



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

# Appunti di Algoritmi e Strutture Dati

a.a. 2017/2018

Autore:  
Timoty Granziero

Repository:  
<https://github.com/Vashy/ASD-Notes>

12 aprile 2018

# Indice

<b>1</b>	<b>Lezione del 28/02/2018</b>	<b>2</b>
1.1	Problem Solving . . . . .	2
1.2	Cosa analizzeremo nel corso . . . . .	3
1.2.1	Approfondimento sul tempo di esecuzione $T(n)$ . . . . .	3
1.3	Problema dell'ordinamento (sorting) . . . . .	3
1.4	Insertion Sort . . . . .	4
1.4.1	Invarianti e correttezza . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Lezione del 02/03/2018</b>	<b>6</b>
2.1	Modello dei costi . . . . .	6
2.2	Complessità di IS . . . . .	7
2.2.1	Caso migliore . . . . .	7
2.2.2	Caso peggiore . . . . .	7
2.2.3	Caso medio . . . . .	8
2.3	Divide et Impera . . . . .	8
2.4	Merge Sort . . . . .	8
2.4.1	Invarianti e correttezza . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Lezione del 07/03/2018</b>	<b>12</b>
3.1	Approfondimento sull'induzione . . . . .	12
3.1.1	Induzione ordinaria . . . . .	12
3.1.2	Induzione completa . . . . .	12
3.2	Complessità di Merge Sort . . . . .	12
3.3	Confronto tra IS e MS . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Lezione dell'08/03/2018</b>	<b>15</b>
4.1	Notazione asintotica . . . . .	15
4.1.1	Limite asintotico superiore . . . . .	16
4.1.2	Limite asintotico inferiore . . . . .	18
4.1.3	Limite asintotico stretto . . . . .	19
4.2	Metodo del limite . . . . .	20
4.3	Alcune proprietà generali . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Lezione del 09/03/2018</b>	<b>21</b>
5.1	Complessità di un problema . . . . .	21
5.2	Esempio: limite inferiore per l'ordinamento basato su scambi . . . . .	21
5.3	Soluzione di ricorrenze . . . . .	22
5.3.1	Metodo di sostituzione . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Lezione del 14/03/2018</b>	<b>25</b>

<b>7 Lezione del 15/03/2018</b>	<b>28</b>
7.1 Master Theorem . . . . .	28
7.1.1 Esercizi (Master Theorem) . . . . .	29
<b>8 Lezione del 21/03/2018</b>	<b>33</b>
8.1 Heapsort . . . . .	33
8.1.1 Max Heap . . . . .	34
8.2 Code con priorità . . . . .	37
<b>9 Lezione del 23/03/2018</b>	<b>40</b>
9.1 Quicksort . . . . .	40
9.1.1 Correttezza di Quicksort( $A, p, r$ ) . . . . .	41
9.1.2 Complessità di Quicksort . . . . .	42
<b>10 Lezione del 28/03</b>	<b>44</b>
10.1 Quicksort a tre partizioni . . . . .	44
10.2 Limite inferiore . . . . .	45
10.2.1 Albero di Decisioni . . . . .	45
10.3 Ordinamento in tempo lineare . . . . .	47
10.3.1 Counting Sort . . . . .	47
<b>11 Lezione del 29/03/2018</b>	<b>49</b>
11.1 Radix Sort . . . . .	49
11.1.1 Correttezza di RadixSort( $A, d$ ) . . . . .	49
11.2 Strutture dati elementari . . . . .	50
11.2.1 Tabelle Hash . . . . .	50
<b>Appendices</b>	<b>52</b>
<b>A Raccolta algoritmi</b>	<b>52</b>
A.1 Insertion Sort . . . . .	52
A.2 Merge Sort . . . . .	52
A.3 Insertion Sort ricorsivo . . . . .	53
A.3.1 Correttezza di Insertion-Sort( $A, j$ ) . . . . .	53
A.3.2 Correttezza di Insert( $A, j$ ) . . . . .	54
A.4 CheckDup . . . . .	54
A.4.1 Correttezza di DMerge( $A, p, q, r$ ) . . . . .	55
A.5 SumKey . . . . .	55
A.5.1 Correttezza di Sum( $A, key$ ) . . . . .	56
A.6 Heapsort . . . . .	58
A.7 Code con priorità . . . . .	59

Indice	Indice
<b>B Esercizi</b>	<b>61</b>
B.1 Ricorrenze . . . . .	61

# 1 Lezione del 28/02/2018

## 1.1 Problem Solving

1. Formalizzazione del problema;
2. Sviluppo dell'**algoritmo** (focus del corso);
3. Implementazione in un programma (codice).

**Algoritmo** Sequenza di passi elementari che risolve il problema.

Input  $\rightarrow$  **Algoritmo**  $\rightarrow$  Output

*Dato un problema, ci sono tanti algoritmi per risolverlo.*

**e.g.**<sup>1</sup> Ordinamento dei numeri di una Rubrica. L'idea è quella di trovare tutte le permutazioni di ogni numero.

30 numeri: *complessità*  $30! \cong 2 \times 10^{32} ns \Rightarrow$   
 $3^{19}$ anni (con  $ns$  = nanosecondi)

**std::vector** È un esempio nel C++ delle ragioni per cui si studia questa materia. Nella documentazione della STL, sono riportati i seguenti:

- **Random access**: complessità  $O(1)$ ;
- **Insert**: complessità  $O(1)$  ammortizzato.

Il **random access** è l'accesso a un elemento casuale del **vector**.  $O(1)$  implica che l'accesso avviene in tempo costante (pari a 1).

Per **insert** si intende l'inserimento di un nuovo elemento in coda. Avviene in tempo  $O(1)$  ammortizzato: questo perchè ogni N inserimenti, è necessario un resize del vector e una copia di tutti gli elementi nel nuovo vettore (questa procedura è nascosta al programmatore).

---

<sup>1</sup>For the sake of example.

## 1.2 Cosa analizzeremo nel corso

- Tempo di esecuzione;
- Spazio (memoria);
- Correttezza;
- Manutenibilità.

### 1.2.1 Approfondimento sul tempo di esecuzione $T(n)$

- *P Problems*: complessità polinomiale. L'algoritmo è trattabile
- *NP Complete*: problemi NP completi. **e.g**: Applicazione sugli algoritmi di sicurezza. Si basano sull'assunzione che per essere risolti debbano essere considerate tutte le soluzioni possibili.
- *NP Problems*: problemi con complessità (ad esempio) esponenziale/fattoriale. Assolutamente non trattabili.

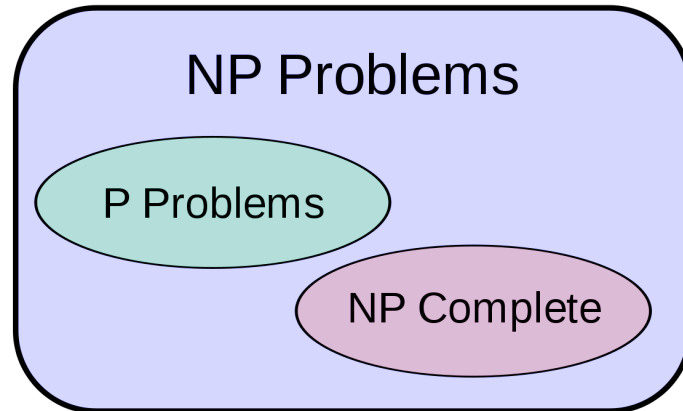


Figura 1: Complessità  $T(n)$ .

## 1.3 Problema dell'ordinamento (sorting)

Input: sequenza di numeri

$$a_0 a_1 \dots a_n;$$

Output: permutazione

$$a'_0 a'_1 \dots a'_n$$

tale che

$$a'_0 \leq a'_1 \leq \dots \leq a'_n$$

Vedremo due algoritmi:

- Insertion Sort;
- Merge Sort.

## 1.4 Insertion Sort

**Insertion Sort** un algoritmo di *sorting incrementale*. Viene applicato naturalmente ad esempio quando si vogliono ordinare le carte nella propria mano in una partita a scala 40: si prende ogni carta a partire da sinistra, e la si posiziona in ordine crescente.

**Astrazione** Prendiamo ad esempio il seguente array:

5	2	8	4	7
---	---	---	---	---

Partiamo dal primo elemento: 5. È già ordinato con se stesso, quindi procediamo con il secondo elemento.

Confronto il numero 2 con l'elemento alla sua sinistra:

$2 \geq 5$ ? No, quindi lo inverte con l'elemento alla sua sinistra, come segue

2	5	8	4	7
---	---	---	---	---

Key: 8

La key analizzata è 8.

$8 \geq 5$ ? Sì, quindi è ordinato in modo corretto.

2	5	8	4	7
---	---	---	---	---

Key: 4

La key analizzata è 4.

$4 \geq 8$ ? No, quindi lo sposto a sinistra invertendolo con 8.

$4 \geq 5$ ? No, lo sposto a sinistra invertendolo con 5.

$4 \geq 2$ ? Sì, quindi è nella posizione corretta.

2	4	5	8	7
---	---	---	---	---

Key: 7

Key analizzata 7.

$7 \geq 8$ ? No, lo sposto a sinistra invertendolo con 8.

$7 \geq 5$ ? Sì, è nella posizione corretta.

Otengo l'array ordinato:

2	4	5	7	8
---	---	---	---	---

**Algoritmo** Passiamo ora all'implementazione dell'algoritmo, con uno pseudocodice similare a Python<sup>1</sup>

Input:  $A[1, \dots, n]$ ,  $A.length$ .

È noto che:  $A[i] \leq key < A[i + 1]$

**Pseudocodice** Segue lo pseudocodice dell'Insertion Sort.

INSERTION-SORT( $A$ )

```

1   $n = A.length$ 
2  for  $j = 2$  to  $n$  // il primo elemento è già ordinato
3       $key = A[j]$  //  $A[1..j-1]$  ordinato
4       $i = j - 1$ 
5      while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
6           $A[i + 1] = A[i]$ 
7           $i = i - 1$ 
8       $A[i + 1] = key$ 
```

Quando il **while** termina, ci sono due casi:

- $i = 0$ : tutti gli elementi prima di  $j$  sono maggiori di  $key$ ;  $key$  va al primo posto (1);
- $(i > 0)$  and  $(A[i] \leq key)$ :  $A[i+1] = key$ .

#### 1.4.1 Invarianti e correttezza

**for**  $A[1..j-1]$  è ordinato e contiene gli elementi in  $(1, j-1)$  iniziali.

**while**  $A[1..i]A[i+2..j]$  ordinato e  $A[i+2..j] > key$ .

In uscita abbiamo:

- $j = n+1$ ;
- $A[1..n]$  ordinato, come da invariante: vale  $A[1..j-1]$  ordinato, e  $j$  vale  $n+1$ .

---

<sup>1</sup>**ATTENZIONE:** verranno usati array con indici che partono da 1.



## 2 Lezione del 02/03/2018

### 2.1 Modello dei costi

**Assunzione** Tutte le istruzioni richiedono un tempo costante.

Rivediamo l'algoritmo:

INSERTION-SORT( $A$ )

```
1   $n = A.length$ 
2  for  $j = 2$  to  $n$  // il primo elemento è già ordinato
3       $key = A[j]$  //  $A[1..j-1]$  ordinato
4       $i = j - 1$ 
5      while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
6           $A[i+1] = A[i]$ 
7           $i = i - 1$ 
8       $A[i+1] = key$ 
```

Diamo il nome  $c_0$  alla chiamata del metodo, InsertionSort( $A$ ); A ogni riga numerata, diamo il nome  $c_1, c_2, \dots, c_8$ <sup>1</sup>.

Vediamo il *costo* di ogni istruzione:

$$c_0 \rightarrow 1$$

$$c_1 \rightarrow 1$$

$$c_2 \rightarrow n$$

$$c_3 \rightarrow (n - 1)$$

$$c_4 \rightarrow (n - 1)$$

$$c_5 \rightarrow \sum_{j=2}^n t_j + 1$$

$$c_6, c_7 \rightarrow \sum_{j=2}^n t_j$$

$$c_8 \rightarrow (n - 1)$$

---

<sup>1</sup>( $c_1$  corrisponde alla riga 1,  $c_2$  alla riga 2 e così via).

## 2.2 Complessità di IS

$$T^{IS}(n) = c_0 + c_1 + c_2n + (c_3 + c_4 + c_8)(n - 1) + c_5 \sum_{j=2}^n (t_j + 1) + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^n t_j$$

$t_j$  dipende, oltre che da  $n$ , dall'istanza dell'array che stiamo considerando. È chiaro che questo calcolo non dà indicazioni precise sull'effettiva complessità dell'algoritmo.

