

UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

# Appunti di Algoritmi e Strutture Dati

**a.a. 2017/2018**

Autore:  
**Timoty Granziero**

Repository:  
<https://github.com/Vashy/ASD-Notes>

8 giugno 2019

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Problem Solving . . . . .	1
1.2	Analisi . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Ordinamento</b>	<b>3</b>
2.1	Problema dell'Ordinamento (Sorting) . . . . .	3
2.2	Insertion Sort . . . . .	3
2.2.1	Correttezza di Insertion Sort . . . . .	5
2.2.2	Complessità di Insertion Sort . . . . .	6
2.3	Divide et Impera . . . . .	8
2.4	Merge Sort . . . . .	8
2.4.1	Approfondimento sull'Induzione . . . . .	12
2.4.2	Complessità di Merge Sort . . . . .	12
2.5	Confronto tra Insertion Sort e Merge Sort . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Complessità Asintotica</b>	<b>16</b>
3.1	Notazione Asintotica . . . . .	16
3.1.1	Limite Asintotico Superiore . . . . .	17
3.1.2	Limite Asintotico Inferiore . . . . .	19
3.1.3	Limite Asintotico Stretto . . . . .	20
3.2	Metodo del Limite . . . . .	21
3.3	Proprietà Generali . . . . .	22
3.4	Complessità di un Problema . . . . .	23
3.4.1	Esempio: limite inferiore per ordinamento basato su scambi di elementi contigui . . . . .	23
3.5	Soluzione di Ricorrenze . . . . .	24
3.5.1	Metodo di Sostituzione . . . . .	24
3.5.2	Master Theorem . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Ordinamento (cont.)</b>	<b>35</b>
4.1	Heap Sort . . . . .	35
4.1.1	Max Heap . . . . .	37
4.1.2	Code con Priorità . . . . .	40
4.2	Quick Sort . . . . .	43
4.2.1	Correttezza di Quick Sort . . . . .	44
4.2.2	Complessità di Quick Sort . . . . .	45
4.3	Quick Sort a Tre Partizioni . . . . .	47
4.4	Limite Inferiore . . . . .	48
4.5	Albero di Decisione . . . . .	48

4.6	Counting Sort . . . . .	49
4.6.1	Proprietà di Stabilità . . . . .	51
4.7	Radix Sort . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Tabelle Hash</b>	<b>53</b>
5.1	Chaining . . . . .	55
5.1.1	Hashing uniforme semplice . . . . .	55
5.1.2	Funzioni Hash . . . . .	57
5.1.3	Hashing Universale . . . . .	58
5.2	Open Addressing . . . . .	59
5.2.1	Hashing Uniforme . . . . .	59
5.2.2	Funzioni di Hash . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Alberi</b>	<b>63</b>
6.1	Alberi Binari di Ricerca . . . . .	63
6.1.1	Visita simmetrica . . . . .	64
6.1.2	Ricerca . . . . .	64
6.1.3	Successore di un nodo . . . . .	66
6.1.4	Inserimento . . . . .	67
6.1.5	Eliminazione di un nodo . . . . .	67
6.2	Red-Black Trees . . . . .	69
6.2.1	Complessità Algoritmi RB-Trees . . . . .	71
6.2.2	RB-Insert e RB-Delete . . . . .	71
6.3	Arricchimento di Strutture Dati . . . . .	81
6.3.1	Statistiche d'ordine . . . . .	81
6.3.2	Teorema dell'aumento degli RB-Trees . . . . .	85
6.3.3	Interval Trees . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Programmazione Dinamica</b>	<b>88</b>
7.1	Critica al D&C . . . . .	88
7.2	Memoizzazione . . . . .	90
7.3	Problemi di Ottimizzazione . . . . .	92
7.4	Problemi su Stringhe . . . . .	93
7.5	Problema della LCS . . . . .	95
7.5.1	Proprietà di Sottostruttura Ottima . . . . .	96
7.5.2	Ricorrenza sui Costi . . . . .	99

# 1 Introduzione

## 1.1 Problem Solving

1. Formalizzazione del problema;
2. Sviluppo dell'**algoritmo** (focus del corso);
3. Implementazione in un programma (codice).

**Algoritmo** Sequenza di passi elementari che risolve il problema.

Input  $\rightarrow$  **Algoritmo**  $\rightarrow$  Output

*Dato un problema, ci sono tanti algoritmi per risolverlo.*

e.g.<sup>1</sup> Ordinamento dei numeri di una Rubrica. L'idea è quella di trovare tutte le permutazioni di ogni numero.

30 numeri: *complessità*  $30! \cong 2 \times 10^{32} ns \Rightarrow$   
 $3^{19}$ anni (con  $ns$  = nanosecondi)

**std::vector** È un esempio nel C++ delle ragioni per cui si studia questa materia. Nella documentazione della STL, sono riportati i seguenti:

- **Random access**: complessità  $O(1)$ ;
- **Insert**: complessità  $O(1)$  ammortizzato.

Il **random access** è l'accesso a un elemento casuale del **vector**.  $O(1)$  implica che l'accesso avviene in tempo costante (pari a 1).

Per **insert** si intende l'inserimento di un nuovo elemento in coda. Avviene in tempo  $O(1)$  ammortizzato: questo perchè ogni N inserimenti, è necessario un resize del vector e una copia di tutti gli elementi nel nuovo vettore (questa procedura è nascosta al programmatore).

---

<sup>1</sup>For the sake of example.

## 1.2 Analisi

- Tempo di esecuzione;
- Spazio (memoria);
- Correttezza;
- Manutenibilità.

### Approfondimento sul tempo di esecuzione $T(n)$

- *P Problems*: complessità polinomiale. L'algoritmo è trattabile
- *NP Complete*: problemi NP completi. **e.g.**: Applicazione sugli algoritmi di sicurezza. Si basano sull'assunzione che per essere risolti debbano essere considerate tutte le soluzioni possibili.
- *NP Problems*: problemi con complessità (ad esempio) esponenziale/fattoriale. Assolutamente non trattabili.

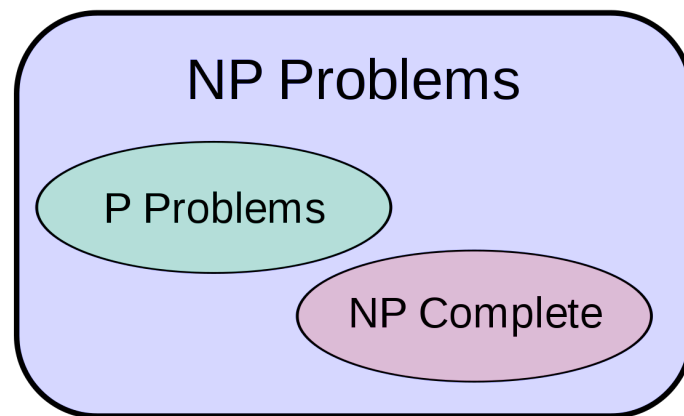


Figura 1: Complessità  $T(n)$ .

## 2 Ordinamento

### 2.1 Problema dell'Ordinamento (Sorting)

Input: sequenza di numeri

$$a_0 a_1 \dots a_n;$$

Output: permutazione

$$a'_0 a'_1 \dots a'_n$$

tale che

$$a'_0 \leq a'_1 \leq \dots \leq a'_n$$

Vedremo due algoritmi:

- InsertionSort;
- MergeSort.

### 2.2 Insertion Sort

**Insertion Sort** un algoritmo di **sorting incrementale**. Viene applicato naturalmente ad esempio quando si vogliono ordinare le carte nella propria mano in una partita a scala 40: si prende ogni carta a partire da sinistra, e la si posiziona in ordine crescente.

**Astrazione** Prendiamo ad esempio il seguente array:

5	2	8	4	7
---	---	---	---	---

Partiamo dal primo elemento: 5. È già ordinato con se stesso, quindi procediamo con il secondo elemento.

Confronto il numero 2 con l'elemento alla sua sinistra:

$2 \geq 5$ ? No, quindi lo inverte con l'elemento alla sua sinistra, come segue

2	5	8	4	7
---	---	---	---	---

 Key: 

8
---

La key analizzata è 8.

$8 \geq 5$ ? Sì, quindi è ordinato in modo corretto.

2	5	8	4	7
---	---	---	---	---

 Key: 

4
---

La key analizzata è 4.

$4 \geq 8$ ? No, quindi lo sposto a sinistra invertendolo con 8.

$4 \geq 5$ ? No, lo sposto a sinistra invertendolo con 5.

$4 \geq 2$ ? Sì, quindi è nella posizione corretta.

2	4	5	8	7
---	---	---	---	---

      Key: 

7
---

Key analizzata 7.

$7 \geq 8$ ? No, lo sposto a sinistra invertendolo con 8.

$7 \geq 5$ ? Sì, è nella posizione corretta.

Ottengo l'array ordinato:

2	4	5	7	8
---	---	---	---	---

**Algoritmo** Passiamo ora all'implementazione dell'algoritmo, con uno pseudocodice similare a Python<sup>1</sup>

**Input:**  $A[1, \dots, n]$ ,  $A.length$ .

È noto che:  $A[i] \leq key < A[i + 1]$

**Pseudocodice** Segue lo pseudocodice dell'InsertionSort.

INSERTIONSORT( $A$ )

```

1   $n = A.length$ 
2  for  $j = 2$  to  $n$  // il primo elemento è già ordinato
3       $key = A[j]$  //  $A[1..j - 1]$  ordinato
4       $i = j - 1$ 
5      while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
6           $A[i + 1] = A[i]$ 
7           $i = i - 1$ 
8       $A[i + 1] = key$ 
```

Quando il **while** termina, ci sono due casi:

- $i = 0$ : tutti gli elementi prima di  $j$  sono maggiori di **key**; **key** va al primo posto (1);
- $(i > 0)$  and  $(A[i] \leq key)$ :  $A[i+1] = key$ .

### 2.2.1 Correttezza di Insertion Sort

**for**  $A[1..j-1]$  è ordinato e contiene gli elementi in  $(1, j-1)$  iniziali.

**while**  $A[1..i]A[i+2..j]$  ordinato e  $A[i+2..j] > key$ .

In uscita abbiamo:

- $j = n+1$ ;
- $A[1..n]$  ordinato, come da invariante: vale  $A[1..j-1]$  ordinato, e  $j$  vale  $n+1$ .

---

<sup>1</sup>**ATTENZIONE:** verranno usati array con indici che partono da 1.



### 2.2.2 Complessità di Insertion Sort

**Assunzione** Tutte le istruzioni richiedono un tempo costante.

Rivediamo l'algoritmo:

INSERTIONSORT( $A$ )

```

1   $n = A.length$ 
2  for  $j = 2$  to  $n$  // il primo elemento è già ordinato
3       $key = A[j]$  //  $A[1 \dots j-1]$  ordinato
4       $i = j - 1$ 
5      while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
6           $A[i+1] = A[i]$ 
7           $i = i - 1$ 
8       $A[i+1] = key$ 
```

Diamo il nome  $c_0$  alla chiamata della procedura, InsertionSort( $A$ );  $A$  ogni riga numerata, diamo il nome  $c_1, c_2, \dots, c_8$ <sup>1</sup>.

Vediamo il **costo** di ogni istruzione:

$$c_0 \rightarrow 1$$

$$c_1 \rightarrow 1$$

$$c_2 \rightarrow n$$

$$c_3 \rightarrow (n-1)$$

$$c_4 \rightarrow (n-1)$$

$$c_5 \rightarrow \sum_{j=2}^n t_j + 1$$

$$c_6, c_7 \rightarrow \sum_{j=2}^n t_j$$

$$c_8 \rightarrow (n-1)$$

$$T^{IS}(n) = c_0 + c_1 + c_2 n + (c_3 + c_4 + c_8)(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^n (t_j + 1) + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^n t_j$$

---

<sup>1</sup>( $c_1$  corrisponde alla riga 1,  $c_2$  alla riga 2 e così via).

$t_j$  dipende, oltre che da  $n$ , dall'istanza dell'array che stiamo considerando. È chiaro che questo calcolo non dà indicazioni precise sull'effettiva complessità dell'algoritmo.

Andiamo ad analizzare i 3 possibili casi:

- a) Caso migliore (2.2.2)
- b) Caso peggiore (2.2.2)
- c) Caso medio (2.2.2)

**Caso migliore**  $\rightarrow A$  ordinato  $\Rightarrow t_j = 0 \forall j$

La **complessità** diventa:

$$T_{min}^{IS}(n) = c_0 + c_1 + c_2n + (c_3 + c_4 + c_5 + c_8)(n - 1) = an + b \approx n$$

Ossia, si comporta come  $n$ . Il **caso migliore non** è interessante, visto che è improbabile si presenti.

**Caso peggiore**  $\rightarrow A$  ordinato in senso inverso  $\Rightarrow \forall j \ t_j = j - 1$

La **complessità** diventa:

$$T_{max}^{IS}(n) = c_0 + c_1 + c_2n + (c_3 + c_4 + c_8)(n - 1) + c_5 \sum_{j=2}^n j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^n (j - 1)$$

Per valutare il costo di  $\sum_{j=2}^n j$  e di  $\sum_{j=2}^n (j - 1)$ , usiamo la **somma di Gauss**:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

Otteniamo:

$$\sum_{j=2}^n j = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

$$\sum_{j=2}^n (j-1) = \sum_{i=1}^n n = \frac{(n-1)n}{2}$$

Per finire, ricalcoliamo  $T_{max}^{IS}(n)$

$$T_{max}^{IS}(n) = a'n^2 + b'n + c' \approx n^2$$

**Caso medio** Il caso medio è **difficile da calcolare**, e in una considerevole parte dei casi, coincide con il caso peggiore.

Comunque, l'idea è la seguente:

$$\frac{\sum_{\text{perm. di input}} T^{IS}(p)}{n!} \approx n^2 \quad \text{posso pensare che } t_j \cong \frac{j-1}{2}$$

## 2.3 Divide et Impera

Un algoritmo di sorting **divide et impera** si può suddividere in 3 fasi:

**divide** divide il problema dato in sottoproblemi più piccoli;

**impera** risolve i sottoproblemi:

- ricorsivamente;
- la soluzione è nota (e.g. array con un elemento);

**combina** compone le soluzioni dei sottoproblemi in una soluzione del problema originale.

## 2.4 Merge Sort

**Merge Sort**<sup>1</sup> è un esempio di algoritmo **divide et impera**. Andiamo ad analizzarlo.

---

<sup>1</sup>Si consiglia di dare uno sguardo all'algoritmo anche da altre fonti, poichè presentarlo graficamente in  $\text{\LaTeX}$ , come è stato visto a lezione, non è facile.

**Astrazione** Consideriamo il seguente array A.

5	2	4	7	1	2	3	6
---	---	---	---	---	---	---	---

Lo divido a metà, ottenendo due parti separate.

5	2	4	7
---	---	---	---

1	2	3	6
---	---	---	---

Consideriamo il primo, ossia A[1..4] (A originale). Divido anche questo a metà.

5	2
---	---

4	7
---	---

Divido nuovamente a metà, ottenendo:

5
---

2
---

5 e 2 sono due blocchi già ordinati. Scelgo il minore tra i due e lo metto in prima posizione, mentre l'altro in seconda posizione, ottenendo un blocco composto da 2 e 5.

Riprendo con il blocco composto da 4 e 7. Lo divido in due blocchi da un elemento. Faccio lo stesso procedimento fatto per 2 e 5: metto in prima posizione 4 e in seconda posizione 7. La situazione è la seguente:

2	5
---	---

4	7
---	---

So che i blocchi ottenuti contengono elementi ordinati. Con questa assunzione, posso ragionare nel seguente modo: considero il primo elemento dei due blocchi (2 e 4 in questo caso) e metto in prima posizione il minore tra i due. Ora considero il successivo elemento del blocco che è stato scelto e lo stesso elemento dell'altro blocco, e inserisco nell'array l'elemento minore. Continuo fino ad ottenere un blocco ordinato.

2	4	5	7
---	---	---	---

Faccio lo stesso procedimento con la parte di array originale A[5..8], ottenendo

2	4	5	7
---	---	---	---

1	2	3	6
---	---	---	---

A questo punto, i blocchi da 4 contengono elementi tra loro ordinati. Faccio lo stesso ragionamento usato per comporli, per ottenere l'array originale ordinato. Considero<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Questo procedimento è stato applicato anche ai passaggi precedenti; qui è spiegato più rigorosamente.

- $L[1..4] = A[1..4]$ : indice  $i = 1$  per scorrerlo;
  - $R[1..4] = A[5..8]$ : indice  $j = 1$  per scorrerlo;
- Valuto  $L[i]$  e  $R[j]$ .
- Se  $L[i] \leq R[j]$ , inserisco  $L[i]$  e incremento  $i$ .
  - Altrimenti, inserisco  $R[j]$  e incremento  $j$ .
  - Itero finchè entrambi gli indici non sono out of bounds.

**Pseudocodice** Segue lo pseudocodice del MergeSort.

MERGESORT( $A, p, r$ )

```

1  if  $p < r$ 
2       $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$  // arrotondato per difetto
3      MERGESORT( $A, p, q$ ) // ordina  $A[p..q]$ 
4      MERGESORT( $A, q+1, r$ ) // ordina  $A[q+1..r]$ 
5      MERGE( $A, p, q, r$ ) // "Merge" dei due sotto-array

```

MERGE( $A, p, q, r$ )

```

1   $n1 = q - p + 1$  // gli indici partono da 1
2   $n2 = r - q$ 
   // L sotto-array sx, R sotto-array dx
3  for  $i = 1$  to  $n1$ 
4       $L[i] = A[p + i - 1]$ 
5  for  $j = 1$  to  $n2$ 
6       $R[j] = A[q + j]$ 
7   $L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = \infty$ 
8   $i = j = 1$ 
9  for  $k = p$  to  $r$ 
10     if  $L[i] \leq R[j]$ 
11          $A[k] = L[i]$ 
12          $i = i + 1$ 
13     else //  $L[i] > R[j]$ 
14          $A[k] = R[j]$ 
15          $j = j + 1$ 

```

**Invarianti e Correttezza** **L** e **R** contengono rispettivamente  $A[p..q]$  e  $A[q+1..r]$ . L'indice  $k$  scorre  $A$ . Il sotto-array  $A[p..k-1]$  è ordinato, e contiene  $L[1..i-1]$  e  $R[1..j-1]$ .

$$\begin{aligned}
 A[p..k-1] &\leq L[i..n1], R[j..n2] \\
 &\Downarrow \\
 A[p..k-1] &= A[p..r+1-1] \implies A[p..r] \text{ ordinato}
 \end{aligned}$$

**Dimostrazione per induzione su r-p**

$\Rightarrow$  Se  $r - p == 0$  (oppure  $-1$ ) abbiamo al più un elemento  $\implies$  array già ordinato.

$\Rightarrow$  Se  $r - p > 0$ , vale

$$\#elem(A[p..q]), \#elem(A[q+1..r]) < \#elem(A[p..r])$$

Per ipotesi induttiva:

- MergeSort(A, p, q) ordina A[p..q];
  - MergeSort(A, q+1, r) ordina A[q+1..r];
- Per correttezza di Merge(), dopo la sua chiamata ottengo A[p..r] ordinato.

### 2.4.1 Approfondimento sull'Induzione

**Induzione ordinaria** Proprietà  $P(n)$ , e.g.  $P(n) =$  “Se  $n$  è pari,  $n + 1$  è dispari” oppure “tutti i grafi con  $n$  nodi ...”.

Per dimostrare che  $P(n)$  vale per ogni  $n$

- $P(0)$ : **caso base**;
- assumo vera  $P(n) \rightarrow$  dimostro  $P(n + 1)$ , allora  $P(n)$  è vera per ogni  $n$ .

### Induzione completa

- $[P(0)]$  (non necessaria, è un'istanza del passo successivo);
- dimostro  $P(m) \forall m < n \rightarrow$  vale  $P(n) \forall n$ .

### 2.4.2 Complessità di Merge Sort

$n = \#$ elementi da ordinare<sup>1</sup>

**Merge(A, p, q, r)**

**inizializzazione:**  $a'n + b'$ ;

**ciclo:**  $a'n + b'$ ;

Sommandoli, ottengo una complessità all'incirca di:

$$T^{merge}(n) = an + b$$

Nel dettaglio:

$$T^{MS}(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ T^{MS}(n_1) + T^{MS}(n_2) + T^{merge}(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$T^{MS}(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ T^{MS}(n_1) + T^{MS}(n_2) + an + b & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con

---

<sup>1</sup>Il simbolo  $\#$  verrà usato per indicare la cardinalità di un insieme.

$$n_1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

$$n_2 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$$

$$T^{MS}(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ T^{MS}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T^{MS}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + an + b & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & T^{MS}(n) & & \\
& & & & an + b & & \\
& & & & & & \\
& & T^{MS}(n_1) & & T^{MS}(n_2) & & \\
& & an_1 + b & & an_2 + b & & \\
& & & & & & \\
& T^{MS}(n_{11}) & T^{MS}(n_{12}) & T^{MS}(n_{21}) & T^{MS}(n_{22}) & & \\
& an_{11} + b & an_{12} + b & an_{21} + b & an_{22} + b & & \\
& & & & & & \\
& & & \dots & & & \\
& & & & & & \\
& c_0 & c_0 & \dots & \dots & \dots & c_0 & c_0
\end{array}$$

Otteniamo  $c_0$  ripetuto  $n$  volte all'ultimo livello dell'albero. L'altezza dell'albero è circa  $\log_2 n$ . Vediamo nel dettaglio la complessità nelle varie iterazioni.

