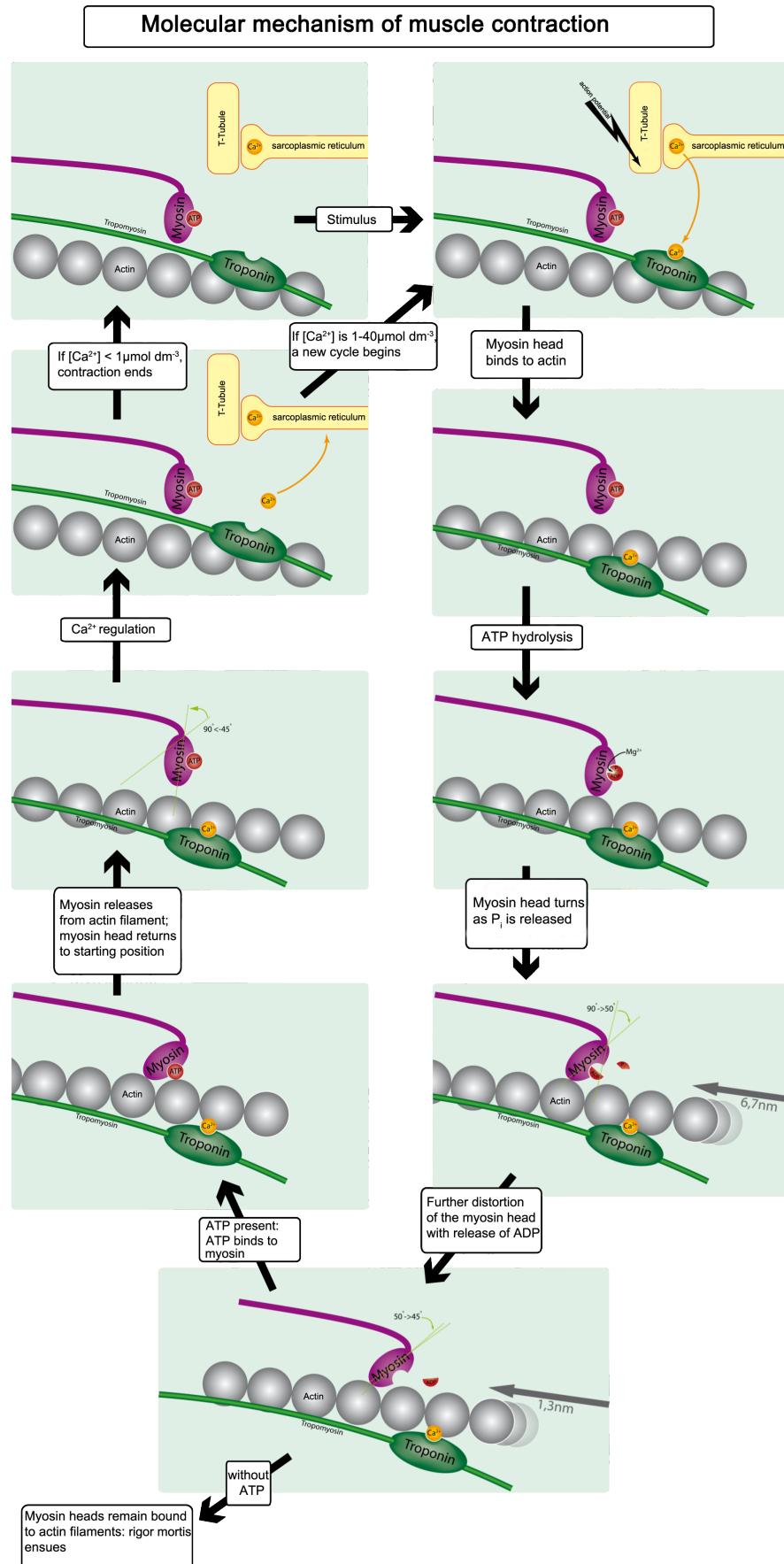
³⁵ By Muskel-molekular.png: Hank van Helvete derivative work: GravityGilly - Muskel-molekular.png, CC BY-SA 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10703870>

³⁶ Adenosine triphosphate (ATP) https://en.wikipedia.org/wiki/Adenosine_triphosphate

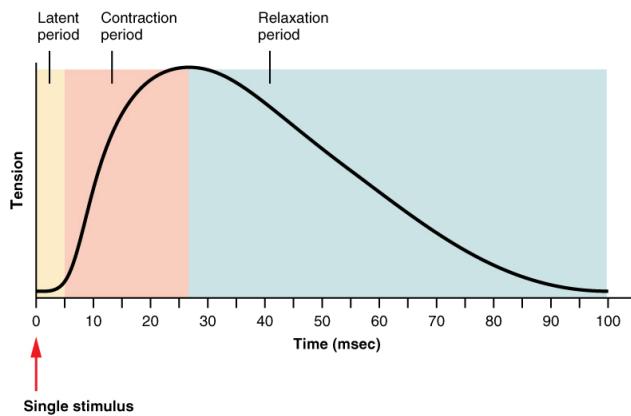
³⁷ При недостиг на АТФ, мускулите остануваат во грч.

³⁸ Wikipedia: Action potential https://en.wikipedia.org/wiki/Action_potential

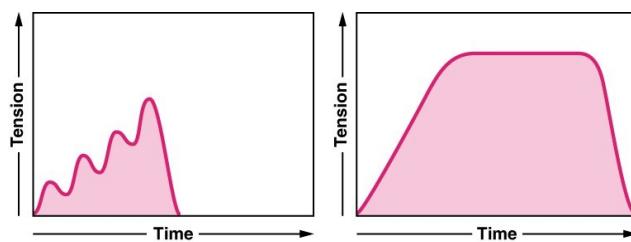
³⁹ By OpenStax - <https://cnx.org/contents/FPtK1zmh@8.25:fEI3C80t@10/Preface>, CC BY 4.0, <https://commons>.



Сл. 2.15: Чекори во контракцијата на мускулните влакна.³⁵



Сл. 2.16: Миограм на елементарна контракција на мускулно влакно.³⁹



Сл. 2.17: Миограм на сумација и тетанус при контракција на мускул.⁴⁰

Доколку пристигне нов нервен импулс пред мускулното влакно да се врати во неговата релаксирана состојба доаѓа до таканаречена **сумација**. Ова е прикажано на Сл. 2.17. Постојат два типа на сумација и тоа:

- **фреквенциска сумација** – пристигнуваат поголем број на нервни импулси на истото мускулно влакно, и
- **сумација на повеќе влакна** – доаѓа до активација на нови мускулни влакна, т.е. моторни единици.

При максимална активација на мускулот, во фаза на контракција се околу $1/3$ од мускулните влакна. На овој начин човековото тело се штити од можни оштетувања до кои може да дојде поради контракција на мускулите. Така, до оштетување на тетивите може да дојде при активација на 95% од мускулните влакна. Ако сумацијата продолжи и се интезивира, мускулот ќе ја достигне својата врвна сила и ќе влезе во заситување. Оваа појава се нарекува **тетанус**, Сл. 2.17.

2.5 Градба и работа на човековото срце

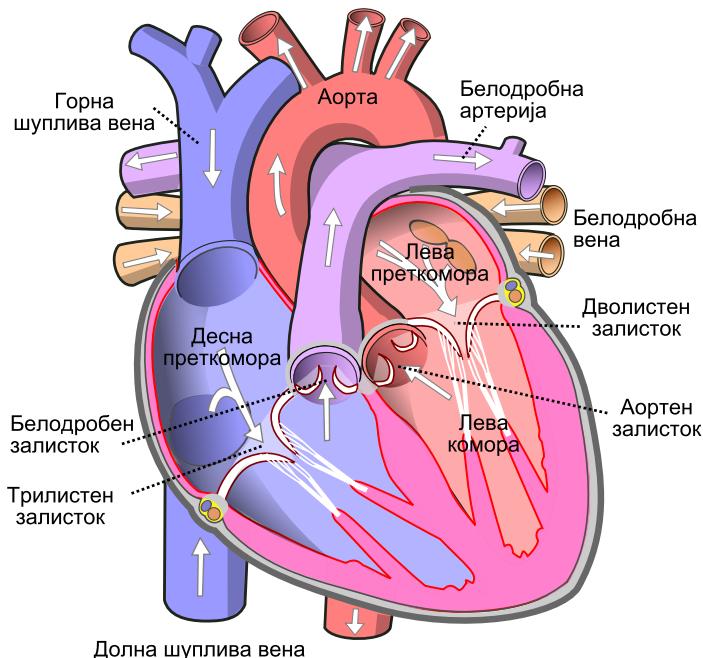
Срцето е празен мускулен орган чија функција е движењето на крвта во организмот.⁴¹ Срцевиот сид е изграден од три слоеви: надворешен (епикард), среден (миокард) и внатрешен (ендокард). Во самото срце постојат крвни садови преку кои се снабдува со хранливи материји и кислород, а ги оддава екскретите и јаглерод диоксидот. Срцето има форма на тристрани пирамида, со врвот завртена на надолу и налево, со тежина од 230 до 340 g. Срцето лежи во срцевото ќесе - перикард, кое има заптитна функција.

Срцето содржи четири комори: две **преткомори** и две главни **комори**. Мускулните сидови на преткоморите се потенки од тие на коморите, поради тоа што значаен удел во придвижување

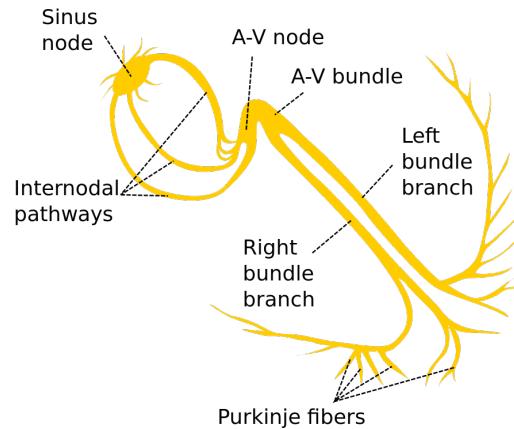
wikimedia.org/w/index.php?curid=30015047

⁴⁰By OpenStax - <https://cnx.org/contents/FPtKizmh@8.25:fEI3C80t@10/Preface>, CC BY 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=30015045>

⁴¹Википедија – Срце <https://mk.wikipedia.org/wiki/Срце>



Сл. 2.18: Анатомија на човечкото срце.⁴³



Сл. 2.19: Систем за пренос на деполаризација во срцето.⁴⁴

на квата од преткоморите во коморите зема гравитационата сила. Мускулниот сид на левата комора е подебел од оној на десната, бидејќи тука квта се испумпва со голем притисок во аортата за да се разнесе низ целото тело преку големиот крвоток. Од друга страна, десната комора ја испумпва квта во малиот крвоток кој има задача да ја збогати со кислород низ белите дробови и да ја врати во левата преткомора на срцето.

Меѓу преткоморите и коморите се наоѓаат **атриовентрикуларните** (AV) мембрани, и тоа: левата преткомора е одделена од левата комора со дволисни залистоци, додека меѓу десната преткомора и комора има тролисни залистоци. Меѓу коморите и излезните крвни садови постојат **полумесечеви** (PM) мембрани, обете тролисни.⁴²

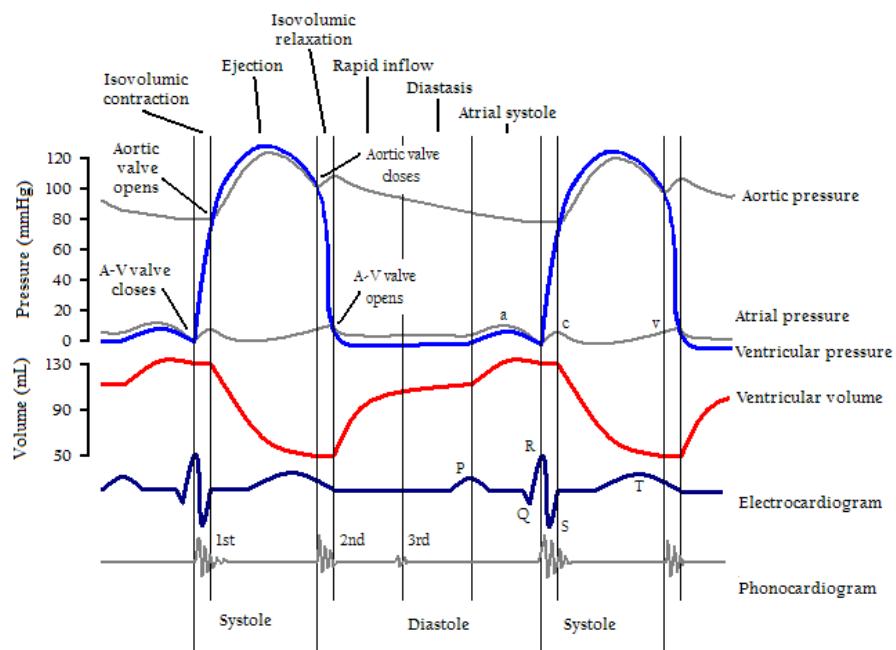
Во срцевиот циклус постојат 5 фази, во кои мускулите од преткоморите и коморите вршат контракција и релаксација, а атриовентрикуларните и полумесечевите мембрани се отвораат и затвораат. Тие се:

1. **Контракција на преткомори** – AV затворени, PM отворени, преткоморите ги надополнуваат коморите со околу 30% од волуменот на квта при мирување од 130 ml.
2. **Изоволумена контракција на комори** – AV затворени, PM затворени, коморите започнуваат со контракција, нивниот волумен не се менува но притисокот расте.
3. **Контракција на комори со испумпување** – AV затворени, PM отворени, притисокот во коморите го надминува оној во **аортата** (80 mmHg) и пулмонарната артерија (10 mmHg), исфрањето е ненадејно и истиснува 70 – 90 ml од секоја комора, што остава околу 50 ml за следната контракција.
4. **Изоволумена релаксација на комори** – AV затворени, PM затворени, притисокот во коморите паѓа од 120 mmHg што ги затвора PM мембрани, AV отвораат штом овој притисок падне под оној во преткоморите.
5. **Полнење на комори** – AV отворени, PM затворени, коморите пасивно се полнат до 70%

⁴²Wikipedia – Heart <https://en.wikipedia.org/wiki/Heart>

⁴³Original by Yaddah after Wapcapletderivative by B. Jankuloski — File:Diagram of the human heart (cropped).svg, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=53624221>

⁴⁴By Madhero88 - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6887499>.



Сл. 2.20: Срцев циклус.⁴⁷

од волуменот. Истото важи и за преткоморите.

За време на секое отчукување срцето минува редоследно низ овие фази од срцевиот циклус⁴⁵ прикажан на Сл. 2.20, што е овозможено од прогресивната деполаризација на срцевиот мускул. Оваа деполаризација започнува од **пејсмејкер клетките во синоатриалниот јазол**, сешири низ преткоморите, поминува низ **атриовентрикуларниот јазол** надолу кон **снопот на Хис**, за на крајот да се прошири преку **нишките на Пуркинче** низ коморите. Овие ткива го сочинуваат **електричниот систем за пренос** на срцето⁴⁶, кој е одговорен за пренесување на електричните импулси на деполаризацијата низ срцевиот мускул прикажан на Сл. 2.19. АВ јазолот го внесува потребното задоцнување во простирањето на деполаризацијата за контракцијата коморите да дојде дури по постигнување на максималната контракција на преткоморите. Нишките не Пуркинче пак се шират од дното на срцето па нагоре за контракцијата на коморите да започне од затворениот крај кон отворите со што се овозможува поефикасно испумпување на крвта.

⁴⁵ Wikipedia: Cardiac cycle https://en.wikipedia.org/wiki/Cardiac_cycle

⁴⁶ Wikipedia: Electrical conduction system of the heart https://en.wikipedia.org/wiki/Electrical_conduction_system_of_the_heart

⁴⁷ By DanielChangMD revised original work of DestinyQx - Wikimedia Commons, File:Cardiac Cycle Left Ventricle.PNG. Source file has a serious mistake which was corrected in the new image., CC BY-SA 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17610757>

Поглавје 3

Електронски кола за мерење на биопотенцијалите

3.1 Електромиографија

Електромиографијата е електродијагностичка медицинска техника за евалуација и снимање на електричната активност на скелеталните мускули.¹ Уредот за ЕМГ се нарекува **електромиограф**, а снимката **електромиограм**. Електромиографот го детектира електричниот потенцијал генериран со деполаризација на мускулните клетки. Анализата на ЕМГ сигналот има повеќекратно значење во медицината: за анализа на абнормалности во мускулната функција, односно за идентификација на невромускулни болести, како и за детектирање на нарушувања во моторната контрола. Во биомедицинското инженерство ЕМГ сигналот може да се употреби за анализа на нивото на активација односно регрутација на мускулните влакна, или за анализа на биомеханиката на човековите или животинските движења. Преку него може да се изврши ефикасна контрола на простетичките уреди како простетички дланки, раце и нозе. Не постојат познати контраиндикации од правењето на ЕМГ.

Постојат два вида на ЕМГ:

- површинска ЕМГ – која неинвазивно ја проценува мускулната активност преку нејзино снимање од површината на кожата, и
- интрамускулна ЕМГ - која инвазивно ја снима мускулната активност преку забодување на иглести електроди во мускулното ткиво.

Површинска ЕМГ

Површинската ЕМГ може да биде снимена од еден пар електроди, но и од покомплексна низа составена од повеќе електроди. Притоа мора да бидат искористени најмалку две електроди поради тоа што ЕМГ ја регистрира разликата во потенцијали помеѓу две точки на телото. Ограничувањата во површинската ЕМГ се тоа што таа е ограничена на снимање на мускули кои се наоѓаат близу до површината на кожата, меѓусебната интерференција меѓу соседните мускули, како и негативното влијание на дебелината на поткожното ткиво на локацијата за снимање која варира со тежината на човекот. Поради тоа, површинската ЕМГ може да послужи само за ограничена проценка на мускулната активност.