Andiamo ad analizzare i 3 possibili casi:

- a) Caso migliore (2.2.1)
- b) Caso peggiore (2.2.2)
- c) Caso medio (2.2.3)

### 2.2.1 Caso migliore

→  $A$  ordinato  $\Rightarrow t_j = 0 \forall j$

La **complessità** diventa:

$$T_{min}^{IS}(n) = c_0 + c_1 + c_2n + (c_3 + c_4 + c_5 + c_8)(n - 1) = an + b \approx n$$

Ossia, si comporta come  $n$ . Il *caso migliore* **non** è interessante, visto che è improbabile si presenti.

### 2.2.2 Caso peggiore

→  $A$  ordinato in senso inverso  $\Rightarrow \forall j \ t_j = j - 1$

La **complessità** diventa:

$$T_{max}^{IS}(n) = c_0 + c_1 + c_2n + (c_3 + c_4 + c_8)(n - 1) + c_5 \sum_{j=2}^n j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^n (j - 1)$$

Per valutare il costo di  $\sum_{j=2}^n j$  e di  $\sum_{j=2}^n (j - 1)$ , usiamo la **somma di Gauss**:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

Otteniamo:

$$\sum_{j=2}^n j = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

$$\sum_{j=2}^n (j-1) = \sum_{i=1}^n n = \frac{(n-1)n}{2}$$

Per finire, ricalcoliamo  $T_{max}^{IS}(n)$

$$T_{max}^{IS}(n) = a'n^2 + b'n + c' \approx n^2$$

### 2.2.3 Caso medio

Il caso medio è *difficile da calcolare*, e in una considerevole parte dei casi, coincide con il caso peggiore.

Comunque, l'idea è la seguente:

$$\frac{\sum_{\text{perm. di input}} T^{IS}(p)}{n!} \approx n^2 \quad \text{posso pensare che } t_j \cong \frac{j-1}{2}$$

## 2.3 Divide et Impera

Un algoritmo di sorting *divide et impera* si può suddividere in 3 fasi:

**divide** divide il problema dato in sottoproblemi più piccoli;

**impera** risolve i sottoproblemi:

- ricorsivamente;
- la soluzione è nota (e.g. array con un elemento);

**combina** compone le soluzioni dei sottoproblemi in una soluzione del problema originale.

## 2.4 Merge Sort

**Merge Sort**<sup>1</sup> è un esempio di algoritmo *divide et impera*. Andiamo ad analizzarlo.

---

<sup>1</sup>Si consiglia di dare uno sguardo all'algoritmo anche da altre fonti, poichè presentarlo graficamente in  $\text{\LaTeX}$ , come è stato visto a lezione, non è facile.

**Astrazione** Consideriamo il seguente array A.

5	2	4	7	1	2	3	6
---	---	---	---	---	---	---	---

Lo divido a metà, ottenendo due parti separate.

5	2	4	7
---	---	---	---

1	2	3	6
---	---	---	---

Consideriamo il primo, ossia A[1..4] (A originale). Divido anche questo a metà.

5	2
---	---

4	7
---	---

Divido nuovamente a metà, ottenendo:

5
---

2
---

5 e 2 sono due blocchi già ordinati. Scelgo il minore tra i due e lo metto in prima posizione, mentre l'altro in seconda posizione, ottenendo un blocco composto da 2 e 5.

Riprendo con il blocco composto da 4 e 7. Lo divido in due blocchi da un elemento. Faccio lo stesso procedimento fatto per 2 e 5: metto in prima posizione 4 e in seconda posizione 7. La situazione è la seguente:

2	5
---	---

4	7
---	---

So che i blocchi ottenuti contengono elementi ordinati. Con questa assunzione, posso ragionare nel seguente modo: considero il primo elemento dei due blocchi (2 e 4 in questo caso) e metto in prima posizione il minore tra i due. Ora considero il successivo elemento del blocco che è stato scelto e lo stesso elemento dell'altro blocco, e inserisco nell'array l'elemento minore. Continuo fino ad ottenere un blocco ordinato.

2	4	5	7
---	---	---	---

Faccio lo stesso procedimento con la parte di array originale A[5..8], ottenendo

2	4	5	7
---	---	---	---

1	2	3	6
---	---	---	---

A questo punto, i blocchi da 4 contengono elementi tra loro ordinati. Faccio lo stesso ragionamento usato per comporli, per ottenere l'array originale ordinato. Considero<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Questo procedimento è stato applicato anche ai passaggi precedenti; qui è spiegato più rigorosamente.

- $L[1..4] = A[1..4]$ : indice  $i = 1$  per scorrerlo;
- $R[1..4] = A[5..8]$ : indice  $j = 1$  per scorrerlo;

Valuto  $L[i]$  e  $R[j]$ .

- Se  $L[i] \leq R[j]$ , inserisco  $L[i]$  e incremento  $i$ .
- Altrimenti, inserisco  $R[j]$  e incremento  $j$ .
- Itero finchè entrambi gli indici non sono out of bounds.

**Pseudocodice** Segue lo pseudocodice del Merge Sort.

MERGE-SORT( $A, p, r$ )

```

1  if  $p < r$ 
2       $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$  // arrotondato per difetto
3      MERGE-SORT( $A, p, q$ ) // ordina  $A[p..q]$ 
4      MERGE-SORT( $A, q+1, r$ ) // ordina  $A[q+1..r]$ 
5      MERGE( $A, p, q, r$ ) // "Merge" dei due sotto-array

```

MERGE( $A, p, q, r$ )

```

1   $n1 = q - p + 1$  // gli indici partono da 1
2   $n2 = r - q$ 
   // L sotto-array sx, R sotto-array dx
3  for  $i = 1$  to  $n1$ 
4       $L[i] = A[p + i - 1]$ 
5  for  $j = 1$  to  $n2$ 
6       $R[j] = A[q + j]$ 
7   $L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = \infty$ 
8   $i = j = 1$ 
9  for  $k = p$  to  $r$ 
10     if  $L[i] \leq R[j]$ 
11          $A[k] = L[i]$ 
12          $i = i + 1$ 
13     else //  $L[i] > R[j]$ 
14          $A[k] = R[j]$ 
15          $j = j + 1$ 

```

#### 2.4.1 Invarianti e correttezza

**L** e **R** contengono rispettivamente  $A[p..q]$  e  $A[q+1..r]$ . L'indice  $k$  scorre **A**. Il sotto-array  $A[p..k-1]$  è ordinato, e contiene  $L[1..i-1]$  e  $R[1..j-1]$ .

$$\begin{aligned}
 A[p \dots k-1] &\leq L[i \dots n1], R[j \dots n2] \\
 &\quad \downarrow \\
 A[p \dots k-1] &= A[p \dots r+1-1] \implies A[p \dots r] \text{ ordinato}
 \end{aligned}$$

**Dimostrazione per induzione su r-p**

$\Rightarrow$  Se  $r - p == 0$  (oppure  $-1$ ) abbiamo al più un elemento  $\implies$  array già ordinato.

$\Rightarrow$  Se  $r - p > 0$ , vale

$$\#elem(A[p \dots q]), \#elem(A[q+1 \dots r]) < \#elem(A[p \dots r])$$

Per ipotesi induttiva:

- Merge-sort(A, p, q) ordina A[p..q];
  - Merge-sort(A, q+1, r) ordina A[q+1..r];
- Per correttezza di Merge(), dopo la sua chiamata ottengo A[p..r] ordinato.

## 3 Lezione del 07/03/2018

### 3.1 Approfondimento sull'induzione

#### 3.1.1 Induzione ordinaria

Proprietà  $P(n)$ , e.g.  $P(n) =$  “Se  $n$  è pari,  $n + 1$  è dispari” oppure “tutti i grafi con  $n$  nodi ...”.

Per dimostrare che  $P(n)$  vale per ogni  $n$

- $P(0)$ : **caso base**;
- assumo vera  $P(n) \rightarrow$  dimostro  $P(n+1)$ , allora  $P(n)$  è vera per ogni  $n$ .

#### 3.1.2 Induzione completa

- $[P(0)]$  (non necessaria, è un'istanza del passo successivo);
- dimostro  $P(m) \forall m < n \rightarrow$  vale  $P(n) \forall n$ .

### 3.2 Complessità di Merge Sort

$n = \#$ elementi da ordinare<sup>1</sup>

Merge(A,p,q,r)

**inizializzazione:**  $a'n + b'$ ;

**ciclo:**  $a'n + b'$ ;

Sommandoli, ottengo una complessità all'incirca di:

$$T^{merge}(n) = an + b$$

Nel dettaglio:

$$T^{MS}(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ T^{MS}(n_1) + T^{MS}(n_2) + T^{merge}(n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Downarrow$

---

<sup>1</sup>Il simbolo  $\#$  verrà usato per indicare la cardinalità di un insieme.

$$T^{MS}(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ T^{MS}(n_1) + T^{MS}(n_2) + an + b & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con

$$n_1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

$$n_2 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$$

$$T^{MS}(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ T^{MS}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T^{MS}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + an + b & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} T^{MS}(n) \\ an + b \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} T^{MS}(n_1) & T^{MS}(n_2) \\ an_1 + b & an_2 + b \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} T^{MS}(n_{11}) & T^{MS}(n_{12}) & T^{MS}(n_{21}) & T^{MS}(n_{22}) \\ an_{11} + b & an_{12} + b & an_{21} + b & an_{22} + b \end{array}$$

...

$$\begin{array}{cccccc} c_0 & c_0 & \dots & \dots & \dots & c_0 & c_0 \end{array}$$

Otteniamo  $c_0$  ripetuto  $n$  volte all'ultimo livello dell'albero. L'altezza dell'albero è circa  $\log_2 n$ . Vediamo nel dettaglio la complessità nelle varie iterazioni.

$$i = 0 \quad an + b$$

$$i = 1 \quad a(n_1 + n_2) + 2b \approx an + 2b$$

$$i = 2 \quad a(n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22}) + 4b \approx an + 4b$$

...

$$i = h \quad c_0 n$$



Poniamo  $n = 2^h$ . Abbiamo

$$\begin{aligned}
 T^{MS}(n) &= \sum_{i=0}^{h-1} (an + 2^i b) + c_0 n \\
 &= an h + b \sum_{i=0}^{h-1} 2^i \quad (h = \log_2 n) \\
 &= an \log_2 n + b 2^h - b + c_0 n \quad (2^h = n) \\
 &= an \log_2 n + (b + c_0)n - b \\
 T^{MS}(n) &= an \log_2 n + b''n + c'' \approx n \log_2 n
 \end{aligned}$$

### 3.3 Confronto tra IS e MS

$$\begin{aligned}
 T^{IS}(n) &= a'n^2 + b'n + c' \\
 T^{MS}(n) &= a''n \log_2 n + b''n + c''
 \end{aligned}$$

Posso calcolare il limite del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T^{MS}(n)}{T^{IS}(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a''n \log_2 n + b''n + c''}{a'n^2 + b'n + c'} = 0$$

Per definizione

$$\begin{aligned}
 \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \frac{T^{MS}(n)}{T^{IS}(n)} < \varepsilon \\
 \Downarrow \\
 T^{MS}(n) < \varepsilon T^{IS}(n) = \frac{T^{IS}}{m} \quad (\text{Ponendo, ad esempio, } \varepsilon = \frac{1}{m})
 \end{aligned}$$

Detto a parole, c'è un certo  $n$  oltre il quale, ad esempio, **Merge Sort** su un *Commodore 64* esegue più velocemente di un **Insertion Sort** su una macchina moderna. Possiamo vedere una comparazione tra i due algoritmi nella seguente tabella.

$n$	$T^{IS}(n) = n^2$	$T^{MS}(n) = n \log n$
10	0.1ns	0.033ns
1000	1ms	10μs
10 <sup>6</sup>	17 minuti	20ms
10 <sup>9</sup>	70 anni	30s

## 4 Lezione dell'08/03/2018

### 4.1 Notazione asintotica

Il **tempo di esecuzione** è difficile da calcolare, come visto nella sezione 2.2. Il modo in cui è stato calcolato è pieno di dettagli “inutili”.

Rivediamo le complessità di Insertion Sort e Merge Sort:

$$\begin{aligned}T^{IS} &= an^2 + bn + c \\ T^{MS} &= an \log_2 n + bn + c\end{aligned}$$

A noi interessa calcolare  $T(n)$  per  $n$  “grande”. Non consideriamo le costanti moltiplicative, che sono non fondamentali. Ecco una lista di possibili complessità ordinate in senso decrescente (le prime due categorie appartengono alla classe degli *NP problems*, ossia non trattabili):

- $3^n$
- $2^n$
- $n^k$
- $n^2$
- $n \log n$
- $n$
- $\log n$
- 1

Prendiamo in esame due funzioni:  $f(n)$ ,  $g(n)$ :

$$f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

- $f(n)$  è la funzione in esame della complessità del nostro problema P;
- $g(n)$  è la funzione che, moltiplicata per un'opportuna costante  $c_i$ , dopo un certo  $n$ , fa da limite superiore o inferiore per ogni punto di  $f(n)$ .