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{i} = \mathbf{0} & an + b \\
\mathbf{i} = \mathbf{1} & a(n_1 + n_2) + 2b \approx an + 2b \\
\mathbf{i} = \mathbf{2} & a(n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22}) + 4b \approx an + 4b \\
& \dots \\
\mathbf{i} = \mathbf{h} & c_0 n
\end{array}$$

Poniamo  $n = 2^h$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}
T^{MS}(n) &= \sum_{i=0}^{h-1} (an + 2^i b) + c_0 n \\
&= anh + b \sum_{i=0}^{h-1} 2^i & (h = \log_2 n) \\
&= an \log_2 n + b 2^h - b + c_0 n & (2^h = n) \\
&= an \log_2 n + (b + c_0)n - b \\
T^{MS}(n) &= an \log_2 n + b''n + c'' \approx n \log_2 n
\end{aligned}$$

## 2.5 Confronto tra Insertion Sort e Merge Sort

$$T^{IS}(n) = a'n^2 + b'n + c'$$

$$T^{MS}(n) = a''n \log_2 n + b''n + c''$$

Posso calcolare il limite del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T^{MS}(n)}{T^{IS}(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a''n \log_2 n + b''n + c''}{a'n^2 + b'n + c'} = 0$$

Per definizione

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \frac{T^{MS}(n)}{T^{IS}(n)} < \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$T^{MS}(n) < \varepsilon T^{IS}(n) = \frac{T^{IS}}{m} \quad (\text{Ponendo, ad esempio, } \varepsilon = \frac{1}{m})$$

Detto a parole, c'è un certo  $n$  oltre il quale, ad esempio, **MergeSort** su un **Commodore 64** esegue più velocemente di un **InsertionSort** su una macchina moderna. Possiamo vedere una comparazione tra i due algoritmi nella seguente tabella.

$n$	$T^{IS}(n) = n^2$	$T^{MS}(n) = n \log n$
10	0.1ns	0.033ns
1000	1ms	10μs
10 <sup>6</sup>	17 minuti	20ms
10 <sup>9</sup>	70 anni	30s

## 3 Complessità Asintotica

### 3.1 Notazione Asintotica

Il **tempo di esecuzione** è difficile da calcolare, come visto nella sezione 2.2.2. Il modo in cui è stato calcolato è pieno di dettagli “inutili”.

Rivediamo le complessità di **InsertionSort** e **MergeSort**:

$$\begin{aligned}T^{IS} &= an^2 + bn + c \\ T^{MS} &= an \log_2 n + bn + c\end{aligned}$$

A noi interessa calcolare  $T(n)$  per  $n$  “grande”. Non consideriamo le costanti moltiplicative, che sono non fondamentali. Ecco una lista di possibili complessità ordinate in senso decrescente (le prime due categorie appartengono alla classe degli **NP problems**, ossia non trattabili):

- $3^n$
- $2^n$
- $n^k$
- $n^2$
- $n \log n$
- $n$
- $\log n$
- 1

Prendiamo in esame due funzioni:  $f(n)$ ,  $g(n)$ :

$$f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

- $f(n)$  è la funzione in esame della complessità del nostro problema P;
- $g(n)$  è la funzione che, moltiplicata per un’opportuna costante  $c_i$ , dopo un certo  $n$ , fa da limite superiore o inferiore per ogni punto di  $f(n)$ .

### 3.1.1 Limite Asintotico Superiore

Data  $g(n)$ , indichiamo con  $O(g(n))$  il **limite asintotico superiore**, definito come segue:

$$O(g(n)) = \{f(n) : \exists c > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad (0 \leq) f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

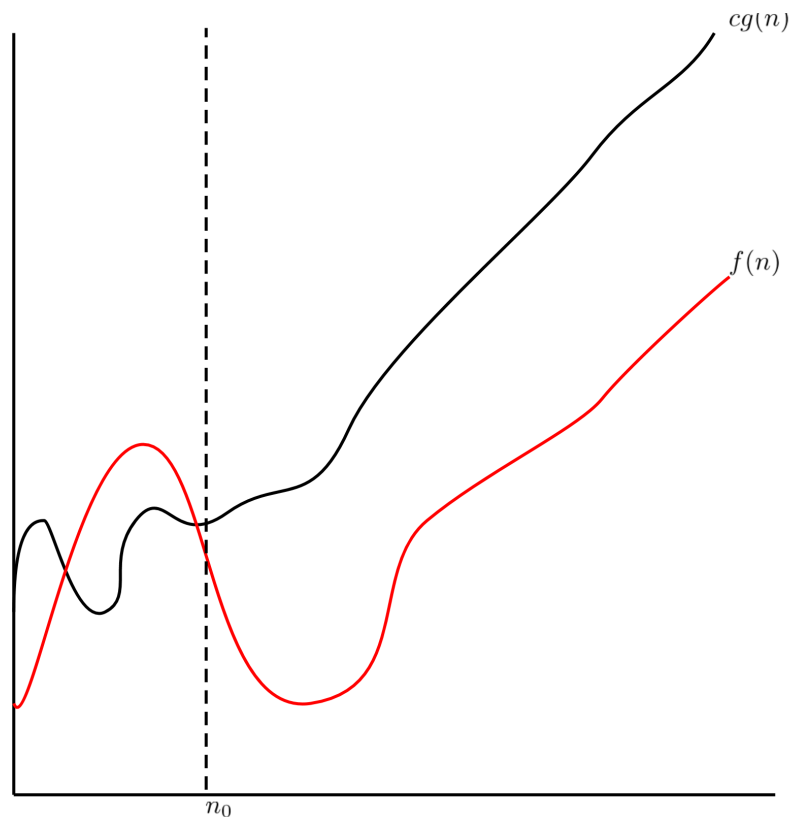


Figura 2: Rappresentazione del limite asintotico superiore per  $f(n)$

#### Esempi

◦  $f_1(n) = 2n^2 + 5n + 3 = O(g(n^2))$  ? Sì.

Deve valere  $f_1(n) < cn^2 \quad \exists c > 0, n \geq n_0$

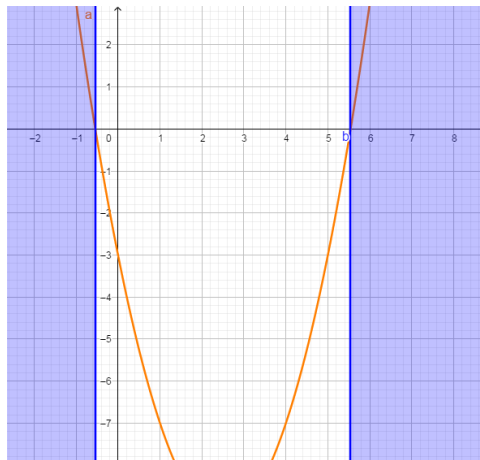
Ipotizziamo  $c = 3$

$$2n^2 + 5n + 3 \leq 3n^2$$

$$n^2 - 5n - 3 \geq 0$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{2 \cdot 5 + 12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \cong 5.54$$

(Non considero la soluzione negativa, poiché siamo in  $\mathbb{R}^+$ )



Prendo  $c = 3$  e  $n_0 = 6$ . Vale dunque:

$$f_1(n) \leq cn^2 \quad \forall n \geq n_0$$

○  $f_1(n) = O(g(n^3))$  ? Sì.

$$c = 3$$

$$n_0 = 6 \quad \forall n \geq n_0$$

$$f_1(n) \leq cn^2 \leq cn^3$$

○  $f_2(n) = 2 + \sin(n) = O(1)$  ? Sì.

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$1 \leq f_2(n) \leq 3$$

Vale la seguente

$$\exists c > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad f_2(n) \leq c \cdot 1$$

ok per  $c = 3, n_0 = 0$

### 3.1.2 Limite Asintotico Inferiore

Data  $g(n)$ , indichiamo con  $\Omega(g(n))$  il **limite asintotico inferiore**, definito come segue:

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \exists c > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

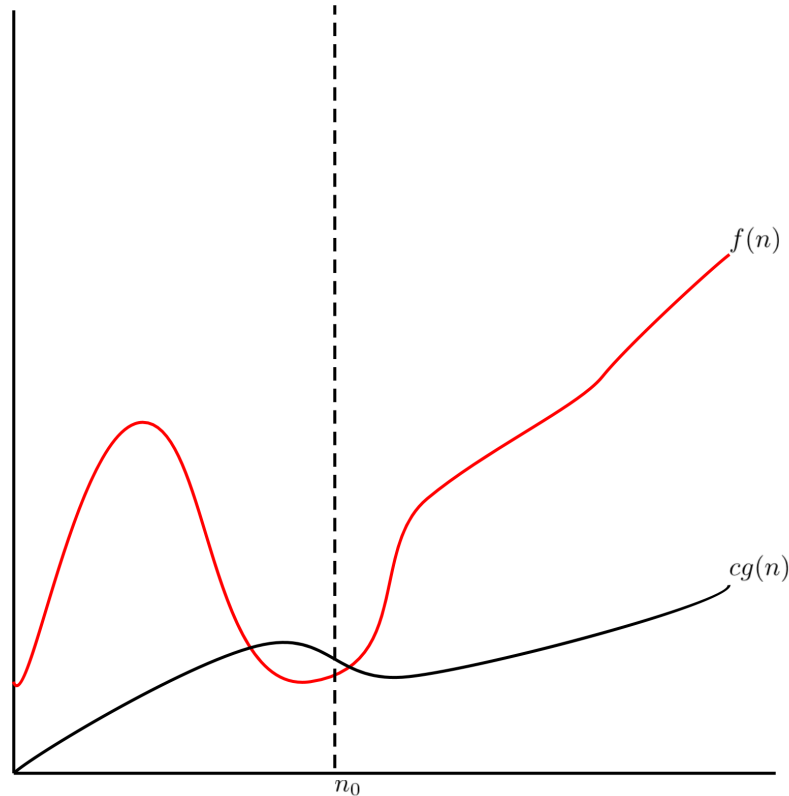


Figura 3: Rappresentazione del limite asintotico inferiore per  $f(n)$

#### Esempi

- $f_1(n) = 2n^2 + 5n + 3 = \Omega(g(n^2))$  ? Sì.

Deve valere:

$$\exists c > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad cn^2 \leq 2n + 5n + 3$$

Basta porre  $c = 1$ ,  $n_0 = 0$ .

- $f_2(n) = 2 + \sin(n) = \Omega(1)$  ? Sì.

$$1 \leq f_2(n) \leq 3 \quad c = 1, \quad n_0 = 0$$

### 3.1.3 Limite Asintotico Stretto

Data  $g(n)$ , indichiamo con  $\Theta(g(n))$  il **limite asintotico stretto**, definito come segue:

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \exists c_1, c_2 > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\}$$

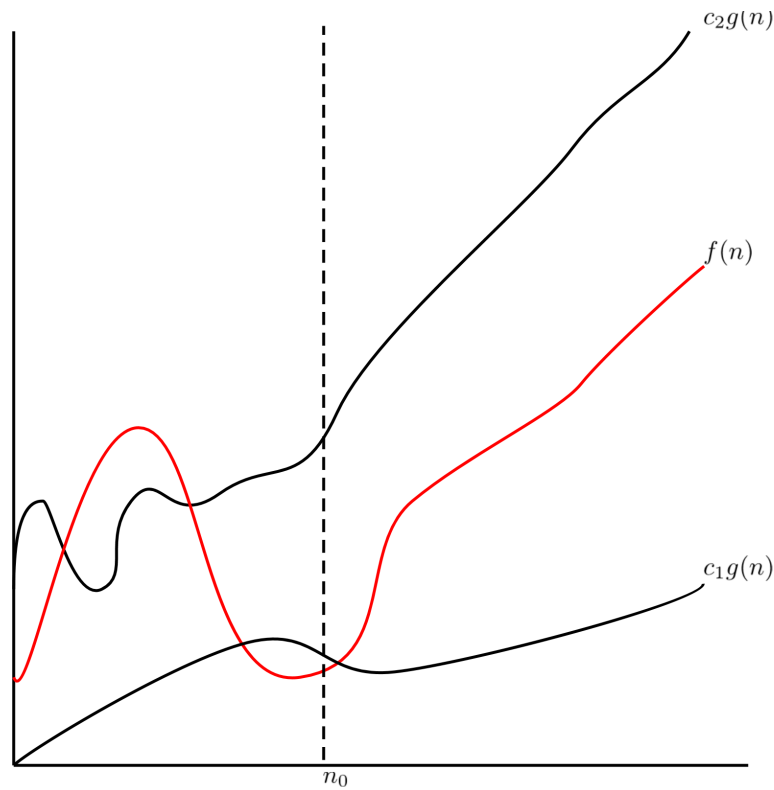


Figura 4: Rappresentazione del limite asintotico stretto per  $f(n)$

#### Esempi

$$\begin{aligned} f_1(n) &= 2n^2 + 5n + 3 = \Theta(n^2) \\ c_1 &= 1 \quad c_2 = 3 \quad n_0 = 6 \\ f_2(n) &= 2 + \sin(n) = \Theta(1) \\ c_1 &= 1 \quad c_2 = 3 \quad n_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(n) &\neq \Theta(n^3) \\ f_1(n) &= O(n^3) \\ f_1(n) &\neq \Omega(n^3) \\ &\Downarrow \\ \frac{f_1(n)}{n^3} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

### 3.2 Metodo del Limite

Siano  $f(n), g(n) > 0 \quad \forall n$

Se  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ , allora:

1. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k > 0$  allora  $f(n) = \Theta(g(n))$ .
2. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$  allora  $f(n) = O(g(n))$  e  $f(n) \neq \Omega(g(n))$ .
3. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$  allora  $f(n) = \Omega(g(n))$  e  $f(n) \neq O(g(n))$ .

#### Dimostrazione

1. Sia  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k > 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{f(n)}{g(n)} - k \right| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow -\varepsilon \leq \frac{f(n)}{g(n)} - k \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow k - \varepsilon \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq k + \varepsilon \\ &\Rightarrow (k - \varepsilon)g(n) \leq f(n) \leq (k + \varepsilon)g(n) \quad \text{per } 0 < \varepsilon < k \\ &\Rightarrow f(n) = \Theta(g(n)) \end{aligned}$$

2. Sia  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \frac{f(n)}{g(n)} \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow f(n) \leq \varepsilon g(n) \\ &\Rightarrow f(n) = O(g(n)) \end{aligned}$$

Sia  $f(n) = \Omega(g(n))$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists c > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad cg(n) \leq f(n) \\ &\Rightarrow \text{Impossibile, infatti sia } \varepsilon = \frac{c}{2} > 0 \\ &\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \quad f(n) \leq \frac{c}{2}g(n) < cg(n) \\ &\Rightarrow \text{Contraddizione!} \end{aligned}$$

3. Si dimostra in modo analogo al punto (2)



**3.3 Proprietà Generali**

- $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 = \Theta(n^k)$
- $h \neq k \quad \Theta(n^h) \neq \Theta(n^k)$
- $a \neq b \quad \Theta(a^k) \neq \Theta(b^k)$
- $h \neq k \quad \Theta(a^{n+h}) = \Theta(a^n a^h)$
- $a \neq b \quad \Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$

In generale

$$O(1) \subseteq O(\log n) \subseteq O(n) \subseteq O(n \log n) \subseteq O(n^2) \subseteq \dots$$

### 3.4 Complessità di un Problema

Dato un problema  $P \{ \text{INPUT} \rightarrow \text{OUTPUT} \}$ , la **complessità** di  $P$  è la complessità dell'algoritmo più efficiente che risolve  $P$ .

**Limite superiore per complessità di  $P$**  Se  $A$  è un algoritmo per  $P$  con complessità  $O(f(n))$ , allora  $P$  è  $O(f(n))$ .

**Limite inferiore per complessità di  $P$**  Se ogni algoritmo che risolve  $P$  ha complessità  $\Omega(f(n))$ , allora  $P$  ha complessità  $\Omega(f(n))$

$$\implies \text{ se } P \text{ è } O(f(n)) \text{ e } \Omega(f(n)) \Rightarrow P \text{ è } \Theta(f(n))$$

#### 3.4.1 Esempio: limite inferiore per ordinamento basato su scambi di elementi contigui

**Def (inversione)** Dato  $A[1..n]$ , una **inversione** è una coppia  $(i, j)$  con  $i, j \in [1, n]$  con  $i < j$  e  $A[i] > A[j]$ .

Operazione disponibile:  $A[k] \leftrightarrow A[k+1]$  (scambio tra gli elementi in posizione  $k$  e  $k+1$ ).

$$\begin{aligned} \#inv(A) &= \text{numero di inversioni di } A \\ &= \left| \{ (i, j) : 1 \leq i < j \leq n, A[i] > A[j] \} \right| \end{aligned}$$

1.  $A$  è ordinato sse  $\#inv(A) = 0$ ;
2.  $A$  è ordinato in senso inverso sse

$$\sum_{j=2}^n j - 1 = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ossia,  $\#inv(A)$  è massimizzato.

Vediamo cosa succede alle coppie  $(i, j)$  e a  $\#inv(A)$  nel caso avvenga uno scambio  $A[k] \leftrightarrow A[k+1]$ .

- $i, j \neq k$  e  $i, j \neq k+1 \implies (i, j)$  è inversione prima sse è inversione dopo;
- $i = k, j = k+1$

$$\implies \begin{cases} A[i] < A[j] & +1 \text{ inversione} \\ A[i] = A[j] & \#inv(A) \text{ non cambia} \\ A[i] > A[j] & -1 \text{ inversione} \end{cases}$$

- $i = k$  oppure  $i = k + 1, j > k + 1 \implies (k, j)$  è inversione prima sse  $(k + 1, j)$  è inversione dopo;
- $j = k$  oppure  $j = k + 1, i < k$ , analogo al caso precedente.

Per concludere, possiamo dire che l'operazione  $A[k] \leftrightarrow A[k+1]$  riduce  $\#inv(A)$  al massimo di 1.

$\implies$  qualunque algoritmo di ordinamento basato su scambi è  $\Omega\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = \Omega(n^2)$

### 3.5 Soluzione di Ricorrenze

Abbiamo visto per MergeSort la complessità nel modo seguente:

MERGE\_SORT( $A, p, r$ )

```

1  if  $p < r$ 
2       $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$ 
3      MERGE_SORT( $A, p, q$ )
4      MERGE_SORT( $A, q+1, r$ )
5      MERGE( $A, p, q, r$ ) // complessità  $an + b$ 
```

$$T^{MS}(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ T^{MS}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T^{MS}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + an + b & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

È stato tuttavia un approccio non molto preciso. Ci sono due metodi per risolvere precisamente i problemi di ricorrenza:

- **Metodo di sostituzione** (3.5.1);
- **Master Theorem** (3.5.2).

#### 3.5.1 Metodo di Sostituzione

Dato una ricorrenza, si può provare a “indovinare” la soluzione e dimostrare che è corretta, oppure si può sviluppare l'**albero delle ricorrenze**:

- **radice**: chiamata di cui vogliamo la complessità;
- per ogni nodo:
  - costo della parte non ricorsiva;
  - un figlio per ogni chiamata.