Површинската ЕМГ се употребува во клиниките за физиотерапија во скlop на системите за **биофидбек** кои им даваат визуелна или звучна информација за нивото на активација на мускулот на луѓето кои доаѓаат за рехабилитација. Површинската ЕМГ исто така може да се употреби за детектирање на невромускулни болести, но таа не е доволно прецизна за да биде

¹Wikipedia – Electromyography <https://en.wikipedia.org/wiki/Electromyography>

искористена за разликување помеѓу невропатични и миопатични (мускулни) растројства, како и за утврдување на точната невромускулна болест.

Интрамускулна ЕМГ

Најдноствиот начин за снимање на интрамускулната ЕМГ е со употреба на монополарни иглести електроди. Ова може да биде тенка жица забодена во мускулот, а како референтна електрода може да се искористи и неинвазивна површинска електрода. Електродите кои се употребуваат во диагностиката се доволно цврсти за пробивање на кожата и се изолирани во целост, освен на врвот. Постојат и концентрични електроди кај кои жицата заедно со изолацијата се наоѓа внатре во металната игла која пак служи како референтна електрода. Поради меѓусебната близокост на двата проводника, концентричните електроди даваат послаби сигнали, но се порезистентни на електрични артефакти од соседните ткива. Најфините иглести електроди дозволуваат регистрација на активноста на индивидуални мускулни влакна.

Поставување на електродите

Пред поставувањето на електродите за ЕМГ, кожата треба соодветно да се подготви, што вообичаено вклучува нејзино чистење со алкохол. Во некои случаи потребно е да бидат отстранети и влакната од локацијата на снимање. Поставувањето на електродите треба да биде на локација помеѓу средината на мускулот и точката во која за него е прицврстена тетивата. Се избегнува поставување на електродите на средината на мускулот затоа што таа е точката со максимална инервација, односно на таа локација се наоѓаат најголем дел од приклучоците на мотоневроните со мускулот. Така, при инервација на мускулот, електричните потенцијали кои во оваа точка пропагираат во мноштво насоки, меѓусебно ќе бидат поништени, со тоа намалувајќи ја амплитудата на ЕМГ сигналот.

3.2 Електрокардиограм

Електрокардиограмот (ЕКГ)² е запис на електричната активност на **срцето³**, Сл. 2.18, во даден временски период со помош на електроди поставени на телото на човекот. Овие електроди служат за детектирање на малите електрични промени на кожата кои настануваат поради **деполаризацијата на срцевиот мускул** за време на секое отчукување. Вообичаено за снимање на ЕКГ се употребуваат 10 електроди поставени на екстремитетите и на градите од човекот. Со нивна употреба се врши мерење на електричниот биопотенцијал на срцето од 12 различни агли и негово снимање во период од вообичаено 10 s. На овој начин, се забележува вкупната амплитуда и насоченост на деполаризацијата во секој момент од срцевиот циклус⁴ прикажан на Сл. 2.20.

Облик на ЕКГ сигналот

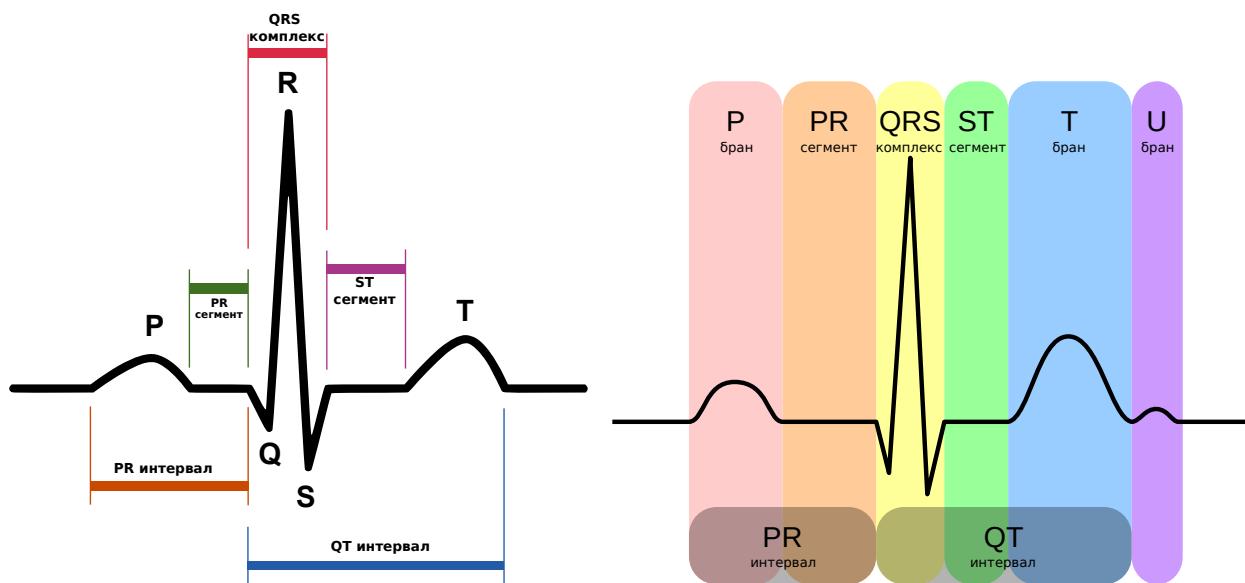
Прогресијата на деполаризација на срцето го дава карактеристичниот облик на ЕКГ сигналот прикажан на Сл. 3.1. За лекарите, обликот на ЕКГ носи големо количество на информации за структурата на срцето и функционирањето на неговиот електричен систем за пренос. Меѓу другото, ЕКГ може да се искористи за мерење на брзината на чукање на срцето, големината и поставеноста на коморите и преткоморите, присуството на оштетувања во срцевиот мускул или неговиот електричен систем за пренос, ефектот од лекарствата за срце, како и функцијата на вградените пејсмејкери.

²Wikipedia: Electrocardiography <https://en.wikipedia.org/wiki/Electrocardiography>

Википедија – Електрокардиографија <https://mk.wikipedia.org/wiki/Електрокардиографија>

³Wikipedia: Heart <https://en.wikipedia.org/wiki/Heart>

⁴Wikipedia: Cardiac cycle https://en.wikipedia.org/wiki/Cardiac_cycle



Сл. 3.1: Карактеристични точки и интервали на ЕКГ сигналот.⁵

Карактеристични точки во ЕКГ записот се:

- **P бранот** – деполаризацијата на преткоморите,
- **QRS комплексот** – деполаризација на коморите,
- **T бранот** – реполаризација на коморите.

Притоа, бранот на реполаризација на преткоморите се совпаѓа со QRS-комплексот па не може да се воочи во ЕКГ сигналот. Дополнително на овие, по завршетокот на Т бранот, може да се појави мал U бран кој одговара на задоцнетата реполаризација на нишките на Пуркинџе, но тој не е секогаш таму.

Помеѓу карактеристичните точки се дефинирани следните интервали и сегменти:

- **PR интервал** – од почетокот на P бранот до почетокот на QRS комплексот, го рефлектира времето потребно за електричниот импулс да пристигне од синусниот јазол до атриовентрикуларниот (AV) јазол,
- **PR сегмент** – од крајот на P бранот до почетокот на QRS комплексот, го рефлектира времето кога преткоморите се деполаризирани,
- **ST сегмент** – го поврзува QRS комплексот со T бранот и го претставува периодот во кој коморите се деполаризирани,
- **QT интервал** – од почетокот на QRS комплексот до крајот на T бранот, бидејќи варира со брзината на работа на срцето, вообичаено се изразува како QTc корегирано со делење со коренот од RR интервалот.

Секоја од карактеристичните точки и интервалите помеѓу нив имаат предвидливо времетраење, опсег на дозволиви амплитуди, и типичен облик. Типичните времетраења се дадени во Табела 3.1. Секоја девијација од нормалата посочува кон можна патологија и поради тоа е од клиничко значење. За поедноставно мерење на ЕКГ сигналот тој се печати на милиметарска хартија на која секој 1 mm одговара на време од 40 ms на x-оската, и 0,1 mV на y-оската.

⁵ Преведено од Agateller (Anthony Atkielski), converted to svg by atom. - SinusRhythmLabels.png, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1560893> и од Derivative: Hazmat2Original: Hank van Helvete - This file was derived from: EKG Komplex.svg, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=31447187>

Табела 3.1: Типични времетраења на карактеристичните точки, сегменти и интервалите во ЕКГ сигналот.

Регион	Времетраење [ms]
P бран	<80 ms
PR интервал	120 – 200 ms
QRS комплекс	80 – 100 ms
T бран	160 ms
QTc интервал	<440 ms

Електроди и нивно поставување

Во професионалните уреди со 12 канали ЕКГ сигналот се мери со 10 електроди. За регистрирање на ЕКГ сигналот се доволни две електроди, меѓутоа во професионалните уреди се прават 12 канали со помош на 9 од 10-те електроди за претставување на активноста на срцето долж 6 вертикални и 6 хоризонтални оски. Притоа, како негативна електрода се употребува или една од 9-те електроди или пак напонот се пресметува во однос на виртуелна електрода добиена како средна вредност на потенцијалот измерен во трите електроди поставени на екстремитетите на човекот. Оваа виртуелна електрода се нарекува и **централен потенцијал на Вилсон**. Десетте електроди се:

- **RA** – на десната рака, не треба да се постави на мускулите,
- **LA** – на истата локација на поставување на RA, но на левата рака,
- **RL** – на левата нога, на долнот крај од листот, треба да се избегнат коските,
- **LL** – на истата локација на RL, но на левата нога,
- **V1** – во четвртиот меѓуребрен простор (помеѓу ребрата 4 и 5) веднаш десно од градната коска (стернумот),
- **V2** – како V1 но веднаш лево од градната коска,
- **V3** – помеѓу V2 и V4,
- **V4** – во петиот меѓуребрен простор (помеѓу ребрата 5 и 6) долж средната линија на клучната коска,
- **V5** – хоризонтално до V4, долж линијата која поминува на половина од растојанието помеѓу средината и крајот на клучната коска,
- **V6** – хоризонтално до V4 и V5, долж страничната линија на телото.

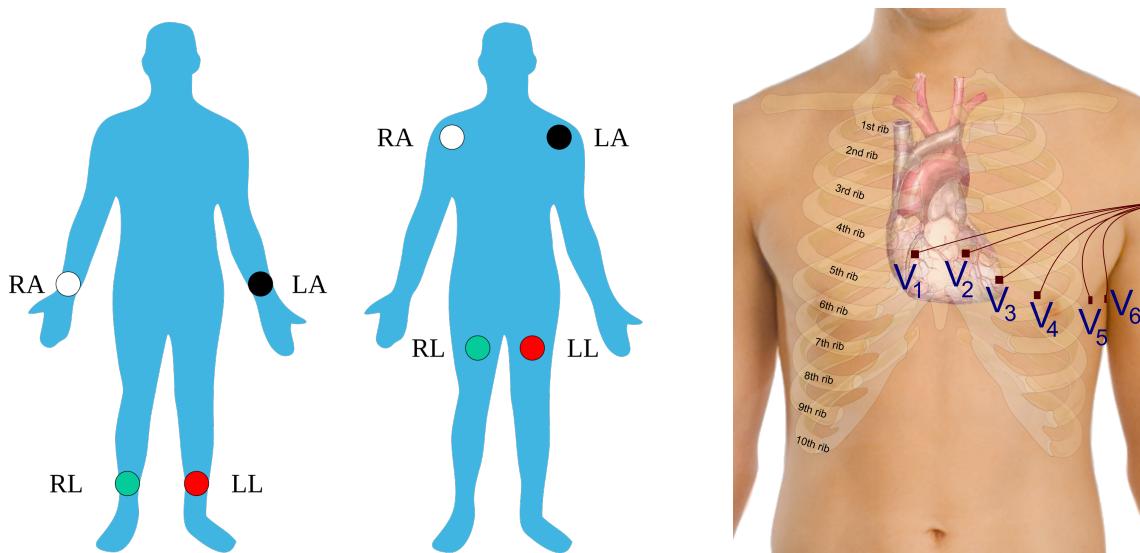
Сите овие се користат за добивање на ЕКГ сигналот долж една оска, освен LL која се употребува за заземјување на уредот за мерење. Ова е неопходно за поништување на индуцираните електромагнетни шумови од напонот на градската мрежа. Поставувањето на десетте електроди на телото е прикажано на Сл. 3.2.

Снимање на ЕКГ сигналот

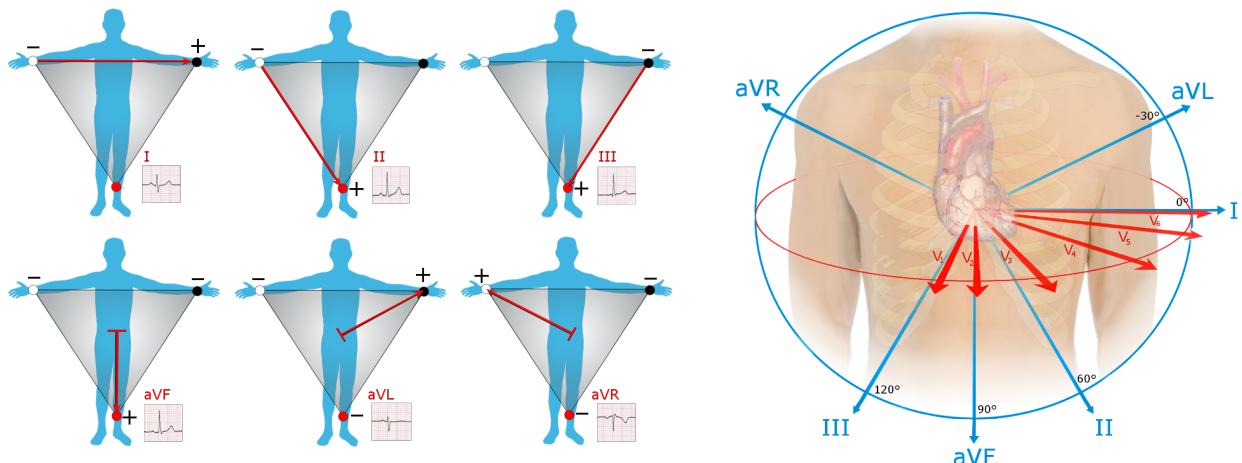
Дванаесетте канали снимени од професионалните ЕКГ уреди се поделени во три типови: 3 напони на екстремитетите, 3 аугментирани напони на екстремитетите, и 6 градни напони. Шестте канали

⁶Преведено од Original:MoodyGrooveVector:TwispThis SVG diagram includes elements that have been taken or adapted from this diagram: Wikicouple.svg. - Own work based on: Limb Leads.jpg by MoodyGroove., Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3405434> и од Mikael Häggström - Own work, CC0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=20064293>

⁷Превземено од Npatchett - Own work, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39235282> и од Npatchett - Own work, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=39235260>



Сл. 3.2: Поставување на електродите за снимање на ЕКГ сигналот.⁶



Сл. 3.3: Ориентација на напоните кои ги регистрира 12-каналниот ЕКГ уред.⁷

поврзани со екстремитетите се распоредени во вертикалната рамнина, а шестте градни канали се распоредени во хоризонталната рамнина.

Добивањето на дванаесетте напони е прикажано на Сл. 3.3. Трите напони на екстремитетите се означени како I, II и III. Тие се пресметуваат како:

$$I = LA - RA, \quad (3.1)$$

$$II = LL - RA, \quad (3.2)$$

$$III = LL - LA. \quad (3.3)$$

Аугментираниите напони на екстремитетите се аналогни на напоните на екстремитетите, со таа разлика што како негативна електрода се зема централниот потенцијал на Голдберг. Голдберговиот централен потенцијал се добива како средна вредност од потенцијалите на две од електродите на екстремитетите. Сите аугментирани напони можат да се изразат и преку Вилсоновиот потенцијал V_W според:

$$aVR = RA - \frac{1}{2}(LA + LL) = \frac{3}{2}(RA - V_W), \quad (3.4)$$

$$aVL = LA - \frac{1}{2}(RA + LL) = \frac{3}{2}(LA - V_W), \quad (3.5)$$

$$aVF = LL - \frac{1}{2}(RA + LA) = \frac{3}{2}(LL - V_W), \quad (3.6)$$

каде:

$$V_W = \frac{1}{3}(RA + LA + LL). \quad (3.7)$$

Шесте градни напони лежат во хоризонталната рамнина која е нормална на вертикалната рамнина дефинирана од напоните на екстремитетите и аугментираниот напон на екстремитетите. Тие се означени како и градните електроди, односно $V_1 - V_6$, а се пресметуваат во однос на V_W .

Поглавје 4

Обработка на биомедицинските сигнали

Со преминот на биомедицинските сигнали во **дигитален домен**, се отвораат вратите кон примена на различните техники на дигиталната обработка на сигналите за нивната обработка.

Поради философијата на отвореност и соработка која е основа зад движењето за слободен софтвер, денес сè повеќе инженери и научници ја засноваат својата работа на платформи базирани на слободен софтвер. Повеќе за историјата, предностите и продорот на слободниот софтвер во инженерската и научно истражувачката практика може да прочитате во **Додатокот А**.

Во духот на философијата зад слободниот софтвер, а следејќи ги светските инженерски и научни трендови, вежбите во предметот **Биомедицинска електроника** во целост ќе бидат изработени со слободен и отворен софтвер, поточно во слободниот програмскиот јазик **Питон**. За вовед во екосистемот на Питон направен за инженерска и научна работа и за основните системски поставувања погледнете во **Додатокот Б**.