### 4.1.1 Limite asintotico superiore

Data  $g(n)$ , indichiamo con  $O(g(n))$  il *limite asintotico superiore*, definito come segue:

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0 \quad \exists n_0 (\in \mathbb{N}) \mid \forall n \geq n_0 \Rightarrow (0 \leq) f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

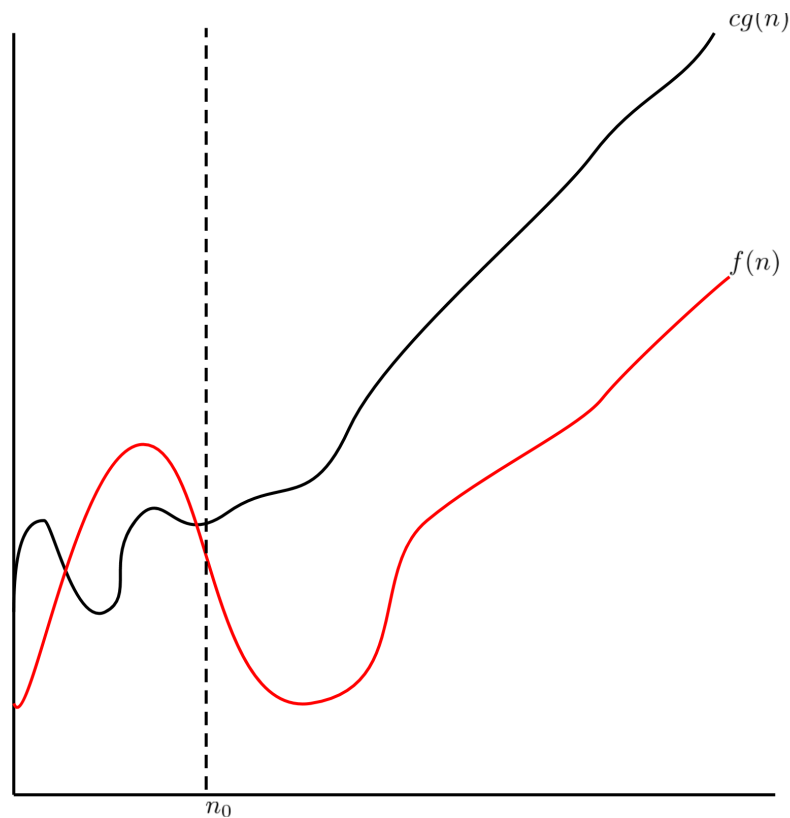


Figura 2: Rappresentazione del limite asintotico superiore per  $f(n)$

### Esempi

◦  $f_1(n) = 2n^2 + 5n + 3 = O(g(n^2))$  ? Sì.

Deve valere  $f_1(n) < cn^2 \quad \exists c > 0, n \geq n_0$

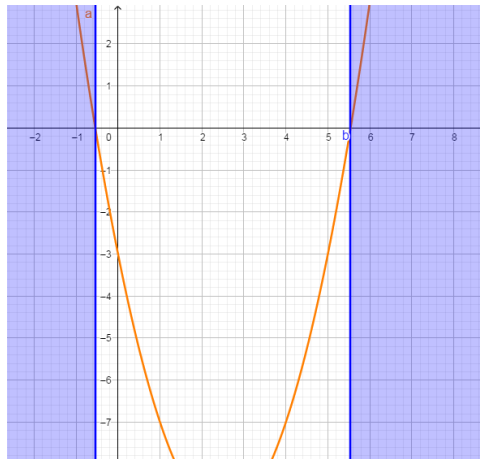
Ipotizziamo  $c = 3$

$$2n^2 + 5n + 3 \leq 3n^2$$

$$n^2 - 5n - 3 \geq 0$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{2 \cdot 5 + 12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \cong 5.54$$

(Non considero la soluzione negativa, poiché siamo in  $\mathbb{R}^+$ )



Prendo  $c = 3$  e  $n_0 = 6$ . Vale dunque:

$$f_1(n) \leq cn^2 \quad \forall n \geq n_0$$

◦  $f_1(n) = O(g(n^3))$  ? Sì.

$$c = 3$$

$$n_0 = 6 \quad \forall n \geq n_0$$

$$f_1(n) \leq cn^2 \leq cn^3$$

◦  $f_2(n) = 2 + \sin(n) = O(1)$  ? Sì.

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$1 \leq f_2(n) \leq 3$$

Vale la seguente

$$\exists c > 0 \quad \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow f_2(n) \leq c \cdot 1$$

ok per  $c = 3, n_0 = 0$

### 4.1.2 Limite asintotico inferiore

Data  $g(n)$ , indichiamo con  $\Omega(g(n))$  il *limite asintotico inferiore*, definito come segue:

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0 \quad \exists n_0 (\in \mathbb{N}) \mid \forall n \geq n_0 \Rightarrow c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

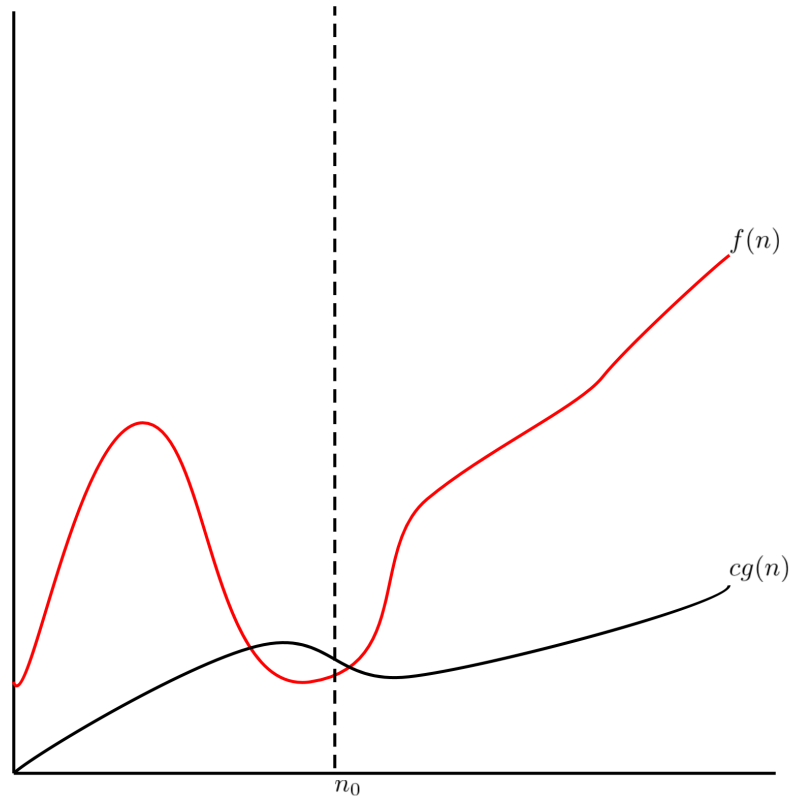


Figura 3: Rappresentazione del limite asintotico inferiore per  $f(n)$

### Esempi

- $f_1(n) = 2n^2 + 5n + 3 = \Omega(g(n^2))$  ? Sì.

Deve valere:

$$\exists c > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow cn^2 \leq 2n + 5n + 3$$

Basta porre  $c = 1$ ,  $n_0 = 0$ .

- $f_2(n) = 2 + \sin(n) = \Omega(1)$  ? Sì.

$$1 \leq f_2(n) \leq 3 \quad c = 1, \quad n_0 = 0$$

### 4.1.3 Limite asintotico stretto

Data  $g(n)$ , indichiamo con  $\Theta(g(n))$  il *limite asintotico stretto*, definito come segue:

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0 \quad \exists n_0 (\in \mathbb{N}) \mid \forall n \geq n_0 \\ \Rightarrow c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\}$$

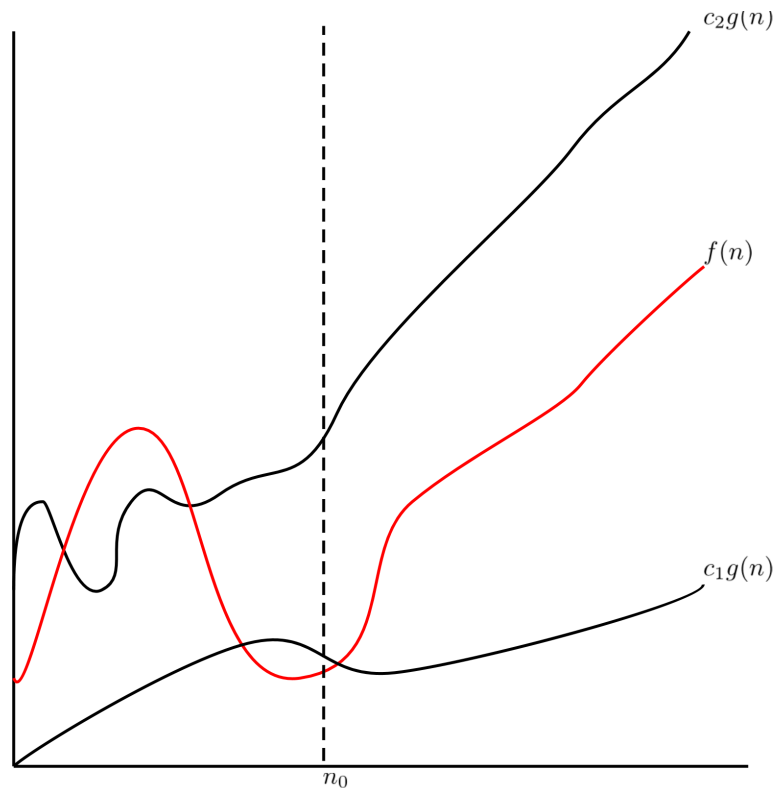


Figura 4: Rappresentazione del limite asintotico stretto per  $f(n)$

### Esempi

$$f_1(n) = 2n^2 + 5n + 3 = \Theta(n^2) \\ c_1 = 1 \quad c_2 = 3 \quad n_0 = 6$$

$$f_2(n) = 2 + \sin(n) = \Theta(1) \\ c_1 = 1 \quad c_2 = 3 \quad n_0 = 0$$

$$f_1(n) \neq \Theta(n^3)$$

$$f_1(n) = O(n^3)$$

$$f_1(n) \neq \Omega(n^3)$$

$\Downarrow$

$$\frac{f_1(n)}{n^3} \rightarrow 0$$

## 4.2 Metodo del limite

$$f(n), g(n) > 0 \quad \forall n$$

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$  esiste, allora:

1. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k > 0$  allora  $f(n) = \Theta(g(n))$ .

$$\begin{aligned} \text{Infatti } \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 &\Rightarrow \left| \frac{f(n)}{g(n)} - k \right| \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow -\varepsilon \leq \frac{f(n)}{g(n)} - k \leq \varepsilon \end{aligned}$$

$$k - \varepsilon \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq k + \varepsilon$$

$$(k - \varepsilon)g(n) \leq f(n) \leq (k + \varepsilon)g(n) \quad \text{per } 0 < \varepsilon < k$$

2. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$  allora  $f(n) = O(g(n))$  e  $f(n) \neq \Omega(g(n))$ .
3. Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$  allora  $f(n) = \Omega(g(n))$  e  $f(n) \neq O(g(n))$ .

## 4.3 Alcune proprietà generali

- $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 = \Theta(n^k)$
- $h \neq k \quad \Theta(n^h) \neq \Theta(n^k)$
- $a \neq b \quad \Theta(a^k) \neq \Theta(b^k)$
- $h \neq k \quad \Theta(a^{n+h}) = \Theta(a^{n+k})$
- $a \neq b \quad \Theta(\log_a n) = \Theta(\log_b n)$

In generale

$$O(1) \subseteq O(\log n) \subseteq O(n) \subseteq O(n \log n) \subseteq O(n^2) \subseteq \dots$$

Rivediamo **Insertion Sort** con le notazioni asintotiche:

$$T^{IS}(n) = O(n^2) \quad T_{max}^{IS}(n) = \Theta(n^2)$$

Vale anche la proprietà seguente:

$$\begin{aligned} 2n^k + \Theta(n^{k-1}) &= O(n^k) (\subseteq \Theta(n^k)) \\ &= \Theta(n^k) \quad \forall k > 0 \end{aligned}$$

## 5 Lezione del 09/03/2018

### 5.1 Complessità di un problema

Dato un problema<sup>1</sup>  $P$  ci sono (possono esserci) algoritmi che risolvono  $P$ . La **complessità** di  $P$  è la complessità dell'algoritmo di complessità più bassa che lo risolve.

**Limite superiore per complessità di  $P$**  Se  $A$  è un algoritmo per  $P$  con complessità  $f(n)$ , allora  $P$  è  $O(f(n))$ .

Vediamo un paio di esempi:

- Insertion Sort algoritmo di ordinamento  $O(n^2)$ ;
- Merge Sort algoritmo di ordinamento  $O(n \log n)$ .