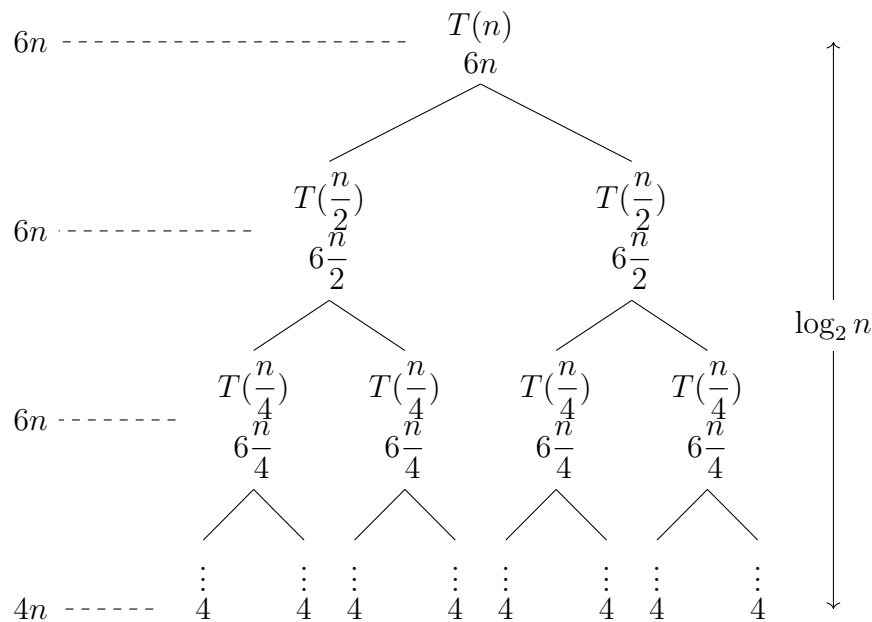
**Esempio**

$$T(n) = \begin{cases} 4 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + 6n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

In generale, si può benissimo trascurare il caso base per poter ottenere espressioni meno verbose, in questo caso otterremmo:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 6n$$

Costruendo l'albero delle ricorrenze si intuisce già la soluzione:



Per essere sicuri della soluzione, facciamo il procedimento per intero. Proviamo a “indovinare” la soluzione. Assomiglia a **MergeSort**, quindi ipotizziamo abbia una complessità con un andamento simile

$$T(n) = an \log n + bn + c$$

Facciamo la prova induttiva.

$$\begin{aligned} (n = 1) \quad T(1) &= 4 \\ &= a \cdot 1 \cdot \log 1 + b \cdot 1 + c && (\log 1 = 0) \\ &= b + c && \text{ok se } b + c = 4 \\ (n > 1) \quad T(n) &= 2T(\frac{n}{2}) + 6n \end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva

$$T\left(\frac{n}{2}\right) = a\frac{n}{2} \cdot \log \frac{n}{2} + b\frac{n}{2} + c$$

Calcolo ora  $T(n)$

$$\begin{aligned} T(n) &= an \log_2 \frac{n}{2} + bn + 2c + 6n = \\ &= an \log_2 n - an \log_2 2 + bn + 6n + 2c = \quad (\log_2 2 = 1) \\ &= an \log_2 n + n(b + 6 - a) + 2c = \\ &= an \log_2 n + bn + c \\ &\quad \Downarrow \end{aligned}$$

$$b + 6 - a = b \Rightarrow a = 6$$

$$2c = c \Rightarrow c = 0$$

$$b + c = 4 \Rightarrow b = 4$$

$$\begin{aligned} T(n) &= an \log n + bn + c \\ &= 6n \log n + 4n \end{aligned}$$

**Esercizio (importante)**

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 6n \\
&= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n) \\
\text{vale } \exists c > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \Theta(n) &\leq cn
\end{aligned}$$

Voglio dimostrare che

$$1. \quad T(n) = O(n \log n)$$

$$2. \quad T(n) = \Omega(n \log n)$$

$$1. \quad T(n) = O(n \log n)$$

significa che  $\exists d > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} : T(n) \leq dn \log n \quad \forall n \geq n_1$

Dimostro per induzione  $T(n) \leq dn \log n \quad \forall n \geq n_1$ .

Ometto il caso base, poiché non è molto interessante (mi basterebbe aumentare ulteriormente  $d$  per avere un valore accettabile).

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn && \text{ip. induttiva } T\left(\frac{n}{2}\right) = d\frac{n}{2} \log \frac{n}{2} \\
&\leq 2 \cdot \frac{n}{2} d \log \frac{n}{2} + cn && \left(\log \frac{n}{2} = \log n - \log 2\right) \\
&= dn \log n - dn \log 2 + cn \\
&= dn \log n - n(d \log 2 - c) \leq dn \log n \\
&\Rightarrow -n(d \log 2 - c) \leq 0 \\
n(d \log 2 - c) &\geq 0 \\
d \log 2 - c &\geq 0 \\
d &\geq \frac{c}{\log 2}
\end{aligned}$$

$$2. \quad T(n) = \Omega(n \log n) \text{ è analoga.}$$

$$\exists \delta > 0 : \forall n > n_0 \Rightarrow T(n) \geq \delta n \log n$$

Ho l'ipotesi induttiva  $T(\frac{n}{2}) \geq \delta \frac{n}{2} \log \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned} T(n) &\geq 2\delta \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} + cn = \\ &= \delta n \log n - \delta n \log 2 + cn = \\ &= \delta n \log n + n(c - \delta \log 2) \geq \delta n \log n \\ &\text{Deve valere } c - \delta \log 2 \geq 0 \\ &\Rightarrow 0 < \delta \leq \frac{c}{\log 2} \end{aligned}$$

**Esercizio**  $T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2n}{3}) + \Theta(n)$  ( $\Theta(n) \leq c \cdot n$ )

Ipotizzo un andamento simile a MergeSort:  $\Theta(n \log n)$ . Dimostro:

1.  $T(n) = O(n \log n)$

2.  $T(n) = \Omega(n \log n)$

1.  $T(n) = O(n \log n)$

$$\exists d > 0 : \forall n > n_0 \Rightarrow T(n) \leq dn \log n$$

Ometto il caso base. L'ipotesi induttiva è la seguente:

$$T(n) \leq d \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} + d \frac{2n}{3} \log \frac{2n}{3} + cn$$

Procedo con i calcoli ...

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + cn \\ &\leq d \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} + d \frac{2n}{3} \log \frac{2n}{3} + cn = \\ &= d \frac{n}{3} (\log n - \log 3) + d \frac{2n}{3} (\log n - \log \frac{2}{3}) + cn = \\ &= dn \log n - \frac{dn}{3} (\log 3 - 2 \log \frac{2}{3}) + cn = \\ &= dn \log n - \frac{dn}{3} (\log 3 - \log \frac{4}{9}) + cn = \\ &= dn \log n - n \left( \frac{d}{3} \log \frac{27}{4} - c \right) \leq dn \log n \\ &\quad \frac{d}{3} \log \frac{27}{4} - c \geq 0 \\ &\Rightarrow d \geq \frac{3c}{\log \frac{27}{4}} \quad (\log \frac{27}{4} > 1 \text{ poiché } \arg > 1) \end{aligned}$$

**2.**  $T(n) = \Omega(n \log n)$  è analoga

$$\exists \delta > 0 : \forall n > n_0 \Rightarrow T(n) \geq \delta n \log n$$

L'ipotesi induttiva è la seguente:

$$T(n) \geq \delta \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} + \delta \frac{2n}{3} \log \frac{2n}{3} + cn$$

Calcoli ...

$$\begin{aligned} T(n) &\geq T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + cn \\ &\geq \delta \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} + \delta \frac{2n}{3} \log \frac{2n}{3} + cn = \\ &= \delta \frac{n}{3} (\log n - \log 3) + \delta \frac{2n}{3} (\log n - \log \frac{2}{3}) + cn = \\ &= \delta n \log n + \frac{\delta n}{3} (-\log 3 + 2 \log \frac{2}{3}) + cn = \\ &= \delta n \log n + \frac{\delta n}{3} (-\log 3 + \log \frac{4}{9}) + cn = \\ &= \delta n \log n + n \left( -\frac{\delta}{3} \log \frac{27}{4} + c \right) \geq \delta n \log n \\ &\quad - \frac{\delta}{3} \log \frac{27}{4} + c \geq 0 \\ &\Rightarrow 0 < \delta \leq \frac{3c}{\log \frac{27}{4}} \end{aligned}$$



### 3.5.2 Master Theorem

Dato un problema con **size**  $n$ , vogliamo dividerlo in  $a$  sottoproblemi con **size**  $\frac{n}{b}$ . Otteniamo la seguente ricorrenza (ricordiamo che il caso base è omesso per semplicità):

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

con  $a \geq 1$ ,  $b > 1$ , allora possiamo confrontare

- $f(n)$ ;
- $n^{\log_b a}$ .

Tre possibili casi:

1. Se  $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$  per qualche  $\varepsilon > 0$ , allora

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

2. Se  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$  allora

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$$

3. Se  $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$  per qualche  $\varepsilon > 0$ , e vale la **regolarità**

$$\exists 0 < k < 1 : a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq k \cdot f(n)$$

allora

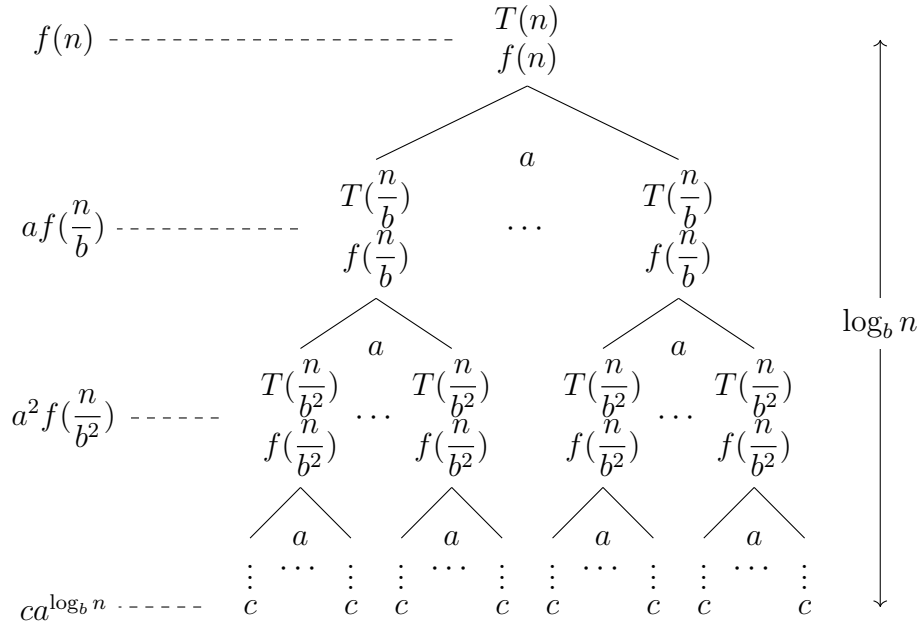
$$T(n) = \Theta(f(n))$$

**Intuizione sul perchè  $n^{\log_b a}$**

$$T(n) = f(n) + af\left(\frac{n}{b}\right) + a^2f\left(\frac{n}{b^2}\right) + \dots + a^{\log_b n}f\left(\frac{n}{b^{\log_b n}}\right) + c \cdot a^{\log_b n}$$

$$a^{\log_b n} = (b^{\log_b a})^{\log_b n} = (b^{\log_b n})^{\log_b a} = n^{\log_b a}$$

$$\text{Nota bene: } af\left(\frac{n}{b}\right) \leq k \cdot f(n) \text{ con } k < 1$$



Vediamo ora i casi in cui sarà possibile finire, e le conclusioni legate ad essi.

A)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = l(> 0) \neq \infty$$

$$\mathbf{Caso\ 2} \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$$

B)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Potrei essere nel } \mathbf{Caso\ 1} &\Rightarrow \text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a - \varepsilon}} = l(\geq 0) \neq \infty \ (\varepsilon > 0) \\ &\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \end{aligned}$$

C)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = \infty \quad &\& \exists \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a + \varepsilon}} = \infty \\ &\& \mathbf{Regolarità} \Rightarrow \mathbf{Caso\ 3}: \quad T(n) = \Theta(f(n)) \end{aligned}$$

**Esercizi**

- $T^{MS} = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + a'n + b'$

Abbiamo (rispetto alla forma  $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ )

$$a = 2, \quad b = 2$$

$$f(n) = a'n + b' \quad n^{\log_2 2} = n$$

È chiaro che le due funzioni hanno lo stesso andamento (di ordine  $\Theta(n)$ ):

$$a'n + b' = \Theta(n)$$

$$\text{Caso 2} \Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_2 2} \log n\right) = \Theta(n \log n)$$

- $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + 2n^2 + n \log n$

Abbiamo (rispetto alla forma  $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ )

$$a = 5, \quad b = 2$$

$$f(n) = n^2 + n \log n \quad n^{\log_2 5} \quad (\log_2 5 > 2)$$

$$0 < \varepsilon < \log_2 5 - 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n \log n}{n^{\log_2 5 - \varepsilon}} = 0 \Rightarrow f(n) = O(n^{\log_2 5})$$

$$\text{Caso 1} \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_2 5})$$

- $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$  per esercizio.

- $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 \log n$

Abbiamo

$$a = 5, \quad b = 2$$

$$f(n) = n^3 \log n \quad n^{\log_2 5} \quad (\log_2 5 < 3)$$

$$0 < \varepsilon < 3 - \log_2 5 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \log n}{n^{\log_2 5 + \varepsilon}} = \infty$$

Possibile **caso 3. Regolarità?**

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq kf(n) \quad \text{per } 0 < k < 1 \text{ opportuno}$$

$$5\left(\frac{n}{2}\right)^3 \log \frac{n}{2} = \frac{5}{8}n^3 \log \frac{n}{2} \leq \frac{5}{8}n^3 \log n \leq kn^3 \log n \quad \text{per } 0 < k \leq \frac{5}{8} < 1$$

↓

$$\text{Caso 3: } T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^3 \log n)$$

$$\bullet T(n) = 27T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3 \log n$$

$$f(n) = n^3 \log n \quad n^{\log_3 27} \quad (\log_3 27 = 3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \log n}{n^{3+\varepsilon}} = +\infty \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ non possiamo dimostrare } 3$$

$\Rightarrow$  Non siamo in **nessun** caso del Master Theorem.

Anche valutando la **regolarità**, ricadiamo in un assurdo. Dobbiamo dimostrare che  $af\left(\frac{n}{b}\right) < kf(n)$  per qualche  $k > 0$

$$27\left(\frac{n}{3}\right)^3 \log \frac{n}{3} = n^3(\log n - \log 3) \not< kn^3 \log n \text{ per nessun } k > 0$$

$$\text{Infatti } \frac{(\log n - \log 3)n^3}{n^3 \log n} \rightarrow 1$$

(Posso usare il Metodo di Sostituzione)

$$T(n) = 27T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3 \log n$$

Costruiamo l'albero delle ricorrenze:

- **radice:** costo  $n^3 \log n$ ;
- ogni nodo ha 27 figli.
  - ◊ i 27 figli del primo livello hanno costo  $\left(\frac{n}{3}\right)^3 \log \frac{n}{3}$ ;
  - ◊ i  $27^2$  figli del secondo livello hanno costo  $\left(\frac{n}{9}\right)^3 \log \frac{n}{9}$ ;
  - ◊ ...
  - ◊ le  $27^n$  foglie terminali hanno costo  $O(1)$ .

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{j=0}^{\log_3 n} n^3 \log \frac{n}{3^j} = n^3 \sum_{j=0}^{\log_3 n} (\log n - j \log 3) + cn = \\ &= n^3(\log n)^2 - n^3 \log 3 \sum_{j=0}^{\log_3 n} j + cn \quad \left( \sum_{j=0}^{\log_3 n} j \cong (\log_3 n)^2 \right) \end{aligned}$$

$$T(n) = 27T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3 \log n$$

$$T(n) = \Theta(n^3(\log n)^2) \quad \text{ipotesi ricavata}$$

Devo dimostrare che valgano le seguenti condizioni:

$$1. T(n) = O(n^3(\log n)^2)$$

$$2. T(n) = \Omega(n^3(\log n)^2)$$

$$1. T(n) = O(n^3(\log n)^2)$$

$$T(n) \leq c \cdot n^3(n^3(\log n)^2) \quad c > 0$$

$$T(n) = 27T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3 \log n$$

$$\left(\text{ipotesi induttiva } T\left(\frac{n}{3}\right) \leq c \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^3 \left(\log \frac{n}{3}\right)^2\right)$$

$$\leq 27c\left(\frac{n}{3}\right)^3 \left(\log \frac{n}{3}\right)^2 + n^3 \log n =$$

$$= \frac{27cn^3}{27}(\log n - \log 3)^2 + n^3 \log n =$$

$$= cn^3\left((\log n)^2 - 2\log 3 \log n + (\log 3)^2\right) + n^3 \log n =$$

$$= cn^3(\log n)^2 - n^3\left(\log n(2c \log 3 - 1) - c(\log 3)^2\right)$$

$$\leq cn^3(\log n)^2$$

Per un  $n$  abbastanza grande, vale la disuguaglianza con un opportuno valore di  $c$ :

$$c > \frac{1}{2\log 3}$$

$$2. T(n) = \Omega(n^3(\log n)^2)$$

$$\exists d > 0 : T(n) \geq dn^3(\log n)^2$$

$$\geq 27\left(\frac{n}{3}\right)^3 \left(\log \frac{n}{3}\right)^2 + n^3 \log n$$

$$= \dots = dn^3(\log n)^2 - n^3\left(\log n(2d \log 3 - 1) - d(\log 3)^2\right)$$

$$\geq dn^3(\log n)^2$$

Per un  $n$  abbastanza grande, vale la disuguaglianza con un opportuno valore di  $d$ :

$$2d \log 3 - 1 < 0 \quad \text{ok per } 0 < d < \frac{1}{2\log 3}$$

## 4 Ordinamento (cont.)

**Ordinamento** Finora abbiamo visto due algoritmi di ordinamento, in cui avevamo le seguenti premesse:

IN:  $a_1 \dots a_n$ ;

OUT: permutazione  $a'_1 \dots a'_n$  ordinata.

In particolare, abbiamo concluso che:

- InsertionSort:  $O(n^2)$ , basato su scambi;
- MergeSort:  $\Theta(n \log n)$ , ma con un costo in termini di **memoria**.

### Memoria

- InsertionSort:

$input + 1$  variabile  $\Rightarrow$  spazio **costante**  $\Theta(1)$  (detto “in loco”)

- MergeSort: spazio con costo lineare.

$$\begin{aligned} S_{MS}(n) &= \max \left\{ S\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), S\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \Theta(n) \right\} \\ &= \Theta(n) \end{aligned}$$

### 4.1 Heap Sort

L'**Heap Sort**<sup>1</sup> è un algoritmo di ordinamento basato su una struttura chiamata **heap**, che prende le caratteristiche positive di InsertionSort e MergeSort:

- in “loco” (spazio  $\Theta(1)$ );
- complessità  $\Theta(n \log n)$ .

**Cos'è un heap?** Un **heap** è una struttura dati basata sugli alberi che soddisfa la “proprietà di heap”: se A è un genitore di B, allora la chiave di A è ordinata rispetto alla chiave di B conformemente alla relazione d'ordine applicata all'intero heap.

Seguono alcune definizioni.

---

<sup>1</sup>Anche qui, si consiglia di dare un occhio ad altre fonti. In classe, sono stati viste molte rappresentazioni grafiche degli heap, e, come già detto, in  $\text{\LaTeX}$  non è per me facile rappresentarli.

**Altezza:** è la distanza dalla radice alla foglia più distante;

**Albero completo:** è un albero di altezza  $h$  con  $\sum_{i=0}^h 2^i - 1$  nodi;

**Albero quasi completo:** è un albero completo a tutti i livelli eccetto l'ultimo, in cui possono mancare delle foglie e le foglie presenti sono addossate a sinistra.

Gli heap verranno rappresentati in array monodimensionali, nel modo descritto di seguito:

$$\forall i > 0$$

- $A[i]$  è il nodo genitore;
- $A[2i]$  è il figlio sx del nodo  $A[i]$ ;
- $A[2i+1]$  è il figlio dx.

Inoltre, ogni array  $A$  sarà dinamico, e avrà:

- $A.length$  potenziale spazio, capacità massima dell'array;
- $A.heapsize$  celle effettive dell'array.

Vediamo alcune funzioni di utilità che verranno usate.

**LEFT( $i$ )**

```
// restituisce il figlio sx del nodo  $i$ 
1 return  $2 * i$ 
```

**RIGHT( $i$ )**

```
// restituisce il figlio dx del nodo  $i$ 
1 return  $2 * i + 1$ 
```

**PARENT( $i$ )**

```
// restituisce il genitore del nodo  $i$ 
1 return  $\lfloor i/2 \rfloor$ 
```

### 4.1.1 Max Heap

**Max Heap** è uno heap che soddisfa la seguente proprietà:

$$\begin{aligned} & \forall \text{ nodo } A[i], \\ & A[i] \geq \text{discendenti} \\ & \Downarrow \\ & A[i] \geq A[\mathbf{Left}(i)], A[\mathbf{Right}(i)] \end{aligned}$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned} & \forall \text{ nodo } A[i], \\ & A[i] \leq \text{antenati} \\ & \Downarrow \\ & A[i] \leq A[\mathbf{Parent}(i)] \end{aligned}$$

### Osservazioni

- Uno heap con un solo elemento è un **Max Heap**.
- Dati due Max Heap  $T_1$  e  $T_2$  e un nodo  $N$ , possiamo “combinarli” in uno heap con  $N$  come radice,  $T_1$  come **left** e  $T_2$  come **right**.

Ecco ora una procedura che, dato un nodo  $i$ , trasforma in un Max Heap il sotto-albero eradicato in esso (con radice  $i$ ).