4.1 Процесирање на ЕМГ сигнали

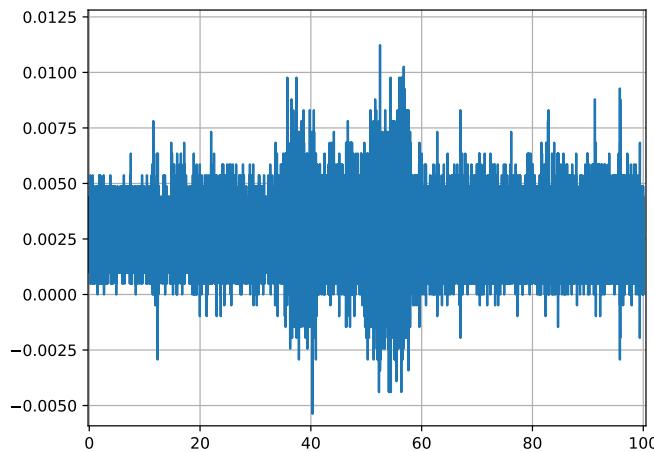
Во овој дел ќе направиме низа основни процесирања на еден ЕМГ сигнал. Како примерок ќе го искористиме сигналот вклучен во Биоспј¹ `emg.txt`. Во заглавието на овој текстуален фајл се дадени основните параметри на ЕМГ сигналот кој е семплиран со фреквенција f_s од 1000 Hz со резолуција од 12 битови по одбирок. Да ја вчитаме и да ја прикажеме на графикон.

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

# %% вчитај го фајлот
file_name = 'data/emg.txt'
emg = np.loadtxt(file_name)
fs = 1000
n_bit = 12

# %% направи го наизменичен и скалирај го од -1 до 1
emg = emg - 2** (n_bit-1)
emg = emg / 2** (n_bit-1)
t = np.arange(0, emg.size/fs, 1/fs)
```

¹BioSPPy – Biosignal Processing in Python. <https://github.com/PIA-Group/BioSPPy>



Сл. 4.1: Изглед на вчитаниот ЕМГ сигнал.

```
# %% plot
plt.figure()
plt.plot(t, emg)
plt.grid()
```

При што, за вчитување од текст фајлот сме ја искористиле Нуумпјај функцијата `loadtxt`. Бидејќи во 12 битниот запис нема кодирање на негативни амплитуди со двоен комплемент, треба првина да го направиме сигналот наизменичен а потоа и да го скалираме во опсег од -1 до 1 . Добиениот графикон е прикажан на Сл. 4.1

Фреквенциски спектар на ЕМГ сигналот

За пресметка на спектарот на ЕМГ сигналот ќе се послужиме со **дискретната Фуриеова трансформација (ДФТ)**², поточно алгоритамот за **брза Фуриеова трансформација (БФТ)** кој е имплементиран во модулот `fftpack` во Сајпај пакетот.

```
from scipy import fftpack as fft
# пресметка на бројот на точки за БФТ
x = np.ceil(np.log2(emg.size))
n_fft = np.int(2**x)

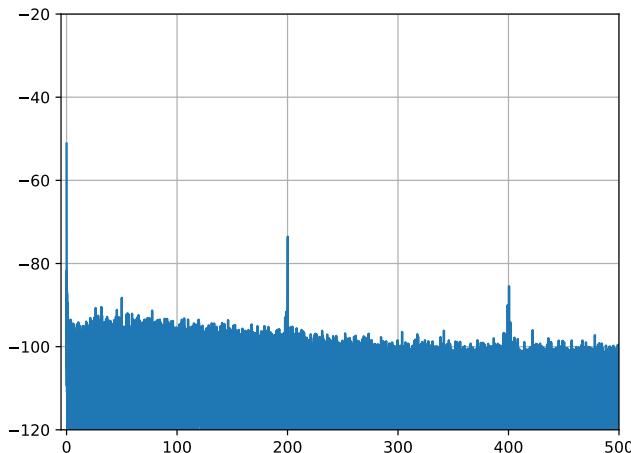
emg_fft = fft.fft(emg, n_fft)
emg_amp = np.abs(emg_fft)
n_keep = np.int(n_fft/2 + 1)
emg_amp = emg_amp[:n_keep]
emg_amp[1:-1] = 2 * emg_amp[1:-1]
emg_amp = emg_amp / emg.size
emg_db = 20 * np.log10(emg_amp)

emg_ph = np.angle(emg_fft)
emg_ph = np.unwrap(emg_ph)

f = np.linspace(0, fs/2, n_keep)

# плотирање
plt.figure()
```

²Повеќе за теоретската основа зад ДФТ и Фуриеовата Трансформација поопшто може да прочитате во [Додаток В](#).



Сл. 4.2: Амплитуден спектар на ЕМГ сигналот.

```
plt.plot(f, emg_db)
plt.grid()
```

Притоа за пресметка на амплитудниот спектар најпрвин го пресметавме бројот на точки за пресметка на БФТ кој треба да биде 2^x а потоа ги исфрливме примероците од спектарот кои претставуваат копии и се редундантни. Добиениот амплитуден спектар на ЕМГ сигналот е прикажан на Сл. 4.2. Може да видиме дека во сигналот има изразена еднонасочна (DC) компонента и хармониски шум со фреквенција од 200 и 400 Hz. Исто така, гледаме дека на сигналот не е суперпониран шум од градската мрежа на 50 Hz.

За отстранување на еднонасочната компонента ќе го направиме следното:

```
import bme
emg = emg - emg.mean()
```

За пресметка на амплитудниот спектар на биомедицинските сигнали згодно е да направиме функција која ќе ја поместиме во нов Питон фајл `bme.py`, којшто всушност ќе претставува модул за сите функции во предметов. Еве како треба да изгледа неговата содржина:

```
#!/usr/bin/env python3
"""
Функции за обработка на биомедицинските сигнали.

"""

import numpy as np
from scipy import fftpack as fft
from matplotlib import pyplot as plt

def get_spectrum(fs, x, n_fft=None, log=True):
    """
    Пресметај спектар со БФТ.
    """

    n = x.size
    if n_fft is None:
        n_fft = np.int(2**np.ceil(np.log2(n)))
    x_spec = fft.fft(x, n_fft)
    x_spec = np.abs(x_spec)
    x_spec = x_spec / n
    n_keep = np.int(n_fft/2) + 1
    x_spec = x_spec[0:n_keep]
```

```

x_spec[1 : -1] = 2 * x_spec[1 : -1]
f = np.linspace(0, fs/2, n_keep)
if log:
    x_spec = 20 * np.log10(x_spec)
return f, x_spec

```

Сега спектарот на кој било сигнал може да го пресметаме повикувајќи ја нашата функција `get_spectrum` на следниот начин:

```

import bme
f, emg_spec = bme.get_spectrum(fs, emg, n_fft)

```

Спектрограм на ЕМГ сигналот

Директно од амплитудниот спектар на ЕМГ сигналот, не можеме да видиме во кој дел доаѓа до израз мускулната активација. За да дојдеме до оваа информација ни треба темпорална, односно временска, информација заедно со спектралната. За таа цел ќе се послужиме со **спектрограмот** – еден од најзначајните прикази на биомедицинските сигнали. На него во исто време може да се набљудуваат карактеристиките на сигналот и во временски и во спектрален домен. За да го добиеме ќе се послужиме со **Фурьеовата трансформација на временски отсекочи (ФТВО)**.³

```

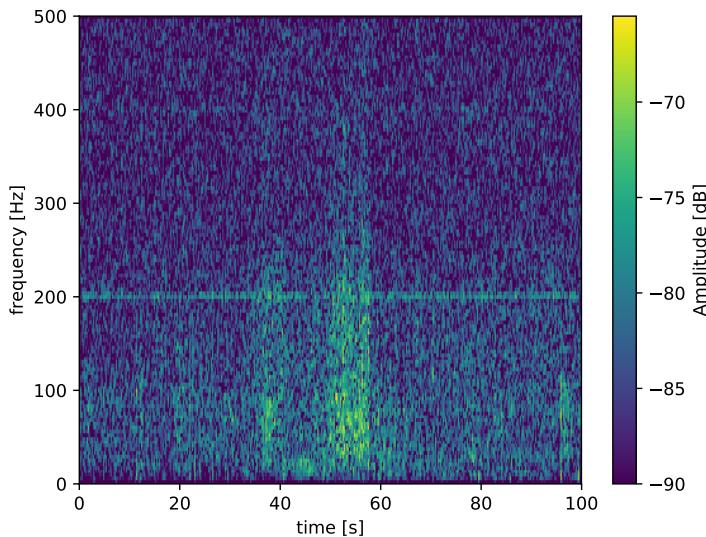
n_win = 256 # 2**x
n_half = np.int(n_win / 2)
n_hop = n_half # Hann, Hamming
# додади нули за прозорецот во првата рамка да биде центриран на првиот примерок
pad = np.zeros(n_half)
emg_pad = np.concatenate((pad, emg, pad))
pos = 0
frames = None
while pos <= emg_pad.size - n_win:
    frame = emg_pad[pos : pos+n_win]
    f, frame_spec = bme.get_spectrum(fs, frame, n_win)
    frame_2d = frame_spec[:, np.newaxis]
    if frames is None:
        frames = frame_2d
    else:
        frames = np.concatenate((frames, frame_2d), axis=1)
    pos += n_hop

plt.figure()
plt.imshow(frames,
           extent=[0, t[-1], 0, f[-1]],
           aspect='auto',
           origin='lower',
           vmin=-90)
cbar = plt.colorbar()
plt.xlabel('time [s]')
plt.ylabel('frequency [Hz]')
cbar.ax.set_ylabel('Amplitude [dB]')

```

Приказот е даден на Сл. 4.3. Можеме јасно да видиме дека ЕМГ сигналот регистрира активација на мускулот во два наврати, еднаш околу 37 s со кратко времетраење, и втор пат околу 49 s со поголемо траење и интензитет. Исто така може да видиме дека главниот дел од спектралната моќност на ЕМГ сигналот се наоѓа во опсегот од 20 до 280 Hz. Оваа информација ќе ни послужи за дизајнирање на филтер за добивање на почиста претстава на ЕМГ сигналот.

³Види [Додаток В.](#)



Сл. 4.3: Спектрограм на ЕМГ сигналот.

Бидејќи и понатаму ќе треба да го пресметуваме спектрограмот на биомедицинските сигнали, во нашиот модул `bme.py` ќе додадеме функции за негова пресметка и исцртување.

```
def get_spectrogram(fs, x, n_win=None, log=True, win_type='hann'):
    """
    Пресметај го спектрограмот.
    """
    if n_win is None:
        n_win = 256
    win = sig.get_window(win_type, n_win)
    n_half = np.int(n_win / 2)
    n_hop = n_half # Hann, Hamming
    pad = np.zeros(n_half)
    x_pad = np.concatenate((pad, x, pad))
    pos = 0
    frames = None
    while pos <= x_pad.size - n_win:
        frame = x_pad[pos : pos+n_win]
        frame = frame * win
        f, frame_spec = get_spectrum(fs, frame, n_win, log=log)
        frame_2d = frame_spec[:, np.newaxis]
        if frames is None:
            frames = frame_2d
        else:
            frames = np.concatenate((frames, frame_2d), axis=1)
        pos += n_hop
    t = np.arange(0, frames.shape[1]*n_hop/fs, n_hop/fs)
    return t, f, frames

def show_spectrogram(t, f, spectrogram, vmin=-90, vmax=0):
    """
    Прикажи го спектрограмот.
    """
    plt.figure()
    plt.imshow(spectrogram, extent=[0, t[-1], 0, f[-1]], aspect='auto',
               origin='lower', vmin=vmin, vmax=vmax)
    plt.colorbar()
```

* **Важно!** Најважните два параметри во пресметување на спектрограмот се:

1. **Типот на прозорец.** Разликите во спектрограмот кои се добиваат со различните прозорци зависат од нивните спектрални карактеристики прикажани на [Сл. В.1](#).
2. **Големината на прозорецот.** Колку е поголем прозорецот толку повеќе точки, односно поголема резолуција, во спектарот на рамката земена од сигналот. Но исто така, колку поголем прозорец толку погруба временска резолуција на ФТВО анализата. Имено, временските моменти на промена во спектарот биваат размачкани. Така, за добра временска резолуција ни требаат пократки прозорци (рамки од сигналот), кои пак повлекуваат лоша фреквенциска резолуција. Потребата од компромис меѓу време и фреквенција е главниот недостаток кај спектрограмите, односно ФТВО анализата.

§ Дополнително. За прикажување на амплитудата на спектрограмот постојат најразлични низи на бои, наречени мапи на боја. Долго време во стандардна употреба е мапата `jet`, но таа има низа на недостатоци, поради кои денес се исфрла од употреба. Малата искористена за приказ на спектрограмите во ова поглавје е новата `viridis` која е претставена на конференцијата Сајпј 2015⁴.

Филтрирање на ЕМГ сигналот

За филтрирање на спектарот на ЕМГ сигналот ќе се послужиме со **филтер со бесконечен импулсен одсив (ИИР)** поради неговите добри фреквенциски карактеристики.⁵ Каде ЕМГ сигналот облибот на сигналот не е од големо значење, па може да употребиме и филтри без строго линеарна фазна карактеристика. Ќе дизајнираме филтер пропусник на опсег со кој сакаме да добиеме почиста верзија од нашиот ЕМГ сигнал.

```
from scipy import signal as sig
f_l = 20
f_h = 280
order = 9
b, a = sig.iirfilter(order, [f_l/(fs/2), f_h/(fs/2)], btype='bandpass', ftype='butter')
f, h_f = sig.freqz(b, a, fs=fs)

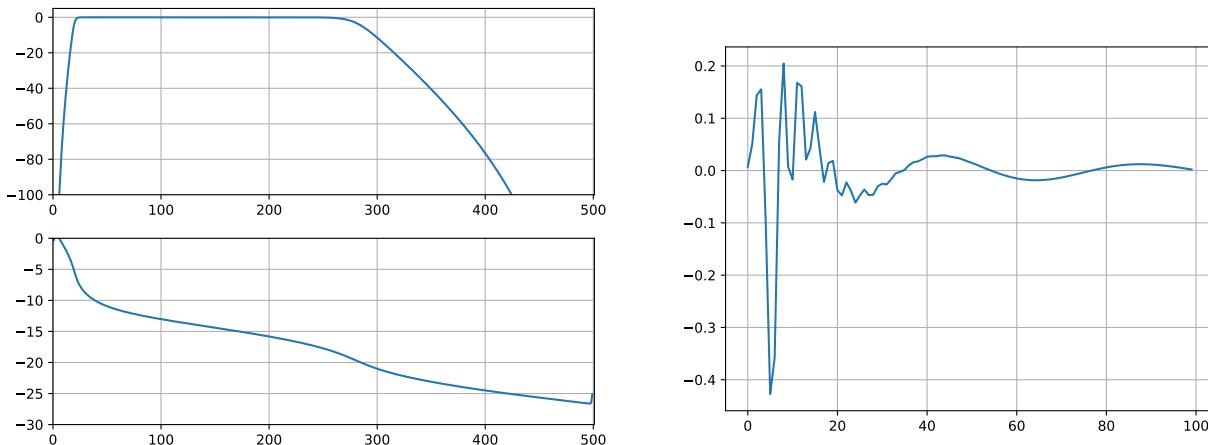
# %% фреквенциска карактеристика на филтерот
plt.figure()
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(f, 20*np.log10(np.abs(h_f)))
plt.grid()
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(f, np.unwrap(np.angle(h_f)))
plt.grid()
plt.tight_layout()

# %% импулсен одсив
excite = np.zeros(100)
excite[0] = 1 # Дираков импулс
h_n = sig.lfilter(b, a, excite)
plt.figure()
plt.plot(h_n)
plt.grid()
```

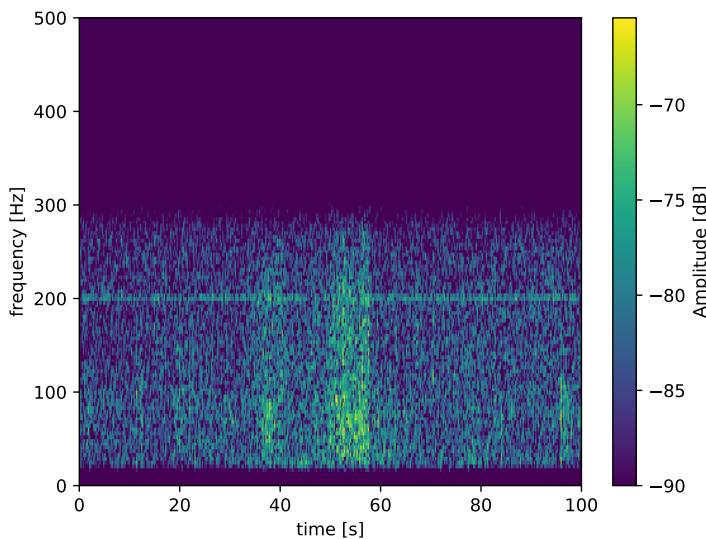
Амплитудната и фазната карактеристика на дизајнираниот филтер, како и дел од неговиот

⁴ Особено интересното претставување на новата мапа може да го погледнете на следниот линк: Nathaniel Smith and Stéfan van der Walt – A Better Default Colormap for Matplotlib <https://www.youtube.com/watch?v=xAoljeRJ31U>

⁵ Повеќе за теоретската основа зад филтрите и нивните карактеристики може да прочитате во [Додаток Г](#).



Сл. 4.4: Амплитудна и фазна карактеристика (лево) и дел од импулсниот одсив (десно) на дизајнираниот ИИР филтер пропусник на опсег.



Сл. 4.5: Спектрограм на филтрираниот ЕМГ сигнал.

импулсен одсив се дадени на **Сл. 4.4**. Може да се види дека амплитудната карактеристика е строго монотона, што е и карактеристика на Батерворт ИИР филтите.

Следно ќе го исфилтрираме ЕМГ сигналот со дизајнираниот ИИР филтер и ќе го прикажеме неговиот спектрограм, даден на **Сл. 4.5**.

