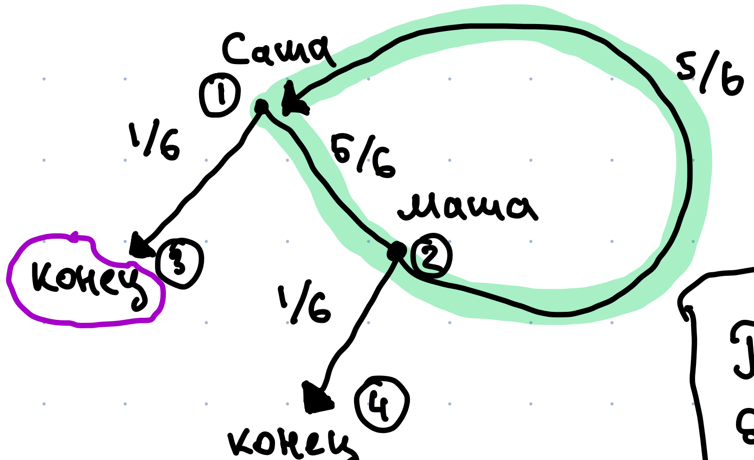
Цепи Маркова и метод 1-го шага

Упражнение

Маша кубик ⁘ Саша - первый

Саша $\mathbb{P}$(Саша будет мыть посуду)



$$\begin{cases} P_{1\to3} = 1/6 \cdot \overbrace{1}^{P_{3\to3}} + 5/6 \cdot P_{2\to3} \\ P_{2\to3} = 1/6 \cdot \underbrace{0}_{P_{4\to3}} + 5/6 \cdot P_{1\to3} \end{cases}$$

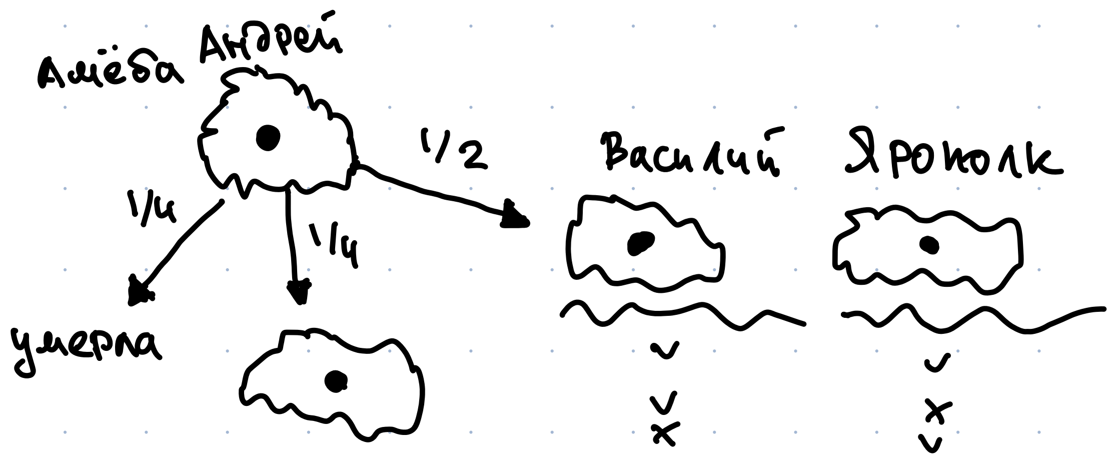
Почему игра не будет бесконечной?

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$P_{1\to3} = 1/6 + \frac{25}{36} \cdot P_{1\to3}$$

$$\frac{11}{36} P_{1\to3} = 1/6 \Rightarrow P_{1\to3} = \frac{6}{11}$$

Упражнение (Амоеба)



$\mathbb{P}$(популяция умрёт) − ?

где событие «популяция умрёт» обозначено A

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\mathbb{P}(A) + \frac{1}{2}\cdot\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(A)$$

$$x = 1/4 + 1/4\, x + 1/2\, x^2$$

$$1/2\, x^2 - 3/4\, x + 1/4 = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1 \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{4} = \cancel{1}$$

$$x_2 = \frac{3-1}{4} = 1/2$$

$$p = 0\cdot 1/4 + 1/4\cdot p + 1/2\left(p^2 + 2\cdot p\cdot(1-p)\right)$$

$$p = 1/4\cdot p + 1/2\, p^2 + p - p^2$$

$\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{4} p = 0$

$2p^2 - p = 0$

$\cancel{p = 0}$ $\quad p = 1/2$

Вырожденное р-е отпадает

Просто поверьте мне на слово

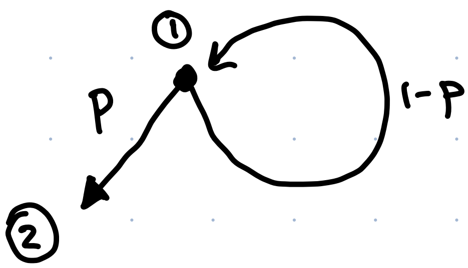
Упражнение

$X \sim Geom(p)$

X - число подк.