**Limite inferiore per complessità di  $P$**  Se ogni algoritmo che risolve  $P$  ha complessità  $\Omega(f(n))$  allora  $P$  è  $\Omega(f(n))$

$$\implies \text{ se } P \text{ è } O(f(n)) \text{ e } \Omega(f(n)) \Rightarrow P \text{ è } \Theta(f(n))$$

### 5.2 Esempio: limite inferiore per l'ordinamento basato su scambi

**Def (inversione)** Dato  $A[1..n]$ , una *inversione* è una coppia  $(i, j)$  con  $i, j \in [1, n]$  con  $i < j$  e  $A[i] > A[j]$ .

Operazione disponibile:  $A[k] \leftrightarrow A[k+1]$  (scambio tra gli elementi in posizione  $k$  e  $k+1$ ).

$$\begin{aligned} \#inv(A) &= \text{numero di inversioni di } A \\ &= \left| \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n \wedge A[i] > A[j]\} \right| \end{aligned}$$

1.  $A$  è ordinato sse  $\#inv(A) = 0$ ;
2.  $A$  è ordinato in senso inverso sse

$$\sum_{j=2}^n j - 1 = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ossia,  $\#inv(A)$  è massimizzato.

---

<sup>1</sup>Relazione/funzione INPUT  $\rightarrow$  OUTPUT



Vediamo cosa succede alle coppie  $(i, j)$  e a  $\#inv(A)$  nel caso avvenga uno scambio  $A[k] \leftrightarrow A[k+1]$ .

- $i, j \neq k$  e  $i, j \neq k+1 \implies (i, j)$  è inversione prima sse è inversione dopo;
- $i = k, j = k+1$

$$\implies \begin{cases} A[k] < A[k+1] & +1 \text{ inversione} \\ A[k] = A[k+1] & \#inv(A) \text{ non cambia} \\ A[k] > A[k+1] & -1 \text{ inversione} \end{cases}$$

- $i = k$  oppure  $i = k+1, j > k+1 \implies (k, j)$  è inversione prima sse  $(k+1, j)$  è inversione dopo;
- $j = k$  oppure  $j = k+1, i < k$ , analogo al caso precedente.

Per concludere, possiamo dire che l'operazione  $A[k] \leftrightarrow A[k+1]$  riduce  $\#inv(A)$  al massimo di 1.

$$\implies \text{qualsunque algoritmo di ordinamento è } \Omega\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = \Omega(n^2)$$

Insertion Sort è “quasi” basato su scambi  $\implies$  è  $O(n^2) \implies$  è  $\Theta(n^2)$

### 5.3 Soluzione di ricorrenze

Abbiamo visto per Merge Sort la complessità nel modo seguente:

MERGE-SORT( $A, p, r$ )

- 1 **if**  $p < r$
- 2      $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$
- 3     MERGE-SORT( $A, p, q$ )
- 4     MERGE-SORT( $A, q+1, r$ )
- 5     MERGE( $A, p, q, r$ ) // complessità  $an + b$

$$T^{MS}(n) = \begin{cases} c_0 & \text{se } n \leq 1 \\ T^{MS}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T^{MS}(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + an + b & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

È stato tuttavia un approccio non molto preciso. Ci sono due metodi per risolvere precisamente i problemi di ricorrenza:

- *Metodo di sostituzione* (5.3.1);
- *Master Theorem* (7.1).

### 5.3.1 Metodo di sostituzione

Dato una ricorrenza, si può provare a “indovinare” la soluzione, oppure si può sviluppare l'*albero delle ricorrenze*:

- *radice*: chiamata di cui vogliamo la complessità;
- per ogni nodo:
  - costo della parte non ricorsiva;
  - un figlio per ogni chiamata.

#### Esempio

$$T(n) = \begin{cases} 4 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + 6n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

In generale, si può benissimo trascurare il caso base per poter ottenere espressioni meno verbose, in questo caso otterremmo:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 6n$$

Per questa volta, facciamo il procedimento per intero. Proviamo a “indovinare” la soluzione<sup>1</sup>. Assomiglia a **Merge Sort**, quindi ipotizziamo abbia una complessità con un andamento simile

$$T(n) = an \log n + bn + c$$

Facciamo la prova induttiva.

$$\begin{aligned} (n = 1) \quad T(1) &= 4 \\ &= a \cdot 1 \cdot \log 1 + b \cdot 1 + c && (\log 1 = 0) \\ &= b + c && \text{ok se } b + c = 4 \\ (n > 1) \quad T(n) &= 2T(\frac{n}{2}) + 6n \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>In classe, è stato visto anche un esempio con un albero. Ho scelto di ometterlo per la poca praticità nel rappresentarlo in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

Per ipotesi induttiva

$$T\left(\frac{n}{2}\right) = a\frac{n}{2} \cdot \log \frac{n}{2} + b\frac{n}{2} + c$$

Calcolo ora  $T(n)$

$$\begin{aligned} T(n) &= an \log_2 \frac{n}{2} + bn + 2c + 6n = \\ &= an \log_2 n - an \log_2 2 + bn + 6n + 2c = \quad (\log_2 2 = 1) \\ &= an \log_2 n + n(b + 6 - a) + 2c = \\ &= an \log_2 n + bn + c \\ &\quad \Downarrow \end{aligned}$$

$$b + 6 - a = b \Rightarrow a = 6$$

$$2c = c \Rightarrow c = 0$$

$$b + c = 4 \Rightarrow b = 4$$

$$\begin{aligned} T(n) &= an \log n + bn + c \\ &= 6n \log n + 4n \end{aligned}$$

## 6 Lezione del 14/03/2018

### Esercizio (importante)

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 6n \\ &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n) \\ \text{vale } \exists c > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \Theta(n) &\leq cn \end{aligned}$$

Voglio dimostrare che

1.  $T(n) = O(n \log n)$
2.  $T(n) = \Omega(n \log n)$

$$1. \quad T(n) = O(n \log n)$$

significa che  $\exists d > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \mid T(n) \leq dn \log n \quad \forall n \geq n_1$

Dimostro per induzione  $T(n) \leq dn \log n \quad \forall n \geq n_1$ .

Ometto il caso base, poiché non è molto interessante (mi basterebbe aumentare ulteriormente  $d$  per avere un valore accettabile).

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn & \text{ip. induttiva } T\left(\frac{n}{2}\right) &= d\frac{n}{2} \log \frac{n}{2} \\ &\leq 2 \cdot \frac{n}{2} d \log \frac{n}{2} + cn & \left(\log \frac{n}{2} = \log n - \log 2\right) \\ &= dn \log n - dn \log 2 + cn \\ &= dn \log n - n(d \log 2 - c) \leq dn \log n \\ &\Rightarrow -n(d \log 2 - c) \leq 0 \\ n(d \log 2 - c) &\geq 0 \\ d \log 2 - c &\geq 0 \\ d &\geq \frac{c}{\log 2} \end{aligned}$$

2.  $T(n) = \Omega(n \log n)$  è analoga.

$$\exists \delta > 0 : \forall n > n_0 \Rightarrow T(n) \geq \delta n \log n$$

Ho l'ipotesi induttiva  $T(\frac{n}{2}) \geq \delta \frac{n}{2} \log \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned}
 T(n) &\geq 2\delta \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} + cn = \\
 &= \delta n \log n - \delta n \log 2 + cn = \\
 &= \delta n \log n + n(c - \delta \log 2) \geq \delta n \log n \\
 &\text{Deve valere } c - \delta \log 2 \geq 0 \\
 &\Rightarrow 0 < \delta \leq \frac{c}{\log 2}
 \end{aligned}$$

**Esercizio**  $T(n) = T(\frac{n}{3}) + T(\frac{2n}{3}) + \Theta(n)$  ( $\Theta(n) \leq c \cdot n$ )

Ipotizzo un andamento simile a Merge Sort:  $\Theta(n \log n)$ . Dimostro:

1.  $T(n) = O(n \log n)$

2.  $T(n) = \Omega(n \log n)$

1.  $T(n) = \Omega(n \log n)$

$$\exists d > 0 : \forall n > n_0 \Rightarrow T(n) \leq dn \log n$$

Ometto il caso base. L'ipotesi induttiva è la seguente:

$$T(n) \leq d \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} + d \frac{2n}{3} \log \frac{2n}{3} + cn$$

Procedo con i calcoli ...

$$\begin{aligned}
 T(n) &\leq T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + cn \\
 &\leq d \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} + \frac{2n}{3} \log \frac{2n}{3} = \\
 &= \frac{dn}{3} \left( \log n - \log 3 \right) + d \frac{2n}{3} \left( \log n - \log \frac{2}{3} \right) + cn = \\
 &= dn \log n - \frac{dn}{3} \left( \log 3 - 2 \log \frac{2}{3} \right) + cn = \\
 &= dn \log n - \frac{dn}{3} \left( \log 3 - \log \frac{4}{9} \right) + cn = \\
 &= dn \log n - n \left( \frac{d}{3} \log \frac{27}{4} - c \right) \leq dn \log n \\
 &\quad \frac{d}{3} \log \frac{27}{4} - c \geq 0 \\
 &\Rightarrow d \geq \frac{3c}{\log \frac{27}{4}} \quad \left( \log \frac{27}{4} > 1 \text{ poiché } \arg > 1 \right)
 \end{aligned}$$

**2.**  $T(n) = \Omega(n \log n)$  è analoga

$$\exists \delta > 0 : \forall n > n_0 \Rightarrow T(n) \geq \delta n \log n$$

L'ipotesi induttiva è la seguente:

$$T(n) \geq \delta \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} + \delta \frac{2n}{3} \log \frac{2n}{3} + cn$$

Calcoli ...

$$\begin{aligned} T(n) &\geq T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + cn \\ &\geq \delta \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} + \frac{2n}{3} \log \frac{2n}{3} = \\ &= \delta \frac{n}{3} \left( \log n - \log 3 \right) + \delta \frac{2n}{3} \left( \log n - \log \frac{2}{3} \right) + cn = \\ &= \delta n \log n + \frac{\delta n}{3} \left( -\log 3 + 2 \log \frac{2}{3} \right) + cn = \\ &= \delta n \log n + \frac{\delta n}{3} \left( -\log 3 + \log \frac{4}{9} \right) + cn = \\ &= \delta n \log n + n \left( -\frac{\delta}{3} \log \frac{27}{4} + c \right) \geq \delta n \log n \\ &\quad - \frac{\delta}{3} \log \frac{27}{4} + c \geq 0 \\ &\Rightarrow 0 < \delta \leq \frac{3c}{\log \frac{27}{4}} \end{aligned}$$

## 7 Lezione del 15/03/2018

### 7.1 Master Theorem

Dato un problema con **size**  $n$ , vogliamo dividerlo in  $a$  sottoproblemi con **size**  $\frac{n}{b}$ . Otteniamo la seguente ricorrenza (ricordiamo che il caso base è omesso per semplicità):

$$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

con  $a \geq 1$ ,  $b > 1$ , allora possiamo confrontare

- $f(n)$ ;
- $n^{\log_b a}$ .

Tre possibili casi:

1. Se  $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$  per qualche  $\varepsilon > 0$ , allora

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

2. Se  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$  allora

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$$

3. Se  $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$  per qualche  $\varepsilon > 0$ , e vale la *regolarità*

$$\exists 0 < k < 1 \text{ tale che } a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq k \cdot f(n)$$

allora

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

**Breve “dimostrazione” sul perchè  $n^{\log_b a}$**

$$T(n) = f(n) + af\left(\frac{n}{b}\right) + a^2f\left(\frac{n}{b^2}\right) + \dots + a^{\log_b n}f\left(\frac{n}{b^{\log_b n}}\right) + c \cdot a^{\log_b n}$$

$$a^{\log_b n} = (b^{\log_b a})^{\log_b n} = (b^{\log_b n})^{\log_b a} = n^{\log_b a}$$

$$\text{Nota bene: } af\left(\frac{n}{b}\right) \leq k \cdot f(n) \text{ con } k < 1$$

Vediamo ora i casi in cui sarà possibile finire, e le conclusioni legate ad essi.