```
emg_filt = sig.lfilter(b, a, emg_noDC)
t, f, emg_filt_specgram = bme.get_spectrogram(fs, emg_filt, n_win)
bme.show_spectrogram(t, f, emg_filt_specgram, vmin=-90, vmax=None)
```

Детекција на мускулна активација

За детекција на мускулна активација, ЕМГ сигналот вообичаено се поминува низ целобранов насочувач.⁶ Таквиот сигнал се процесира со поместувачки усреднувач, што вкупност претставува нископропусен филтер реализиран со методата на прозорци. Почетокот на активацијата на мускулите се детектира во усреднетиот сигнал со наоѓање на временските

⁶Процесирањето на ЕМГ сигналот во овој дел се базира на обработката интегрирана во програмскиот пакет Биоспај <https://github.com/PIA-Group/BioSPPy>.

моменти кога сигналот поминува зададен праг. Притоа, прагот се пресметува според амплитудната содржина на усреднетиот ЕМГ сигнал. Конечно, детектираните моменти на активација, повторно се усреднуваат, овој пат со поголема временска константа, односно со прозорец со поголемо времетраење, за добивање на конечниот сигнал на мускулна активација.

```
# %% целобранов насочувач
emg_rect = np.abs(emg_filt)

# поместувачки усреднувач
t_win = .05 # 50 ms
n_win = np.int(t_win * fs)
win = sig.get_window('parzen', n_win)
win = win / np.sum(win)

# симетрично падирање и усреднување на сигналот
n_pad = np.int(n_win / 2)
emg_pad = np.concatenate((emg_rect[n_pad:0:-1], emg_rect, emg_rect[-1:-n_pad:-1]))
emg_mavg = sig.convolve(emg_pad, win, 'same')
emg_mavg = emg_mavg[n_pad:-n_pad+1]

# %% пресметка на прагот
thresh = 1.2*emg_mavg.mean() + 2*emg_mavg.std()

plt.figure()
plt.plot(t, emg_rect)
plt.plot(t, emg_mavg, alpha=.8)
plt.plot([t[0], t[-1]], [thresh, thresh], c='r', lw=4)
plt.grid()

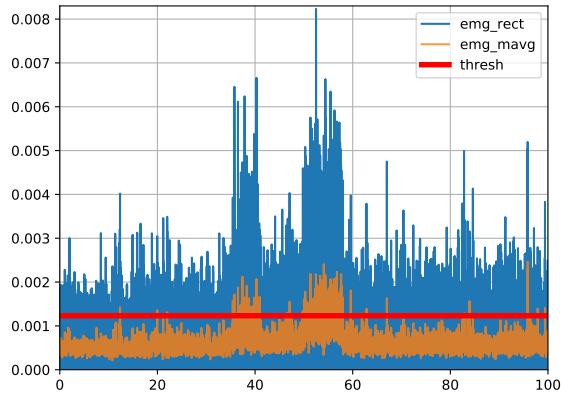
# %% детекција на премини преку прагот
over = np.where(emg_mavg > thresh)[0]
under = np.where(emg_mavg <= thresh)[0]
onsets = np.intersect1d(over-1, under)
onsets += 1

plt.figure()
plt.plot(t, emg_rect)
plt.plot(t, emg_mavg, alpha=.8)
plt.plot([t[0], t[-1]], [thresh, thresh], c='r', lw=4)
for onset in onsets:
    plt.plot([t[onset], t[onset]], [0, emg_rect.max()], c='c', lw=4)
plt.grid()

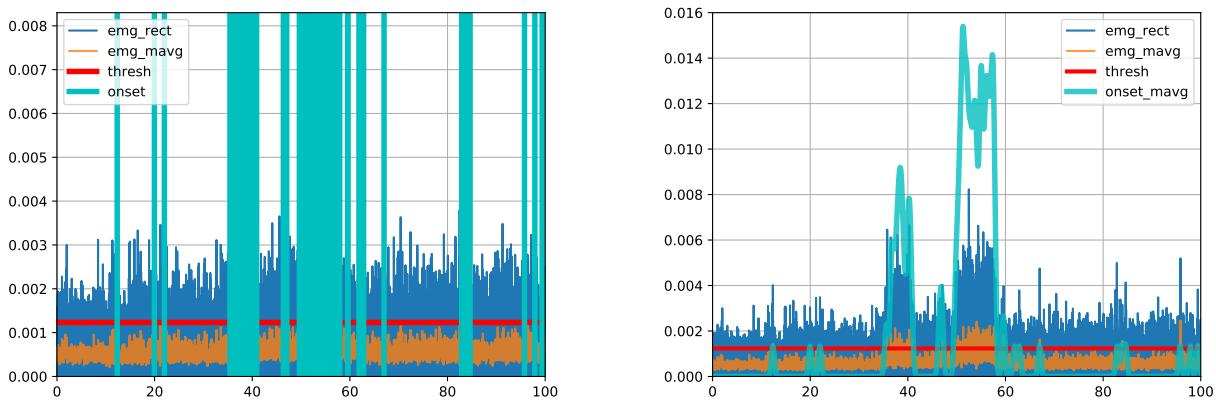
# %% усреднување со поголема временска константа
t_win = 2 # 50 ms
n_win = np.int(t_win * fs)
win = sig.get_window('parzen', n_win)
win = win / np.sum(win)
onset_sig = np.zeros(emg_rect.size)
onset_sig[onsets] = 1
onset_mavg = sig.convolve(onset_sig, win, 'same')

plt.figure()
plt.plot(t, emg_rect)
plt.plot(t, emg_mavg, alpha=.8)
plt.plot([t[0], t[-1]], [thresh, thresh], c='r', lw=3)
plt.plot(t, onset_mavg, c='c', lw=4, alpha=.8)
plt.grid()
```

Добиените сигнали по целобрановото насочување, усреднувањето и пресметаниот праг се

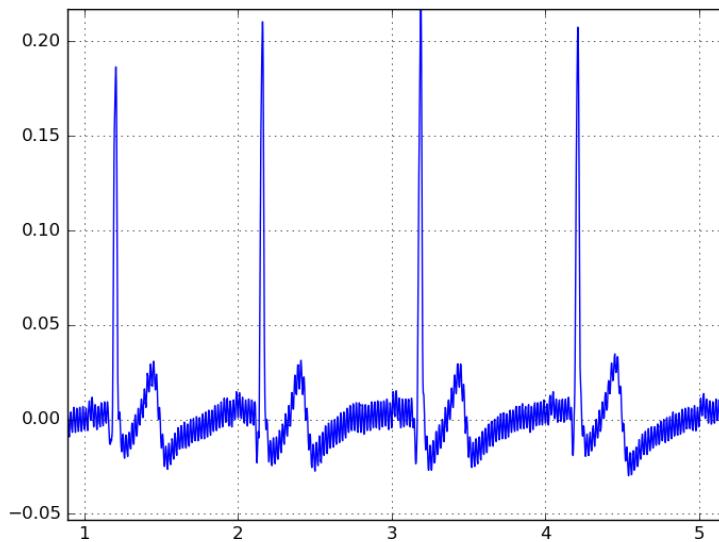


Сл. 4.6: Добиени сигнали со целобрановото насочување и усреднувањето на ЕМГ сигналот, како и пресметаниот праг за детекција на мускулна активност.



Сл. 4.7: Детектирани премини на усреднетиот ЕМГ сигнал низ прагот (лево) и нивната усредната верзија (десно).

прикажани на Сл. 4.6. На Сл. 4.7 пак се прикажани детектираниите премини низ прагот и нивната усредната верзија. Можеме да видиме дека конечно добиениот сигнал ни дава добра претстава за временските моменти и интензитетот на мускулната активација регистрирани во ЕМГ сигналот.



Сл. 4.8: Изглед на измерениот ЕКГ сигнал.

4.2 Процесирање на ЕКГ сигнали

Во овој дел ќе направиме низа основни процесирања на еден ЕКГ сигнал. Како примерок ќе го искористиме пример сигналот вклучен во Биоспјај⁷ `ecg.txt`. Во овој текстуален фајл е запишан ЕКГ сигнал со времетраење од 15 s семплиран со фреквенција f_s од 1000 Hz со резолуција од 12 битови по одбирок. Истата ќе ја вчитаме со следниот код.

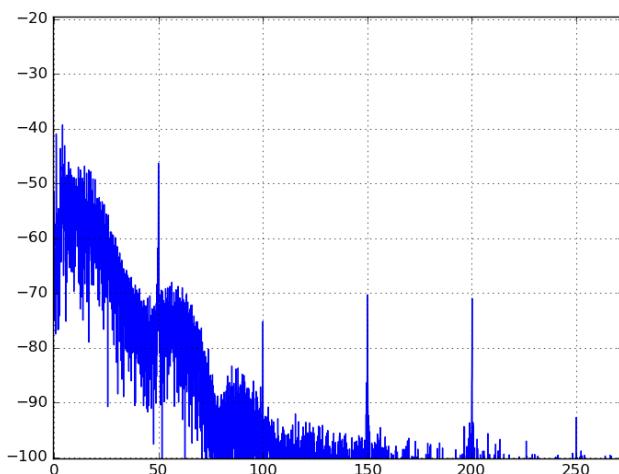
```

1  from __future__ import division
2  import numpy as np
3  import matplotlib.pyplot as plt
4  import scipy.fftpack as ff
5
6  ecg = np.array([])
7  count = 0
8
9  with open('ecg.txt') as fh:
10     for line in fh:
11         if count > 3:
12             val = float(line[:-3])
13             ecg = np.append(ecg, val)
14             count += 1
15
16     ecg = (ecg - 2**11) / 2**11
17     Fs = 1000
18     t = np.arange(0, ecg.size/Fs, 1/Fs)
19     plt.plot(t, ecg)
20     plt.grid()

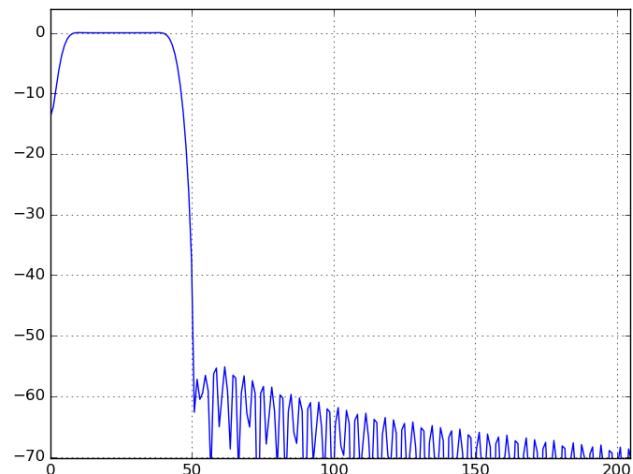
```

На почетокт од кодот се увезува делењето со автоматско кастување во `float` од Python 3.5 (1), како и потребните модули (2–4). Потоа се иницијализира `ecg` NumPy векторот (6) во кој во `for` јамката (10) се вчитуваат сите примероци од ЕКГ сигналот конвертирани во `float` (12–13). Потоа сигналот се сведува во опсег од -1 до 1 (16) и се врши негово исцртување со помош на функцијата `plot` од `matplotlib` (17–20). Добиениот график е прикажан на Сл. 4.8

⁷BioSPPy – Biosignal Processing in Python. <https://github.com/PIA-Group/BioSPPy>



Сл. 4.9: Амплитуден спектар на измерениот ЕКГ сигнал.



Сл. 4.10: Преносна функција на дизајнираниот FIR филтер пропусник на опсег.

Спектар на ЕКГ сигналот

Од графикот може да се видат отчукувањата на срцето преку QRS комплексот на ЕКГ сигналот. Исто така, можат да се забележат два вообичаени проблеми со ЕКГ сигналите – дрифт на DC нивото и шум од напонот од градска мрежа на 50 Hz. Овие два проблеми можат наједноставно да се елиминираат преку употреба на филтер пропусник на опсег. За да видиме во кој опсег се движи ЕКГ сигналот најпрвин ќе направиме анализа на неговиот амплитуден спектар.

```

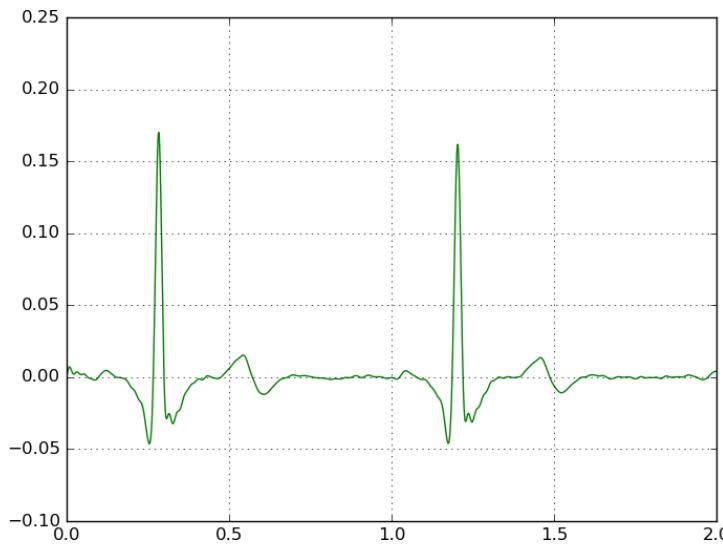
21 N = ecg.size
22 Nfft = 2**np.ceil(np.log(N)/np.log(2))
23
24 ecg_spec = ff.fft(ecg, Nfft)
25 ecg_spec = np.abs(ecg_spec)
26 ecg_spec = ecg_spec / N
27 ecg_spec = ecg_spec[0:Nfft/2+1]
28 ecg_spec[2:-1] = ecg_spec[2:-1] * 2
29 ecg_spec = 20*np.log10(ecg_spec)
30
31 f = np.linspace(0,Fs/2,Nfft/2+1)
32 plt.figure()
33 plt.plot(f, ecg_spec)
34 plt.grid()
```

Во овој код, најпрвин се пресметува следниот поголем број $2^n N_{FFT}$ од должината на сигналот за оптимално пресметување на FFT (22). Потоа се користи `fft` функцијата од модулот `scipy.fftpack` за пресметка на FFT (24), од која се пресметува амплитудниот спектар (25), кој се скалира со должината на сигналот (26). Поради тоа што половина од коефициентите се пресликуваат, дел од нив може да се отфрлат (28), а нивните слики треба да се удвојат (29). На крајот се пресметува логаритам од амплитудниот спектар (29) и фреквенциите на кој се поставени секој од коефициентите (31). Добиениот амплитуден спектар е прикажан на Сл. 4.9.

Филтрирање на ЕКГ сигналот

Може да се види дека ЕКГ сигналот нема значајни компоненти над 45 Hz па можеме да дизајнираме FIR⁸ филтер пропусник на опсег со гранични фреквенции 3 и 45 Hz. За тоа ќе ја искористиме методата за дизајн со прозорци ([Богданов, 1997](#)) кој е имплементиран во модулот `scipy.signal` со функцијата `firwin()`. Каратеристиките на филтерот може да ги

⁸Wikipedia: Finite impulse response. https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_impulse_response



Сл. 4.11: Исфилтрирана верзија од ЕКГ сигналот.

визуелизирајме користејќи ја функцијата `freqz()` со која го добиваме графикот на Сл. 4.10.

```

35 order = int(0.3 * Fs) # neparen za tip 1
36 if order % 2 == 0: # ako e paren
37     order = order + 1
38
39 from math import pi
40 import scipy.signal as sg
41 f_l = 3
42 f_h = 45
43 b = sg.firwin(order,[f_l, f_h],pass_zero=False,nyq=Fs/2)
44 w, h = sg.freqz(b)
45 f = w / pi *Fs/2
46
47 plt.figure()
48 plt.plot(f, 20*np.log10(np.abs(h)))
49 plt.grid()

```

```

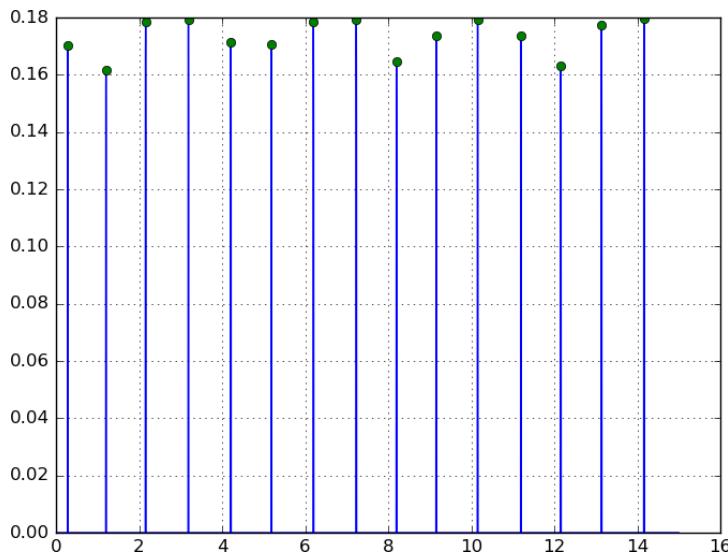
50 ecg_filt = sgfiltfilt(b, 1, ecg)
51 plt.figure()
52 plt.plot(t,ecg_filt,'g')
53 plt.grid()

```

Филтрирањето ќе го извршиме со функцијата `filtfilt()` која го филтрира сигналот во двете насоки со што се постигнува филтриран сигнал кој нема фазно доцнење во однос на оригиналниот сигнал. Исфилтрираниот сигнал може да се види на Сл. 4.12. Може да се види дека елиминиран е проблемот со непостојаноста на DC нивото, како и шумот од градската мрежа. Сепак, може да се види и дека QRS комплексот има помала остринा.

Наоѓање на R врвовите во ЕКГ сигналот

Основната информација за брзината на отчукување на срцето може да се добие со детекција на R врвовите во ЕКГ сигналот. Наједноставен начин за тоа да се направи е да се најдат сите максимуми на филтрираниот ЕКГ сигнал кои имаат амплитуди над избран праг. Тоа е реализирано во следниот код, кој ги наоѓа врвовите како што е прикажано на Сл. ??



Сл. 4.12: Најдени врвови во ЕКГ сигналот.

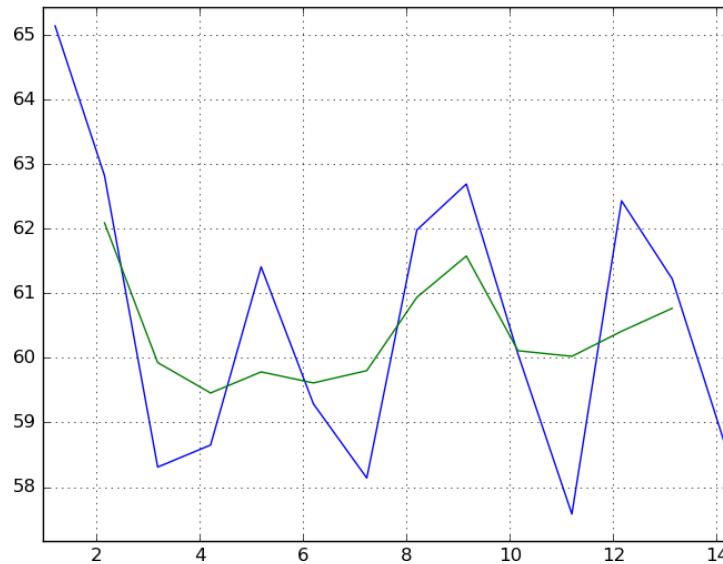
```

