① Сходимость по вер-ти

Что было с детерминир. послед:

$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ сх. к числу A

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

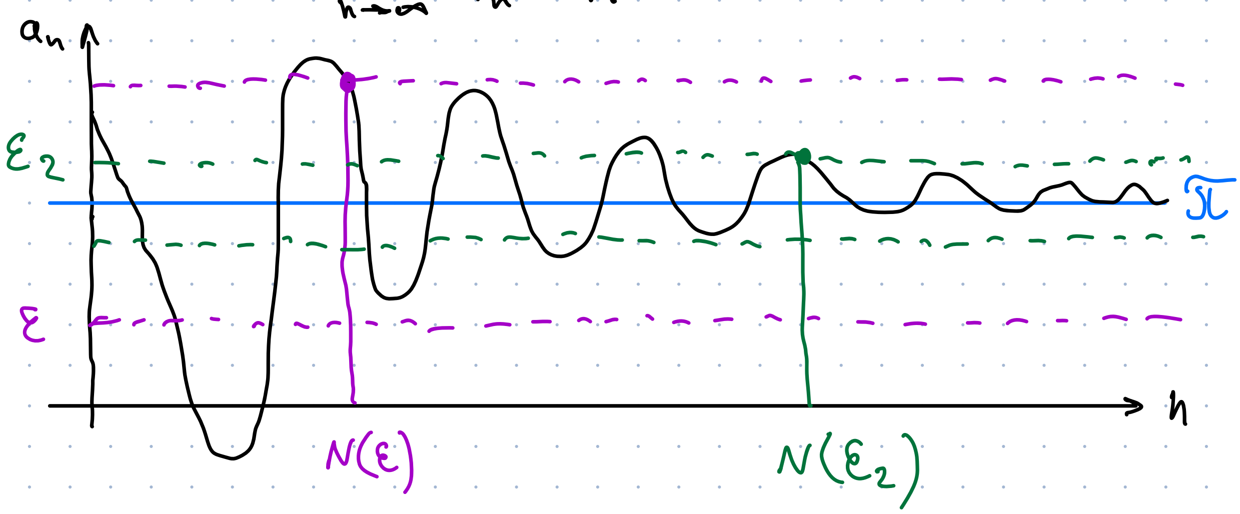
если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad |a_n - A| < \varepsilon$

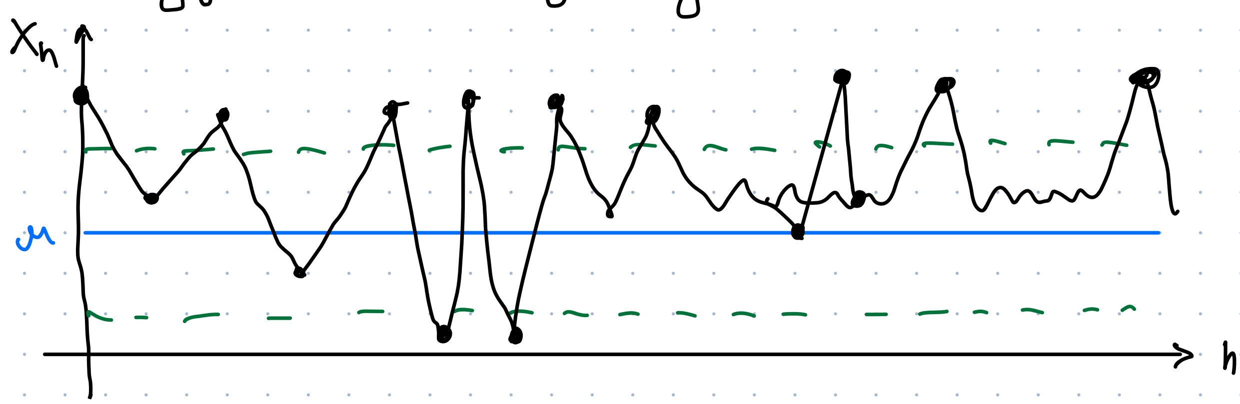
$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$

Пример: $a_n = 10 \cdot 0.99^n \cdot \sin(n) + \Pi$

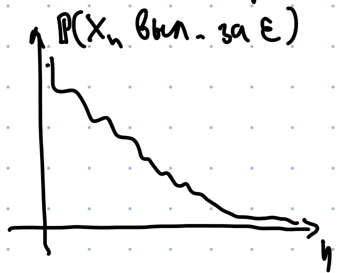
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \Pi$$



А что будет, если послед. случайная?