A)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = l (> 0) \neq \infty$$

$$\text{Caso 2} \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$$

B)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = 0$$

Potrei essere nel *Caso 1*  $\Rightarrow$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a - \varepsilon}} = l \neq \infty$  ( $\varepsilon > 0$ )

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

C)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a}} = \infty \quad \& \quad \exists \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{\log_b a + \varepsilon}} = l \neq 0$$

$$\& \text{Regolarità} \Rightarrow \text{Caso 3: } T(n) = \Theta(f(n))$$

### 7.1.1 Esercizi (Master Theorem)

- $T^{MS} = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + a'n + b'$

Abbiamo (rispetto alla forma  $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ )

$$a = 2, \quad b = 2$$

$$f(n) = a'n + b' \quad n^{\log_2 2} = n$$

È chiaro che le due funzioni hanno lo stesso andamento (di ordine  $\Theta(n)$ ):

$$a'n + b' = \Theta(n)$$

$$\text{Caso 2} \Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_2 2} \log n\right) = \Theta(n \log n)$$

- $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + 2n^2 + n \log n$

Abbiamo (rispetto alla forma  $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ )

$$a = 5, \quad b = 2$$

$$f(n) = n^2 + n \log n \quad n^{\log_2 5} \quad (\log_2 5 > 2)$$

$$0 < \varepsilon < \log_2 5 - 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n \log n}{n^{\log_2 5 - \varepsilon}} = 0 \Rightarrow f(n) = O(n^{\log_2 5})$$

$$\text{Caso 1} \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_2 5})$$



- $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n^3$  per esercizio.
- $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n^3 \log n$

Abbiamo

$$\begin{aligned} a &= 5, \quad b = 2 \\ f(n) &= n^3 \log n \quad n^{\log_2 5} \quad (\log_2 5 < 3) \\ 0 < \varepsilon < 3 - \log_2 5 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \log n}{n^{\log_2 5 + \varepsilon}} = \infty \end{aligned}$$

Possibile caso 3. *Regolarità?*

$$\begin{aligned} af\left(\frac{n}{b}\right) &\leq kf(n) \quad \text{per } 0 < k < 1 \text{ opportuno} \\ 5\left(\frac{n}{2}\right)^3 \log \frac{n}{2} &= \frac{5}{8}n^3 \log \frac{n}{2} \leq \frac{5}{8}n^3 \log n \leq kn^3 \log n \quad \text{per } 0 < k \leq \frac{5}{8} < 1 \\ &\Downarrow \\ \text{Caso 3: } T(n) &= \Theta(f(n)) = \Theta(n^3 \log n) \end{aligned}$$

- $T(n) = 27T(\frac{n}{3}) + n^3 \log n$

$$\begin{aligned} f(n) &= n^3 \log n \quad n^{\log_3 27} \quad (\log_3 27 = 3) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \log n}{n^{3+\varepsilon}} &= +\infty \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ non possiamo dimostrare } 3 \\ &\Rightarrow \text{Non siamo in nessun caso del Master Theorem.} \end{aligned}$$

Anche valutando la *regolarità*, ricadiamo in un assurdo. Dobbiamo dimostrare che  $af(\frac{n}{b}) < kf(n)$  per qualche  $k > 0$

$$\begin{aligned} 27\left(\frac{n}{3}\right)^3 \log \frac{n}{3} &= n^3(\log n - \log 3) \not\leq kn^3 \log n \quad \text{per nessun } k > 0 \\ \text{Infatti } \frac{(\log n - \log 3)n^3}{n^3 \log n} &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

(Posso usare il Metodo di Sostituzione)

$$T(n) = 27T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3 \log n$$

Costruiamo l'albero delle ricorrenze:

• *radice*: costo  $n^3 \log n$ ;

- ogni nodo ha 27 figli.
  - ◇ i 27 figli del primo livello hanno costo  $(\frac{n}{3})^3 \log \frac{n}{3}$ ;
  - ◇ i  $27^2$  figli del secondo livello hanno costo  $(\frac{n}{9})^3 \log \frac{n}{9}$ ;
  - ◇ ...
  - ◇ le  $27^n$  foglie terminali hanno costo  $O(1)$ .

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \sum_{j=0}^{\log_3 n} n^3 \log \frac{n}{3^j} = n^3 \sum_{j=0}^{\log_3 n} (\log n - j \log 3) + cn = \\
 &= n^3 (\log n)^2 - n^3 \log 3 \sum_{j=0}^{\log_3 n} j + cn \quad \left( \sum_{j=0}^{\log_3 n} j \cong (\log_3 n)^2 \right) \\
 T(n) &= 27T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3 \log n \\
 T(n) &= \Theta(n^3 (\log n)^2) \quad \text{ipotesi ricavata}
 \end{aligned}$$

Devo dimostrare che valgano le seguenti condizioni:

1.  $T(n) = O(n^3 (\log n)^2)$
2.  $T(n) = \Omega(n^3 (\log n)^2)$
1.  $T(n) = O(n^3 (\log n)^2)$

$$T(n) \leq c \cdot n^3 (n^3 (\log n)^2) \quad c > 0$$

$$T(n) = 27T\left(\frac{n}{3}\right) + n^3 \log n$$

$$\begin{aligned}
 &\left( \text{ipotesi induttiva } T\left(\frac{n}{3}\right) \leq c \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^3 \left(\log \frac{n}{3}\right)^2 \right) \\
 &\leq 27c \left(\frac{n}{3}\right)^3 \left(\log \frac{n}{3}\right)^2 + n^3 \log n = \\
 &= \frac{27cn^3}{27} (\log n - \log 3)^2 + n^3 \log n = \\
 &= cn^3 \left( (\log n)^2 - 2 \log 3 \log n + (\log 3)^2 \right) + n^3 \log n = \\
 &= cn^3 (\log n)^2 - n^3 \left( \log n (2 \log 3 - 1) - c (\log 3)^2 \right) \\
 &\leq cn^3 (\log n)^2
 \end{aligned}$$

Per un  $n$  abbastanza grande, vale la disuguaglianza con un opportuno valore di  $c$ :

$$c > \frac{1}{2 \log 3}$$

$$2. T(n) = \Omega(n^3(\log n)^2)$$

$$\begin{aligned} \exists d > 0 : T(n) &\geq dn^3(\log n)^2 \\ &\geq 27\left(\frac{n}{3}\right)^3 \left(\log \frac{n}{3}\right)^2 + n^3 \log n \\ &= \dots = dn^3(\log n)^2 - n^3 \left( \log n(2d \log 3 - 1) - d(\log 3)^2 \right) \\ &\geq dn^3(\log n)^2 \end{aligned}$$

Per un  $n$  abbastanza grande, vale la disuguaglianza con un opportuno valore di  $d$ :

$$2d \log 3 - 1 < 0 \quad \text{ok per } 0 < d < \frac{1}{2 \log 3}$$

## 8 Lezione del 21/03/2018

**Ordinamento** Finora abbiamo visto due algoritmi di ordinamento, in cui avevamo le seguenti premesse:

IN:  $a_1 \dots a_n$ ;

OUT: permutazione  $a'_1 \dots a'_n$  ordinata.

In particolare, abbiamo concluso che:

- **Insertion Sort**:  $O(n^2)$ , basato su scambi;
- **Merge Sort**:  $\Theta(n \log n)$ , ma con un costo in termini di *memoria*.

### Memoria

- **Insertion Sort**:

*input* + 1 variabile  $\Rightarrow$  spazio *costante*  $\Theta(1)$  (detto “in loco”)

- **Merge Sort**: spazio con costo lineare.

$$\begin{aligned} S_{MS}(n) &= \max \left\{ S\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), S\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right), \Theta(n) \right\} \\ &= \Theta(n) \end{aligned}$$

### 8.1 Heapsort

L'**Heapsort**<sup>1</sup> è un algoritmo di ordinamento basato su una struttura chiamata **heap**, che prende le caratteristiche positive di **Insertion Sort** e **Merge Sort**:

- in “loco” (spazio  $\Theta(1)$ );
- complessità  $\Theta(n \log n)$ .

**Cos'è un heap?** Un **heap** è una struttura dati basata sugli alberi che soddisfa la “proprietà di heap”: se A è un genitore di B, allora la chiave di A è ordinata rispetto alla chiave di B conformemente alla relazione d'ordine applicata all'intero heap.

Seguono alcune definizioni.

---

<sup>1</sup>Anche qui, si consiglia di dare un occhio ad altre fonti. In classe, sono stati viste molte rappresentazioni grafiche degli heap, e, come già detto, in  $\text{\LaTeX}$  non è per me facile rappresentarli.

**Altezza:** è la distanza dalla radice alla foglia più distante;

**Albero completo:** è un albero di altezza  $h$  con  $\sum_{i=0}^h 2^i - 1$  nodi;

**Albero quasi completo:** è un albero completo a tutti i livelli eccetto l'ultimo, in cui possono mancare delle foglie.

Gli heap verranno rappresentati in array monodimensionali, nel modo descritto di seguito:

$$\forall i > 0$$

- $A[i]$  è il nodo genitore;
- $A[2i]$  è il figlio sx del nodo  $A[i]$ ;
- $A[2i+1]$  è il figlio dx.

Inoltre, ogni array  $A$  sarà dinamico, e avrà:

- $A.length$  potenziale spazio, capacità massima dell'array;
- $A.heapsize$  celle effettive dell'array.

Vediamo alcune funzioni di utilità che verranno usate.

LEFT( $i$ )

// restituisce il figlio sx del nodo  $i$

1 **return**  $2 * i$

RIGHT( $i$ )

// restituisce il figlio dx del nodo  $i$

1 **return**  $2 * i + 1$

PARENT( $i$ )

// restituisce il genitore del nodo  $i$

1 **return**  $\lfloor i/2 \rfloor$

### 8.1.1 Max Heap

*Max Heap* è uno heap che soddisfa la seguente proprietà:

$$\begin{aligned} &\forall \text{ nodo } A[i], \\ &A[i] \geq \text{discendenti} \\ &\Downarrow \\ &A[i] \geq A[\text{Left}(i)], A[\text{Right}(i)] \end{aligned}$$

### Osservazioni

- Uno heap con un solo elemento è un *Max Heap*.
- Dati due Max Heap  $T_1$  e  $T_2$  e un nodo  $N$ , possiamo “combinarli” in uno heap con  $N$  come radice,  $T_1$  come *left* e  $T_2$  come *right*.

Ecco ora una procedura che, dato un nodo  $i$ , trasforma in un Max Heap il sotto-albero eradicato in esso (con radice  $i$ ).

```

MAXHEAPIFY( $A, i$ )
1   $l = \text{LEFT}(i)$ 
2   $r = \text{RIGHT}(i)$ 
3  if ( $l \leq A.\text{heapsize}$ ) and ( $A[l] > A[i]$ )
4       $max = l$ 
5  else
6       $max = i$ 
7  if ( $r \leq A.\text{heapsize}$ ) and ( $A[r] > A[max]$ )
8       $max = r$ 
9  if ( $max \neq i$ )
10      $A[i] \leftrightarrow A[max]$ 
11     MAXHEAPIFY( $A, max$ )

```

### Correttezza di MaxHeapify

- **Caso base:**  $max = i$ ,  $A[i] \geq A[l], A[r]$ ;
- **Induzione:**  $max \neq i$ , distinguo 2 casi:
  - $max = l$ ,  $A[l] \geq A[i], A[r]$ ;
  - $max = r$ ,  $A[r] \geq A[i], A[l]$ .

**Costo?** L'algoritmo ha un costo di  $O(h)$ , con  $h$  altezza del sotto-albero radicato in  $i$ , con

$$O(h) \cong O(\log n) \quad (\text{omessa la dimostrazione})$$

Ora vogliamo scrivere una procedura che costruisce un *Max Heap* da un array qualunque.

Quali sono i nodi foglia?

- Se  $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

$$2i = 2\left(\frac{n}{2} + 1\right) \geq n + 2 - 1 = n + 1 \\ \Rightarrow i \text{ foglia}$$

- Se  $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

$$2i = 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq n \\ \Rightarrow i \text{ non foglia}$$

BUILDMAXHEAP( $A$ )

```
1   $A.heapsize = A.length$ 
2  for  $i = \lfloor A.length/2 \rfloor$  down to 1
3      MAXHEAPIFY( $A, i$ )
```

L'algoritmo esegue  $\frac{n}{2}$  volte **MaxHeapify** (che ha costo  $O(\log n)$ ), ottenendo un costo totale di  $O(n \log n)$ , tuttavia questa stima è molto pessimistica.

Definiamo:

- $h_T$  altezza del cammino più lungo dello heap;
- $h_T - 1$  di conseguenza è l'altezza dell'albero meno l'ultimo livello, che è generalmente incompleto.

$$n = \left(2^{(h_T-1)+1} - 1\right) + 1 \\ = 2^{h_T} \\ h_T \leq \log n \\ n \geq 2^{h_T}$$

$$T(n) = \sum_{h=1}^{\lfloor \log n \rfloor} 2^{h_T-h} \cdot O(h) \\ (2^{h_T-h} = \# \text{ chiamate a MaxHeapify al livello } h) \\ = \sum_{h=1}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{2^{h_T}}{2^h} O(h) \quad (2^{h_T} = n) \\ = O\left(\left(\sum_{h=1}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{h}{2^h}\right)n\right) = O(n) \quad \left(\sum_{h=1}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{h}{2^h} \leq \sum_{h=1}^{\infty} \frac{h}{2^h} = \frac{\frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 2\right)$$

Passiamo ora all'algoritmo di ordinamento **Heapsort**. La radice di un *Max Heap* contiene il valore massimo. Quindi, la prima operazione, e quella su cui si basa **Heapsort**, consiste nel mettere la radice in ultima posizione.