54     ecg_max = np.max(ecg)
55     threshold = ecg_max * 0.6 # 60% од max
56     ecg_th = np.zeros(ecg.size)
57     ecg_th[ecg_filt > threshold] = ecg_filt[ecg_filt > threshold]
58     R = np.array([], dtype='int')
59     for i in range(1,ecg.size):
60         if ecg_th[i] > ecg_th[i-1] and \
61             ecg_th[i] > ecg_th[i+1]:
62             R = np.append(R,i)
63
64     plt.figure()
65     plt.plot(t,ecg_th)
66     plt.plot(t[R],ecg_th[R],'o')
67     plt.grid()

```

Пресметка на бројот на отчукувања во минута

Откако ги имаме детектирано R врвовите во ЕКГ сигналот, од нив може да се пресмета моментната брзина на отчукување на срцето која вообичаено се изразува во bpm (beats per minute). За пресметување на измазната верзија од оваа брзина можеме да искористиме лизгачи прозорец за усреднување. Пресметаните моментни и усреднети вредности за bpm се прикажани на Сл. 4.13.



Сл. 4.13: Број на отчукувања на срцето во минута пресметани од ЕКГ сигналот.

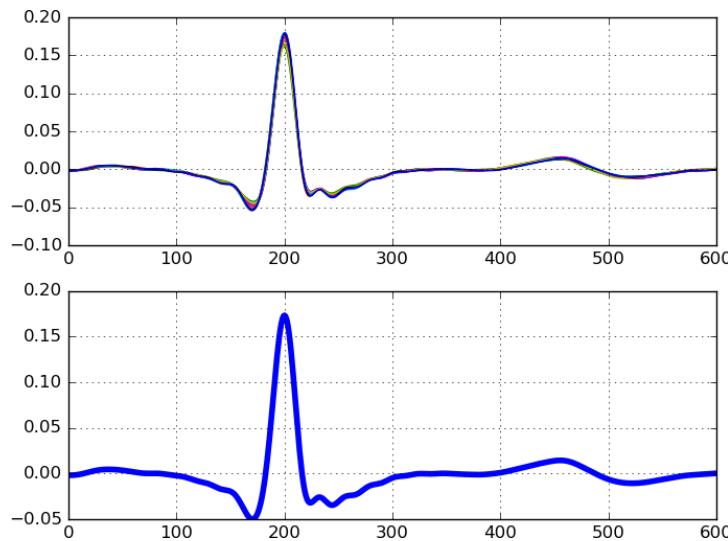
```

68 R_diff = np.diff(R)
69 R_diff = R_diff/Fs # vo s
70 bpm = 60 / R_diff
71
72 # smoothing - running average
73 smooth_ord = 3
74 win = np.ones(smooth_ord)
75 win = win / np.sum(win)
76 bpm_smooth = signal.convolve(bpm, win, mode='same' )
77 bpm_smooth = bpm_smooth[1:-1]
78
79 plt.figure()
80 plt.plot(t[R[1:]],bpm)
81 plt.plot(t[R[2:-1]],bpm_smooth)
82 plt.grid()

```

Усредната репрезентација на ЕКГ сигналот

Со помош на детектираните R врвови можеме од целиот ЕКГ сигнал да направиме усредната репрезентација на сите отчукувања на срцето. Потоа, оваа репрезентација може да се искористи за детекција на отчукувањата кои отстапуваат од неа. Оваа репрезентација е прикажана на Сл. 4.14



Сл. 4.14: Усредната репрезентација на отчукувањата на срцето во ЕКГ сигналот.

```

83 R_left = 0.200 * Fs
84 R_right = 0.400 * Fs
85 templates = np.zeros(R_left+R_right)
86 for r in R:
87     ecg_temp = ecg_filt[r-R_left : r+R_right]
88     templates = np.vstack((templates, ecg_temp))
89
90 ecg_template = np.mean(templates[1:],0)
91 plt.figure()
92 plt.subplot(211)
93 plt.plot(templates[1:].T)
94 plt.grid()
95 plt.subplot(212)
96 plt.plot(ecg_template, linewidth=4)
97 plt.grid()

```

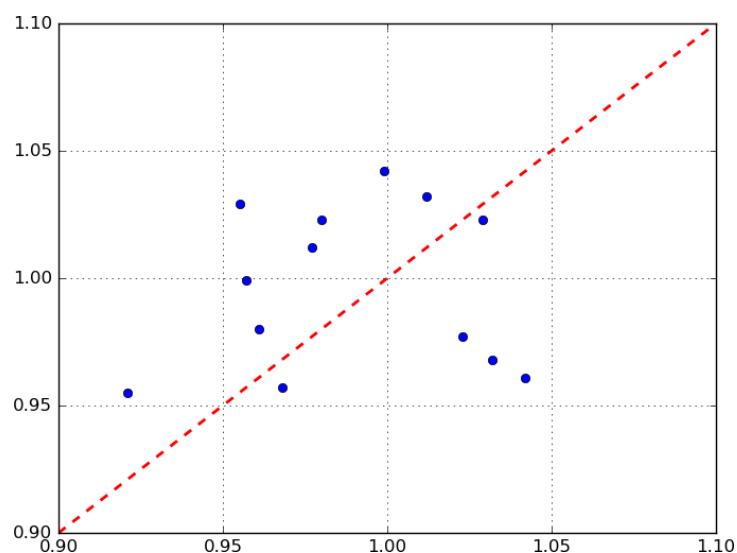
Пресметување на RR дијаграмот од ЕКГ сигналот

Еден начин да се прикаже работата на срцето е преку RR дијаграмот. Во него времетраењето од последното отчукување се прикажува во однос на времетраењето на претпоследното отчукување, Сл. 4.15.

```

98 RRs = np.zeros(2)
99 for i in range(1,len(R_diff)):
100     RR = np.array([R_diff[i-1], R_diff[i]])
101     RRs = np.vstack((RRs, RR))
102
103 RRs = RR[1:,:]
104
105 plt.figure()
106 plt.plot(RRs[:,0], RR[:,1], 'o')
107 plt.plot([0.9, 1.1], [0.9,1.1], 'r--', linewidth=2)
108 plt.grid()

```



Сл. 4.15: RR дијаграм на отчукувањата на срцето во ЕКГ сигналот.

Додаток А

Слободен и отворен софтвер за инженерска и научна работа

Еден од најпрочуените софтверски пакети за нумеришка обработка е програмскиот пакет **Матлаб¹**. Матлаб, преку својата синтакса на високо ниво дозволува: лесна манипулација на матрици, исцртување на функции и податоци, имплементација на алгоритми, создавање на кориснички интерфејси, итн. Тој може да се употреби во најразлични области од инженерската практика, меѓу кои и во дигиталната обработка на звук, слика и видео. За првпат бил издаден во 1984 г., а во 2004 г. имал 1 милион корисници инженери, научници и економисти.

Сепак Матлаб, како комерцијален софтвер носи и низа од недостатоци, пред сè високата цена која го става вон дофат на студентите, истражувачите, малите компании, како и на научно истражувачките и образовните установи во поголем дел од светот. Други недостатоци на Матлаб се ограничната преносливост на кодот, како и неговата затвореност.

A.1 Слободен софтвер

Денес сè повеќе инженери и научници ја напуштаат употребата на комерцијалниот затворен софтвер и својата работа ја засноваат на платформи базирани на **слободен софтвер²**. Ова пред сè се должи на философијата на движењето за слободен софтвер започнато од **Ричард Сталман³** во 1983 г. со креирањето на ГНУ оперативниот систем, а подоцна со воспоставување на Фондацијата за слободен софтвер⁴ во 1985 г., како и поширокото **движење за отвореност⁵**, а тоа е заедништво во создавањето и напредувањето на технологијата и човештвото.

A.2 Четири слободи

Слободниот софтвер е дефиниран со четирите слободи:⁶

- **Слобода 0.** Слобода да ја користите програмата за било која намена.

¹MATLAB®Matrix Laboratory, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States. <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

²Wikipedia – Free software movement https://en.wikipedia.org/wiki/Free_software_movement

³Wikipedia – Richard Stallman https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Stallman

Предавање на Ричард Сталман за философијата на движењето за слободен софтвер – Richard Stallman – Free software, free society, TEDxGeneva 2014 https://www.youtube.com/watch?v=Ag1AKI1_2GM

⁴Wikipedia – Free Software Foundation https://en.wikipedia.org/wiki/Free_Software_Foundation

⁵Wikipedia – Open-source model https://en.wikipedia.org/wiki/Open-source_model

Nathan Seidle – How Open Hardware will Take Over the World, TEDxBoulder https://www.youtube.com/watch?v=xGhj_1LNtd0

⁶Превземено од вебстраницата на организацијата Слободен софтвер Македонија <https://slobodensoftver.org.mk/shto>

Добавањето рестрикции за користење на слободен софтвер, како што се временските рестрикции („Пробен период од 30 дена“, „Лиценцата истекува на 1 јануари 2005“), рестрикции на целта („Дозволена е употреба за истражувачки и некомерцијални цели“) или рестрикции на географската област („Мора да се користи во земјата А“), ја прават програмата неслободна.

- **Слобода 1.** Слобода да проучите како работи програмата и како истата ја адаптирате на сопствените потреби.

Добавањето легални или практични рестрикции на разбирањето или менувањето на програмата, како што се задолжително купување на специјални лиценци, потпишување на спогодба за неоткривање (Non-Disclosure-Agreement) или правењето изворниот код да биде недостапен, исто така ја прават програмата неслободна. Без слободата да се менува програмата, луѓето ќе останат на милост на единствен снабдувач.

- **Слобода 2.** Слобода да редистрибуирате копии за да му помогнете на вашиот сосед.

Софтверот може да се копира/дистрибуира скоро без никакви трошоци. Ако не смеете да му дадете некоја програма на некој човек кому таа му треба, тоа ја прави програмата неслободна. Се разбира, доколку сакате, за ваквите активности можете да наплатите.

- **Слобода 3** Слобода да ја подобрувате програмата и да ги издадете вашите подобрувања во јавноста, од што корист ќе има целата заедница.

Сите луѓе не се подеднакво добри програмери. Некои луѓе пак воопшто не знаат да програмираат. Оваа слобода им дозволува на оние луѓе кои немаат време или знаење да решат некој проблем индиректно да пристапат до слободата за менување на програмата.

Се разбира, доколку сакате, за ваквите активности можете да наплатите.

Доколку софтверот не ги исполнува сите горни услови, тогаш тој не е слободен софтвер.

A.3 Предности на слободниот софтвер

Од практичен аспект, отворениот софтвер има низа предности над затворениот софтвер и тоа:

- **достапноста** – поради основната премиса на давање на изворниот код, со цел да се овозможи неговиот развој од заедницата, отворениот софтвер е *de facto* и бесплатен софтвер. Така, повеќето производители на слободниот софтвер живеат од донацији, но и од продавање поддршка за нивниот производ.
- **безбедноста** – поради достапноста на изворниот код, не постои начин производителот на софтерот да прави нешто скриено од вас, а секој спорен дел од кодот е подложен на промена од заедницата. Кај затворениот софтвер тоа не е случај.⁷⁸
- **слободата од производителот** – како корисници на отворениот софтвер, вие не сте затворени во екосистемот на производителот.⁹ Истиот тој софтвер може да биде превземен

⁷Во Windows 10 производителот го задржува правото да ги чува вашите приватни податоци како што вели во изјавата за приватност: “Finally, we will access, disclose and preserve personal data, including your content (such as the content of your emails, other private communications or files in private folders), when we have a good faith belief that doing so is necessary ...”

Истите механизми се додадени во претходните верзии на Windows преку автоматските надградби.

Zach Epstein, Windows 10 is spying on almost everything you do – here’s how to opt out, Jul 31, 2015, <http://bgr.com/2015/07/31/windows-10-upgrade-spying-how-to-opt-out/>

Ashley Allen, How to Stop Windows 7 and 8 From Spying on You <http://www.eteknix.com/stop-windows-7-8-spying/>

⁸Епл и Самсунг ги забавија телефоните на корисниците преку нивното редовно ажурирање <https://www.cnet.com/news/apple-and-samsung-fined-for-slowing-down-phones-with-updates/>

⁹Don Reisinger – Steve Jobs wanted to ‘further lock customers’ into Apple’s ‘ecosystem’ <https://www.cnet.com/news/steve-jobs-wanted-to-further-lock-customers-into-apples-ecosystem/>

од друга заедница на програмери и да продолжи неговото одржување и развој во друга насока.

- **подobar квалитет** – при воспоставување на критична големина на заедницата околу еден отворен софтвер, развојот не може да се спореди со ресурсите кои ги поседува било која корпорација во светот. Така, развојот на **Линукс јадрото**¹⁰, кое е во основата оперативниот систем **GNU/Линукс** познат и само како **Линукс**¹¹ и повеќе од 600-те **GNU/Линукс дистрибуции**¹², првично напишано од **Линус Торвалдс**¹³, денес претставува најголемиот здружен проект во историјата на човештвото со околу 6000 активни развиваачи, над 20 милиони редови на код, и со проценета развојна вредност од над 2 милијарди евра.¹⁴

Сите овие придобивки заедно придонесуваат за широка распространетост на слободниот софтвер денес. Така, GNU/Линукс и ФриБСД¹⁵ оперативните системи се во употреба во 98,27 % од серверите на интернет (споредено со 1,73 % со Виндоус), 79,3 % од паметните телефони (Андроид оперативниот систем)¹⁶, и 99 % од суперкомпјутерите¹⁷. Сепак, неговиот пробив во персоналните компјутери засега е незначителен – 2,1 % (наспроти 87 % на Виндоус и 9,7 % на МекОС).

A.4 Одржливост

Постојат различни начини на кои се реализира финансиската поддршка на слободниот софтвер и покрај бесплатноста и тоа:

- финансиска поддршка од компанији – зад многу пакети слободен софтвер стојат компанији од чиј интерес е неговиот развојот, Најдобар пример за тоа е можеби самото Линукс јадро на кое работат инженери од многу компанији од целиот свет, а најголемиот придонес го има компанијата Интел. Тука се и низа на GNU/Линукс дистрибуции меѓу кои Убунту¹⁸, Федора¹⁹, и ОпенСусе²⁰, како и пакетите за длабоко учење Тензорфлоу²¹ и Пајторч²², исто така развиваани од компанији,
- финансиска поддршка од јавно финансирање и грантови – голем број на слободни софтвери се плод на работата на инженери и научници финансиирани од државите низ светот или од приватни фондации. Таков е на пример КиКАД софтверот за електронски дизајн и изработка на печатени плочи развиен во ЦЕРН²³, софтверот за обработка на аудио Аудасити започнат во Универзитет Карнеги Мелон²⁴, или пак пакетот за машинско учење Сајкитлрн започнат во Ирија²⁵,
- бизнис модел базиран на поддршка – најголемата компанија која денес работи исклучиво со слободен софтвер е Ред Хет чиј GNU/Линукс оперативен систем е еден од најзастапените на интернет серверите.²⁶ Ред Хет заработка преку продажба на поддршка за овој оперативен

¹⁰ Wikipedia – Linux kernel https://en.wikipedia.org/wiki/Linux_kernel

¹¹ Wikipedia – Linux <https://en.wikipedia.org/wiki/Linux>

¹² Wikipedia – List of Linux distributions https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Linux_distributions

¹³ Wikipedia – Linus Torvalds https://en.wikipedia.org/wiki/Linus_Torvalds

¹⁴ Добар документарен филм за раѓањето и развојот на GNU/Линукс оперативниот систем е Revolution OS - 2001 <https://www.youtube.com/watch?v=Eluzi700-P4>

¹⁵ FreeBSD <https://www.freebsd.org/>

¹⁶ Оваа бројка е речиси 91 % ако се има в' предвид дека и iOS е базиран на Линукс јадрото.

¹⁷ Linux is Running on Almost All of the Top 500 Supercomputers <https://itsfoss.com/linux-supercomputers-2017/>

¹⁸ Ubuntu <https://www.ubuntu.com/>

¹⁹ Fedora <https://getfedora.org/>

²⁰ OpenSUSE <https://www.opensuse.org/>

²¹ TensorFlow – An end-to-end open source machine learning platform <https://www.tensorflow.org/>

²² PyTorch – from research to production <https://pytorch.org/>

²³ KiCad EDA – A Cross Platform and Open Source Electronics Design Automation Suite <http://kicad-pcb.org/>

²⁴ Audacity – Free, open source, cross-platform audio software <https://www.audacityteam.org/>

²⁵ scikit-learn – Machine Learning in Python <https://scikit-learn.org/stable/index.html>

²⁶ Red Hat – The world's leading provider of open source solutions <https://www.redhat.com>

систем и во моментов е проценета на вредност од 38 милијарди УСД,

- финансиска поддршка од донацији – многу слободни софтвери егзистираат благодарејќи на донацији направени од нивните корисници. Тука спаѓаат најголем број од ГНУ/Линукс дистрибуциите како на пример Манџаро²⁷ или Минт²⁸, а исто така СпајдерSpyder – The Scientific Python Development Environment <https://manjaro.org/> развојната средина за Питон која ќе ја користиме во предметов,
- ентузијазам – мотивот нешто да се создаде или подобри и да се сподели со целиот свет понекогаш е доволен мотив за развој на слободниот софтвер. Постојат низа пакети со заедници на развиваачи кои немаат финансиски придобивки од нивната работа на проектот, но сепак продолжуваат да работат на него водени од сопствените убедувања и стремеж кон повисоки вредности.

A.5 Слободен софтвер за инженерска и научна работа

Постојат низа на слободни софтвери кои можат да бидат искористени за обработка на нумерички податоци.

- **ГНУ Октејв**²⁹ има синтакса направена да биде во голема мера компатибилна со онаа на Матлаб. Во Октејв се реализирани голем број на пакети кои можат да се искористат за обработка на најразлични типови на сигнали. Проблемот со Октејв е во неговата мала брзина на извршување, поради што највеќе се употребува во образоването како замена за Матлаб.
- **Сајлаб**³⁰ е слободен софтвер за нумеричка обработка наменет за инженери и научници, во употреба од 1994 г. Сајлаб во себе вклучува и слободна замена за Симулинк пакетот на Матлаб, наречена Икскос³¹.
- **Питон**³² е широко распространет, повеќенаменски, интерпретиран и динамичен програмски јазик на високо ниво направен од Гуидо ван Росум³³ во 1989 г. Иако не е наменет строго за нумеричка анализа, елегантната и едноставна синтакса која овозможува лесна читливост, како и неговата широка распространетост во најразлични области, го прават Питон идеална основа за слободната работа и соработка на научната и образовната заедница ширум светот.
- **Цулиа**³⁴ е јазик за нумеричко процесирање со компајлирање направен на МИТ, кој иако има синтакса на високо ниво како онаа на Матлаб, работи речиси еднакво брзо со код напишан во С. И покрај големиот потенцијал на Цулија, за сега неговата примена останува ограничена во области во кои е неопходна голема процесирачка моќ.

²⁷Manjaro – Professional Linux at its best <https://manjaro.org/>

²⁸Linux Mint – From freedom came elegance <https://linuxmint.com/>

²⁹GNU Octave – Scientific Programming Language <https://www.gnu.org/software/octave/>

³⁰Scilab – Open source software for numerical computation <https://www.scilab.org/>

³¹Xcos <https://www.scilab.org/software/xcos>

³²Python <https://www.python.org/>

³³Wikipedia – Guido van Rossum https://en.wikipedia.org/wiki/Guido_van_Rossum

³⁴The Julia Programming Language <https://julialang.org/>

Додаток Б

Питон за процесирање на биомедицинските сигнали

За процесирањето на дигиталните биомедицински сигнали ќе биде искористен програмскиот јазик **Питон** и тоа неговата понова верзија **3**, заедно со библиотеките:

- **Нумпј** – за работа со вектори и матрици,¹
- **Сајпај** – за дигитално процесирање на сигнали,²
- **Матплотлиб** – за визуелизација.³

Освен овие постојат мноштво библиотеки за Питон кои се користат во научните истражувања како на пример **Пандас**⁴ за статистички анализи, **Симпај**⁵ за симболичка математика, **Сајкитлрн**⁶ за машинско учење итн.

Како интерфејс кон Питон ќе ја користиме интерактивната конзола **ИПитон**⁷ и научната развојна средина за Питон **Спајдер**⁸.

Б.1 Основи поставки во ГНУ/Линукс

Иако користењето на **Питон** не е врзано со ГНУ/Линукс оперативниот систем, вежбите во овој предмет ќе се базираат на работа под ГНУ/Линукс. Доколку веќе немате ГНУ/Линукс, истиот се препорачува да го инсталирате паралелно на постоечкиот оперативен систем. Во најмала рака може да инсталирате ГНУ/Линукс во виртуелна машина, но ова може да ги ограничи постоечките ресурси за процесирање на сигналите.⁹ Во Лабораторијата за дигитално процесирање на сигнали ќе работиме со **Убунту Mate**¹⁰ кој е базиран на **Убунту**, а ја користи десктоп средината **Mate** чиј изглед е базиран на **Гном 2**, а е имплементиран во **Гном 3**.¹¹

¹NumPy <http://www.numpy.org/>

²SciPy <http://www.scipy.org/>

³Matplotlib <http://matplotlib.org/>

⁴Pandas <http://pandas.pydata.org/>

⁵Sympy <http://www.sympy.org/en/index.html>

⁶SciKit-Learn <http://scikit-learn.org/stable/>

⁷IPython Interactive Computing <http://ipython.org/>

⁸Spyder – The Scientific PYthon Development EnviRonment <https://github.com/spyder-ide/spyder>

⁹Добар преглед на популарноста на различните Линукс дистрибуции, како и повеќе информации за истите може да најдете на вебстраницата *Distrowatch*. <http://distrowatch.com/>

¹⁰Ubuntu MATE. <https://ubuntu-mate.org/>

¹¹Кај ГНУ/Линукс оперативните системи можат да се користат различни десктоп средини како GNOME и MATE, но уште и KDE Plasma, Xfce, LXQt, Cinnamon, Pantheon, итн.

За работа со ГНУ/Линукс можеме да го искористиме стандардниот БАШ терминал.¹² Вообичаена кратенка за отворање на нов терминал е `ctrl-alt-t`, или ако дистрибуцијата доаѓа со терминал на спуштање копчето `F12`.

За почеток треба во вашиот основен фолдер¹³ да отворите нова папка со името на предметот. Тоа може да го направите преку фајл експлорерот, или преку терминалот:

```
~ $ mkdir bme
```

Следно, од Гитхаб страната на предметот Биомедицинска електроника¹⁴ превземете го фолдерот со скриптата, кодот и примероци од биомедицински сигнали кои ќе ги користиме во вежбите. Тоа можете да го направите на следниот начин:

```
~ $ cd bme
~/bme $ git clone https://github.com/FEEIT-FreeCourseWare/Biomedical_Electronics
```

Б.2 Основи на работата со Питон

Питон интерпретер

За работа со Питон може да ја искористиме стандардната инсталацијата на Питон која доаѓа со секоја ГНУ/Линукс дистрибуција. Питон интерпретерот можеме да го повикаме во стандардниот БАШ терминал со:

```
$ python
```

```
Python 3.7.2 (default, Jan 10 2019, 23:51:51)
[GCC 8.2.1 20181127] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> print('hello world')
hello world
```

За излегување од Питон конзолата треба да ја притиснеме стандардната кратенка `ctrl-d` или да напишеме `exit()`.

ИПитон

Поради ограничениите можности на основниот Питон интерпретер, вообичаено со Питон се работи во интерактивната конзола **ИПитон** која нуди низа на подобрувања. Нејзие може да ја инсталлираме со:

```
$ sudo apt install ipython
```

а по инсталацијата може да ја повикаме со:

```
$ ipython
```

```
Python 3.7.2 (default, Jan 10 2019, 23:51:51)
Type 'copyright', 'credits' or 'license' for more information
IPython 7.3.0 -- An enhanced Interactive Python. Type '?' for help.
```

¹²Bourne-Again Shell (BASH) средината е стандардна за сите дистрибуции на ГНУ/Линукс и МекОС. Добро напатство за нејзина употреба претставува: Software Carpentry – The Unix Shell <http://swcarpentry.github.io/shell-novice/>

Постојат и понапредни шел средини како на пример Z shell – скратено Zsh. Еве еден туторијал за нејзина инсталација: Oh-My-Zsh! A Work of CLI Magic—Tutorial for Ubuntu <https://medium.com/wearetheledger/oh-my-zsh-made-for-cli-lovers-installation-guide-3131ca5491fb>

¹³Во ГНУ/Линукс основен фолдер на секој корисник е `/home/user_name/`, а кратенка за него е `~`.

¹⁴https://github.com/FEEIT-FreeCourseWare/Biomedical_Electronics

Сл. Б.1: Јупајтер Кјут конзолата нуди напредна интерактивност.

```
In [1]: print('hello world')
hello world
```

Некои од главните придобивки кои ги носи ИПитон се:

- пристап до стандардната помош во Питон, како на пример докстрингови на објекти и напатствието за Питон, преку наредбата `help`,
- низа од специјални наредби, наречени и „магии“, како на пример `%timeit` за мерење на времето потребно за извршување на една наредба, `%matplotlib` за овозможување на интерактивно исцртување, или `%history` за испишување, пребарување или запишување на историјата на извршените наредби; повеќе за овие наредби може да се види со наредбата `%magic`,
- информации за секој објект преку употреба на `?` наредбата,
- автоматско комплетирање на имињата на објектите и променливите од локалниот простор на имиња, како и имиња од локалниот фолдер, со употреба на `Tab` копчето,
- пребарување на претходно внесени наредби со стрелките и внесување на првите букви од саканата наредба, а со `ctrl-r` и со пребарување на целата содржина на претходните наредби,
- извршување на шел наредби со помош на `! .`

За да ги видите сите можности кои ги нуди ИПитон напишете `?` или `%quickref` во интерактивната конзола.

Дополнително, ИПитон е основата зад **Јупајтер Кјутконзолата**¹⁵ прикажана на Сл. Б.1, која е реализирана во Кјут технологијата и овозможува плотирање во самата конзола кое може да се активира со наредбата `%matplotlib inline`. Таа се стартира во терминалот со наредбата:

```
$ jupyter qtconsole
```

Виртуелни средини за Питон

Инсталирањето на Питон пакети, како што направивме со ИПитон козолата, директно во оперативниот систем не е препорачливо. За избегнување на судир помеѓу системската инсталација на Питон на ГНУ/Линукс оперативниот систем, како и за изолирање на екосистемот од инсталирани модули на секој засебен проект, правилно е да направиме Питон виртуелна средина за процесирање на дигиталните биомедицински сигнали. Постојат низа пакети за создавање и раководење со виртуелните средини во Питон, од кои `pipenv`¹⁶ е оној кој е препорачан од Телото за пакување на Питон¹⁷.

За инсталирање на `pipenv` треба да го инсталерираме користејќи го системскиот `pip`¹⁸ Поради можноста на употреба на Питон 2 како стандарден во инсталираната ГНУ/Линукс дистрибуција, најдобро е да напишеме:

```
$ sudo pip3 install pipenv
```

¹⁵Jupyter QtConsole <https://github.com/jupyter/qtconsole>

¹⁶Pipenv – Python Development Workflow for Humans <https://github.com/pypa/pipenv>

¹⁷Python Packaging Authority PyPA <https://www.pypa.io/en/latest/>

¹⁸Python Install Package (pip) <https://pypi.org/project/pip/>

А доколку системот го нема `pip3`, истиот може да се инсталира како:

```
$ sudo apt install python3-pip
```

За креирање на виртуелна средина во фолдерот за овој предмет ќе напишеме:

```
$ mkdir bme
$ pipenv --python 3
```

```
Creating a virtualenv for this project...
Pipfile: /tmp/bme/Pipfile
Using /usr/bin/python3 (3.7.2) to create virtualenv...
Creating virtual environment...Using base prefix '/usr'
New python executable in ~/.local/share/virtualenvs/bme-aWLbLjVf/bin/python3
Also creating executable in ~/.local/share/virtualenvs/bme-aWLbLjVf/bin/python
Installing setuptools, pip, wheel...
done.
Running virtualenv with interpreter /usr/bin/python3

Successfully created virtual environment!
Virtualenv location: ~/.local/share/virtualenvs/bme-aWLbLjVf
Creating a Pipfile for this project...
```

Со ова `pipenv` креира нова виртуелна средина во локален фолдер во нашиот кориснички фолдер, во неа го копира системскиот Питон 3 и `pip`. За активирање на виртуелната средина може да ја искористиме наредбата `pipenv shell` која ја става патеката на виртуелната средина како прва во листата на системски патеки. Така следниот пат кога ќе сакаме да го повикаме Питон интерпретерот или да инсталлираме пакет со `pip`, тоа ќе се случува внатре во виртуелната средина:

```
$ which pip
/usr/bin/pip

$ echo $PATH
/usr/local/sbin:/usr/local/bin:/usr/bin ...

$ pipenv shell
Launching subshell in virtual environment...
. ~/.local/share/virtualenvs/bme-aWLbLjVf/bin/activate

(bme) $ echo $PATH
~/.local/share/virtualenvs/bme-aWLbLjVf/bin:/usr/local/sbin:/usr/local/bin:...

(bme) $ which pip
~/.local/share/virtualenvs/bme-aWLbLjVf/bin/pip
```

Гледаме дека `pipenv` ни дозначува дека сме во виртуелната средина со `(bme)` пред БАШ промптовт. За да излеземе од неа повторно може да ја употребиме кратенката `ctrl-d` или да напишеме `exit`.

Спајдер

Наместо да работиме со ИПитон конзолата во терминалот, во предметот биомедицинска електроника ќе ја употребиме развојната средина за Питон специјализирана за инженерска и научна работа **Спајдер**¹⁹ прикажана на **Сл. Б.2.** Спајдер во себе вклучува:

- **Едитор** – со вклучен прелистувач на функции/класи, можности за анализа на код,

¹⁹Spyder - The Scientific PYthon Development EnviRonment. <https://github.com/spyder-ide/spyder>

Сл. Б.2: Спајдер развојната средина за Питон специјализирана за инженерска и научна работа.

автоматско завршување на код, и вчитување на дефиниции.

- **Интерактивна конзола** – интегрирани Питон и иПитон конзоли со работни простории и поддршка за дебагирање и поддршка за Матплотлиб, овозможуваат инстантна евалуација на кодот напишан во едиторот.
- **Документација** – покажување на документацијата на било која класа или функција повикана во едиторот или конзолата.
- **Приказ на променливи** – овозможува брза анализа на променливите генериирани со некој код.
- **Приказ на фајлови и фолдери.**
- **Историја на наредби.**

Спајдер можеме да го инсталлираме во виртуелната средина која ја креиравме во работниот фолддер `bme`:

```
(bme) $ pip install spyder
```

Б.3 Основи на Нумпај и Матплотлиб

За да ги инсталлираме потребните модули во новата виртуелна средина ќе напишеме:

```
(bme) $ pip install numpy matplotlib scipy
```

Сега може да ги повикаме во ИПитон:

```
In [1]: import numpy as np
In [2]: from matplotlib import pyplot as plt
In [3]: x = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
In [4]: y = np.sin(x)
In [5]: %matplotlib
Using matplotlib backend: Qt5Agg