MAXHEAPIFY( $A, i$ )

```

1   $l = \mathbf{LEFT}(i)$ 
2   $r = \mathbf{RIGHT}(i)$ 
3  if ( $l \leq A.heapsize$ ) and ( $A[l] > A[i]$ )
4       $max = l$ 
5  else
6       $max = i$ 
7  if ( $r \leq A.heapsize$ ) and ( $A[r] > A[max]$ )
8       $max = r$ 
9  if ( $max \neq i$ )
10      $A[i] \leftrightarrow A[max]$ 
11     MAXHEAPIFY( $A, max$ )
```



**Correttezza di MaxHeapify**

- **Casi base:**  $max = i$ , distunguo due casi:
  - $i$  è foglia ( $l, r > A.heapsize$ );
  - $A[i] \geq A[l], A[r]$ ;
- **Induzione:**  $max \neq i$ , distunguo due casi:
  - $max = l$ ,  $A[l] \geq A[i], A[r]$ ;
  - $max = r$ ,  $A[r] \geq A[i], A[l]$ .

**Complessità**  $O(h)$ , con  $h$  altezza del sotto-albero radicato in  $i$

$$\begin{aligned}
 n &\geq (2^{(h-1)+1}) + 1 = 2^h \\
 h &\leq \log_2 n \\
 &\Rightarrow O(h) \cong O(\log n)
 \end{aligned}$$

Ora vogliamo scrivere una procedura che costruisce un **Max Heap** da un array qualunque.

Quali sono i nodi foglia?

- Se  $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

$$\begin{aligned}
 2i &= 2\left(\frac{n}{2} + 1\right) \geq n + 2 - 1 = n + 1 \\
 &\Rightarrow i \text{ foglia}
 \end{aligned}$$

- Se  $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$$\begin{aligned}
 2i &= 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq n \\
 &\Rightarrow i \text{ non foglia}
 \end{aligned}$$

**BUILDMAXHEAP( $A$ )**

```

1   $A.heapsize = A.length$ 
2  for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  down to 1
3      MAXHEAPIFY( $A, i$ )

```

L'algoritmo esegue  $\frac{n}{2}$  volte **MaxHeapify** (che ha complessità  $O(\log n)$ ), ottenendo una complessità finale  $O(n \log n)$ , tuttavia questa stima è molto pessimistica.

Definiamo:

- $h_T$  altezza del cammino più lungo dello heap;
- $h_T - 1$  di conseguenza è l'altezza dell'albero meno l'ultimo livello, che è generalmente incompleto.

$$\begin{aligned}
 n &= \left(2^{(h_T-1)+1} - 1\right) + 1 \\
 &= 2^{h_T} \\
 h_T &\leq \log n \\
 n &\geq 2^{h_T}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \sum_{h=1}^{\lfloor \log n \rfloor} 2^{h_T-h} \cdot O(h) \\
 &\quad (2^{h_T-h} = \# \text{ chiamate a MaxHeapify al livello } h) \\
 &= \sum_{h=1}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{2^{h_T}}{2^h} O(h) \quad (2^{h_T} = n) \\
 &= O\left(\left(\sum_{h=1}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{h}{2^h}\right)n\right) = O(n) \quad \left(\sum_{h=1}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{h}{2^h} \leq \sum_{h=1}^{\infty} \frac{h}{2^h} = \frac{\frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 2\right)
 \end{aligned}$$

Passiamo ora all'algoritmo di ordinamento **HeapSort**. La radice di un **Max Heap** contiene il valore massimo. Quindi, la prima operazione, e quella su cui si basa **HeapSort**, consiste nel mettere la radice in ultima posizione.

Es. A: 9 8 7 5 7 4 0 4 3 6 1 2      è un max heap.  
 $\Rightarrow$  8 7 5 7 4 0 4 3 6 1 2 9      ignoro l'ultimo elemento, chiamo  
**MaxHeapify** sulla radice e itero.

Poi chiama **MaxHeapify** sul resto dell'array per renderlo un **Max Heap**, e itera il procedimento sul nuovo array.

**HEAPSORT**(A)

```

1  BUILDMAXHEAP(A) // O(n)
2  for i = A.length down to 2
3      A[1] ↔ A[i]
4      A.heapsize = A.heapsize - 1
5      MAXHEAPIFY(A, 1) // O(log n)

```

**Complessità**  $O(n \log n)$ .

### 4.1.2 Code con Priorità

$S$  insieme dinamico di oggetti.

$x$  è l'indice,  $x.key$  è il corrispondente valore relativo a quell'indice. Voglio poter eseguire le seguenti operazioni:

- `Insert(S, x)`
- `Max(S)`
- `ExtractMax(S)`
- `IncreaseKey(S, x,  $\delta$ )`
- `ChangeKey(S, x,  $\delta$ )`
- `Delete(S, x)`

**Idea** Uso un **Max Heap** ( $A$ ).

`MAX( $A$ )`

```
1  if  $A.heapsize = 0$ 
2      error
3  else return  $A[1]$ 
```

La procedura `Max( $A$ )` ha complessità costante  $\Theta(1)$ .

`EXTRACTMAX( $A$ )`

```
1   $max = A[1]$ 
2   $A[1] = A[A.heapsize]$ 
3   $A.heapsize = A.heapsize - 1$ 
4  MAXHEAPIFY( $A, 1$ ) // ripristina le proprietà di MaxHeap
5  return  $max$ 
```

La procedura `ExtractMax( $A$ )` ha la stessa complessità di `MaxHeapify`:  $O(\log n)$ .

Per `Insert`, le cose diventano più delicate. L'idea è quella di inserire in coda ad  $A$ : in questo modo, l'unico elemento che potrebbe compromettere la proprietà di **Max Heap** è la cella di indice  $i$  (nel nostro caso, l'ultima). Deve valere la proprietà:

$$\begin{aligned} &\text{Per ogni } j \neq i \\ &A[j] \leq \text{antenati} \end{aligned}$$

Non possiamo dire nulla su  $i$ . Va ristabilita la proprietà di **Max Heap**: per fare ciò usiamo la procedura `MaxHeapifyUp`.

```

MAXHEAPIFYUP( $A, i$ )
1  if ( $i > 1$ ) and ( $A[i] > A[\text{PARENT}(i)]$ )
2       $A[i] \leftrightarrow A[\text{PARENT}(i)]$ 
3      MAXHEAPIFYUP( $A, \text{PARENT}(i)$ )

```

### Correttezza di MaxHeapifyUp

#### Casi base

( $i = 1$ ) ok, non faccio nulla;

( $A[i] \leq A[\text{Parent}(i)]$ ) ok, la proprietà di **Max Heap** è mantenuta.

#### Induzione

( $A[i] > A[\text{Parent}(i)]$ ) scambio le due celle. I discendenti (sottoalberi) della nuova cella  $A[i]$  mantengono la proprietà di **Max Heap**.

**Complessità**  $O(\log i)$ , nel caso peggiore  $O(\log n)$ .

Ecco ora lo pseudocodice della funzione **Insert**.

```

INSERT( $A, x$ )
1   $A.\text{heapsize} = A.\text{heapsize} + 1$ 
2   $A[A.\text{heapsize}] = x$ 
3  MAXHEAPIFYUP( $A, A.\text{heapsize}$ )

```

**Insert** ha complessità  $O(\log n)$ , la stessa di **MaxHeapifyUp**.

```

INCREASEKEY( $A, i, \delta$ )
  // Precondizione:  $\delta \geq 0$ 
1   $A[i] = A[i] + \delta$ 
2  MAXHEAPIFYUP( $A, i$ )

```

**IncreaseKey** ha complessità  $O(\log n)$ .

```

CHANGEKEY( $A, i, \delta$ )
1   $A[i] = A[i] + \delta$ 
2  if  $\delta > 0$ 
3      MAXHEAPIFYUP( $A, i$ )
4  else //  $\delta \leq 0$ 
5      MAXHEAPIFY( $A, i$ )

```

**ChangeKey** è come **IncreaseKey**, ma può utilizzare valori di  $\delta$  qualsiasi, ed è corretto per la seguente proprietà:

Se per ogni  $j \neq i$   $A[j] \geq$  discendenti  
 $\Rightarrow$  dopo **MaxHeapify** ho un **MaxHeap**

**DELETEKEY**( $A, i$ )

```
1  old =  $A[i]$ 
2   $A[i] = A[A.heapsize]$ 
3   $A.heapsize = A.heapsize - 1$ 
4  if  $old \leq A[i]$ 
5      MAXHEAPIFYUP( $A, i$ )
6  else
7      MAXHEAPIFY( $A, i$ )
```

**DeleteKey** ha complessità  $O(\log n)$ .

## 4.2 Quick Sort

Il **Quick Sort** è probabilmente l'algoritmo di ordinamento più utilizzato e nella pratica efficiente, nonostante abbia un caso pessimo di  $O(n^2)$ .

- Caso pessimo  $O(n^2)$ ;
- Caso medio e migliore  $O(n \log n)$ ;
- costanti basse.

Si basa sul paradigma del *divide et impera*:

- *Divide*
  - Sceglie un *pivot*  $x$  in  $A[p, r]$ ;
  - partiziona in  $A[p, q-1] \leq x$  e  $A[q+1, r] \geq x$ ;
- *Impera*
  - Ricorre su  $A[p, q-1]$  e  $A[q+1, r]$ ;
- *Combina*
  - (Non fa nulla).

**Pseudocodice** Segue lo pseudocodice del QuickSort.

QUICKSORT( $A, p, r$ )

```

1  if  $p < r$ 
2       $q = \text{PARTITION}(A, p, r)$ 
3      QUICKSORT( $A, p, q$ )
4      QUICKSORT( $A, q + 1, r$ )

```

PARTITION( $A, p, r$ )

```

1   $x = A[r]$  // pivot  $A[r]$ 
2   $i = p - 1$ 
   //  $A[p, i] \leq x$ 
   //  $A[i+1, j-1] > x$ 
3  for  $j = p$  to  $r - 1$ 
4      if  $A[j] \leq x$ 
5           $i = i + 1$ 
6           $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
7   $A[i + 1] \leftrightarrow A[r]$ 
8  return  $i + 1$ 

```

### 4.2.1 Correttezza di Quick Sort

**Caso base** array già ordinato, 0 o 1 elemento.

**Induzione** Abbiamo, dopo **Partition**

$$\boxed{\leq A[q]} \quad \boxed{A[q]} \quad \boxed{\geq A[q]}$$

$$\text{QuickSort}(A, p, q) \quad \boxed{\leq A[q], \text{ord}} \quad \boxed{A[q]} \quad \boxed{> A[q]}$$

$$\text{QuickSort}(A, q+1, r) \quad \boxed{\leq A[q], \text{ord}} \quad \boxed{A[q]} \quad \boxed{> A[q], \text{ord}}$$

**Esempio** Dato l'array  $A$ , scelgo come **pivot**  $x$  l'ultimo elemento.

$$\boxed{9} \boxed{6} \boxed{0} \boxed{8} \boxed{4} \boxed{2} \quad \text{pivot: } \boxed{2}$$

$i$  punta alla cella 0 (ossia nessuna cella)

$j$  punta alla cella 1:  $\boxed{9}$

$9 > 2$ ? Sì  $\Rightarrow j++$

$6 > 2$ ? Sì  $\Rightarrow j++$

$0 > 2$ ? No  $\Rightarrow i++, A[i] \leftrightarrow A[j], j++$

$$\boxed{0} \boxed{6} \boxed{9} \boxed{8} \boxed{4} \boxed{2} \quad \text{pivot: } \boxed{2}$$

$i$  punta alla cella 1:  $\boxed{0}$

$j$  punta alla cella 4:  $\boxed{8}$

$8 > 2$ ? Sì  $\Rightarrow j++$

$4 > 2$ ? Sì  $\Rightarrow j++$

Scambio  $A[i+1]$  con  $x$ , ottenendo

$$\boxed{0} \boxed{2} \boxed{9} \boxed{8} \boxed{4} \boxed{6}$$

I primi due ( $i + 1$ ) elementi sono ordinati:

$$\boxed{0} \boxed{2}$$

Chiamo ricorsivamente **QuickSort** con  $q = i + 1$ .

$$\boxed{9} \boxed{8} \boxed{4} \boxed{6} \quad \text{pivot: } \boxed{6}$$

$i$  punta alla cella 0 (ossia nessuna cella)

$j$  punta alla cella 1:  $\boxed{9}$

$9 > 6$ ? Sì  $\Rightarrow j++$

$8 > 6$ ? Sì  $\Rightarrow j++$

$4 > 6$ ? No  $\Rightarrow i++, A[i] \leftrightarrow A[j], j++$

4	8	9	6
---	---	---	---

**pivot:**

2
---

i punta alla cella 1: 

4
---

  
 j punta alla cella 4: 

6
---

, quindi ho finito.  
 Scambio  $A[i+1]$  con  $x$ , ottenendo

4	6	9	8
---	---	---	---

I primi due  $(i + 1)$  elementi sono ordinati:

4	6
---	---

Chiamo ricorsivamente **QuickSort** con  $q = i + 1$ .

9	8
---	---

**pivot:**

8
---

i punta alla cella 0 (ossia nessuna cella)  
 j punta alla cella 1: 

9
---

  
 $9 > 8$ ? Sì  $\Rightarrow j++$   
 Ho finito, scambio  $A[i+1]$  con  $x$ , ottenendo

8	9
---	---

Guardando l'array completo ottengo il risultato atteso:

0	2	4	6	8	9
---	---	---	---	---	---

### 4.2.2 Complessità di Quick Sort

Partition costa  $\Theta(n)$

$$T^{QS} = \Theta(n) + T^{QS}(q - p) + T^{QS}(n - (q - p) - 1)$$

$$q - p < n$$

#### Caso peggiore

$$T^{QS} = \Theta(n) + T^{QS}(n - 1) = \Theta(n^2) \quad (\Theta(n) = cn)$$

$$T(n)$$

$$cn$$

$$cn - 1$$

$$cn - 2$$

$$\dots$$

$$d$$



$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} c(n-j) + d &= \sum_{k=1}^n ck + d = \\ &= c \sum_{k=1}^n k + d \quad \left( \frac{c(n+1)n}{2} + d = \Theta(n^2) \right) \end{aligned}$$

$$T(n) = \Theta(n^2) \Rightarrow \begin{cases} = O(n^2) \\ = \Omega(n^2) \end{cases}$$

- $T(n) = O(n^2)$

$$\begin{aligned} T(n) = O(n^2) &\Rightarrow T(n) \leq cn^2 \quad \forall n \geq n_0, c > 0 \\ &= T(n-1) + \Theta(n) \leq dn \\ &\leq c(n-1) + dn \\ &= cn^2 - 2cn + c + dn \leq cn^2 \\ &2cn - dn - c \geq 0 \end{aligned}$$

$$n(2c - d) - c \geq 0 \quad \text{ok, } c > \frac{d}{2}$$

$$T(n) = O(n^2)$$

- $T(n) = \Omega(n^2)$  analogo.

### Caso migliore

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

**Caso medio** Qualunque partizionamento proporzionale da complessità  $\Theta(n \log n)$ , come ad esempio

$$T(n) = T\left(\frac{n}{10}\right) + T\left(\frac{9n}{10}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Solo il caso in cui una delle due partizioni è costante, si ricade nel caso pessimo. Per ovviare al problema, si può utilizzare una versione di **Partition** che rende impossibile il partizionamento costante.

**RANDOMIZEDPARTITION**( $A, p, r$ )

- 1  $q = \text{RANDOM}(p, r)$
- 2  $A[q] \leftrightarrow A[r]$
- 3 **return** **PARTITION**( $A, p, r$ )

### 4.3 Quick Sort a Tre Partizioni

QuickSort con RandomizedPartition funziona bene ed evita, quasi in ogni circostanza, di imbattersi nel caso pessimo, ad eccezione di un caso particolare: se in **input** viene dato un array con tutti gli elementi uguali, si ottiene il temuto caso pessimo  $O(n^2)$ .

Per ovviare al problema, è sufficiente partizionare QuickSort in tre partizioni invece di due. Dato un **pivot**  $x$ , partizioniamo  $A$  nel seguente modo:

$< x$	$= x$	$> x$
-------	-------	-------

Durante l'algoritmo, la disposizione sarà questa:

$< x$	$= x$		$> x$
-------	-------	--	-------

(La cella vuota è la regione ancora da esplorare).

TRIPARTITION( $A, p, r$ )

```

1   $x = A[r]$ 
2   $i = p - 1$ 
3   $k = p$ 
4   $j = r$ 
5  while  $k < j$ 
6      if  $A[k] < x$ 
7           $i = i + 1$ 
8           $A[i] \leftrightarrow A[k]$ 
9           $k = k + 1$ 
10     else if  $A[k] > x$ 
11          $j = j - 1$ 
12          $A[j] \leftrightarrow A[k]$ 
13     else
14          $k = k + 1$ 
15      $// k = j$ 
16      $A[j] \leftrightarrow A[r]$ 
17 return  $(i + 1, j)$  // restituisce una coppia di valori
```

QUICKSORT( $A, p, r$ )

```

1  if  $p < r$ 
2       $q_1, q_2 = \text{TRIPARTITION}(A, p, r)$ 
3      QUICKSORT( $A, p, q_1 - 1$ )
4      QUICKSORT( $A, q_2 + 1, r$ )
```

## 4.4 Limite Inferiore

Input:  $a_1 \dots a_n$

Output: permutazione  $a'_1 \dots a'_n$  tale che

$$a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$$

**Confronti e assegnamenti** Osservazioni:

- Se “conto” solo alcune operazioni il limite inferiore vale in generale. Consideriamo solo l'operatore di confronto;
- Elementi tutti distinti ( $a_i \neq a_j$  se  $i \neq j$ ), l'operatore di confronto == restituisce sempre FALSE.

## 4.5 Albero di Decisione

È una rappresentazione “astratta” delle possibili esecuzioni di un algoritmo di ordinamento su un input di dimensione fissata  $A[1 \dots n]$ .

→ nodi interni:

$$i : j \Rightarrow \text{confronta } A[i] \leq A[j]$$

→ **foglie** (ogni foglia è una possibile permutazione)

Ecco un esempio di **Albero di Decisione** per l'array  $A[a_1, a_2, a_3]$  con

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$$

### Osservazioni

- Altezza dell'albero di decisione = limite inferiore per caso pessimo

$$\text{per IS} \quad n^2$$

$$\text{per MS} \quad n \log n$$

- Ogni foglia ha una sola permutazione. Ogni permutazione compare (almeno) in una foglia.

**In generale**, le foglie contengono tutte le permutazioni.

$$\# \text{ foglie} \geq \# \text{ permutazioni} = n! \quad (\# \text{ foglie} \leq 2^h)$$

$$h \geq \log_2 n!$$

$$\geq \log_2 \left( n(n-1)(n-2) \dots \frac{n}{2} \right)$$

$$\geq \log_2 \left( \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \dots \frac{n}{2} \right)$$

$$\geq \log_2 \left( \frac{n}{2} \right)^{\left( \frac{n}{2} \right)} = \frac{n}{2} (\log_2 n - \log_2 2) = \frac{n}{2} (\log_2 n - 1) = \Theta(n \log n)$$

Inoltre,

- $\# \text{ operazioni} \geq h = \Omega(n \log n)$
- HeapSort, MergeSort  $O(n \log n)$

$\Rightarrow$  ordinamento (basato su confronti)  $\Theta(n \log n)$

## 4.6 Counting Sort

Esistono degli algoritmi di ordinamento che, in certe condizioni e per certi input, permettono di ordinare in tempo lineare  $\Omega(n)$

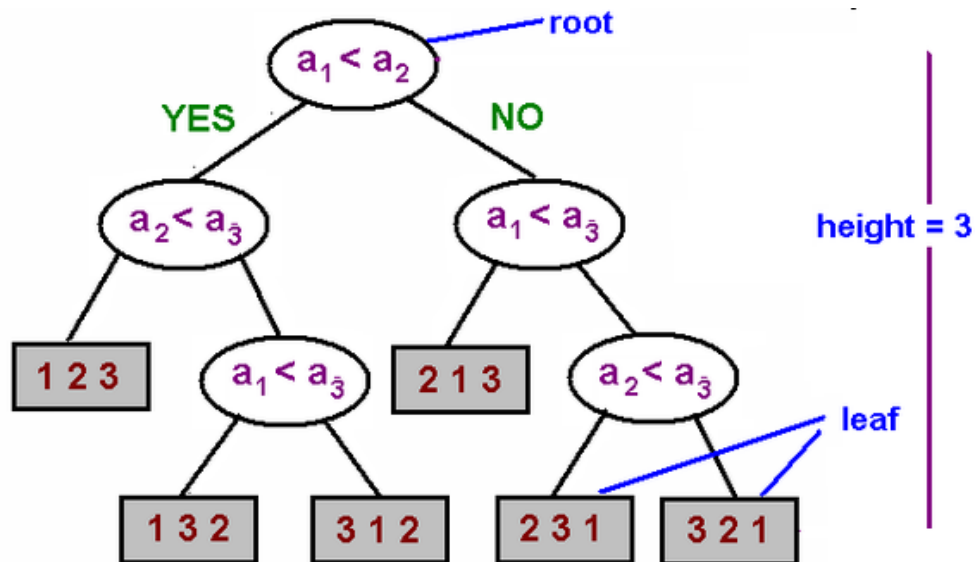


Figura 5: Albero di decisione per l'array  $A[1, 2, 3]$

Assumo

- interi;
- in  $[0, k]$

**Input:**  $A[1..n]$  con  $A[j] \in [0, k] \quad \forall 1 \leq j \leq n$ ;

**Output:**  $B[1..n]$  permutazione ordinata di  $A$ ;

**Supporto:**  $C[0..k]$ .

COUNTINGSORT( $A, B, k$ )

```

1   $C[0..k] \leftarrow 0$ 
2  for  $j = 1$  to  $A.length$ 
    //  $C[x] = \#elem$  in  $A$  con valore  $x$ 
3     $C[A[j]] = C[A[j]] + 1$ 
4  for  $i = 1$  to  $k$ 
    //  $C[x] = \#elem$  in  $A$  con valore  $\leq x$ 
5     $C[i] = C[i - 1] + C[i]$ 
6  for  $j = A.length$  down to 1
7     $B[C[A[j]]] = A[j]$ 
8     $C[A[j]] = C[A[j]] - 1$ 
```

**Complessità**

$C[0, k] \leftarrow 0$	$\Theta(k)$
<b>for</b> $j=1 \dots$	$\Theta(n)$
<b>for</b> $i=1 \dots$	$\Theta(k)$
<b>for</b> $j=A.length \dots$	$\Theta(n)$

Somma  $\Theta(n + k)$  con  $k = \Theta(1) \Rightarrow \Theta(n)$

**Problema di memoria** Il problema di CountingSort è la memoria. Infatti, al crescere di  $k$ , la memoria richiesta per allocare  $\mathbf{C}$  cresce esponenzialmente.