Es. A: 9 8 7 5 7 4 0 4 3 6 1 2      è un max heap.  
 $\Rightarrow$  8 7 5 7 4 0 4 3 6 1 2 9      ignoro l'ultimo elemento, chiamo  
**MaxHeapify** sulla radice e itero.

Poi chiama **MaxHeapify** sul resto dell'array per renderlo un *Max Heap*, e itera il procedimento sul nuovo array.

```

HEAPSORT(A)
1  BUILDMAXHEAP(A) //  $O(n)$ 
2  for  $i = A.length$  down to 2
3       $A[1] \leftrightarrow A[i]$ 
4       $A.heapsize = A.heapsize - 1$ 
5      MAXHEAPIFY(A, 1) //  $O(\log n)$ 

```

**Costo?** Il costo complessivo è di  $O(n \log n)$ .

## 8.2 Code con priorità

*S* insieme dinamico di oggetti.

$x$  è l'indice,  $x.key$  è il corrispondente valore relativo a quell'indice. Voglio poter eseguire le seguenti operazioni:

- **Insert**(*S*,  $x$ )
- **Max**(*S*)
- **ExtractMax**(*S*)
- **IncreaseKey**(*S*,  $x$ ,  $\Delta$ )
- **ChangeKey**(*S*,  $x$ ,  $\Delta$ )
- **Delete**(*S*,  $x$ )

**Idea** Uso un *Max Heap* (*A*).

```

MAX(A)
1  if  $A.heapsize = 0$ 
2      error
3  else return  $A[1]$ 

```

La procedura **Max**(*A*) ha complessità costante  $\Theta(1)$ .



EXTRACTMAX( $A$ )

```

1   $max = A[1]$ 
2   $A[1] = A[A.heapsize]$ 
3   $A.heapsize = A.heapsize - 1$ 
4  MAXHEAPIFY( $A, 1$ ) // ripristina le proprietà di MaxHeap
5  return  $max$ 
```

La procedura **ExtractMax( $A$ )** ha la stessa complessità di **MaxHeapify**:  $O(\log n)$ .

Per **Insert**, le cose diventano più delicate. L'idea è quella di inserire in coda ad  $A$ : in questo modo, l'unico elemento che potrebbe compromettere la proprietà di *Max Heap* è la cella di indice  $i$  (nel nostro caso, l'ultima). Deve vale la proprietà:

Per ogni  $j \neq i$   
 $A[j] \leq$  antenati

Non possiamo dire nulla su  $i$ . Va ristabilita la proprietà di *Max Heap*: per fare ciò usiamo la procedura **MaxHeapifyUp**.

MAXHEAPIFYUP( $A, i$ )

```

1  if ( $i > 1$ ) and ( $A[i] > A[PARENT(i)]$ )
2       $A[i] \leftrightarrow A[PARENT(i)]$ 
3      MAXHEAPIFYUP( $A, PARENT(i)$ )
```

### Correttezza di MaxHeapifyUp

#### Casi base

( $i = 1$ ) ok, non faccio nulla;

( $A[i] \leq A[PARENT(i)]$ ) ok, la proprietà di *Max Heap* è mantenuta.

#### Induzione

( $A[i] > A[PARENT(i)]$ ) scambio le due celle. I discendenti (sottoalberi) della nuova cella  $A[i]$  mantengono la proprietà di *Max Heap*.

**Costo?**  $O(\log i)$ , nel caso peggiore  $O(\log n)$ .

Ecco ora lo pseudocodice della funzione **Insert**.

```
INSERT( $A, x$ )
1   $A.heapsize = A.heapsize + 1$ 
2   $A[A.heapsize] = x$ 
3  MAXHEAPIFYUP( $A, A.heapsize$ )
```

**Insert** ha costo  $O(\log n)$ , lo stesso di **MaxHeapifyUp**.

```
INCREASEKEY( $A, i, \delta$ )
  // Precondizione:  $\delta \geq 0$ 
1   $A[i] = A[i] + \delta$ 
2  MAXHEAPIFYUP( $A, i$ )
```

**IncreaseKey** ha costo  $O(\log n)$ .

```
CHANGEKEY( $A, i, \delta$ )
1   $A[i] = A[i] + \delta$ 
2  if  $\delta > 0$ 
3      MAXHEAPIFYUP( $A, i$ )
4  else //  $\delta \leq 0$ 
5      MAXHEAPIFY( $A, i$ )
```

**ChangeKey** è come **IncreaseKey**, ma può utilizzare valori di  $\delta$  qualsiasi, ed è corretto per la seguente proprietà:

Se per ogni  $j \neq i$   $A[j] \geq$  discendenti  
 $\Rightarrow$  dopo **MaxHeapify** ho un *MaxHeap*

```
DELETEKEY( $A, i$ )
1   $old = A[i]$ 
2   $A[i] = A[A.heapsize]$ 
3   $A.heapsize = A.heapsize - 1$ 
4  if  $old \leq A[i]$ 
5      MAXHEAPIFYUP( $A, i$ )
6  else
7      MAXHEAPIFY( $A, i$ )
```

**DeleteKey** ha costo  $O(\log n)$ .

## 9 Lezione del 23/03/2018

### 9.1 Quicksort

Il **Quicksort** è probabilmente l'algoritmo di ordinamento più utilizzato e sulla pratica efficiente, nonostante abbia un caso pessimo di  $O(n^2)$ .

- Caso pessimo  $O(n^2)$ ;
- Caso medio e migliore  $O(n \log n)$ ;
- costanti basse.

Si basa sul paradigma del *divide et impera*:

- *Divide*
  - Sceglie un *pivot*  $x$  in  $A[p, r]$ ;
  - partiziona in  $A[p, q-1] \leq x$  e  $A[q+1, r] \geq x$ ;
- *Impera*
  - Ricorre su  $A[p, q-1]$  e  $A[q+1, r]$ ;
- *Combina*
  - (Non fa nulla).

**Pseudocodice** Segue lo pseudocodice del **Quicksort**.

QUICKSORT( $A, p, r$ )

```
1  if  $p < r$ 
2       $q = \text{PARTITION}(A, p, r)$ 
3      QUICKSORT( $A, p, q$ )
4      QUICKSORT( $A, q + 1, r$ )
```

PARTITION( $A, p, r$ )

```
1   $x = A[r]$  // pivot  $A[r]$ 
2   $i = p - 1$ 
   //  $A[p, i] \leq x$ 
   //  $A[i+1, j-1] > x$ 
3  for  $j = p$  to  $r - 1$ 
4      if  $A[j] \leq x$ 
5           $i = i + 1$ 
6           $A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
7   $A[i + 1] \leftrightarrow A[r]$ 
8  return  $i + 1$ 
```

### 9.1.1 Correttezza di Quicksort( $A, p, r$ )

**Caso base** array già ordinato, 0 o 1 elemento.

**Induzione** Abbiamo, dopo Partition

$$\boxed{\leq A[q]} \quad A[q] \quad \boxed{\geq A[q]}$$

$$\text{Quicksort}(A, p, q) \quad \boxed{\leq A[q], \text{ord}} \quad A[q] \quad \boxed{> A[q]}$$

$$\text{Quicksort}(A, q+1, r) \quad \boxed{\leq A[q], \text{ord}} \quad A[q] \quad \boxed{> A[q], \text{ord}}$$

**Esempio** Dato l'array  $A$ , scelgo come *pivot*  $x$  l'ultimo elemento.

$$\boxed{9} \boxed{6} \boxed{0} \boxed{8} \boxed{4} \boxed{2} \quad \text{pivot: } \boxed{2}$$

$i$  punta alla cella 0 (ossia nessuna cella)

$j$  punta alla cella 1:  $\boxed{9}$

$9 > 2$ ? Sì  $\Rightarrow j++$

$6 > 2$ ? Sì  $\Rightarrow j++$

$0 > 2$ ? No  $\Rightarrow i++, A[i] \leftrightarrow A[j], j++$

$$\boxed{0} \boxed{6} \boxed{9} \boxed{8} \boxed{4} \boxed{2} \quad \text{pivot: } \boxed{2}$$

$i$  punta alla cella 1:  $\boxed{0}$

$j$  punta alla cella 4:  $\boxed{9}$

$8 > 2$ ? Sì  $\Rightarrow j++$

$4 > 2$ ? Sì  $\Rightarrow j++$

Scambio  $A[i+1]$  con  $x$ , ottenendo

$$\boxed{0} \boxed{2} \boxed{9} \boxed{8} \boxed{4} \boxed{6}$$

I primi due ( $i + 1$ ) elementi sono ordinati:

$$\boxed{0} \boxed{2}$$

Chiamo ricorsivamente **Quicksort** con  $q = i + 1$ .

$$\boxed{9} \boxed{8} \boxed{4} \boxed{6} \quad \text{pivot: } \boxed{6}$$

$i$  punta alla cella 0 (ossia nessuna cella)

$j$  punta alla cella 1:  $\boxed{9}$

$9 > 6$ ? Sì  $\Rightarrow j++$

$8 > 6$ ? Sì  $\Rightarrow j++$

$4 > 6$ ? No  $\Rightarrow i++, A[i] \leftrightarrow A[j], j++$

4	8	9	6
---	---	---	---

*pivot:*

2
---

i punta alla cella 1: 

4
---

j punta alla cella 4: 

6
---

, quindi ho finito.Scambio  $A[i+1]$  con  $x$ , ottenendo

4	6	9	8
---	---	---	---

I primi due  $(i + 1)$  elementi sono ordinati:

4	6
---	---

Chiamo ricorsivamente **Quicksort** con  $q = i + 1$ .

9	8
---	---

*pivot:*

8
---

i punta alla cella 0 (ossia nessuna cella)

j punta alla cella 1: 

9
---

 $9 > 8$ ? Sì  $\Rightarrow j++$ Ho finito, scambio  $A[i+1]$  con  $x$ , ottenendo

8	9
---	---

Guardando l'array completo ottengo il risultato atteso:

0	2	4	6	8	9
---	---	---	---	---	---

### 9.1.2 Complessità di Quicksort

Partition costa  $\Theta(n)$ 

$$T^{QS} = \Theta(n) + T^{QS}(q - p) + T^{QS}(n - (q - p) - 1)$$

$$q - p < n$$

#### Caso peggiore

$$T^{QS} = \Theta(n) + T^{QS}(n - 1) = \Theta(n^2) \quad (\Theta(n) = cn)$$

$$T(n)$$

$$cn$$

$$cn - 1$$

$$cn - 2$$

$$\dots$$

$$d$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1} c(n-j) + d &= \sum_{k=1}^n ck + d = \\
&= c \sum_{k=1}^n k + d \quad \left( \frac{c(n+1)n}{2} + d = \Theta(n^2) \right)
\end{aligned}$$

$$T(n) = \Theta(n^2) \Rightarrow \begin{cases} = O(n^2) \\ = \Omega(n^2) \end{cases}$$

- $T(n) = O(n^2)$

$$\begin{aligned}
T(n) = O(n^2) &\Rightarrow T(n) \leq cn^2 \quad \forall n \geq n_0, c > 0 \\
&= T(n-1) + \Theta(n) \leq dn \\
&\leq c(n-1) + dn \\
&= cn^2 - 2cn + c + dn \leq cn^2 \\
&\quad 2cn - dn - c \geq 0 \\
&\quad n(2c - d) - c \geq 0 \quad \text{ok, } c > \frac{d}{2}
\end{aligned}$$

$$T(n) = O(n^2)$$

- $T(n) = \Omega(n^2)$  analogo.

### Caso migliore

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

**Caso medio** Qualunque partizionamento proporzionale da complessità  $\Theta(n \log n)$ , come ad esempio

$$T(n) = T\left(\frac{n}{10}\right) + T\left(\frac{9n}{10}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

Solo il caso in cui una delle due partizioni è costante, si ricade nel caso pessimo. Per ovviare al problema, si può utilizzare una versione di **Partition** che rende impossibile il partizionamento costante.

**RANDOMIZEDPARTITION**( $A, p, r$ )

- 1  $q = \text{RANDOM}(p, r)$
- 2  $A[q] \leftrightarrow A[r]$
- 3 **return** **PARTITION**( $A, p, r$ )

## 10 Lezione del 28/03

### 10.1 Quicksort a tre partizioni

Quicksort con `RandomizedPartition` funziona bene ed evita, quasi in ogni circostanza, di imbattersi nel caso pessimo, ad eccezione di un caso particolare: se in *input* viene dato un array con tutti gli elementi uguali, si ottiene il temuto caso pessimo  $O(n^2)$ .