In [6]: plt.plot(x, y)
Out[6]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fcbb448ffd0>]
```

Забележете дека го импортираме Нумпај со `import numpy as np` наместо со `from numpy import *`. Ова е препорачана практика за избегнување на оптеретување на постоечките функции во основниот простор на имиња²⁰, како и за зачувување на засебен простор со имиња за секој од импортираните модули. Ова овозможува и одлично автоматско надополнување на започнатото име на модул, функција или променлива во Питон.²¹ Со наредбата `%matplotlib` се овозможува интерактивното плотирање во ИПитон конзолата.

Добар вовед во програмскиот јазик Питон во рамки на екосистемот за научна работа е даден во **Скриптата за Сајпај** (Varoquaux et al., 2015)²² која е достапна под слободна лиценца²³. Оваа книга претставува отворен проект и во неа, благодарејќи на многуте автори и придонесувачи, се

²⁰Добрата структурираност на просторите на имиња (namespaces) е една од важните одлики на Питон како што е и наведено во стиховите на **Зенот на Питон** кој може да го прочитате ако напишете `import this`.

²¹Автоматското надополнување се активира со притискање на `Tab`.

²²Scipy Lecture Notes <http://scipy-lectures.org/>

²³Creative Commons <https://creativecommons.org/>

поместени основите за работа не само со Питон, Нумпај, Матплотлиб и Сајпај, туку и Пандас, Симпај, Сајкитимиџ, Сајкитлрн, па дури и Цајтон²⁴.

За запознавање со основите на програмскиот јазик Питон можат да послужат мноштво на материјали, каков што е **официјалниот туторијал за Питон** на вебстраницата на Питон²⁵ и Викикнигата **Програмирање во Питон**²⁶, обете во употребува на МИТ.

²⁴Cython <https://cython.org/>

²⁵The Python Tutorial. <https://docs.python.org/3/tutorial/index.html>

²⁶Python Programming https://en.wikibooks.org/wiki/Python_Programming

Додаток В

Дискретна Фурьеова трансформација

Фреквенцискиот спектар на биомедицинските сигнали е клучен во нивната анализа и обработка во биомедицинските електронски системи. Со негова помош можеме да ги видиме карактеристиките на сигналот кои не се јасно видливи во неговиот временски облик. За пресметка на спектарот на биомедицинските сигнали ќе се послужиме со **Фурьеовата трансформација** и нејзината временски определена форма **Фурьеова трансформација на временски отсечоци (ФТВО)**¹. Ќе видиме како ФТВО води до една прегледна форма за претставување на временско/спектрални особини на сигналите – **спектрограмот**.

B.1 Основи на Фурьеовата анализа

За потребите на овој курс, во ова поглавје ќе биде направен краток преглед на основите на Фурьеовата анализа. Притоа ќе се задржиме само до особините и деталите кои се релевантни за дигиталното процесирање на биомедицинските сигнали. За подетален преглед погледнете ја книгата ?, по која се работи на предметот **Основи на дигитално процесирање на сигнали** на додипломските на **ФЕИТ**.



§ Дополнително. Францускиот математичар и физичар **Жан-Батис Жозеф Фурье**²(1768–1830) анализирајќи го ширењето на топлината, во 1822 за првпат постулирал дека која било функција може да биде претставена преку серија на синусоиди. Тој бил син на кројач и останал без својот татко на 9 годишна возраст. За време на француската револуција бил член на локалниот револуционерен комитет, за што и бил во затвор. Го придржувал Наполеон Бонапарта во неговиот поход во Египет во 1798, а по враќањето во Франција во 1801 станува претседател на општината Изер во Гренобл, каде започнува да прави експерименти за топлината.

¹Short-Time Fourier Transform (STFT).

²Wikipedia – Joseph Fourier https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier. Слика од Louis-Léopold Boilly - <https://www.gettyimages.com.au/license/169251384>, Public Domain, [https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3\char"0304\relax308441](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3\char)

Табела B.1: Позначајни својства на Фуриевата трансформација.

Својство	Временски домен	Фуриев домен
Линеарност	$ax(t) + bg(t)$	$aX(\omega) + bG(\omega)$
Поместување	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega_0 t} X(\omega)$
Модулација	$e^{-j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Конволуција	$x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t - \tau) d\tau$	$X(\omega)G(\omega)$
Мултипликација	$x(n)g(n)$	$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)G(\omega - \Omega) d\Omega$

Фуриев интеграл

Фуриевата трансформација (ФТ) на сигналот $x(t)$ е дефинирана со интегралот:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in (-\infty, \infty), \quad (\text{B.1})$$

каде со $\omega = 2\pi f$ е означена кружната фреквенција.

Инверзната Фуриева трансформација (ИФТ) е дефинирана со интегралот:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (\text{B.2})$$

$X(\omega)$ се нарекува **фреквенциски спектар** на сигналот $x(t)$ и претставува комплексна функција од ω која може да се запише како:

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\angle X(\omega)} = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}, \quad (\text{B.3})$$

каде $A(\omega)$ претставува **амплитуден спектар**, а $\phi(\omega)$ **фазен спектар** на сигналот $x(t)$. Притоа, ако сигналот е реална функција од t тогаш амплитудниот спектар е парна функција од ω , а фазниот е непарна функција од t . Бидејќи интеграл од непарна функција во интервал симетричен околу координатниот почеток е 0, тогаш од (B.2), користејќи ја **Ојлеровата формула**, добиваме:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{j\phi(\omega)}e^{j\omega t} d\omega, \quad (\text{B.4})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) [\cos(\omega t + \phi(\omega)) + j \sin(\omega t + \phi(\omega))] d\omega, \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega. \quad (\text{B.6})$$

Основните својства на Фуриевата трансформација се дадени во **Табелата B.1**.

Сигналот $x(t)$ и неговата Фуриева трансформација $X(\omega)$ чинат **Фуриев пар** што се означува како $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$. За Фуриевата трансформација се користи и симболот \mathcal{F} , односно пишуваме $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$, или за ИФТ $\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = x(t)$.

Во **Табелата B.2** се дадени некои позначајни Фуриеви парови.

Табела B.2: Позначајни Фуреови парови.

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$	$2T \frac{\sin(T\omega)}{T\omega}$
$\frac{\sin(\Omega t)}{\pi t}$	$\Pi(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega < \Omega \\ 0 & \omega > \Omega \end{cases}$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

Енергијата на сигналот може да се пресмета преку неговиот спектар со употреба на теоремата на Парсевал³:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(2\pi ft)|^2 df \quad (\text{B.7})$$

* **Важно!** Во **Табелата B.2** забележете дека Фуреовата трансформација на 1 е $2\pi\delta(\omega)$, додека на $\cos(\omega_0 t)$ е $\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$. Ова е во склад со теоремата на Парсевал дека енергијата во спектарот на косинусот помножена со коефициент $1/2\pi$ треба да е еднаква со онаа во временскиот сигнал. Поради тоа двата огледални Диракови импулси имаат двојно помала амплитуда, што не е случај кај константниот сигнал за кој имаме единствен Дираков импулс на фреквенција 0.

Фуреов ред

Ако функцијата $x(t)$ е периодична со периода T , односно основна фреквенција $f_0 = 1/T$, тогаш важи:

$$x(t) \equiv x(t + T), \quad \forall t. \quad (\text{B.8})$$

Ако со $\hat{x}(t)$ го означиме сегментот на $x(t)$ во основниот интервал $t \in [-T/2, T/2]$:

$$\hat{x}(t) = x(t) \cdot \Pi(t), \quad (\text{B.9})$$

каде:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases}, \quad (\text{B.10})$$

тогаш можеме да ја изразиме $x(t)$ како сума од вакви функции $\hat{x}(t)$ поместени за мултили од T :

$$x(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{x}(t - rT). \quad (\text{B.11})$$

Во тој случај во Фуреов домен, функцијата наместо да биде континуирана по кружната фреквенција ω , таа ќе биде еднаква на сума од комплексни синусоиди која се нарекува и **Фуреов ред**:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk \omega_0 t}, \quad (\text{B.12})$$

³Wikipedia – Parseval's Theorem https://en.wikipedia.org/wiki/Parseval%27s_theorem

каде ω_0 е основната кружна фреквенција на сигналот, дадена со:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (\text{B.13})$$

Ова значи дека фреквенциите на комплексните синусоиди претставуваат мултикли од основната кружна фреквенција на сигналот ω_0 . Овие мултикли уште се нарекуваат и **хармоници** или **виши хармоници**, а f_0 и ω_0 се нарекува **основен хармоник**. Притоа коефициентите c_k кои претставуваат амплитуди на комплексните синусоиди можат да се добијат преку:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt. \quad (\text{B.14})$$

Фреквенцискиот спектар на ваков периодичен сигнал $x(t)$ претставува сума од поместени евидистантни Диракови импулси $\delta(\omega)$:

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0). \quad (\text{B.15})$$

\mathcal{Z} трансформација

За да видиме како Фуреовата анализа може да се примени врз дискретни сигнали ќе ја воведеме **\mathcal{Z} трансформацијата** (?) дефинирана со:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad (\text{B.16})$$

каде $x(n)$ е дискретна верзија од континуираната функција $x(t)$:

$$x(n) = x(nT_s), \quad (\text{B.17})$$

$$T_s = \frac{1}{f_s}. \quad (\text{B.18})$$

Тука, f_s е фреквенцијата на семплирање, а T_s е периодата на семплирање.

Инверзната \mathcal{Z} трансформација е дефинирана со:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz, \quad (\text{B.19})$$

каде C е затворена контура во \mathcal{Z} рамнината која го вклучува центарот, а се наоѓа во пределот на конвергенција на трансформацијата $z \in (R_1, R_2)$. Позначајни особини на \mathcal{Z} трансформацијата се дадени во **Табелата В.3**, а позначајни \mathcal{Z} трансформации во **Табелата В.4**.

Фуреова трансформација на дискретен сигнал

Фуреовата трансформација на дискретен сигнал може да се добие од равенката за \mathcal{Z} трансформацијата (B.16) со замената на јадрото $z = e^{-j\omega T_s}$, што се поедноставува на $z = e^{-j\omega}$ за $T_s = 1$:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}, \quad (\text{B.20})$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega. \quad (\text{B.21})$$

Табела B.3: Позначајни својства на \mathcal{Z} трансформација.

Својство	Временски домен	\mathcal{Z} домен
Линеарност	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Поместување	$x(n - n_0)$	$z^{n_0}X(z)$
Конволуција	$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$	$X(z)H(z)$
Мултипликација	$x(n)\Pi(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(\nu)W(z/\nu)\nu^{-1}d\nu$

Табела B.4: Позначајни \mathcal{Z} парови.

$x(n)$	$X(z)$
$\delta(n - n_0)$	z^{-n_0}
$\Pi(n) = \begin{cases} 1, & 0 \geq n < N, \\ 0, & \text{поинаку.} \end{cases}$	$\sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad a < z $

Во овој случај, ја ограничуваме \mathcal{Z} трансформацијата на единечната кружница во z -рамнината опишана со $e^{-j\omega} = \cos(\omega) + j \sin(\omega)$, а дигиталната кружна фреквенција ω има интерпретација на агол во оваа рамнина. Со други зборови Фуреовата трансформација на дискретниот сигнал претставува специјален случај на \mathcal{Z} трансформацијата.

Бидејќи новото јадро $e^{-j\omega}$ е периодична функција со периода 2π , следува дека фреквенцискиот спектар на дискретните сигнали е исто така периодичен со 2π во однос на кружната фреквенција ω . За произволно T_s , спектарот има периода $2\pi/T_s$ во однос на кружната фреквенција ω , односно периодата е $1/T_s = f_s$ во однос на фреквенцијата f , како што беше дискутирано во **Поглавјето ??**.

* **Важно!** Фуреовата трансформација $X(\omega)$ на дискретниот сигнал $x(n)$ е сеуште континуирана функција од ω !

Дискретна Фуреова трансформација

Како што беше случај во аналоген домен, ако еден дискретен сигнал е периодичен со периода N , односно:

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + N), \quad -\infty < n < \infty, \quad (\text{B.22})$$

тогаш $\tilde{x}(n)$ во Фуреов домен ќе биде претставена како дискретна сума од синусоиди:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad (\text{B.23})$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}. \quad (\text{B.24})$$

Ако сега ја земеме Фуреовата трансформација на дискретниот сигнал $x(n)$ дадена во (B.20), која претставува \mathcal{Z} трансформација на сигналот $x(n)$ долж единечната кружница, и истата ја семплираме на еквидистантни фреквенции ω_k дадени со:

$$\omega_k = k \frac{2\pi}{N}, \quad (\text{B.25})$$

тогаш ќе го добијеме изразот за **дискретната Фурьеова трансформација ДФТ**:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad (\text{B.26})$$

кој е еквивалентен со (B.23)! Ова значи дека семплиријаниот спектар што го добиваме со (B.34) соодветствува на сигнал $\tilde{x}(n)$ која претставува периодична верзија од сигналот $x(n)$ со период N , односно важи:

$$x(n) = \tilde{x}(n) \cdot \Pi(n), \quad (\text{B.27})$$

каде

$$\Pi(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < N, \\ 0, & \text{поинаку.} \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

Со други зборови, дискретниот спектар на еден дискретен сигнал $x(n)$ добиен со ДФТ претставува всушност спектар на периодичната верзија на сигналот во која тој се повторува бесконечно со периода еднаква на неговата должина N .

Пример. Да земеме дека должината на дискретниот сигнал е $N = 4$, тогаш спектарот на сигналот добиен со ДФТ ќе биде пресметан за следните вредности на кружната фреквенција ω : $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \pi/2$, $\omega_2 = \pi$ и $\omega_3 = 3\pi/2$. Поради симетричноста на амплитудниот спектар за реални сигнали, што се сведува на симетричност на единечната кружница во однос на реалната оска во z рамнината, примероците ω_1 и ω_3 се огледални слики и се идентични. Поради тоа што тие не носат дополнителна информација, вообичаена практика е огледалните слики да се исфрлат, при што мора да се удвојат соодветните примероци кои остануваат за да се зачува валидноста на теоремата на Парсевал. По исфрлањето, последниот примерок од спектарот ќе биде за кружна фреквенција $\omega_3 = \pi$, односно, за произволно T_s , за фреквенција $f = f_s/2$. Така, конечната скратена верзија на ДФТ спектарот би се состоела од: $X(0)$, $2X(\omega_1)$ и $X(\pi)$.

За произволно T_s примероците ги земаме во кружните фреквенции:

$$\omega_k = k \frac{2\pi}{NT_s}, \quad (\text{B.29})$$

односно:

$$f_k = k \frac{1}{NT_s} = k \frac{f_s}{N}. \quad (\text{B.30})$$

Резолуцијата на спектарот добиен со ДФТ:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}, \quad (\text{B.31})$$

е одредена од должината на сигналот N . За произволно T_s таа ќе биде:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{NT_s}, \quad (\text{B.32})$$

односно:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}. \quad (\text{B.33})$$

За зголемување на резолуцијата на спектарот добиен со ДФТ постојат две методи: *i*) да се земат повеќе примероци на сигналот N , и *ii*) да се додадат N_0 нули на крајот од сигналот. Последново ќе ја зголеми резолуцијата на семплирање во јадрото во (B.34), без да ги смени границите на сумата:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N+N_0}n}. \quad (\text{B.34})$$

Сепак, добиената резолуција нема да донесе нова информација во ДФТ спектарот, туку само ќе генерира интерполирана верзија на оригиналниот спектар со N точки.

Соодветно **инверзната дискретна Фуриеова трансформација (ИДФТ)** е дадена со изразот:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}. \quad (\text{B.35})$$

За пресметка на ДФТ во праксата се користат алгоритми за нејзино брзо пресметување чија пресметковна сложеност е пропорционална со $N \log N$, кои се нарекуваат **брза Фуриеова трансформација (БФТ)** (⁴).⁴ Бидејќи БФТ работи брзо само за должини на сигналот од $N = 2^M$, вообичаена пракса е додавањето нули на сигналот за да се задоволи овој услов.

Проценка на амплитудата на сигналот од нејзиниот спектар

За да видиме колкава е амплитудата на ФТ спектарот на еден дискретен сигнал ќе го пресметаме спектарот на една простоперiodична низа $x(n)$ со кружна фреквенција ω_0 :

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n) = A \cos(2\pi f_0 n). \quad (\text{B.36})$$

Спектарот на овој сигнал е даден со равенството:

$$X(\omega) = \frac{A}{2} 2\pi (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)). \quad (\text{B.37})$$

Ако земеме отсечок на овој сигнал со должина од N примероци и ја пресметаме континуираната ФТ, тоа е еквивалентно на пресметка на ФТ врз производот на $x(n)$ со правоаголен прозорец $w(n) = \Pi(n)$ со траење $-N/2 \leq n < N/2$. Според својството на Фуриевата трансформација според кое множењето на два сигнали во временски домен претставува нивна конволуција во Фуриев домен, имаме:

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) W(\omega - \Omega) d\Omega \quad (\text{B.38})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} 2\pi (\delta(\Omega + \omega_0) + \delta(\Omega - \omega_0)) W(\omega - \Omega) d\Omega \quad (\text{B.39})$$

$$= \frac{A}{2} (W(\omega + \omega_0) + W(\omega - \omega_0)), \quad (\text{B.40})$$

каде $W(\omega)$ е ФТ на прозорецот дадена со:

$$W(\omega) = \frac{\sin(N\frac{\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}. \quad (\text{B.41})$$

Според Лопиталовото правило⁵, кое вели дека во случаи кога за гранична вредност на функција се добива неопределено израз како $0/0$ или ∞/∞ , тогаш гранична вредност постои и таа се наоѓа преку изводите на двете функции, односно:

$$W(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(N\frac{\omega}{2})}{\sin \frac{\omega}{2}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin'(N\frac{\omega}{2})}{\sin' \frac{\omega}{2}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{N \cos(N\frac{\omega}{2})}{\cos \frac{\omega}{2}} = N \quad (\text{B.42})$$

Бидејќи амплитудата на спектарот на правоаголниот прозорец за $\omega \neq 0$ е мала во споредба со N за $\omega = 0$, спектарот на $\hat{x}(n)$ за фреквенција ω_0 ќе биде:

$$\hat{X}(\omega_0) = \frac{A}{2} (W(2\omega_0) + W(0)) \approx \frac{A}{2} N \quad (\text{B.43})$$

⁴Wikipedia – Fast Fourier transform (FFT) https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform

⁵Википедија – Лопиталово правило https://mk.wikipedia.org/wiki/Лопиталово_правило

B.2 Фуриеова трансформација на временски отсекоци ФТВО

Главниот недостаток на Фуриеовата трансформација е тоа што таа не ни дава никаква временска информација за сигналот кој што го анализираме. Поради нестационарната природа на биомедицинските сигнали, Фуриеовата анализа на целиот сигнал може да ни каже некои општи карактеристики за сигналот, но не може да ни ги покаже деталите. На пример, вкупниот спектар на еден музички сигнал може да ни каже дали во него има изразен бас преку анализата на енергијата на сигналот во ниските фреквенции, но ваквиот вкупен спектар не може да ни каже колку е брз ритамот на музичкиот сигнал. Оттаму потребата за временска локализација на спектралната информација што ја нуди **Фуриеовата трансформација на временски отсекоци ФТВО**.



§ Дополнително. Унгарскиот електроинженер **Денеш Габор**⁶ (1900–1979) е оној кој во 1946 ја адаптира Фуриеовата трансформација за временска анализа и ја добива ФТВО. Тој е и изумителот на холографијата за што добива Нобелова награда по Физика во 1971. Една од неговите најпознати изјави е: „Најдобриот начин да се предвиди иднината е таа да се создаде.“

ФТВО го анализира спектарот во низа од кратки временски отсекоци наречени **рамки**, земени од биомедицинскиот сигнал со помош на функција за селекција $w(n)$ која се нарекува **прозорец**, според равенството (B.44). Тука со i е означен редниот број на рамката, N е големината на прозорецот, а H е големината на скокот кој го прави прозорецот долж сигналот од една рамка до друга. Оваа метода на анализа на нестационарните сигнали преку земање на отсекоци со лизганье на прозорец по нивната должина се нарекува и **метода на прозорци**.

$$X_i(k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n)x(n + i \cdot H)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.44})$$

На овој начин наместо еден вкупен спектар, се добива низа од спектри од сигналот пресметани за различни временски моменти во избрана нивна околина.

Видови на прозорци

Претходната анализа исто така го илустрира фактот дека спектарот на прозорецот има критично влијание за точната претстава на спектарот на биомедицинските сигнали. Поради оваа причина дизајнирани се низа од различни видови на прозорци, секој со различни спектрални карактеристики, а со тоа и со различна примена.⁷ Сите тие во временски домен можат да се претстават како сума од косинуси, а во спектрален домен како сума од $\text{sinc}(n)$ функции.

Во ФТВО анализата на биомедицинските сигнали најупотребувани прозорци (?) се:

- **Правоаголен прозорец**

$$\text{rect}(n) = 1, \quad -N/2 \leq n \leq N/2 \quad (\text{B.45})$$

$$\text{Rect}(k) = \text{sinc}(k) \quad (\text{B.46})$$

- **Хан прозорец**

$$\text{hann}(n) = 0,5 + 0,5 \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right), \quad -N/2 \leq n \leq N/2 \quad (\text{B.47})$$

$$\text{Hann}(k) = 0,5 \text{sinc}(k) + 0,25 (\text{sinc}(k-1) + \text{sinc}(k+1)) \quad (\text{B.48})$$

⁶Wikipedia: Dennis Gabor. https://en.wikipedia.org/wiki/Dennis_Gabor

⁷Wikipedia: Windowing function https://en.wikipedia.org/wiki/Window_function

- **Хаминг прозорец**

$$hamm(n) = 0,54 + 0,46 \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right), \quad -N/2 \leq n \leq N/2 \quad (\text{B.49})$$

- **Блекман прозорец**

$$black(n) = 0,42 - 0,5 \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right) + 0,080,5 \cos\left(4\pi \frac{n}{N}\right), \quad -N/2 \leq n \leq N/2 \quad (\text{B.50})$$

- **Блекман-Харис прозорец**

$$blackharr(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^3 a_i \cos\left(2i\pi \frac{n}{N}\right), \quad -N/2 \leq n \leq N/2 \quad (\text{B.51})$$

каде

$$a_0 = 0,35876, a_1 = 0,48829, a_2 = 0,14128, a_3 = 0,01168 \quad (\text{B.52})$$

Карактеристики на прозорците

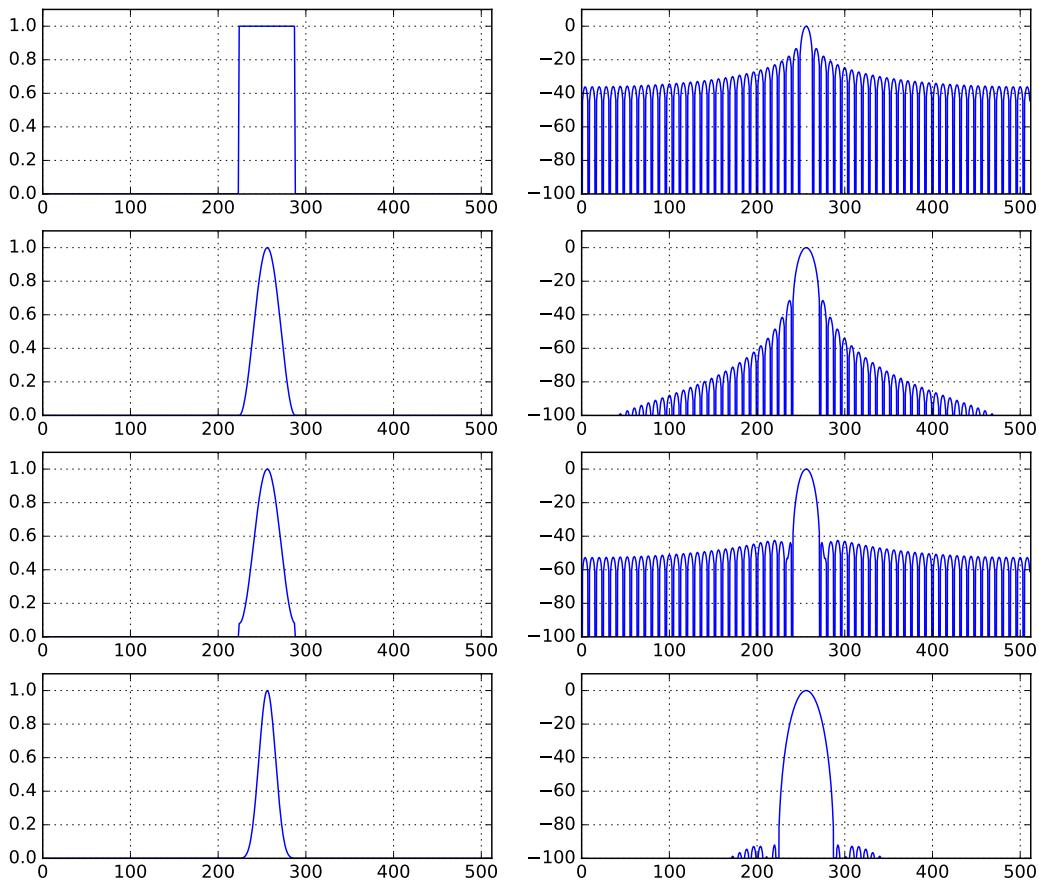
Најважните спектрални карактеристики на прозорците се **ширината на главното крило** и **амплитудата на најголемото споредно крило**. Идеалниот прозорец има бескрајно тесно главно крило и нема споредни крила. Во реалноста станува збор за компромис помеѓу овие два параметри. Различните видови на прозорци можеме да ги генерираме со функцијата `get_window` од модулот `scipy.signal`. Во следниот код тоа е направено за правоаголниот прозорец `boxcar`. Притоа, амплитудните спектри се нормализираат до 0 dB.

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from scipy import fftpack as fft
from scipy import signal as sig

m = 512 # околина за анализа
n = 64 # должина на прозорец
m_half = m / 2
n_half = n / 2
w = np.zeros(m)
w[m_half-n_half : m_half+n_half] = sig.get_window('boxcar', n)
w_spec = fft.fft(w, m)
w_amp = np.abs(w_spec) / n
eps = 1e-9
w_amp[w_amp < eps] = eps
w_log = 20 * np.log10(w_amp)
w_log = w_log - np.max(w_log)
w_shift = fft.fftshift(w_log)

plt.figure(figsize=(12, 5))
plt.subplot(121)
plt.plot(w)
plt.axis([0, m, 0, 1]) # [xmin, xmax, ymin, ymax]
plt.grid()
plt.subplot(122)
plt.plot(w_shift)
plt.grid()
plt.axis([0, m, -100, 0])
```