Dimensione $k$	Memoria occupata da $\mathbf{C}[]$
1 Byte = 8 bit	$2^8 \text{Bytes} = 256 \text{Bytes}$
2 Bytes = 16 bit	$2^{16} \text{Byte} \cdot 2 \text{Bytes} = 256 \text{Megabytes}$
8 Bytes = 64 bit	$2^{64} \text{Byte} \cdot 8 \text{Bytes} = 512 \text{Terabytes}$

### 4.6.1 Proprietà di Stabilità

Dato  $A[1..n]$  in input, se  $A[i] \leq A[j]$  con  $i \leq j$ , allora nell'output  $A[i]$  e  $A[j]$  sono nello stesso ordine relativo.

Algoritmi stabili:

- MergeSort
- InsertionSort

Algoritmi non stabili:

- CountingSort
- QuickSort
- HeapSort

## 4.7 Radix Sort

Il **Radix Sort** è un algoritmo di ordinamento in tempo lineare  $O(n)$ , come **CountingSort**, che risolve i problemi di memoria di quest'ultimo.

L'idea è quella di ordinare cifra per cifra, dalla cifra meno significativa alla più significativa con un algoritmo **stabile**.

(iniziale)	(terza cifra)	(seconda cifra)	(prima cifra)
329	720	720	329
457	355	329	355
657	436	436	436
839	457	839	457
436	657	355	657
720	329	457	720
355	839	657	839

Input:  $A[1..n]$  con  $A[i]$  di  $d$  cifre e base  $b$ ,  $A[i] = a_d a_{d-1} \dots a_1$ .

**RADIXSORT**( $A, d$ )

```

1  for  $j = 1$  to  $d$ 
2      ordina  $A$  rispetto alla cifra  $j$  //  $A^j[i] = a_j a_{j-1} \dots a_1$ 
      con COUNTINGSORT //  $A^{j-1}$  ordinato

```

### Correttezza di Radix Sort

- **Inizializzazione:** ok;
- **Mantenimento:** se  $A^{j-1}$  è ordinato e ordino rispetto alla  $j$ -esima cifra con un algoritmo stabile, allora  $A^j$  è ordinato.

$$i < i' \Rightarrow A^j[i] \leq A^j[i']$$

$$\begin{aligned} \text{Siano } A^j[i] &= a_j a_{j-1} \dots a_1 \\ A^j[i'] &= a'_j a'_{j-1} \dots a_1 \end{aligned}$$

Posso distinguere due casi:

1.

$$\begin{aligned} a_j \neq a'_j &\Rightarrow a_j < a'_j \\ &\Rightarrow A^j[i] < A^j[i'] \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
a_j = a'_j &\Rightarrow A^j[i] \leq A^j[i'] && \text{(stabilità)} \\
&\Rightarrow A^j[i] = a_j A^j[i] \leq \\
&\leq A^j[i'] = a'_j A^{j-1}[i']
\end{aligned}$$

**Complessità**

$$\begin{aligned}
d \text{ volte CountingSort } \Theta(n+b) &\Rightarrow \Theta(d(n+b)) = \Theta(n) \\
\text{con } d \text{ cifre } &= \Theta(1), \text{ base } b = \Theta(n)
\end{aligned}$$

$m$  bit,  $r$  bit per cifra,  $\frac{m}{r}$  cifre, base  $2^r$

$$\begin{aligned}
\Theta\left(\frac{m}{r}(m+2^r)\right) &= && r = \log_2 n \\
&= \Theta\left(\frac{m}{\log n}(n+2^{\log n})\right) \\
&= \Theta\left(\frac{m}{\log n}n\right) && m = O(\log n) \\
&= \Theta(n)
\end{aligned}$$

**5 Tabelle Hash**

$U$  universo delle chiavi

$$U = \{0, 1, \dots, |U| - 1\}$$

$T[0 \dots |U| - 1]$  tabella hash

$$T[k] \text{ contiene } \begin{cases} \text{elemento } x \text{ con } x.key = k & \text{se c'è} \\ \text{NIL} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

INSERT( $T, x$ )

$$1 \quad T[x.key] = x \text{ // } \Theta(1)$$

DELETE( $T, x$ )

$$1 \quad T[x.key] = \text{NIL} \text{ // } \Theta(1)$$

SEARCH( $k$ )

$$1 \quad \textbf{return } T[k] \text{ // } \Theta(1)$$



**Problema** e.g. consideriamo che la **key** sia di 8 caratteri (e 8 bit per rappresentare un carattere). Risulta molto costosa in termini di memoria la tabella hash.

$$\begin{aligned} & 2^8 \dots 2^8 \\ (2^8)^8 &= 2^{64} \cong 10^{19} \end{aligned}$$

**Idea**

$$\begin{aligned} U &= \{0, 1, \dots, |U| - 1\} \\ T[0 \dots m - 1] & \quad m \ll |U| \end{aligned}$$

La “traduzione” per ottenere  $x.key$  da  $x$  cosa comporta?

$$\begin{aligned} h: U &\rightarrow \{0, 1, \dots, m - 1\} \text{ funzione di } \mathbf{hashing} \\ n &= \# \text{ elementi memorizzati nella tabella } T \\ m &= \# \text{ celle} \end{aligned}$$

Se  $n > m$ , esisteranno  $x_1, x_2 : h(x_1.key) = h(x_2.key) \Rightarrow$  conflitto

Abbiamo **due soluzioni**:

1. **Chaining** (5.1);
2. **Open Addressing** (5.2).

## 5.1 Chaining

Il **Chaining** propone come soluzione quella di mettere sulla tabella liste dinamiche di elementi, invece che singoli elementi, in modo che in caso si incorra in una cella già occupata dopo un **hashing**, l'elemento venga inserito in coda (o in testa) alla lista.

**Idea**  $T[i] =$  lista elementi  $x$  tali che  $h(x.key) = i$

INSERT( $T, x$ )

1 Inserisci  $x$  nella lista  $T[h(x.key)]$  //  $O(1)$

DELETE( $T, x$ )

1 Elimina  $x$  da  $T[h(x.key)]$  //  $O(1)$

SEARCH( $T, k$ )

1 Cerca in  $T[h(k)]$  un elemento  $x$  tale che  $x.key = k$  //  $O(n)$

**Search** ha una complessità di  $O(n)$ , e questo è inaccettabile.

$$\begin{aligned} n &= \# \text{ elementi inseriti} \\ m &= \text{dimensione di } T \\ \alpha &= \frac{n}{m} \quad \text{fattore di carico} \\ \alpha &\text{ può essere } <, = \text{ oppure } > \text{ di } 1 \end{aligned}$$

### 5.1.1 Hashing uniforme semplice

Ogni elemento di **input** è “mandato” da  $h$  con la stessa probabilità  $\left(\frac{1}{m}\right)$  in una delle  $m$  celle.

**Caso medio**  $\Theta(1 + \alpha)$ , 1 è l'accesso alla tabella.

Consideriamo  $n_1, n_2, \dots, n_{m-1}$  la lunghezza delle  $m$  liste. La lunghezza attesa di una lista è:

$$E[n_j] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m} \cdot 1 = \frac{n}{m} = \alpha$$

**Ricerca di una chiave** La chiave può essere:

- **Assente.**  $\text{Search}(k)$ ,  $k$  non c'è.
  - Calcolo  $h(k) \rightarrow (\Theta(1))$ ;
  - Accedo a  $T[h(k)] = j \rightarrow (\Theta(1))$ ;
  - Scorro  $n_j$  elementi ( $n_j = \alpha$ )  $\rightarrow (\Theta(\alpha))$ .

Nel complesso, ho  $\Theta(1 + \alpha)$

- **Presente.**  $\text{Search}(k)$ ,  $k$  presente.
  - $h(k)$  e  $T[h(k)]$

Se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono gli elementi inseriti

Costo della ricerca di  $x_i$ :

$$\begin{aligned}
 & 1 + \# \text{ elementi } x_j : j > i, h(x_i.key) = h(x_j.key) \\
 & = 1 + \sum_{j=i+1}^n (\text{prob } h(x_i.key) = h(x_j.key)) \\
 & = 1 + \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{m} = 1 + \frac{n-i}{m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( 1 + \frac{n-i}{m} \right) \\
 & = \frac{1}{n} \left( n + \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{m} \right) = \frac{1}{n} \left( n + \frac{1}{m} \sum_{z=0}^{n-1} z \right) \\
 & = 1 + \frac{1}{m \cdot n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 1 + \frac{n}{2m} - \frac{1}{2m} \cdot \left( \frac{n}{n} \right) \quad \left( \alpha = \frac{n}{m} \right) \\
 & = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2n} = \Theta\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) = \Theta(1 + \alpha)
 \end{aligned}$$

$\alpha$  costante

$n = O(m)$

$n \leq k \cdot m$

$\alpha = \frac{n}{m} \leq k$

$\Rightarrow \Theta(1 + \alpha) = \Theta(1)$

- $h: U \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\} \Rightarrow h(x) = 0$

### 5.1.2 Funzioni Hash

Una **funzione hash** deve soddisfare la proprietà di **hashing uniforme**, ossia

“Ogni chiave ha la stessa probabilità  $\frac{1}{m}$  di essere mandata in una qualsiasi delle  $m$  celle, indipendentemente dalle chiavi inserite precedentemente.”

Consideriamo:

- $k \in [0, 1)$  ( $0 \leq k < 1$ ),  $k$  chiave, estratta in modo indipendente dalla distribuzione uniforme (non realistica).
- Allora  $h(k) = \lfloor mk \rfloor$  soddisfa la proprietà di **hashing uniforme**.

L'ipotesi di hash uniforme semplice dipende dalle probabilità con cui vengono estratti gli elementi da inserire; probabilità che in genere non sono note. Le funzioni hash che descriveremo assumono che le chiavi siano degli interi non negativi.

#### Metodo della divisione

$$\begin{aligned} U &= \{0, 1, \dots, |U| - 1\} \\ h(k) &\in \{0, 1, \dots, m - 1\} \\ h(k) &= k \bmod m \end{aligned}$$

- $m = 2^p$  caso pessimo;
- $m = 2^p - 1$  caso non buono.  $2^p$  cifre base.

La soluzione migliore è quella di scegliere chiavi lontane dalle potenze di 2, meglio ancora se numeri primi.

#### Metodo della moltiplicazione

$$k \in U$$

$$0 < A < 1 \text{ fissato}$$

$$h(k) = m(kA \bmod 1) \quad \text{Miglior } A : \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$m = 2^p \quad w = \# \text{ bit parola}$$

$$A = \frac{q}{2^w} \quad 0 < q < 2$$

$$m(kA \bmod 1)$$

$$= m \left( k \frac{q}{2^w} \bmod 1 \right) \quad (\textbf{shift di } w \text{ bit, prendo la parte decimale}$$

$$ka \bmod 1 \text{ e la moltiplico per } m = 2^p)$$

### 5.1.3 Hashing Universale

Per avere una distribuzione più uniforme delle chiavi nelle liste e non dipendente dall'input, possiamo usare la **randomizzazione**.

Insieme  $H$  di funzioni di hash. Scelgo randomicamente  $h \in H$ .

Sotto certe ipotesi ottengo per **Search**:

$$\Theta(1 + \alpha)$$

**Def (Hashing universale)**  $\forall k_1, k_2 \in U, k_1 \neq k_2$

$$|\{h \in H : h(k_1) = h(k_2)\}| \leq \frac{|H|}{m}$$

$$prob(h(k_1) = h(k_2)) = \frac{|\{h \in H : h(k_1) = h(k_2)\}|}{|H|} \leq \frac{1}{m}$$

**Teorema** Con il **chaining**,  $H$  è universale  $\forall k \in U, j = h(k)$

$$\text{Costo medio } \Theta(1 + \alpha) \begin{cases} k \text{ non è in } T \rightarrow E[n_j] \leq \alpha \\ k \text{ è in } T \rightarrow E[n_j] \leq 1 + \alpha \end{cases}$$

## 5.2 Open Addressing

$h(k, i)$ :  $k$  è la chiave,  $i$  è il tentativo.

Provo con  $h(k, 0)$ : se capito in una cella occupata, provo con  $h(k, 1)$ , poi  $h(k, 2)$  e così via, fino a che non trovo una cella libera.

Per esplorare tutta la tabella:

$$h(k, 0), h(k, 1), \dots, h(k, m-1) \quad \forall k \in U$$

che è una permutazione di

$$\{0, 1, \dots, m-1\}$$

INSERT( $T, x$ )

```

1   $i = 0$ 
2  repeat
3       $j = h(x.key, i)$ 
4      if ( $T[j] = \text{NIL}$ ) or ( $T[j] = \text{DELETED}$ ) // posizione libera
5           $T[j] = x$ 
6          return  $j$ 
7       $i = i + 1$ 
8  until  $i = m$ 
9  error
```

SEARCH( $T, k$ )

```

1   $i = 0$ 
2  repeat
3       $j = h(k, i)$ 
4      if  $T[j].key = k$ 
5          return  $j$ 
6       $i = i + 1$ 
7  until ( $i = m$ ) or ( $T[j] = \text{NIL}$ )
8  return NOT FOUND
```

DELETE( $T, j$ )

```

1   $T[j] = \text{DELETED}$ 
```

L'Open Addressing risulta una soluzione inefficiente in caso avvengano molte cancellazioni.

### 5.2.1 Hashing Uniforme

Per ogni elemento di input, tutte ( $m!$ ) le sequenze di ispezione sono equiprobabili.

### 5.2.2 Funzioni di Hash

1. **Ispezione lineare.** Sia  $h'(k)$  funzione di hash “ordinaria”. Se ricado in una cella occupata, mi sposto su quella immediatamente successiva.

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m$$

Caratteristiche:

- è semplice;
- poche permutazioni ( $m$  dipende solo da  $h'(k)$ );
- causa addensamenti di celle occupate (**addensamento primario**).

2. **Ispezione quadratica.** Fisso  $h'(k)$ .

$$h(k, i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m, \quad c_2 > 0$$

3. **Doppio Hash.** Fisso  $h_1(k), h_2(k)$

$$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod m$$

**Osservazioni:**

- I salti sono di dimensione  $h_2(k)$  all'incrementare di  $i$ ;
- Ci sono  $m^2$  sequenze di ispezione;
- $h_2(k)$  e  $m$  primi tra loro ( $MCD = 1$ );
- $h(k, 0), h(k, 1), \dots, h(k, m-1)$  è permutazione di  $\{0, 1, \dots, m-1\}$ ;
- $i, i' < m \quad h(k, i) = h(k, i') \Rightarrow i = i' \quad (\text{iniettività})$

$$h(k, i): \{0, \dots, m-1\} \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$$

**iniettiva  $\Rightarrow$  biiettiva**

$$\begin{aligned} h(k, i) &= h(k, i') \\ (h_1(k) + i h_2(k)) \bmod m &= (h_1(k) + i' h_2(k)) \bmod m \\ ((i - i') h_2(k)) \bmod m &= (i h_2(k) - i' h_2(k)) \bmod m = 0 \\ (i - i') \bmod m &= 0 \\ i \geq i' \quad i - i' < m - 1 \\ \Rightarrow i - i' &= 0 \\ \Rightarrow i &= i' \end{aligned}$$

Scelgo  $m = 2^p$ ,  $h_2(k) = 1 + 2h'(k)$ ,  $h'(k)$  qualunque.

**es.**  $h_2(k) = 1 + h'(k \bmod m')$  con  $m' < m$ ,  $m$  primo

**Costo** Il costo della Search con **hashing uniforme** si può riassumere come segue.

$$0 \leq \alpha = \frac{n}{m} \leq 1$$

**Ricerca di una chiave non presente**

(a)  $\frac{1}{1-\alpha}$  se  $\alpha < 1$

(b)  $m$  se  $\alpha = 1$

**Probabilità di ispezionare la i-esima cella**

cella	probabilità
$i = 0$	1
$i = 1$	prob. cella 0 occupata: $\frac{n}{m}$
$i = 2$	prob. cella 1 occupata: $\frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1}$
$\dots$	
$i$	$\frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \dots \frac{n-i+1}{m-i+1} \leq \alpha \cdot \alpha \dots \alpha = \alpha^i$

Valore atteso per # tentativi

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{i-1} + \dots + \alpha^{m-1}$$

(a)  $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1-\alpha^m}{1-\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}$

(b)  $m$

**Ricerca di una chiave presente**

(a)  $\frac{1}{\alpha} \log \left( \frac{1}{1-\alpha} \right)$   $\alpha < 1$

(b)  $1 + \log m$   $\alpha = 1$

Costo atteso per  $k_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \alpha_{i-1}} &= \frac{1}{1 - \frac{i-1}{m}} & \left( \alpha_{i-1} = \frac{i-1}{m} < 1 \right) \\ &= \frac{m}{m - i + 1} \end{aligned}$$

Il costo atteso è la media per  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{m}{m - i + 1} = \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m - i + 1} & \left( \frac{m}{n} = \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{j=m-n+1}^m \frac{1}{j} \end{aligned}$$



◦ Se  $\alpha < 1$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{\alpha} \int_{n-m}^m \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{1}{\alpha} (\log m - \log(m-n)) = \frac{1}{\alpha} \left( \log \frac{m}{m-n} \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{\frac{m-n}{m}} \\
 &= \frac{1}{\alpha} \log \left( \frac{1}{1 - \left(\frac{n}{m}\right)} \right) = \frac{1}{\alpha} \log \left( \frac{1}{1 - \alpha} \right)
 \end{aligned}$$

◦ Se  $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^m \frac{1}{l} &= 1 + \sum_{l=2}^m \frac{1}{l} \leq \int_1^m \frac{1}{x} dx \\
 &= 1 + (\log m - \log 1) = 1 + \log m
 \end{aligned}$$

Confrontiamo le complessità dei due casi.

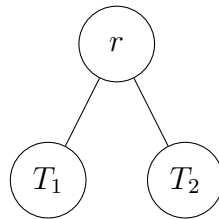
$\alpha$	$\frac{l}{1-\alpha}$	$\frac{1}{\alpha} \log \left( \frac{1}{1-\alpha} \right)$
$\alpha = 0.3$	1.43	1.19
$\alpha = 0.5$	2.00	1.39
$\alpha = 0.7$	3.33	1.72
$\alpha = 0.9$	10	2.56
$\alpha = 0.99$	100	4.65

## 6 Alberi

### 6.1 Alberi Binari di Ricerca

#### Definizione induttiva

- $\emptyset$  è un albero;
- Se  $r$  è un nodo,  $T_1$  e  $T_2$  alberi  $\Rightarrow r(T_1, T_2)$  è un albero.