Per ovviare al problema, è sufficiente partizionare Quicksort in tre partizioni invece di due. Dato un *pivot*  $x$ , partizioniamo  $A$  nel seguente modo:

$< x$	$= x$	$> x$
-------	-------	-------

Durante l'algoritmo, la disposizione sarà questa:

$< x$	$= x$		$> x$
-------	-------	--	-------

(La cella vuota è la regione ancora da esplorare).

TRIPARTITION( $A, p, r$ )

```

1   $x = A[r]$ 
2   $i = p - 1$ 
3   $k = p$ 
4   $j = r$ 
5  while  $k < j$ 
6      if  $A[k] < x$ 
7           $i = i + 1$ 
8           $A[i] \leftrightarrow A[k]$ 
9           $k = k + 1$ 
10     else if  $A[k] > x$ 
11          $j = j - 1$ 
12          $A[j] \leftrightarrow A[k]$ 
13     else
14          $k = k + 1$ 
15      $// k = j$ 
16      $A[j] \leftrightarrow A[r]$ 
17 return  $(i + 1, j)$  // restituisce una coppia di valori
```

QUICKSORT( $A, p, r$ )

```

1  if  $p < r$ 
2       $q1, q2 = \text{TRIPARTITION}(A, p, r)$ 
3      QUICKSORT( $A, p, q1 - 1$ )
4      QUICKSORT( $A, q2 + 1, r$ )
```

## 10.2 Limite inferiore

Input:  $a_1 \dots a_n$

Output: permutazione  $a'_1 \dots a'_n$  tale che

$$a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$$

**Confronti e assegnamenti** Osservazioni:

- Se “conto” solo alcune operazioni il limite inferiore vale in generale. Consideriamo solo l'operatore di confronto;
- Elementi tutti distinti ( $a_i \neq a_j$  se  $i \neq j$ ), l'operatore di confronto  $==$  restituisce sempre FALSE.

### 10.2.1 Albero di Decisioni

È una rappresentazione “astratta” delle possibili esecuzioni di un algoritmo di ordinamento su un input di dimensione fissata  $A[1 \dots n]$ .

→ nodi interni:

$$i : j \Rightarrow \text{confronta } A[i] \leq A[j]$$

→ *foglie* (ogni foglia è una possibile permutazione)

Rivediamo una versione di **Insertion Sort** basato su scambi.

INSERTION-SORT( $A$ )

```

1   $n = A.length$ 
2  for  $j = 2$  to  $n$  // il primo elemento è già ordinato
3       $i = j - 1$ 
4      while  $i > 1$  and  $A[i] > A[i + 1]$ 
5           $A[i] \leftrightarrow A[i + 1]$ 
6           $i = i - 1$ 
```



Ecco un esempio di *Albero delle Decisioni* per l'array  $A[a_1, a_2, a_3]$  con

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$$

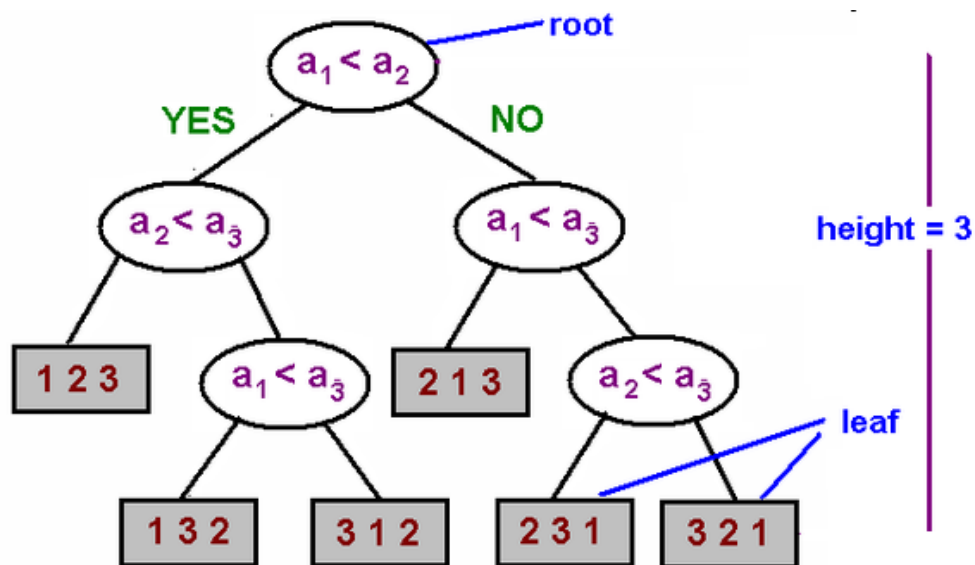


Figura 5: Albero delle decisioni per l'array  $A[1, 2, 3]$

### Osservazione

Altezza dell'albero di decisione = limite inferiore per caso pessimo

per IS  $n^2$

per MS  $n \log n$

In generale, le foglie contengono tutte le permutazioni.

$$\#foglie \geq n! \quad (\#foglie \leq 2^h)$$

$$h \geq \log_2 n!$$

$$\geq \log_2 \left( n(n-1)(n-2) \dots \frac{n}{2} \right)$$

$$\geq \log_2 \left( \frac{n}{2} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \dots \frac{n}{2} \right) =$$

$$= \log_2 \left( \frac{n}{2} \right)^{\left( \frac{n}{2} \right)} = \frac{n}{2} (\log_2 n - \log_2 2) = \frac{n}{2} (\log_2 n - 1) = \Theta(n \log n)$$

### 10.3 Ordinamento in tempo lineare

Esistono degli algoritmi di ordinamento che, in certe condizioni e per certi input, permettono di ordinare in tempo lineare  $\Omega(n)$

#### 10.3.1 Counting Sort

Assumo

- interi;
- in  $[0, k]$

**Input:**  $A[1..n]$  con  $A[j] \in [0, k] \forall j$ ;

**Output:**  $B[1..n]$  permutazione ordinata di  $A$ ;

**Supporto:**  $C[0..k]$ .

COUNTINGSORT( $A, B, k$ )

```

1   $C[0..k] \leftarrow 0$ 
2  for  $j = 1$  to  $A.length$ 
    //  $C[x] = \#elem$  in  $A$  con valore  $x$ 
3     $C[A[j]] = C[A[j]] + 1$ 
4  for  $i = 1$  to  $k$ 
    //  $C[x] = \#elem$  in  $A$  con valore  $\leq x$ 
5     $C[i] = C[i - 1] + C[i]$ 
6  for  $j = A.length$  to 1
7     $B[C[A[j]]] = A[j]$ 
8     $C[A[j]] = C[A[j]] - 1$ 
```

**Costo?**

$C[0, k] \leftarrow 0$	$\Theta(k)$
<b>for</b> $j=1 \dots$	$\Theta(n)$
<b>for</b> $i=1 \dots$	$\Theta(k)$
<b>for</b> $j=A.length \dots$	$\Theta(n)$

Somma  $\Theta(n + k)$  con  $k = \Theta(1) \Rightarrow \Theta(n)$

**Problema di memoria** Il problema di **Counting Sort** è la memoria. Infatti, al crescere di  $k$ , la memoria richiesta per allocare **C** cresce esponenzialmente.

Dimensione $k$	Memoria occupata da <b>C</b> []
1 Byte = 8 bit	$2^8 \text{Bytes} = 256 \text{Bytes}$
2 Bytes = 16 bit	$2^{16} \text{Byte} \cdot 2 \text{Bytes} = 256 \text{Megabytes}$
8 Bytes = 64 bit	$2^{64} \text{Byte} \cdot 8 \text{Bytes} = 512 \text{Terabytes}$

## 11 Lezione del 29/03/2018

### 11.1 Radix Sort

Il **Radix Sort** è un algoritmo di ordinamento in tempo lineare  $O(n)$ , come **Counting Sort**, che risolve i problemi di memoria di quest'ultimo.

L'idea è quella di ordinare cifra per cifra, dalla cifra meno significativa alla più significativa con un algoritmo *stabile*<sup>1</sup>.

(iniziale)	(terza cifra)	(seconda cifra)	(prima cifra)
329	720	720	329
457	355	329	355
657	436	436	436
839	457	839	457
436	657	355	657
720	329	457	720
355	839	657	839

Input:  $A[1..n]$  con  $A[i]$  di  $d$  cifre e base  $b$ ,  $A[i] = a_d a_{d-1} \dots a_1$ .

RADIXSORT( $A, d$ )

```

1  for  $j = 1$  to  $d$ 
2      ordina  $A$  rispetto alla cifra  $j$  //  $A^j[i] = a_j a_{j-1} \dots a_1$ 
      con COUNTINGSORT //  $A^{j-1}$  ordinato

```

#### 11.1.1 Correttezza di RadixSort( $A, d$ )

**Inizializzazione** ok;

**Mantenimento** Se  $A^{j-1}$  è ordinato e ordino rispetto alla  $j$ -esima cifra con un algoritmo stabile, allora  $A^j$  è ordinato.

$$i < i' \Rightarrow A^j[i] \leq A^j[i']$$

$$\begin{aligned} \text{Siano } A^j[i] &= a_j a_{j-1} \dots a_1 \\ A^j[i'] &= a'_j a'_{j-1} \dots a_1 \end{aligned}$$

Posso distinguere due casi:

---

<sup>1</sup>Un algoritmo di ordinamento stabile è un algoritmo che ordina e non scambia mai due chiavi se non è necessario (e.g. due celle con la stessa chiave).

1.

$$\begin{aligned} a_j \neq a'_j &\Rightarrow a_j < a'_j \\ &\Rightarrow A^j[i] < A^j[i'] \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} a_j = a'_j &\Rightarrow A^j[i] \leq A^j[i'] \quad (\text{stabilità}) \\ &\Rightarrow A^j[i] = a_j A^j[i] \leq \\ &\leq A^j[i'] = a'_j A^{j-1}[i'] \end{aligned}$$

**Costo?**

$$\begin{aligned} d \text{ volte CountingSort } \Theta(n+b) &\Rightarrow \Theta(d(n+b)) = \Theta(n) \\ \text{con } d = \Theta(1), \text{ base } b &= \Theta(n) \end{aligned}$$

## 11.2 Strutture dati elementari

- *Tabelle hash*
- *Alberi di ricerca*

Entrambe le strutture dati sono *insiemi dinamici*: per un dato  $x$ , abbiamo:

- $x.key$ ;
- $Insert(x)$ ;
- $Delete(x)$ ;
- $Search(x)$ .

### 11.2.1 Tabelle Hash

$U$  universo delle chiavi

$$U = \{0, 1, \dots, |U| - 1\}$$

$T[0..|U|-1]$  tabella hash

$$T[k] \text{ contiene } \begin{cases} \text{elemento } x \text{ con } x.key = k & \text{se c'è} \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

INSERT( $T, x$ )

$$1 \quad T[x.key] = x \ // \ \Theta(1)$$

DELETE( $T, x$ )

1  $T[x.key] = nil \ // \ \Theta(1)$

SEARCH( $k$ )

1 **return**  $T[k] \ // \ \Theta(1)$

**Problema** e.g. consideriamo che la *key* sia di 8 caratteri (e 8 bit per rappresentare un carattere). Risulta molto costosa in termini di memoria la tabella hash.

$$2^8 \dots 2^8 \\ (2^8)^8 = 2^{64} \cong 10^{19}$$

**Idea**

$$U = \{0, 1, \dots, |U| - 1\} \\ T[0 \dots m - 1] \quad m \ll |U|$$

La “traduzione” per ottenere  $x.key$  da  $x$  cosa comporta?

$$h : U \rightarrow \{0, 1, \dots, m - 1\} \text{ funzione di } hashing \\ n = \#elem \text{ memorizzati nella tabella } T$$

Se  $n > m$ , esisteranno  $x_1, x_2 : h(x_1.key) = h(x_2.key)$ .

Abbiamo *due soluzioni*:

1. **Chaining**;
2. **Open Addressing**.