Притоа за `eps` е земено произволно мала вредност со цел да ја избегнеме пресметката на логаритамот за вредности на спектарот близки до нулата. Вистинската нумеричка прецизност за `float64` може да се добие со Нуимпай наредбата `np.finfo(float).eps` и таа изнесува $2,220446049250313 \cdot 10^{-16}$.



Сл. В.1: Споредба на временскиот и спектрален облик на четири најчесто користени прозорци (од горе надолу): правоаголен, Ханов, Хамингов и Блекман-Харисов.

Различните прозорци и нивните амплитудни спектри генериирани со овој код се прикажани на Сл. В.1. Може да се види дека правоаголниот прозорец иако е добар за процесирање во временски домен има најлоши спектрални карактеристики во поглед на амплитудата на страничните крила. Од друга страна, најмало влијание на страничните крила имаме кај Блекман-Харис прозорецот, но тој за сметка на тоа има најшироко главно крило. Хановиот и Хаминговиот прозорец имаат иста широчина на главното крило на различно распоредена енергија во страничните крила.

Додаток Г

Филтри

Филтрите претставуваат системи чија примарна намена е обликувањето на спектарот на биомедицинските сигнали. Аналогни и дигитални филтри се потребни за ограничување на спектарот во АД конверзијата, а играат клучна улога во отстранувањето на несаканите електромагнетни шумови. Последново е особено критично кај биомедицинските сигнали поради нивната мала амплитуда. Аналогните филтри се реализираат со помош на збир на пасивни и активни електронски елементи, чија нагоденост е неопходна, но скапа. Од друга страна, реализацијата сложени филтерски структури во дигитален домен е многу поекономична, а нумеричките операции на кои се базираат дигиталните филтри не се подложни на временски и температурни влијанија.

Г.1 Основи на дигиталните филтри

Дигиталните филтри претставуваат **линеарни и временски инваријантни (ЛВИ)**, односно **линеарни и инваријантни на поместување дискретни системи**¹. Овие две особини изискуваат ако за даден влезен сигнал $x(n)$ системот го дава излезниот сигнал $y(n) = H\{x(n)\}$, тогаш мора да важи (?):

$$H\left\{\sum_{m=1}^M a_m x_m(n)\right\} = \sum_{m=1}^M a_m y_m(n), \quad \forall a_m \text{ -- линеарност и} \quad (\Gamma.1)$$

$$H\{x(n-k)\} = y(n-k), \quad \forall k \text{ -- инваријантност на поместување.} \quad (\Gamma.2)$$

Секој ЛВИ систем е во потполност описан од неговиот **импулсен одсив** $h(n)$ односно неговата **преносна функција** во z -домен $H(z)$, или пак конечно од неговата **фрејквенциска преносна функција** во Фуреов домен $H(\omega)$. Како и за останатите ЛВИ системи, излезниот сигнал на дигиталните филтри $y(n)$ за даден влезен сигнал $x(n)$ може да се добие во трите домени со следните релации (?):

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m), \quad (\Gamma.3)$$

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad (\Gamma.4)$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega). \quad (\Gamma.5)$$

За системот да биде остварлив, нужно е тој да биде **каузален**, односно да важи:

$$h(n) \equiv 0, \quad n < 0. \quad (\Gamma.6)$$

¹Linear time-invariant (LTI), односно linear shift-invariant (LSI) системи.

За системот пак да биде стабилен потребен и доволен услов е да важи:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (\Gamma.7)$$

Типови филтри според должината на импулсниот одсив

Според импулсниот одсив филтрите ги делиме на две основни групи и тоа филтри со:

- **конечен импулсен одсив (ФИР²)** и
- **бесконечен импулсен одсив (ИИР³)**.

ФИР филтрите имаат одредени предности над ИИР филтрите, а тоа се пред сè нивната стабилност и нивната линеарна фазна карактеристика. ИИР филтрите пак можат да постигнат подобра амплитудна фреквенциска карактеристика за помал ред на филтерот.

Сите ЛВИ системи кои се практично применливи како дигитални филтри можат да се описат со **диференцната равенка**:

$$y(n) = \sum_{i=0}^p b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^q a_i y(n-i). \quad (\Gamma.8)$$

Според ова равенство секој одбирок на излезниот сигнал $y(n)$ зависи од p претходни примероци на влезниот сигнал и q минати примероци од излезниот, односно во системот има повратна врска, па велиме дека тој е **рекурзивен**. ИИР филтрите секогаш се реализираат со повратна врска, од каде произлегуваат и проблемите со нивната стабилност. ФИР филтрите можат да бидат реализирани и со повратна врска, но најчесто се без неа. Преносната функција на системот описан од диференцната равенка можеме да ја добиеме од (Г.8):

$$y(n) + \sum_{i=1}^q a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^p b_i x(n-i), \quad (\Gamma.9)$$

$$\left(1 + \sum_{i=1}^q a_i z^{-i} \right) Y(z) = \sum_{i=0}^p b_i z^{-i} X(z), \quad (\Gamma.10)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^p b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^q a_i z^{-i}}. \quad (\Gamma.11)$$

Тука имплицитно претпоставуваме дека $a_0 = 1$. Во праксата овој услов секогаш се обезбедува преку нормализирање на останатите a коефициенти. Бројот на коефициенти во повратната врска на ИИР филтрите вообичаено се зема да е еднаков со бројот на коефициенти во директната врска. Па, важи:

$$q = p = N, \quad (\Gamma.12)$$

каде со N се означува **редот на филтерот**. Преносната карактеристика $H(z)$ исто така може да биде представена преку нејзините **полови** и **нули** во z -рамнината:

$$H(z) = \frac{A \prod_{i=1}^p (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^q (1 - d_i z^{-1})}. \quad (\Gamma.13)$$

Типови филтри според амплитудната карактеристика

Фреквенциската карактеристика на филтрите ја добиваме директно од преносната карактеристика со замената $z = e^{j\omega}$:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^p b_i e^{-ji\omega}}{1 + \sum_{i=1}^q a_i e^{-ji\omega}}. \quad (\Gamma.14)$$

²Од англиското Finite impulse response.

³Од англиското Infinite impulse response.

Таа може дополнително да се изрази преку нејзината амплитуда и фаза како:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)} = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}, \quad (\text{Г.15})$$

каде $A(\omega)$ е амплитудната **фреквенциска карактеристика** на филтерот, додека $\phi(\omega)$ е неговата **фазна карактеристика**. Според амплитудната карактеристика разликуваме пет типови на филтри и тоа:

- **нископропусни (НП),**
- **високопропусни (ВП),**
- **пропусни на опсег (ПО),**
- **непропусни на опсег (НО)** и
- **сепропусни (СП).**⁴

Кога фазната карактеристика на филтерот $\phi(\omega)$ е линеарна тогаш групното доцнење $\tau(\omega)$ е константно:

$$\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \text{const.} \quad (\text{Г.16})$$

Ова значи дека филтерот нема да внесе фазни изобличувања. Со тоа, компонентите на сигналот на различни фреквенции нема да бидат различно задоцнети па ќе биде задржана нивната компактност во излезниот сигнал, односно нема да дојде до нивно расејување. Ова е посебно важно во обработката на биомедицинските сигнали, па затоа за нивно филтрирање вообичаено се употребуваат ФИР филтри.

Типови ФИР филтри со линеарна фазна карактеристика

Строго линеарната фазна карактеристика не може да биде постигнато со ИИР или со аналогните филтри (?), туку само со ФИР филтри чив импулсен одсив е симетричен во однос на средниот примерок $h(\frac{N-1}{2})$:

$$h(n) = h(N - 1 - n), \quad (\text{Г.17})$$

или пак кога е антисиметричен во однос на него:

$$h(n) = -h(N - 1 - n). \quad (\text{Г.18})$$

Тука редот на филтерот N ја дава и должината на импулсниот одсив, што не е случај кај ИИР филтрите.

Постојат четири типови на ФИР филтри со линеарна фазна карактеристика:

Тип I – Симетричен импулсен одсив, N непарен

Импулсниот одсив на овој тип на филтри можеме да го запишеме како:

$$h(n) = h(0)\delta(n) + h(1)\delta(n - 1) + \cdots + h(\frac{N-1}{2})\delta(n - \frac{N-1}{2}) + \cdots \quad (\text{Г.19})$$

$$\cdots + h(1)\delta(n - (N-2)) + h(0)\delta(n - (N-1)), \quad (\text{Г.20})$$

па за преносната функција имаме:

$$H(z) = h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{i=0}^{\frac{N-3}{2}} h(i) \left(z^{-i} + z^{-(N-1-i)} \right) \quad (\text{Г.21})$$

$$= z^{-\frac{N-1}{2}} \left(h(\frac{N-1}{2}) + \sum_{i=0}^{\frac{N-3}{2}} h(i) \left(z^{-i+\frac{N-1}{2}} + z^{i-\frac{N-1}{2}} \right) \right) \quad (\text{Г.22})$$

$$= z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad (\text{Г.23})$$

⁴Овој тип на филтри наоѓа примена кај системите за синтеза на дигитално ехо и реверберација.

каде:

$$a(n) = \begin{cases} h\left(\frac{N-1}{2}\right), & n = 0 \\ 2h\left(-n + \frac{N-1}{2}\right) & n = 1, 2, \dots, \frac{N-3}{2} \end{cases}. \quad (\Gamma.24)$$

Од (Г.23) може да се пресмета фреквенциската карактеристика на филтерот:

$$H(\omega) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos(n\omega). \quad (\Gamma.25)$$

Тип II – Симетричен импулсен одсив, N парен

Следејќи ја истата постапка како за ФИР филтерот од тип I можеме да дојдеме до фреквенциската карактеристика на типот II:

$$H(\omega) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} b(n) \cos((n - \frac{1}{2})\omega), \quad (\Gamma.26)$$

каде:

$$b(n) = 2h\left(-n + \frac{N}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}. \quad (\Gamma.27)$$

Од (Г.26) може да се види дека без оглед на вредноста на коефициентите на филтерот $b(n)$ неговата фреквенциска карактеристика ќе биде 0 за $\omega = \pm\pi$. Поради тоа, овој тип на филтер не може да се употреби како високопропусен или непропусник на опсег.

Тип III – Антисиметричен импулсен одсив, N непарен

Фреквенциската карактеристика на типот III е:

$$H(\omega) = e^{-j(\omega\frac{N-1}{2} - \frac{\pi}{2})} \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin(n\omega), \quad (\Gamma.28)$$

каде:

$$c(n) = 2h\left(-n + \frac{N-1}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}. \quad (\Gamma.29)$$

Од (Г.28) следи дека без оглед на вредноста на $c(n)$ неговата фреквенциска карактеристика ќе биде 0 за $\omega = 0$ и за $\omega = \pm\pi$. Поради тоа, овој тип на филтер може да се употреби само како пропусник на опсег.

Тип IV – Антисиметричен импулсен одсив, N парен

Фреквенциската карактеристика на овој филтер е:

$$H(\omega) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin((n - \frac{1}{2})\omega), \quad (\Gamma.30)$$

каде:

$$d(n) = 2h\left(-n + \frac{N}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}. \quad (\Gamma.31)$$

Од (Г.30) следи дека фреквенциска карактеристика ќе биде 0 за $\omega = 0$, па овој тип на филтер не може да се употреби како нископропусен или пропусник на опсег.

Постојат различни пристапи за **дизајн на дигитални филтри**. Трите најпознати методи за дизајн на ФИР филтри се:

- **метода на прозорци,**

- дизајн заснован на DFT,
- оптимален дизајн на еднаквобранести филтри.

Од друга страна за дизајн на ИИР филтри најпознати методи се:

- Батерворт,
- Бесел,
- Чебишев,
- Елиптичен.

Литература

S. Serge Barold. Willem einthoven and the birth of clinical electrocardiography a hundred years ago. *Cardiac Electrophysiology Review*, 7(1):99–104, 2003.

J.D. Enderle, J.D. Bronzino, and S.M. Blanchard. *Introduction to Biomedical Engineering*. Academic Press series in biomedical engineering. Elsevier Academic Press, 2005. ISBN 9780122386626. URL https://books.google.mk/books?id=_yV3DqIU-tkC.

Ana B Porto-Pazos, Noha Veiguela, Pablo Mesejo, Marta Navarrete, Alberto Alvarellos, Oscar Ibáñez, Alejandro Pazos, and Alfonso Araque. Artificial astrocytes improve neural network performance. *PloS one*, 6(4):e19109, 2011.

Gael Varoquaux, Valentin Haenel, Emmanuelle Gouillart, Zbigniew Jędrzejewski-Szmek, Ralf Gommers, Fabian Pedregosa, Olav Vahtras, Pierre de Buyl, Gert-Ludwig Ingold, Nicolas P. Rougier, and et al. *scipy-lecture-notes*: Release 2015.1 beta, 2015. URL <http://www.scipy-lectures.org/>.

Софija Богданов, Момчило и Богданова. *Дигитално процесирање на сигнали*. Електротехнички факултет, Скопје, 1997. ISBN 9989-630-15-1.

Доне Гершановски. *Предавања по биофизика за општа медицина*.