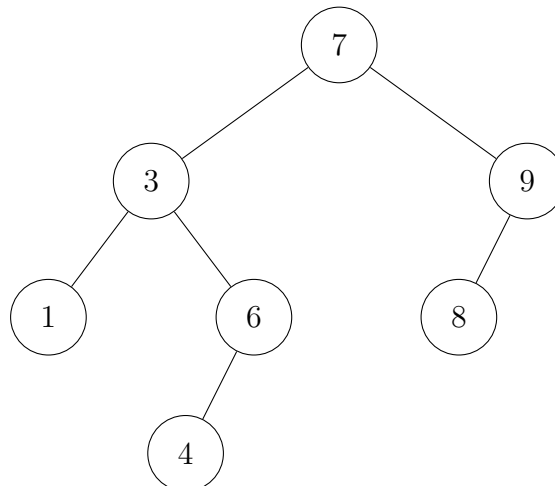
Ogni nodo  $x$  ha i seguenti campi:

- $x.p$
- $x.key$
- $x.left$
- $x.right$

#### Proprietà $\forall r$

- Per ogni nodo  $y$  in  $T_1$   $y.key \leq x.key$ ;
- Per ogni nodo  $y$  in  $T_2$   $y.key \geq x.key$ .

**Esempio** Ecco un albero binario di ricerca d'esempio:



### 6.1.1 Visita simmetrica

La visita simmetrica (ordine infisso) visita i nodi in ordine crescente.

IN-ORDER( $x$ )

```

1  if  $x \neq \text{NIL}$ 
2      IN-ORDER( $x.\text{left}$ )
3      PRINT( $x$ ) //  $\Theta(1)$ 
4      IN-ORDER( $x.\text{right}$ )

```

### Complessità

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 0 \\ T(k) + T(n - k - 1) + d & n > 0, k < n \end{cases}$$

Stima di complessità:  $T(n) = (c + d)n + c$ .

Vediamo la dimostrazione (per induzione).

( $n = 0$ )  $T(n) = c = (c + d) \cdot 0 + c$

( $n \rightarrow n + 1$ )  $T(n) = T(k) + T(n - k - 1) + d$ . Non basta l'induzione ordinaria, usiamo l'**induzione completa**.

( $n > 0$ ) Proprietà vera per  $n' < n$

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T(k) + T(n - k - 1) + d \\
 &\quad \text{con } T(k) = (c + d)k + c \text{ e } T(n - k - 1) = (c + d)(n - k - 1) + c \\
 &= (c + d)(k + n - k - 1) + 2c + d \\
 &= n(c + d) - c - d + 2c + d \\
 &= n(c + d) + c - \cancel{d} + \cancel{d} \\
 &\cong \Theta(n)
 \end{aligned}$$

### 6.1.2 Ricerca

Ricerca di una chiave  $k$  in un albero radicato nel nodo  $x$ .

- Se  $x$  è NIL  $\Rightarrow$  restituisce NIL;
- Altrimenti se  $x.\text{key} = k \Rightarrow$  restituisce  $x$ ;
- Altrimenti, ricorre sul prossimo nodo.

SEARCH( $x, k$ )

```
1  if ( $x = \text{NIL}$ ) or ( $x.\text{key} = k$ )
2      return  $x$ 
3  else if  $k < x.\text{key}$ 
4      return SEARCH( $x.\text{left}, k$ )
5  else
6      return SEARCH( $x.\text{right}, k$ )
```

**Complessità** La complessità è l'altezza  $h$  dell'albero, ovvero  $O(h)$ .

Vediamo una versione iterativa di **Search**.

SEARCH-IT( $x, k$ )

```
1  while ( $x \neq \text{NIL}$ ) or ( $x.\text{key} \neq k$ )
2      if  $k < x.\text{key}$ 
3           $x = x.\text{left}$ 
4      else
5           $x = x.\text{right}$ 
6  return  $x$ 
```

Procedura che restituisce il **minimo** di un albero:

MIN( $T$ )

```
1   $x = T.\text{root}$ 
2  if  $x = \text{NIL}$ 
3      return NIL
4  else
5      while  $x.\text{left} \neq \text{NIL}$ 
6           $x = x.\text{left}$ 
7  return  $x$ 
```

Procedura che restituisce il **massimo** di un albero.

MAX( $T$ )

```
1   $x = T.\text{root}$ 
2  if  $x = \text{NIL}$ 
3      return NIL
4  else
5      while  $x.\text{right} \neq \text{NIL}$ 
6           $x = x.\text{right}$ 
7  return  $x$ 
```

**Complessità**  $O(h)$

### 6.1.3 Successore di un nodo

Si intende il nodo elencato dopo un nodo  $x$  passato come parametro in una visita simmetrica.

Se le chiavi fossero tutte distinte, allora il **successore** di  $x$  è il minimo tra i “nodi più grandi di  $x$ ”.

- Se  $x$  ha un figlio destro, il **successore** è  $\text{MIN}(x.\text{right})$ ;
- Altrimenti, il successore è l’antenato più vicino di cui  $x$  è nel sottoalbero sinistro.

SUCCESSOR( $x$ )

```
1  if  $x.\text{right} \neq \text{NIL}$ 
2      return MIN( $x.\text{right}$ )
3  else
4       $y = x.p$ 
5      while ( $y \neq \text{NIL}$ ) and ( $x = y.\text{right}$ )
6           $x = y$ 
7           $y = y.p$ 
8      return  $y$ 
```

**Complessità**  $O(h)$

#### 6.1.4 Inserimento

INSERT( $T, z$ )

```
1   $x = T.root$ 
2   $y = NIL$ 
3  while  $x \neq NIL$ 
4       $y = x$ 
5      if  $z.key < x.key$ 
6           $x = x.left$ 
7      else
8           $x = x.right$ 
9   $z.p = y$ 
10 if  $y = NIL$ 
11      $T.root = z$ 
12 else
13     if  $z.key < y.key$ 
14          $y.left = z$ 
15     else
16          $y.right = z$ 
```

**Complessità**  $O(h)$

#### 6.1.5 Eliminazione di un nodo

Distingueremo 2 casi nell'algoritmo:

- (1)  $z$  ha al più un figlio;
- (2)  $z$  ha due figli.

Per fare ciò, usiamo una funzione ausiliaria **Transplant**, con complessità  $O(1)$ .

TRANSPLANT( $T, u, v$ )

```
1  if  $u.p = NIL$ 
2       $T.root = v$ 
3  else
4      if  $u = u.p.left$ 
5           $u.p.left = v$ 
6      else
7           $u.p.right = v$ 
8  if  $v \neq NIL$ 
9       $v.p = u.p$ 
```

```
DELETE( $T, z$ )
1  if  $z.left = \text{NIL}$ 
2      TRANSPLANT( $T, z, z.right$ )
3  else if  $z.right = \text{NIL}$ 
4      TRANSPLANT( $T, z, z.left$ )
5  else
6       $y = \text{MIN}(z.right)$ 
7      if  $y.p \neq z$ 
8          TRANSPLANT( $T, y, y.right$ )
9           $y.right = z.right$ 
10          $y.right.p = y$ 
11      $y.left = z.left$ 
12      $y.left.p = y$ 
13     TRANSPLANT( $T, z, y$ )
```

**Complessità**  $O(h)$

## 6.2 Red-Black Trees

I **Red-Black Trees** sono ABR i cui nodi hanno un campo **colore**  $x.color$ , che può essere:

- RED per il rosso;
- BLACK per il nero.

**Accorgimento** NIL sarà in realtà un nodo,  $T.nil$ , con  $T.nil.color = BLACK$ .

**Caratteristiche** **RB-Tree** è in realtà un ABR tale che:

- (1) Ogni nodo  $x$  ha  $x.color \in \{RED, BLACK\}$ ;
- (2) La radice  $root$  è BLACK;
- (3) Le foglie ( $T.nil$ ) sono BLACK;
- (4) Se  $x$  è RED, i figli sono BLACK;
- (5) Per ogni nodo  $x$ , ogni cammino da  $x$  a una qualsiasi delle foglie ha lo stesso numero di nodi BLACK (calcolato con  $bh(x)$ ).

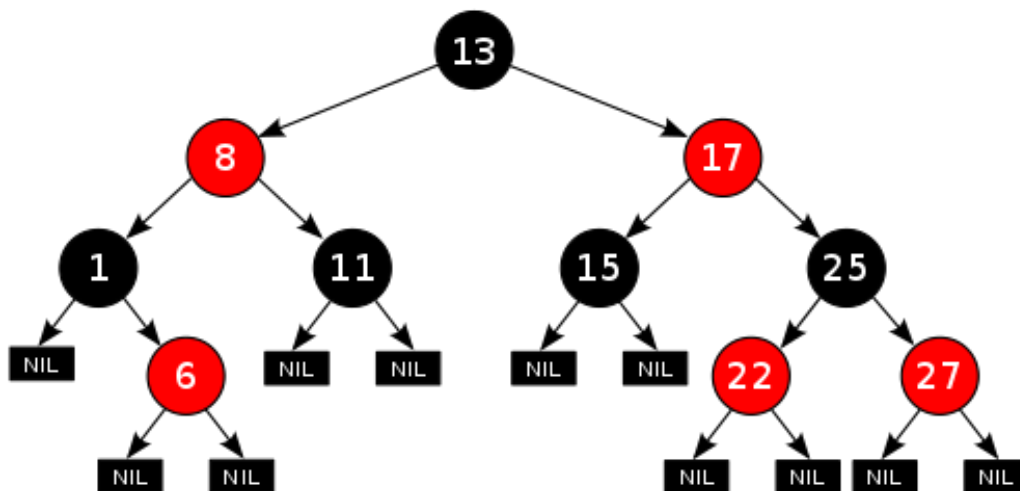


Figura 6: Esempio di un RB-tree.



È possibile notare che:

- In caso non ci fossero nodi rossi, avremo un albero perfettamente bilanciato;
- In ogni cammino, il # di nodi BLACK è almeno la metà del # dei nodi RED

**Osservazione** Se  $T$  è un **RB-Tree** con  $n$  nodi interni ( $\neq \text{NIL}$ ) e  $h$  altezza, allora vale

$$h \leq 2 \log(n + 1)$$

**Dimostrazione** Consideriamo

$$n_x \geq 2^{bh(x)} - 1$$

La dimostrazione è per induzione su  $h_x$  (altezza del sotto-albero radicato in  $x$ ).

( $h_x = 1$ ) Allora ho solo  $T.nil \Rightarrow n_x = 0 = 2^0 - 1$  ( $2^0$  con  $0 = bh(x)$ )

( $h_x > 1$ ) Consideriamo  $x$  radice.  $x$  ha due figli,  $x_1$  e  $x_2$ .

Sicuramente vale  $h_1, h_2 < h$ . Per ipotesi induttiva, valgono:

$$n_{x_1} \geq 2^{bh(x_1)} - 1$$

$$n_{x_2} \geq 2^{bh(x_2)} - 1$$

$$\begin{aligned} n_x &= n_{x_1} + n_{x_2} + 1 \\ &\geq 2^{bh(x_1)} + 2^{bh(x_2)} - 1 \\ &\geq 2 \cdot 2^{bh(x)-1} - 1 = 2^{bh(x)} - 1 \\ &\quad (\text{valgono } bh(x_1) \geq bh(x) - 1, \text{ } bh(x_2) \geq bh(x) - 1) \end{aligned}$$

Complessivamente

$$n = n_{root} \geq 2^{bh(root)} - 1$$

Essendo  $bh(root) \geq \frac{h}{2}$ , posso ottenere

$$\begin{aligned} n_{root} &\geq 2^{bh(root)} - 1 \\ &\geq 2^{\frac{h}{2}} - 1 \\ \Rightarrow 2^{\frac{h}{2}} &\leq n + 1 \\ \frac{h}{2} &\leq \log_2(n + 1) \Rightarrow h \leq 2 \log_2(n + 1) \end{aligned}$$

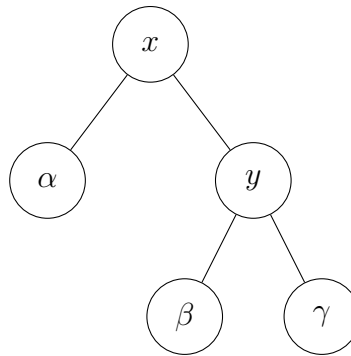
### 6.2.1 Complessità Algoritmi RB-Trees

Search, Succ, Min, Pred, Max hanno complessità  $O(h) = O(\log n)$

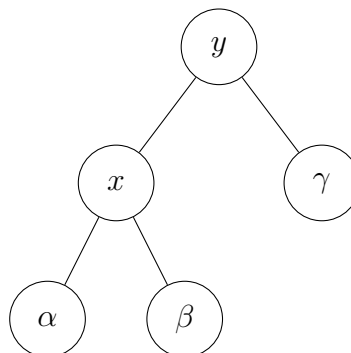
### 6.2.2 RB-Insert e RB-Delete

A differenza di quelle citate precedentemente, che risultano semplici sia come complessità asintotica che come implementazione, bisogna porre particolare attenzione a queste due procedure: **RB-Insert** e **RB-Delete**.

Per ovviare a ciò, posso utilizzare le **rotazioni**. Consideriamo il seguente albero, in cui  $x$  e  $y$  sono nodi normali, mentre  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sono sotto-alberi (il colore dei nodi non ha importanza ai fini della procedura che andremo a vedere)<sup>1</sup>:



Applichiamo  $\text{Left}(T, x)$ , ottenendo:



**Osservazione** La visita **simmetrica** è identica per i due alberi:

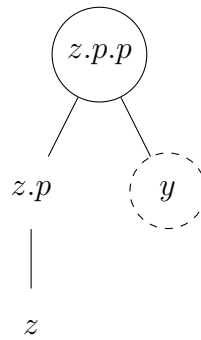
$$\alpha \rightarrow x \rightarrow \beta \rightarrow y \rightarrow \gamma$$

<sup>1</sup>Di conseguenza, applicandola a un **RB-Tree**, gli assiomi di validità potrebbero venire violati.

**RB-Insert( $T, z$ )** Voglio inserire  $z$  nell'albero  $T$ . L'idea è quella di porre  $z.color = \text{RED}$  poichè meno insidioso<sup>1</sup>.

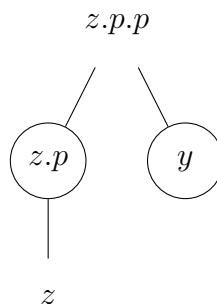
- Se violo (2)  $\Rightarrow z.color = \text{BLACK}$ ;
- Se violo (4):
  - Risolvo localmente;
  - Sposto verso l'alto il problema.

Abbiamo due **macrocasi**.  $z.p$  è figlio sinistro, oppure destro. Noi analizzeremo solo il primo:  **$z.p$  figlio sinistro**<sup>2</sup>.



Abbiamo due possibilità per  $y$ :

1.  $y.color = \text{RED}$ . Inverto il colore di  $z.p.p$  con quello dei figli, ottenendo:



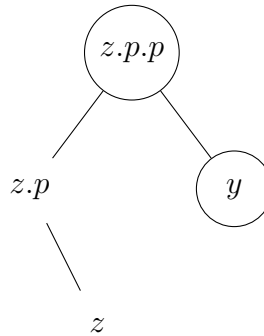
In questo modo, risolviamo localmente e rimandiamo il problema in alto.

<sup>1</sup>Andando a modificare il numero di nodi neri, cambia l'altezza nera, e la cosa è difficile da sistemare.

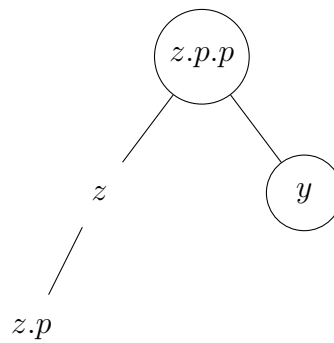
<sup>2</sup>I nodi non cerchiati sono RED, quelli cerchiati sono BLACK, quelli tratteggiati e puntinati possono essere sia RED che BLACK.

2.  $y.color = \text{BLACK}$ . Possiamo distinguere due sottocasi:

(2.1)  $z$  figlio destro.

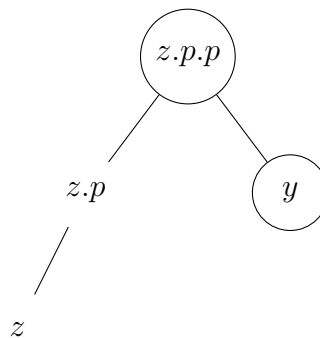


Applico  $\text{Left}(T, z.p)$ , ottenendo:

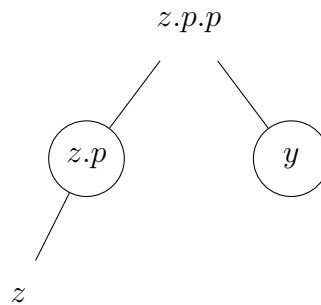


Mi riconduco al caso (2.2).

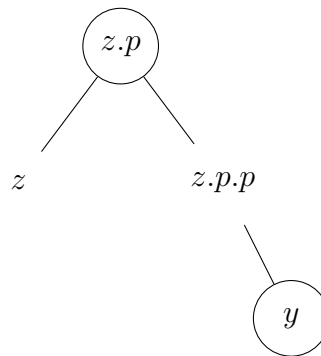
(2.2)  $z$  figlio sinistro.



Scambio i colori di  $z.p.p$  con  $z.p$ , ottenendo:



Applico  $\text{Right}(T, z.p.p)$ <sup>1</sup>, ottenendo:



$\text{RB-INSERT}(T, z)$

1  $\text{INSERT}(T, z)$

2  $z.\text{color} = \text{RED}$

3  $\text{RB-INSERT-FIXUP}(T, z)$

---

<sup>1</sup>Analoga di **Left**.

RB-INSERT-FIXUP( $T, z$ )

```

1  while  $z.p.color = \text{RED}$ 
2      if  $z.p = z.p.p.left$  // Macrocaso  $z.p$  figlio sinistro
3           $y = z.p.p.right$ 
4          if  $y.color = \text{RED}$  // Caso 1
5               $z.p.p.color = \text{RED}$ 
6               $z.p.color = \text{BLACK}$ 
7               $y.color = \text{BLACK}$ 
8               $z = z.p.p$ 
9          else // Caso 2
10             if  $z = z.p.right$  // Caso (2.1)
11                 LEFT( $T, z.p$ )
12                  $z = z.left$ 
13             // Caso (2.2)
14              $z.p.color = \text{BLACK}$ 
15              $z.p.p.color = \text{RED}$ 
16             RIGHT( $T, z.p.p$ )
17 else ... // Macrocaso  $z.p$  figlio destro
18  $T.root.color = \text{BLACK}$ 

```

**Complessità**  $O(\log n) + \max 2$  rotazioni

**RB-Delete( $T, z$ )** Distinguiamo 2 casi:

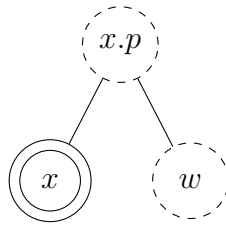
- (1)  $z$  ha un figlio;
- (2)  $z$  ha due figli.

Ci comportiamo allo stesso modo della **Delete( $T, z$ )** per un ABR, facendo però un'ulteriore accorgimento:

- se  $z.color = \text{RED}$  non ho problemi
- se  $z.color = \text{BLACK}$  violo (5):
  - Risolvo localmente;
  - Sposto verso l'alto il problema.

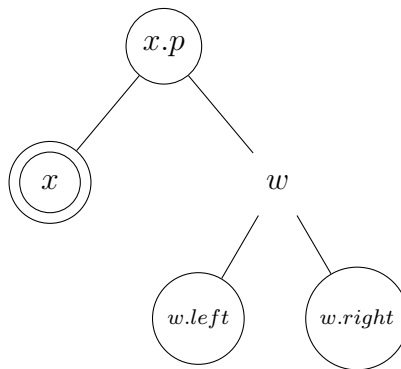
Dunque, in seguito alla **Delete( $T, z$ )**, il nodo  $x$  che ha preso il posto di  $z$  ne "assorbirà" il colore diventando doppiamente BLACK.

Abbiamo due **macrocasì**.  $x$  è figlio sinistro, oppure destro. Noi analizzeremo solo il primo: **x figlio sinistro**.