# Appendices

## A Raccolta algoritmi

### A.1 Insertion Sort

Per approfondire, vedi la sezione 1.4

INSERTION-SORT( $A$ )

```
1   $n = A.length$ 
2  for  $j = 2$  to  $n$  // il primo elemento è già ordinato
3       $key = A[j]$  //  $A[1..j-1]$  ordinato
4       $i = j - 1$ 
5      while  $i > 0$  and  $A[i] > key$ 
6           $A[i+1] = A[i]$ 
7           $i = i - 1$ 
8       $A[i+1] = key$ 
```

### A.2 Merge Sort

Vedi la sezione 2.4

MERGE-SORT( $A, p, r$ )

```
1  if  $p < r$ 
2       $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$  // arrotondato per difetto
3      MERGE-SORT( $A, p, q$ ) // ordina  $A[p..q]$ 
4      MERGE-SORT( $A, q+1, r$ ) // ordina  $A[q+1..r]$ 
5      MERGE( $A, p, q, r$ ) // "Merge" dei due sotto-array
```

```

MERGE( $A, p, q, r$ )
1   $n1 = q - p + 1$  // gli indici partono da 1
2   $n2 = r - q$ 
   // L sotto-array sx, R sotto-array dx
3  for  $i = 1$  to  $n1$ 
4       $L[i] = A[p + i - 1]$ 
5  for  $j = 1$  to  $n2$ 
6       $R[j] = A[q + j]$ 
7   $L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = \infty$ 
8   $i = j = 1$ 
9  for  $k = p$  to  $r$ 
10     if  $L[i] \leq R[j]$ 
11          $A[k] = L[i]$ 
12          $i = i + 1$ 
13     else //  $L[i] > R[j]$ 
14          $A[k] = R[j]$ 
15          $j = j + 1$ 

```

### A.3 Insertion Sort ricorsivo

```

INSERTION-SORT( $A, j$ )
1  if  $j > 1$ 
2      INSERTION-SORT( $A, j - 1$ ) // ordina  $A[1..j-1]$ 
3      INSERT( $A, j$ ) // inserisce  $A[j]$  in modo ordinato in  $A$ 

```

```

INSERT( $A, j$ )
   // Precondizione:  $A[1..j-1]$  è ordinato
1  if ( $j > 1$ ) and ( $A[j] < A[j - 1]$ )
2       $A[j] \leftrightarrow A[j - 1]$  // scambia le celle  $j$  e  $j-1$ 
   // se le celle sono state scambiate, ordina
   // il nuovo sottoarray  $A[1..j-1]$ 
3      INSERT( $A, j - 1$ )

```

#### A.3.1 Correttezza di Insertion-Sort( $A, j$ )

Procediamo per induzione:

( $j \leq 1$ ) Caso base. Array già ordinato, non faccio nulla  $\Rightarrow$  ok;

( $j > 1$ ) Per ipotesi induttiva, la chiamata **Insertion-Sort**( $A, j-1$ ) ordina  $A[1..j-1]$ . Assumendo la correttezza di **Insert**( $A, j-1$ ), esso “inserisce”  $A[j] \Rightarrow$  produce  $A[1..j]$  ordinato.



**A.3.2 Correttezza di Insert( $A, j$ )**

Anche qui, dimostrazione per induzione:

( $j = 1$ ) Caso base.  $A[1]$  da inserire nell'array vuoto. Non fa nulla  $\Rightarrow$  ok;

( $j > 1$ ) Due sottocasi:

- $A[j] \geq A[j-1]$ : non faccio nulla,  $A[1..j]$  già ordinato;
- $A[j] < A[j-1]$ : scambio le chiavi delle due celle. Il nuovo  $A[j]$  sarà sicuramente maggiore di qualsiasi altro elemento che lo precede, poiché, per precondizione di **Insert**,  $A[1..j-1]$  era ordinato, e dato che valeva  $A[j-1] \geq A[j]$ , il nuovo  $A[j]$  (che è il precedente  $A[j-1]$ ) sarà sicuramente l'elemento con il valore più alto. Dopodichè, chiamo **Insert**( $A, j-1$ ) per ordinare la cella  $A[j-1]$ .

**A.4 CheckDup**

Algoritmo che verifica la presenza di duplicati in  $A[p..r]$  e, solo se non ci sono, ordina l'array.

Se  $A[p..q]$  e  $A[q+1..r]$  ordinati e privi di duplicati:

- Se  $A[p..r]$  non contiene duplicati, ordina e restituisce **false**;
- altrimenti, restituisce **true**.

CHECK-DUP( $A, p, r$ )

```

1  if  $p < r$ 
2       $q = \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$  // arrotondato per difetto
3      return CHECK-DUP( $A, p, q$ )
4      or CHECK-DUP( $A, q+1, r$ )
5      or DMERGE( $A, p, q, r$ )
```

DMERGE( $A, p, q, r$ )

```

1   $n1 = q - p + 1$  // gli indici partono da 1
2   $n2 = r - q$ 
   // L sotto-array sx, R sotto-array dx
3  for  $i = 1$  to  $n1$ 
4       $L[i] = A[p + i - 1]$ 
5  for  $j = 1$  to  $n2$ 
6       $R[j] = A[q + j]$ 
7   $L[n1 + 1] = R[n2 + 1] = \infty$ 
8   $i = j = 1$ 
9  while ( $k \leq p$ ) and ( $L[i] \neq R[j]$ )
10     if  $L[i] < R[j]$ 
11          $A[k] = L[i]$ 
12          $i = i + 1$ 
13     else //  $L[i] > R[j]$ 
14          $A[k] = R[j]$ 
15          $j = j + 1$ 
16      $k = k + 1$ 
17 return  $k \leq r$ 

```

#### A.4.1 Correttezza di DMerge( $A, p, q, r$ )

- $A[p..k-1]$  è ordinato, contiene  $L[1..i-1] \cup R[1..j-1]$ ;
- $A[p..k-1] < L[1..n1], R[1..n2]$ .

## A.5 SumKey

Dato  $A[1..n]$  e  $key$  intera,  $\text{Sum}(A, key)$  restituisce:

- **true** se  $\exists i, j \in [1, n] : key = A[i] + A[j]$ ;
- **false** altrimenti.

Vediamo una prima versione, non efficiente, dell'algoritmo. Ha complessità  $O(n^2)$ .

SUMB( $A, key$ )

```

1   $n = A.length$ 
2   $i = j = 1$ 
3  while ( $i \leq n$ ) and ( $A[i] + A[j] \neq key$ )
4      if  $j = n$ 
5           $i = i + 1$ 
6      else
7           $j = j + 1$ 
8  return  $i \leq n$ 

```

Ecco ora una versione più efficiente, che però richiede un **sorting** preventivo, che quindi causa *side effect*. Si assume un algoritmo di sorting con complessità  $O(n \log n)$ . Con questa premessa, la ricerca della coppia di valori ha complessità  $O(n)$  nel caso peggiore. Nel complesso, vale quindi:

$$O(n \log n + n) = O(n \log n)$$

SUM( $A, key$ )

```

1   $n = A.length$ 
2  SORT( $A$ ) // complessità  $O(n \log n)$ 
3   $i = 1, j = n$ 
4  while ( $i \leq j$ ) and ( $A[i] + A[j] \neq key$ )
5      if  $A[i] + A[j] < key$ 
6           $i = i + 1$ 
7      else
8           $j = j - 1$ 
9  return  $i \leq j$ 

```

#### A.5.1 Correttezza di Sum( $A, key$ )

Valgono i seguenti invarianti:

- (1)  $\forall h \in [1, i - 1], \forall k \in [h, n] \Rightarrow A[h] + A[k] \neq key$
- (2)  $\forall k \in [j + 1, n], \forall h \in [1, k] \Rightarrow A[k] + A[h] \neq key$

Supponiamo di trovarci in  $A[i] + A[j] < key$

→ incremento  $i$ ;

(1) **non** cambia;

(2) (vogliamo dimostrare)  $\forall k \in [i, n] \quad A[i] + A[k] \neq key$ .

Distinguiamo 2 casi.

· Siccome vale  $A[k] \leq A[j]$ , allora

$$A[i] + A[k] \leq A[i] + A[j] > key$$

·  $k \in [j + 1, n]$  quindi

$$A[i] + A[k] \neq key \text{ per (2)}$$

Se esco perché  $i > j$ , **non** c'è una soluzione poiché

$$(1) + (2) \Rightarrow \forall h \leq k \quad A[h] + A[k] \neq key$$

Presetiamo ora una terza soluzione, che però richiede un costo in memoria direttamente proporzionale al valore *max* (che chiameremo *top*) dell'array considerato, poiché richiede di allocare un array *V* di booleani di dimensione dipendente da *top*, in cui il valore **A[i]** corrisponde alla cella **V[A[i]]**. Assumiamo

$$A[i] \geq 0 \quad \forall i \in [i, n], \quad key \leq top$$

$$V[v] = \text{true} \text{ sse } \exists i : A[i] = v$$

SUMV(*A*, *key*)

```

1  V[0..key] ← FALSE // Θ(key) = O(top) = O(1)
2  i = 1
3  found = FALSE
4  while (i ≤ n) and not found
5      if A[i] ≤ key
6          V[A[i]] = TRUE
7          found = V[key - A[i]]
8      i = i + 1
9  return found
```

Complessità:

- $O(n)$  se *top* costante;
- $O(n \cdot key)$  altrimenti.

## A.6 Heapsort

Per approfondire, vedi 8.1.

LEFT( $i$ )

// restituisce il figlio sx del nodo  $i$

1 **return**  $2 * i$

RIGHT( $i$ )

// restituisce il figlio dx del nodo  $i$

1 **return**  $2 * i + 1$

PARENT( $i$ )

// restituisce il genitore del nodo  $i$

1 **return**  $\lfloor i/2 \rfloor$

MAXHEAPIFY( $A, i$ )

1  $l = \text{LEFT}(i)$

2  $r = \text{RIGHT}(i)$

3 **if** ( $l \leq A.\text{heapsize}$ ) **and** ( $A[l] > A[i]$ )

4      $max = l$

5 **else**

6      $max = i$

7 **if** ( $r \leq A.\text{heapsize}$ ) **and** ( $A[r] > A[max]$ )

8      $max = r$

9 **if** ( $max \neq i$ )

10      $A[i] \leftrightarrow A[max]$

11     MAXHEAPIFY( $A, max$ )

BUILDMAXHEAP( $A$ )

1  $A.\text{heapsize} = A.\text{length}$

2 **for**  $i = \lfloor A.\text{length}/2 \rfloor$  **down to** 1

3     MAXHEAPIFY( $A, i$ )

HEAPSORT( $A$ )

1 BUILDMAXHEAP( $A$ ) //  $O(n)$

2 **for**  $i = A.\text{length}$  **down to** 2

3      $A[1] \leftrightarrow A[i]$

4      $A.\text{heapsize} = A.\text{heapsize} - 1$

5     MAXHEAPIFY( $A, 1$ ) //  $O(\log n)$

## A.7 Code con priorità

(Sezione 8.2)

MAX( $A$ )

```
1  if  $A.heapsize = 0$ 
2      error
3  else return  $A[1]$ 
```

EXTRACTMAX( $A$ )

```
1   $max = A[1]$ 
2   $A[1] = A[A.heapsize]$ 
3   $A.heapsize = A.heapsize - 1$ 
4  MAXHEAPIFY( $A, 1$ ) // ripristina le proprietà di MaxHeap
5  return  $max$ 
```

MAXHEAPIFYUP( $A, i$ )

```
1  if ( $i > 1$ ) and ( $A[i] > A[PARENT(i)]$ )
2       $A[i] \leftrightarrow A[PARENT(i)]$ 
3      MAXHEAPIFYUP( $A, PARENT(i)$ )
```

INSERT( $A, x$ )

```
1   $A.heapsize = A.heapsize + 1$ 
2   $A[A.heapsize] = x$ 
3  MAXHEAPIFYUP( $A, A.heapsize$ )
```

INCREASEKEY( $A, i, \delta$ )

```
    // Precondizione:  $\delta \geq 0$ 
1   $A[i] = A[i] + \delta$ 
2  MAXHEAPIFYUP( $A, i$ )
```

CHANGEKEY( $A, i, \delta$ )

```
1   $A[i] = A[i] + \delta$ 
2  if  $\delta > 0$ 
3      MAXHEAPIFYUP( $A, i$ )
4  else //  $\delta \leq 0$ 
5      MAXHEAPIFY( $A, i$ )
```

```
DELETEKEY( $A, i$ )  
1   $old = A[i]$   
2   $A[i] = A[A.heapsize]$   
3   $A.heapsize = A.heapsize - 1$   
4  if  $old \leq A[i]$   
5      MAXHEAPIFYUP( $A, i$ )  
6  else  
7      MAXHEAPIFY( $A, i$ )
```

## B Esercizi

### B.1 Ricorrenze

- $T(n) = aT(n-1) + b \quad a, b > 1$ 
  - *radice*: costo  $b$ ;
  - la radice ha  $a$  figli di costo  $b$ ;
  - ...
  - foglie terminali  $O(1)$ .

Esplicitando il caso base della ricorrenza otteniamo:

$$T(n) = \begin{cases} c & n = 0 \\ aT(n-1) + b & n > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= b + ab + a^2b + \dots + a^{n-1}b + a^nc \\ &= b \sum_{j=0}^{n-1} a^j + a^nc \quad (\text{dimostrare per induzione}) \end{aligned}$$

$$(a = 1) \quad T(n) = nb + c = \Theta(n)$$

$$(a < 1) \quad T(n) = \frac{1-a^n}{1-a} \cdot b + a^nc = \Theta(1)$$

$$(\text{valgono } \frac{1-a^n}{1-a} \leq \frac{1}{1-a}, \quad a^nc < c)$$

$$(a > 1) \quad T(n) = \frac{a^n-1}{a-1}b + a^nc = \Theta(a^n)$$