Опр. послед. сл. вел. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ сх. по вер. к сл. вел. X если



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \le \varepsilon) = 1$$

$$X_n \xrightarrow{P} X \qquad \underset{n\to\infty}{\mathrm{Plim}}\, X_n = X$$

Для Plim работают все св-ва пределов

$X_n \xrightarrow{P} X$ • $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$

$Y_n \xrightarrow{P} Y$ • $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{P} X \cdot Y$

Т. (Манна-Вальда Слуцкого)

⊗ Если $X_n \xrightarrow{P} a$ и $g(t)$ - непр. в a

тогда $g(X_n) \xrightarrow{P} g(a)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

⊗ Если $X_n \xrightarrow{P} X$ и $g(t)$ непр.

тогда $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$

$$\mathbb{P}(X_n \ge \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon} = \frac{1}{n\varepsilon} \to 0$$ при $n \to \infty$

Упражнение

$X_n \sim Exp(n)$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) =$

$X_n \xrightarrow{P} 0$ $\quad = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) =$

$F(t) = 1 - e^{-\overset{\lambda}{n}t}$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \mathbb{P}(X_n \le \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} e^{-n\varepsilon} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

② Неравенства Маркова и Чебышёва

Утвержд. 1 (нер. Маркова)

Если $\exists\ \mathbb{E}(|X|) < \infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X| \ge \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\varepsilon}$$

Док-во:

$$|X| = |X| \cdot I_{|X|<\varepsilon} + |X| \cdot I_{|X|\ge\varepsilon} \ge$$

$I_{\lvert X\rvert\ge\varepsilon}$	1	0
$\mathbb{P}(\dots)$	$\mathbb{P}(\lvert X\rvert\ge\varepsilon)$	$\mathbb{P}(\lvert X\rvert<\varepsilon)$

$$\ge |X| \cdot I_{|X|\ge\varepsilon} \ge \varepsilon \cdot I_{|X|\ge\varepsilon}$$

$$|X| \ge \varepsilon \cdot I_{|X|\ge\varepsilon}$$

$$\mathbb{E}(|X|) \ge \varepsilon \cdot \underbrace{\mathbb{P}(|X| \ge \varepsilon)}_{\mathbb{E}(I_{|X|\ge\varepsilon})}$$

$$\mathbb{P}(|X| \ge \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon} \quad \blacksquare$$

$$\mathbb{P}(|X|<\varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\varepsilon}$$

То же нер. Маркова, но с против. соб.

Утверждение 2 (Чебышёв)

Если $\exists \, Var(X) < \infty$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

Док-во:

$$Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$$

$$\mathbb{P}(|Y| \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2}$$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \quad \blacksquare$$

Упражнение

$n = 1000$ — договоры страхования

$p = 0.01$ — вер. страхового случая

$S = 25\,000$ — одна выплата

Оценить $\mathbb{P}$(не более 20 стр. сл.) — ?

X – кол-во страховых сл.

$X \sim Bin(n, p)$

$$\mathbb{P}(X \le 20) = \sum_{k=0}^{20} C_n^k p^k (1-p)^k$$

$\mathbb{E}(X) = np = 10$

$Var(X) = np(1-p) = 9.9$

Марков: $\mathbb{P}(X \le 20) = 1 - \mathbb{P}(X > 20) =$

$$= 1 - \underbrace{\mathbb{P}(X \ge 21)}_{\le \frac{\mathbb{E}(X)}{21}} \ge 1 - \frac{\mathbb{E}(X)}{21} = 1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$$

Чебышёв: $\mathbb{P}(X \le 20) = \mathbb{P}(X \in [0; 20]) =$

$|X - 10|$

$$= \mathbb{P}(\underset{0 \le X \le 20}{|X - 10| \le 10}) \ge$$

$$\ge 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{9.9}{100} = 0.901$$

Нер. Чебышёва даёт более жёсткую оценку

③ Закон больших чисел

→ их $\exists$ очень много, разные предп., разные сх-ти, разные скорости

→ Утверждают, что среднее ариф. большого числа сл. вел. „стабилизируется" с ростом их числа

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{\mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)}{n}$$

Т. ЗБЧ в слабой форме (Чебышёва)

Пусть $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ попарно нез. и один. распр.

и $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$ $\quad Var(X_i) < \infty$

Тогда

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_1)$$

$S_1, S_2, \ldots$ – будут зав.