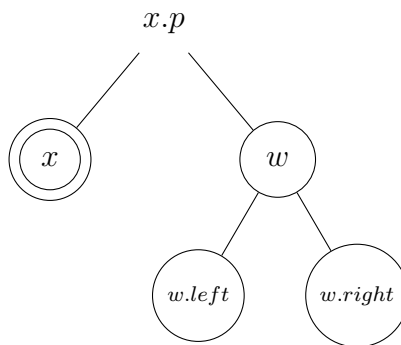


Abbiamo due possibilità per  $w$ :

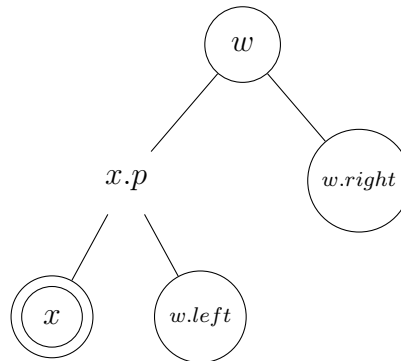
1.  $w.color = \text{RED}$



Scambio i colori di  $w$  con  $x.p$ , ottenendo:

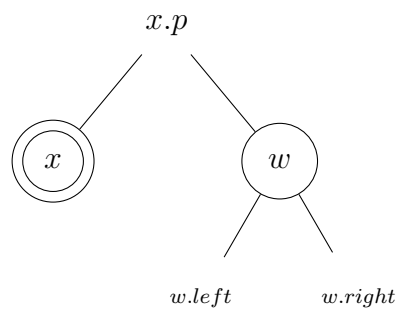


Applico  $\text{Left}(T, x.p)$ , ottenendo:



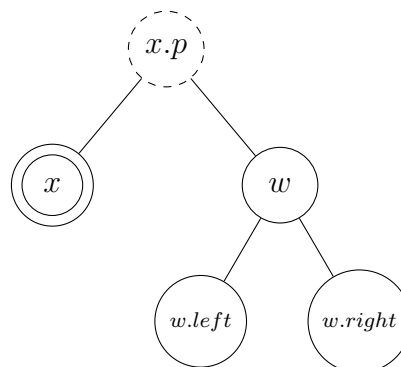
Mi riconduco al caso 2

2.  $w.color = \text{BLACK}$



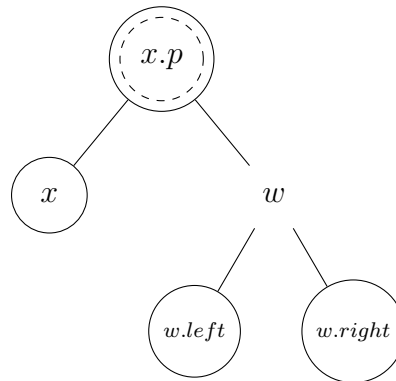
Possiamo distinguere tre sottocasi:

(2.1)  $w.left.color = \text{BLACK}$  e  $w.right.color = \text{BLACK}$



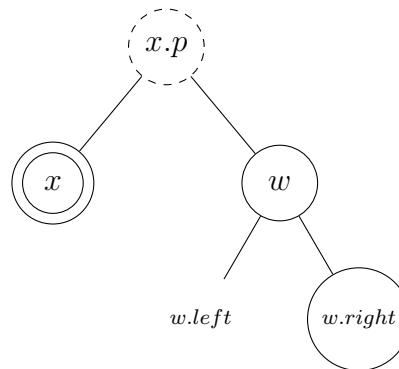
$x$  cede un suo BLACK a  $x.p$  e  $w$  diventa per forza RED, ottenendo:



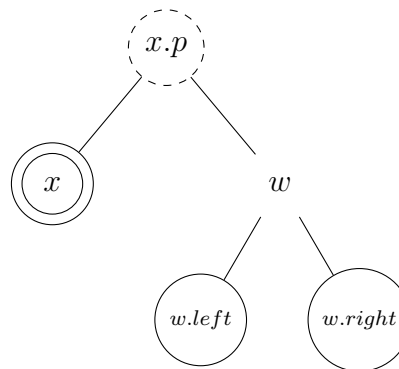


In questo modo, risolviamo localmente e rimandiamo il problema in alto.

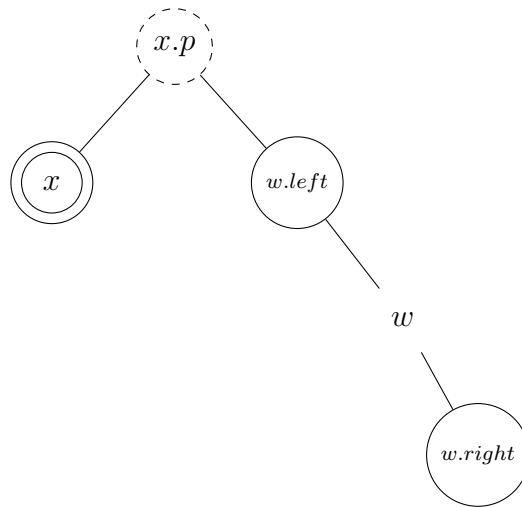
(2.2)  $w.right.color = \text{BLACK}$



Scambio i colori di  $w$  con  $w.left$ , ottenendo:

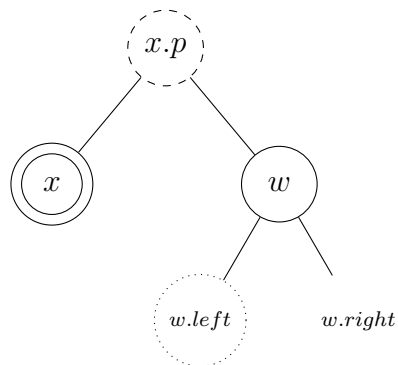


Applico  $\text{Right}(T, w)$ , ottenendo:

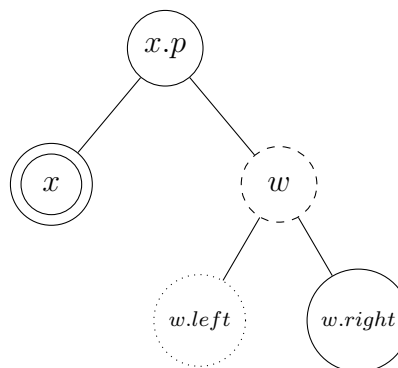


Mi riconduco al caso (2.3)

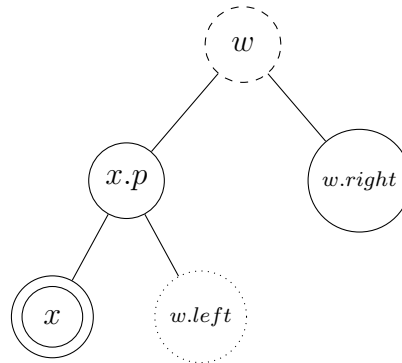
(2.3)  $w.right.color = \text{RED}$



Scambio i colori di  $x.p$  con  $w$  e  $w.right$  diventa BLACK, ottenendo:



Applico  $\text{Left}(T, x.p)$ , ottenendo:



Ho risolto.

**Complessità**  $O(\log n) + \max 3$  rotazioni

## 6.3 Arricchimento di Strutture Dati

Vedremo due esempi, uno per gli RB-Trees, e un altro per gli ABR.

- **Statistiche d'ordine** (6.3.1)
- **Interval Trees** (6.3.3)

### 6.3.1 Statistiche d'ordine

Struttura che parte da un RB-Tree. Aggiungo:

- $\text{Select}(T, i) \equiv$  nodo  $x$  che occuperebbe la posizione  $i$  nei nodi ordinati per chiave (in una **visita simmetrica**);
- $\text{Rank}(T, x) \equiv$  posizione  $i$  (in una **visita simmetrica**) che occupa il nodo  $x$ .

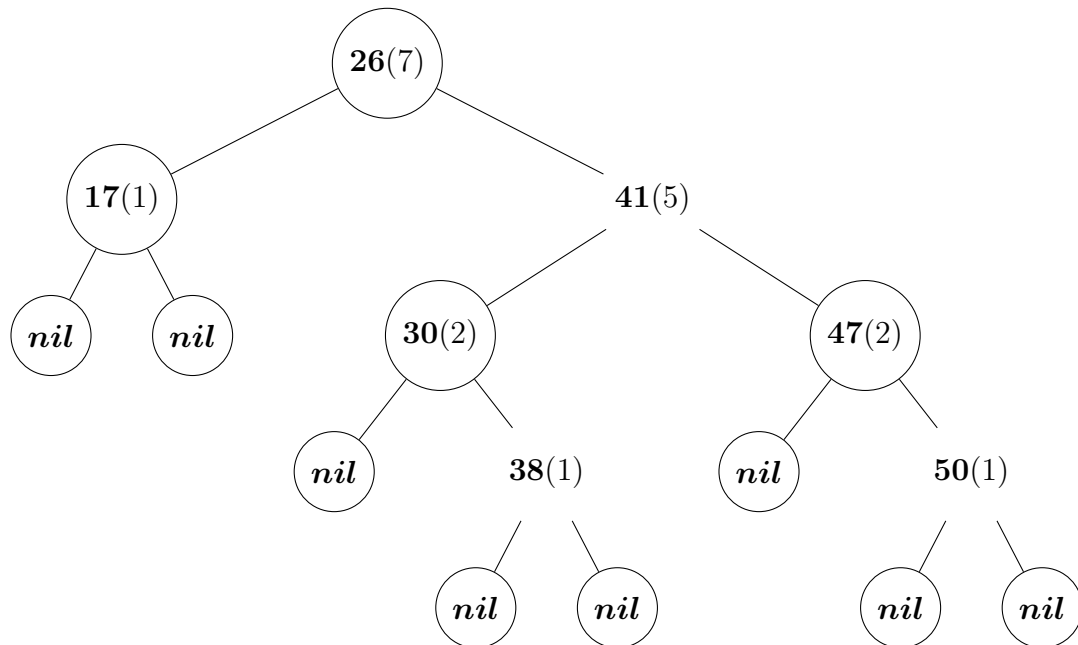
Per implementare queste due procedure, ho bisogno di un nuovo campo dati. Aggiungo il campo

$$x.size = \# \text{nodi radicati nel sottoalbero } T_x$$

Valgono

$$\begin{aligned} T.nil.size &= 0 \\ x.size &= x.left.size + x.right.size + 1 \end{aligned}$$

**Esempio** In ogni nodo, tra le parentesi è riportato la *size* di quel nodo. Ricordiamo che i nodi *nil* ( $T.nil$ ) hanno *size* = 0.



Vediamo un'implementazione non efficiente della procedura **Size**.

**SIZE**( $x$ )

```

1  if  $x = T.nil$ 
2       $x.size = 0$ 
3  else
4       $l = \text{SIZE}(x.left)$ 
5       $r = \text{SIZE}(x.right)$ 
6       $x.size = l + r + 1$ 
7  return  $x.size$ 
  
```

**Complessità** La complessità è  $O(n)$ , che come preannunciato, non è efficiente. Questo perchè le procedure **Insert/Delete** di un RB-Tree sono nel peggiore dei casi  $O(h)$ .

Questa procedura, **Select**, restituisce il nodo di posizione  $i$  in  $T_x$  in una visita simmetrica.

```

SELECT( $x, i$ )
    // Pre:  $x \neq T.nil, i : 1 \leq i \leq x.size$ 
1   $r = x.left.size + 1$ 
2  if  $i = r$ 
3      return  $x$ 
4  else if  $i < r$ 
5      return SELECT( $x.left, i$ )
6  else
7      return SELECT( $x.right, i - r$ )

```

**Complessità**  $O(h) = O(\log n)$

Rank restituisce la posizione  $i$  che occupa il nodo  $x$ .

```

RANK( $x$ )
1   $r = x.left.size + 1$ 
2   $y = x$ 
3  while  $y \neq T.root$  // idea:  $r$  contiene la posizione di  $x$  in  $T_y$ 
4      if  $y.p.right = y$ 
5           $r = r + y.p.left.size + 1$ 
6       $y = y.p$ 
7  return  $r$ 

```

**Complessità**  $O(h) = O(\log n)$

Versione aggiornata di RB-Insert :

```

RB-INSERT( $T, z$ )
    // (1) versione aggiornata di Insert
    1   $z.size = 1$  // modifica 1
    2   $x = T.root$ 
    3   $y = T.nil$ 
    4  while  $x \neq T.nil$ 
    5       $x.size = x.size + 1$  // modifica 2
    6       $y = x$ 
    7      if  $z.key < x.key$ 
    8           $x = x.left$ 
    9      else
    10          $x = x.right$ 
    11   $z.p = y$ 
    12  if  $y = NIL$ 
    13       $T.root = z$ 
    14  else
    15      if  $z.key < y.key$ 
    16           $y.left = z$ 
    17      else
    18           $y.right = z$ 
    // (2) RB-Insert-Fixup
    19   $z.color = RED$ 
    20  RB-INSERT-FIXUP( $T, z$ )

```

Versione aggiornata di **Left**:

```

LEFT( $T, x$ )
    1   $x.right = y.left$ 
    2   $x.right.p = x$ 
    3   $y.left = x$ 
    4   $x.p = y$ 
    5  TRANSPLANT( $T, x, y$ )
    6   $y.size = x.size$  // modifica 1
    7   $x.size = x.left.size + x.right.size + 1$  // modifica 2

```

Versione aggiornata di **Delete**:

```

DELETE( $T, z$ )
    // Identica a quella per gli RB-Trees
    :
1   $w = y.p$ 
2  while  $w \neq \text{NIL}$ 
3       $w.size = w.size - 1$ 
4       $w = w.p$ 

```

Versione aggiornata di RB-Delete:

```

RB-DELETE( $T, z$ )
1  DELETE( $T, z$ ) //  $O(\log n)$ 
2  RB-DELETE-FIXUP( $T, z$ ) //  $O(\log n)$ 

```

### 6.3.2 Teorema dell'aumento degli RB-Trees

**Def.** Sia  $x.field$  un campo che si calcola in tempo costante usando  $x, x.left, x.right$  ( $x.field = F(x, x.left, x.right)$ ). Allora è possibile modificare **RB-Insert** e **RB-Delete** in modo che mantengano aggiornato il campo  $x.field$  con complessità asintotica  $O(\log n)$ .

### 6.3.3 Interval Trees

Gli **Interval Trees** sono alberi binari di ricerca con un campo  $x.int$ , che a sua volta presenta due campi:

- $int.low$ , che è anche la chiave;
- $int.high$ .

E anche di un campo  $x.max = \max$  estremo di intervallo per i nodi in  $T_x$ , ossia

$$x.max = \max \begin{Bmatrix} x.left.max \\ x.right.max \\ x.int.high \end{Bmatrix}$$

L'idea è quella in cui ogni nodo rappresenti un intervallo.

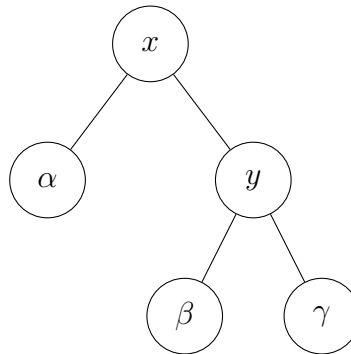
Vogliamo implementare le seguenti procedure:

- **Insert**( $T, x$ )
- **Delete**( $T, x$ )
- **ISearch**( $T, i$ ) con  $i = [low, high]$ :

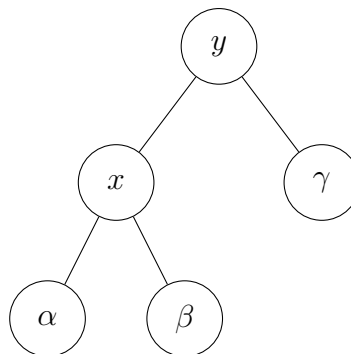


- $x$  tale che  $x.int \cap i \neq \emptyset$ ;
- $T.nil$  se un tale  $x$  non c'è.

**Rotazioni** Prendiamo il seguente albero di esempio.



Applico **Left**( $T, x$ ), ottenendo



Sistemo i massimi. **Left** costa ancora  $O(1)$

- $y.max = x.max$
- $x.max = \max\{x.int.high, x.left.max, x.right.max\}$

Vediamo **ISearch**.

**ISearch**( $x, i$ )

```

1  if ( $x = T.nil$ ) or ( $x.int \cap i \neq \emptyset$ )
2      return  $x$ 
3  else if ( $x.left \neq T.nil$ ) and ( $x.left.max \geq i.low$ )
4      return ISearch( $x.left, i$ )
5  else
6      return ISearch( $x.right, i$ )
  
```

**Correttezza**

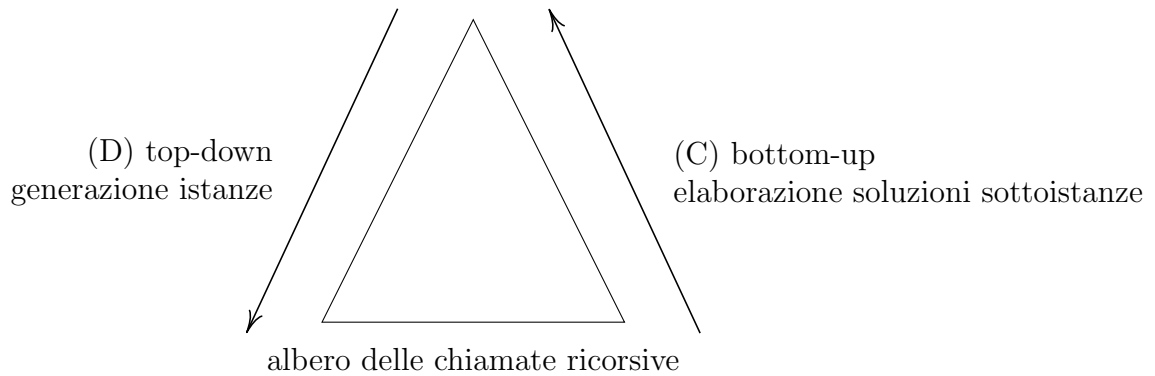
- **Else if.** Consideriamo in  $x.left$  un intervallo  $i'$ . Abbiamo 2 possibilità.
  - (1)  $i \cap i' \neq \emptyset$
  - (2)  $i \cap i' = \emptyset$ , ovvero vale  $i.high < i'.low$ . Questo varrà per ogni nodo dei sotto-alberi, quindi è inutile ispezionare gli antenati di quel sotto-albero.
- **Else.**  $\forall i' \text{ in } x.left \Rightarrow i' \cap i \neq \emptyset$ .

**Complessità**  $O(h) = O(\log n)$

**Esercizio** Vai a ??

## 7 Programmazione Dinamica

### 7.1 Critica al D&C



Il processo di soluzione non ha memoria, quindi le soluzioni di sottoistanze vanno ricalcolate.

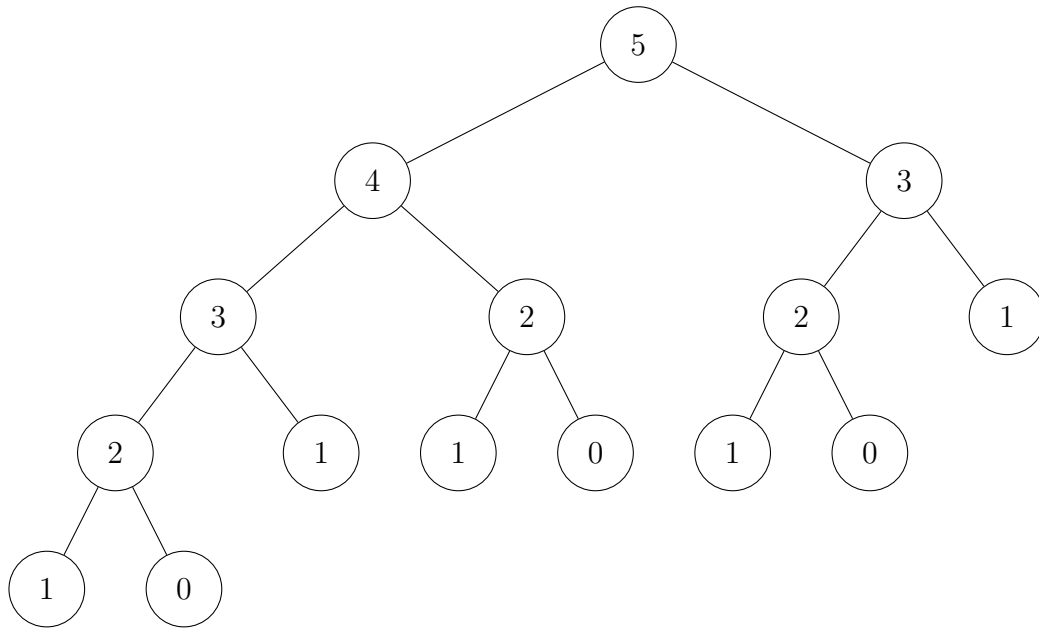
**Esempio** Vediamo uno "spreco usando D&C: la sequenza di Fibonacci.

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

REC-FIB( $n$ )

```
1  if ( $n = 0$ ) or ( $n = 1$ )
2      return 1
3  return REC-FIB( $n - 1$ ) + REC-FIB( $n - 2$ )
```

Ad esempio, con  $n = 5$



Vengono ricalcolate  $F(3)$  e  $F(2)$ .

### Complessità

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0, 1 \quad (\text{il "return" costa } 0) \\ T(n-1) + T(n-2) + 1 & \text{se } n \geq 2 \quad (\text{il "+" costa } 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &\geq T(n-1) + T(n-2) + 1 \\ &\geq 2T(n-2) + 1 \\ &\geq 2(2T(n-2-2) + 1) + 1 \\ &= 2^2T(n-2-2) + 2 + 1 \\ &\geq 2^i T(n-2 \cdot i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j \end{aligned}$$

$$i_0 \rightarrow i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$\text{se } n \text{ è pari: } 2^{\frac{n}{2}} T(n - 2 \frac{n}{2}) = 2^{\frac{n}{2}} T(0)$$

$$\text{se } n \text{ è dispari: } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$$

$$2^{\frac{n-1}{2}} T(n - 2 \frac{n-1}{2}) = 2^{\frac{n-1}{2}} T(1)$$

Otteniamo

$$T(n) \geq \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} 2^j = \Theta(2^{\frac{n}{2}})$$

In verità,

$$T(n) = \Theta\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Vediamo ora una versione iterativa:

IT-FIB( $n$ )

```

1  if ( $n = 0$ ) or ( $n = 1$ )
2      return 1
3   $F[0] = 1$ 
4   $F[1] = 1$ 
5  for  $i = 2$  to  $n$ 
6       $F[i] = F[i - 1] + F[i - 2]$ 
7  return  $F[n]$ 
```

**Complessità**  $\Theta(n)$

La programmazione dinamica salta la fase top-down.

## 7.2 Memoizzazione

È un ibrido tra il D&C e la programmazione dinamica che vuole mantenere la fase top-down pur cercando di ricordare le soluzioni ai sottoproblemi

**Def** Un algoritmo **memoizzato** è costituito da due subroutine distinte:

- 1) **routine di inizializzazione**: risolve direttamente i casi base e inizializza una struttura dati che contiene le soluzioni ai casi base e gli elementi per tutte le sottoistanze da calcolare, inizializzate ad un valore di default
- 2) **routine ricorsiva**: esegue il codice D&C preceduto da un test sulla struttura dati per verificare se la soluzione è già stata calcolata e memorizzata. Se sì, si ritorna, altrimenti la si calcola ricorsivamente e la si memorizza nella struttura.

**Esempio** Riprendiamo l'esempio di prima sulla sequenza di Fibonacci.

INIT-FIB( $n$ )

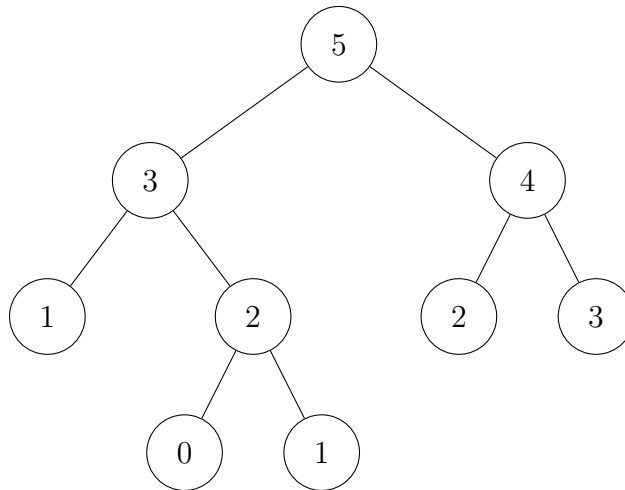
```
1  if ( $n = 0$ ) or ( $n = 1$ )
2      return 1
3   $F[0] = 1$ 
4   $F[1] = 1$ 
5  for  $i = 2$  to  $n$ 
6       $F[i] = 0$ 
7  return REC-FIB( $n$ )
```

**Complessità**  $\Theta(n)$

REC-FIB( $i$ )

```
1  if  $F[i] = 0$ 
2       $F[i] = \text{REC-FIB}(i - 2) + \text{REC-FIB}(i - 1)$ 
3  return  $F[i]$ 
```

Ad esempio, con  $n = 5$



Questa volta,  $F(3)$  e  $F(2)$  non vengono ricalcolate. Abbiamo  $n$  foglie e  $n - 1$  nodi interni ( $n$  parte da 0).

### 7.3 Problemi di Ottimizzazione

$I$  = insieme delle istanze

$S$  = insieme delle soluzioni

$\Pi \subseteq I \times S$

$\forall i \in I, S(i) = \{s \in S : (i, s) \in \Pi\}$  = insieme delle soluzioni ammissibili

$c: S \rightarrow \mathbb{R}$  = funzione di costo

Determinare, data  $i \in I, s^* \in S(i) : c(s^*) = \min(/ \max)\{c(s) : s \in S(i)\}$

#### Problema della raggiungibilità su un grafo orientato

$I = \{\langle G = (V, E), u, v \rangle : V \subseteq \mathbb{N}, V \text{ finito}, E \subseteq V \times V, u, v \in V\}$

$S = \{\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle : k \geq 1, v_i \in \mathbb{N} \ \forall 1 \leq i \leq k\} \cup \{\varepsilon\}$  ( $\varepsilon$  = cammino vuoto)

$(i = \langle G = (V, E), u, v \rangle, s) \in \Pi \iff \begin{cases} S = \varepsilon, \exists \text{ un cammino tra } u \text{ e } v \text{ in } G \\ S = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle, v_1 = u, v_k = v, \\ (v_i, v_{i+1}) \in E \ \forall 1 \leq i \leq k \end{cases}$

$c(\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle) = k - 1$

$c(\varepsilon) = +\infty$

**Caratteristiche** Un problema di ottimizzazione, per essere risolto con la programmazione dinamica, deve avere le seguenti caratteristiche:

- struttura ricorsiva;
- esistenza di sottoistanze ripetute;
- spazio di sottoproblemi "piccolo".

#### Paradigma Generale

1. Caratterizza la struttura di una soluzione ottima  $s^*$  in funzione di soluzioni ottime  $s_1^*, s_2^*, \dots, s_k^*$  di sottoistanze di taglia inferiore.
2. Determina una relazione di ricorrenza del tipo  $c(s^*) = f(c(s_1^*), \dots, c(s_k^*))$ .
3. Calcola  $c(s^*)$  impostando il calcolo in maniera bottom-up (oppure memoizzando).
4. Mantiene informazioni strutturali aggiuntive che permettono di ricostruire  $s^*$ .

## 7.4 Problemi su Stringhe

**Def** Dato un alfabeto finito  $\Sigma$ , una **stringa**

$$X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle, \quad x_i \in \Sigma \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

è una concetazione finita di simboli in  $\Sigma$ .

$$m = |X| = \text{lunghezza di } X$$

$$\Sigma^* = \text{insieme di tutte le stringhe di lunghezza finita costruibili su } \Sigma$$

$$\varepsilon = \text{stringa vuota}$$

Data una stringa  $X$ , il **prefisso** di  $X$  è

$$X_i = \langle x_1, x_2, \dots, x_i \rangle, \quad 1 \leq i \leq m$$

Data una stringa  $X$ , il **suffisso** di  $X$  è

$$X^i = \langle x_i, x_{i+1}, \dots, x_m \rangle, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\text{Per convenzione } X_0 = X^{m+1} = \varepsilon$$

**Def** Data una stringa  $X$ , la **sottstringa** di  $X$  è

$$X_{i\dots j} = \langle x_i, x_{i+1}, \dots, x_j \rangle, \quad 1 \leq i \leq j \leq m$$

$$\text{Per convenzione } X_{i\dots j} = \varepsilon \quad \text{se } i > j$$

# possibili sottstringhe di una stringa con  $m$  caratteri:

$$\begin{array}{ccccc} \binom{m}{2} & + & m & + & 1 & = & \frac{m(m+1)}{2} = \Theta(m^2) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ i \neq j & & i = j & & \varepsilon & & \end{array}$$

Lo spazio delle sottstringhe "non è troppo grande".

**Def** Data una stringa

$$X = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle \in \Sigma^*$$

e

$$Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle \in \Sigma^*$$

si dice che  $Z$  è **sottosequenza** di  $X$  se  $\exists$  una successione crescente di indici

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq m : z_j = x_{i_j} \quad \forall 1 \leq j \leq k$$



**Esempio**

$$X = \langle a, b, c, b, b, d \rangle$$

$$Z_1 = \langle a, b, c \rangle = X_{1\dots 3}$$

$$Z_2 = \langle a, c, b \rangle \quad i_1 = 1, \quad i_2 = 3, \quad i_3 = 4 \text{ o } 5$$

$$Z_3 = \langle b, b \rangle = X_{4\dots 5} \quad i_1 = 2, \quad i_2 = 5$$

# possibili sottosequenze di una stringa con  $m$  caratteri:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m$$

$\uparrow$   
 stringhe lunghe  $k$   
 prese da un insieme  
 di  $m$  elementi

## 7.5 Problema della Longest Common Subsequence (LCS)

Date due stringhe  $X, Y$  determina  $Z$  tale che:

- 1)  $Z$  è sottosequenza di  $X$  e  $Y$ ;
- 2)  $Z$  è la più lunga tra tutte le sottosequenze comuni.

### Esempio

$$X = \langle a, b, c, b, b, d \rangle$$

$$Y = \langle a, d, c, c, b, d \rangle$$

$Z = \langle a, c, b, d \rangle$  è una LCS (in questo caso è l'unica)

$$i_1 = 1, \quad i_2 = 3, \quad i_3 = 4 \text{ o } 5, \quad i_4 = 6$$

$$j_1 = 1, \quad j_2 = 3 \text{ o } 4, \quad j_3 = 5, \quad j_4 = 6$$

Risolvero il problema:

$$|X| = m$$

$$|Y| = n$$

L'approccio "brute force" ha complessità  $\Omega(2^m \cdot 2^n)$ .

Devo cercare di individuare una proprietà di sottostruttura, cioè la LCS deve "nascondere" al suo interno LCS di qualche stringa più piccola di  $X$  e  $Y$ .

$$X = \langle b, c, f, a \rangle$$

$$Y = \langle c, f, d, a \rangle$$

$$Z = LCS(X, Y) = \langle Z', a \rangle \quad \text{con } Z' = LCS(X_3, Y_3)$$

$$X = \langle X', a \rangle$$

$$Y = \langle Y', b, \rangle$$

$Z$  o non termina con  $a$ , o non termina con  $b$

$$Z = LCS(X', Y) \text{ o } LCS(X, Y')$$

$$S = \{LCS(X_i, Y_j) : 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}, \quad |S| = (m+1)(n+1)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \varepsilon & \varepsilon \end{array}$$

### 7.5.1 Proprietà di Sottostruttura Ottima

Dati i prefissi

$$X_i = \langle x_1, x_2, \dots, x_i \rangle$$

$$Y_j = \langle y_1, y_2, \dots, y_j \rangle$$

$$\text{Sia } Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle = LCS(X_i, Y_j)$$

0. (caso base)

$$\text{o } i = 0 \text{ o } j = 0 \Rightarrow Z = \varepsilon$$

1.  $i, k > 0$

se  $x_i = y_j$  allora

$$(a) \ z_k = x_i (= y_j)$$

$$(b) \ Z_{k-1} = LCS(X_{i-1}, Y_{j-1})$$

2.  $i, j > 0$

se  $x_i \neq y_j$  allora

$Z$  è la stringa di lunghezza massima tra  $LCS(X_i, Y_{j-1})$  e  $LCS(X_{i-1}, Y_j)$

#### Dimostrazione

0. banale

1.  $x_i = y_j$

$$Z = LCS(X_i, Y_j) = \langle z_1, z_2, \dots, z_k \rangle = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} \rangle = \langle y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k} \rangle$$

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq i, \quad 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq j$$

(a) Ragioniamo per assurdo

$$z_k = x_{i_k} = y_{j_k}$$

$$z_k \neq (x_i = y_j)$$

$$\Rightarrow i_k < i, \quad j_k < j$$

$$Z' = \langle Z, x_i \rangle$$

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq i_{k+1} = i, \quad 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq j_{k+1} = j$$

(b) Devo dimostrare che

$$Z_{k-1} = LCS(X_{i-1}, Y_{j-1})$$

$$Z_{k-1} = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k-1}} \rangle = \langle y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_{k-1}} \rangle$$

$$i_{k-1} \leq i - 1 < i$$

$$Z_{k-1} = CS(X_{i-1}, Y_{j-1})$$

Ora dimostro che

$$Z_{k-1} = LCS(X_{i-1}, Y_{j-1})$$

Supponiamo per assurdo che

$$Z_{k-1} \neq LCS(X_{i-1}, Y_{j-1})$$

$$\Rightarrow \exists Z' \text{ con } |Z'| \geq k$$

$$\Rightarrow \text{creo } Z'' = \langle Z', x_i (= y_j) \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \\ \geq k & 1 & \Rightarrow \geq k+1 \end{array}$$

2. (come esercizio)

Il D&C "non funziona" perchè ci sono molti sottoproblemi ripetuti.

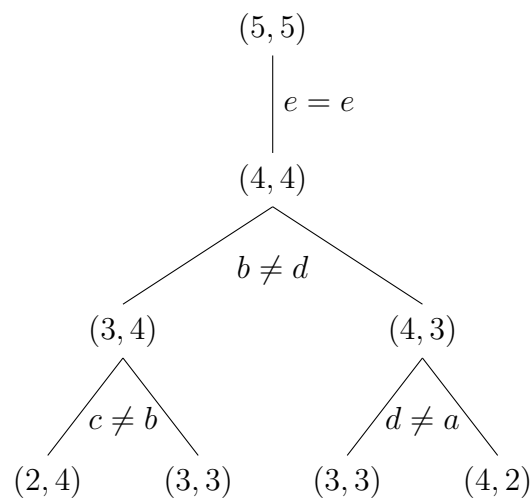
### Esempio

$$X = \langle a, b, c, d, e \rangle$$

$$Y = \langle b, c, a, b, e \rangle$$

Trova  $LCS(X, Y)$

Albero delle chiamate:



L'istanza (3, 3) è ripetuta.

**Complessità Strategia Ricorsiva** (Modello di costo: confronto tra caratteri)

$$T(n, m) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \text{ o } m = 0 \\ T(n-1, m) + T(n, m-1) + 1 & \text{se } n, m > 0 \end{cases}$$

Si dimostra che

$$T(n, m) = \Theta \left( \binom{m}{n} \right)$$

$$\binom{m}{2} \geq \binom{m}{2}^n$$

Caso  $m = 2n$

$$\binom{m}{2}^n = 2^n$$

### 7.5.2 Ricorrenza sui Costi

La scrittura della ricorrenza sui costi è il secondo passo per costruire un algoritmo di programmazione dinamica.

Denoto con  $l(i, j) = |LCS(X_i, Y_j)|$

$$l(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \text{ o } j = 0 & (\text{caso 0}) \\ l(i-1, j-1) + 1 & \text{se } i, j > 0 \text{ e } x_i = x_j & (\text{caso 1}) \\ \max\{l(i, j-1), l(i-1, j)\} & \text{se } i, j > 0 \text{ e } x_i \neq x_j & (\text{caso 2}) \end{cases}$$

Alla fine ci interessa calcolare  $l(m, n)$ .

Per calcolare  $(i, j)$  mi possono servire  $(i-1, j-1)$ ,  $(i-1, j)$ ,  $(i, j-1)$ .

$$L = \left[ \begin{array}{cc} (i-1, j-1) & (i-1, j) \\ & \nwarrow \quad \uparrow \\ (i, j-1) & \leftarrow (i, j) \end{array} \right]$$

Scansione "row-major": riempio la tabella per righe da sinistra a destra.

Informazione aggiuntiva per costruire la sequenza (vera e propria):  
Definisco la funzione

$$b(i, j) = \begin{cases} ' \nwarrow ' & \text{se } x_i = y_j \\ ' \leftarrow ' & \text{se } x_i \neq x_j \text{ e } \max = LCS(i, j-1) \\ ' \uparrow ' & \text{se } x_i \neq y_j \text{ e } \max = LCS(i-1, j) \end{cases}$$

**Pseudocodice**LCS( $X, Y$ )

```

1   $m = X.length$ 
2   $n = Y.length$ 
3  for  $i = 0$  to  $m$ 
4       $L[i, 0] = 0$ 
5  for  $j = 0$  to  $n$ 
6       $L[0, j] = 0$ 
7  for  $i = 1$  to  $m$ 
8      for  $j = 1$  to  $n$ 
9          if  $x_i = y_j$ 
10              $L[i, j] = L[i - 1, j - 1] + 1$ 
11              $B[i, j] = '\nwarrow'$ 
12          else if  $L[i - 1, j] \geq L[i, j - 1]$ 
13              $L[i, j] = L[i - 1, j]$ 
14              $B[i, j] = '\uparrow'$ 
15          else
16              $L[i, j] = L[i, j - 1]$ 
17              $B[i, j] = '\leftarrow'$ 
18  return ( $L[m, n], B$ )

```

**Complessità**

$$T(m, n) = \Theta(m \cdot n)$$

Caso  $m = n \Rightarrow T(m, n) = \Theta(n^2)$

Procedura per stampare la LCS:

PRINTLCS( $B, X, i, j$ )

```

1  if  $i = 0$  or  $j = 0$ 
2      return  $\varepsilon$ 
3  if  $B[i, j] = '\nwarrow'$ 
4      PRINTLCS( $B, X, i - 1, j - 1$ )
5      PRINT( $x_i$ )
6  else if  $B[i, j] = '\leftarrow'$ 
7      PRINTLCS( $B, X, i, j - 1$ )
8  else //  $B[i, j] = '\uparrow'$ 
9      PRINTLCS( $B, X, i - 1, j$ )

```

**Complessità**  $\Theta(m) = \Theta(|LCS|)$

**Esercizio**

$X = \langle b, d, c, d \rangle$

$Y = \langle a, b, c, b, d \rangle$

Restituisci  $LCS(X, Y)$  e  $|LCS(X, Y)|$

$$L = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & a & b & c & b & d \\ \begin{array}{c} b \\ d \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \mathbf{3} \end{bmatrix} \end{array} & B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & a & b & c & b & d \\ \begin{array}{c} b \\ d \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \uparrow & \swarrow & \leftarrow & \swarrow & \leftarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \swarrow \\ \uparrow & \uparrow & \swarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \swarrow \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

$LCS(X, Y) = \langle b, c, d \rangle \quad |LCS(X, Y)| = 3$

**Pseudocodice Memoizzato**

INIT-LCS( $X, Y$ )

```

1   $m = X.length$ 
2   $n = Y.length$ 
3  if ( $m = 0$ ) or ( $n = 0$ )
4      return 0
5  for  $i = 0$  to  $m$ 
6       $L[i, 0] = 0$ 
7  for  $j = 0$  to  $n$ 
8       $L[0, j] = 0$ 
9  for  $i = 1$  to  $m$ 
10     for  $i = 1$  to  $n$ 
11          $L[i, j] = -1$ 
12 return R-LCS( $X, Y, m, n$ )
```

R-LCS( $X, Y, i, j$ )

```

1  if  $L[i, j] = -1$ 
2      if  $x_i = y_j$ 
3           $L[i, j] = \text{R-LCS}(X, Y, i - 1, j - 1)$ 
4      else if  $\text{R-LCS}(X, Y, i - 1, j) \geq \text{R-LCS}(X, Y, i, j - 1)$ 
5           $L[i, j] = L[i - 1, j]$ 
6      else
7           $L[i, j] = L[i, j - 1]$ 
8  return  $L[i, j]$ 
```



**Complessità**  $O(m \cdot n)$

**Osservazione** Se  $x_i = y_j$  sempre, invoco  $\text{R-LCS}(X, Y, i-1, j-1)$  ma non invoco mai  $\text{R-LCS}(X, Y, i-1, j)$  o  $\text{R-LCS}(X, Y, i, j-1)$ .

Ad esempio

$$X = \langle a, a, b, b, c \rangle$$

$$Y = \langle b, b, c \rangle$$

Albero delle chiamate:

$$\begin{array}{c} (5, 3) \\ \left| \begin{array}{l} c = c \end{array} \right. \\ (4, 2) \\ \left| \begin{array}{l} b = b \end{array} \right. \\ (3, 1) \\ \left| \begin{array}{l} b = b \end{array} \right. \\ (2, 0) \end{array}$$

In generale, se  $Y$  è suffisso di  $n \leq m$  caratteri di  $X$ , la complessità di  $\text{R-LCS}$  nel caso migliore è:

$$T_{\text{R-LCS}}(m, n) = n$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{LCS}}(m + n) &\cong \Omega(n) \\ O_{\text{LCS}, \text{R-LCS}}(m \cdot n) &\cong O(n^2) \end{aligned}$$

**Spazio**

$$S_{\text{LCS}}(m, n) = \Theta(m, n)$$

Tuttavia, posso migliorarlo a

$$\Theta(2n) = \Theta(n)$$

poichè mi bastano due righe della tabella in memoria ad ogni istante, quindi due vettori lunghi  $n$ .

Inoltre, se  $m \ll n$ , posso fare un'ulteriore ottimizzazione utilizzando la tecnica "column-major", cioè scansione per colonne, con due vettori lunghi  $m$ .