одинаковые!

$$S_1 = \frac{X_1}{1} \quad S_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

$$Cov(S_1, S_2) = Cov\left(\frac{X_1}{1}, \frac{X_1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot Cov(X_1, X_1) = \frac{1}{2} Var(X_1)$$

Док-во:

$$Y_n = X_1 + \ldots + X_n$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{Y_n}{n}\right) = \mathbb{E}(X_1)$$

нер. Чебышева

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var\left(\frac{Y_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} =$$

$$= \frac{Var(X_1) + \ldots + Var(X_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{n\, Var(X_1)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{Var(X_1)}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}\left(\frac{Y_n}{n}\right) = \mathbb{E}(X_1) \quad \blacksquare$$

Т. ЗБЧ (Хинчина)

а) $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – послед. нез. в сов. сл. вел.

б) один. распред.

в) $\mathbb{E}(X_1) < \infty$

тогда

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_1)$$

В условиях ЗБЧ Хинчина

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[\text{п.н.}]{a.s} \mathbb{E}(X_1)$$

почти наверное

ЗБЧ в сильной форме

④ Зачем всё это?

→ Метод моментов

$x_1, x_2, \dots x_n$	$X \sim F_\theta$
данные	модель
	$X \sim Exp(\lambda)$ $\quad$ $\lambda(x_i)$

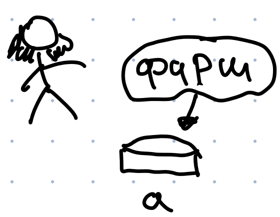
ЗБЧ помогает оценить параметры:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_i)$$

$$\bar{X}_n \approx \mathbb{E}(X_i) \Rightarrow \text{решаю}$$

Упражнение

Продавщица Глафира



$X_i \leftarrow$ шарик

модель: $X_i \sim U[0; a]$

выборка: $X_1, X_2, \dots, X_n$

a – ?

$\mathbb{E}(X_i) = \frac{a}{2}$ $\qquad$ $Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y)$

$Var(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{a^2}{12}$

$\mathbb{E}(X_i^2) = \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{3}$

$\frac{a}{2} \approx \overline{X}_n$

$\frac{\hat{a}^{MM}}{2} = \overline{X}_n \Rightarrow \hat{a}_1^{MM} = 2\overline{X}_n$

$\frac{a^2}{3} \approx \overline{X_n^2}$ $\qquad$ $\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} = \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X_i^2)$

$\frac{\hat{a}^2}{3} = \overline{X_n^2} \Rightarrow \hat{a}_2^{MM} = \sqrt{3\overline{X_n^2}}$

→ несмещённость $\mathbb{E}(\hat{a}) = a$

→ состоятельность $\hat{a} \xrightarrow{P} a$

→ эффективность самые узкие д.и.

$\mathbb{E}(\hat{a}_1) = \mathbb{E}(2\overline{X}_n) = 2\,\mathbb{E}(\overline{X}_n) = 2\,\mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) =$

$= 2 \cdot \frac{\mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)}{n} = 2 \cdot \frac{n \cdot \mathbb{E}(X_1)}{n} = 2 \cdot \mathbb{E}(X_1) =$

$= 2 \cdot \frac{a}{2} = a$

$\mathbb{E}(\hat{a}_2) = \mathbb{E}\left(\sqrt{3\overline{X_n^2}}\right) = \ldots\ldots$ нужен $\int$

тут чёт сложно

$\hat{a}_1 = 2\bar{X}_n$ будет ли сост.?

$\hat{a}_2 = \sqrt{3\overline{X_n^2}}$

$$\underset{n\to\infty}{\text{Plim}}\, 2\bar{X}_n = 2 \underset{n\to\infty}{\text{Plim}}\, \bar{X}_n = 2\cdot \mathbb{E}(X_1) = 2\cdot\frac{a}{2} = a$$

ЗБЧ

$$\underset{n\to\infty}{\text{Plim}}\sqrt{3\overline{X_n^2}} = \sqrt{3\,\underset{n\to\infty}{\text{Plim}}\,\overline{X_n^2}} = \sqrt{3\cdot\frac{a^2}{3}} = a$$

Т. М.-В-С

ЗБЧ

$\mathbb{E}(X_1^2)$

Вопросик:

$X \sim U[a;b]$

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \bar{X}_n \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \overline{X_n^2} - \bar{X}^2 \end{cases}$$