Y – число подк. до 1 успеха

$X = Y + 1$



$\mathbb{E}(X)$ - ? $\quad Var(X)$ - ?

X - кол-во подбр.

$$\mathbb{E}(X) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot \mathbb{E}(X+1)$$

$$e = p + (1-p) \cdot (e+1)$$

$$e = 1 + (1-p) \cdot e$$

$$e - e + p \cdot e = 1$$

$$e = 1/p$$

$$\boxed{p = 1/2 \quad e = 2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

нам её хочется найти

$$\mathbb{E}(X^2) = p + (1-p)\cdot(\mathbb{E}(X^2)+1)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = p + (1-p)(\mathbb{E}(X)+1)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = p + (1-p)\,\mathbb{E}((X+1)^2)$$

Какой вариант правильный?

сейчас: $X \quad X^2$

завтра: $\underbrace{X+1}_{Y} \quad \underbrace{(X+1)^2}_{Y^2}$

$\mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(X) + 1$

$$\cancel{\mathbb{E}(X^2)} = \cancel{p} + \cancel{\mathbb{E}(X^2)} + 2\overset{1/p}{\mathbb{E}(X)} + 1 -$$

$$- p\,\mathbb{E}(X^2) - 2\cancel{p}\,\underset{\cancel{1/p}}{\mathbb{E}(X)} \cancel{-p}$$

$$p\,\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{p} - 1$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$Var(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Упражнение (коллекционер)

30 игрушек

X - кол-во шоколадок для покупки

$\mathbb{E}(X)$ - ?

игрушка есть — игрушки нет

слон | слон жираф | слон слон динозавр ...

$X_1 = 1$ $X_2 = 2$ $X_3 = 3$

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{30}$ РАЗДЕЛЯЙ и ВЛАВСТВУЙ

X_1 - число яиц до 1 уник. игр.

X_2 - число яиц до 2 уник. игр.

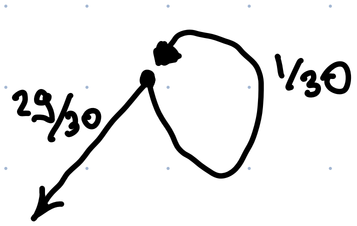
X_3 - число яиц до 3

...

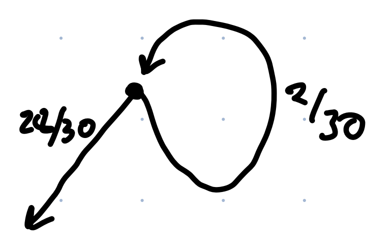
X_1	1
$\mathbb{P}(X_1=1)$	1

$\mathbb{E}(X_1) = 1$

X_2:



X_3:



$$\mathbb{E}(X_2) = \frac{29}{30}\cdot 1 + \frac{1}{30}\left(\mathbb{E}(X_2+1)\right)$$

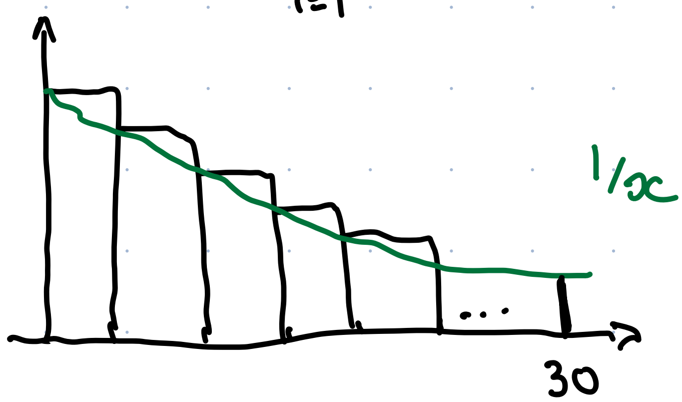
$$\mathbb{E}(X_3) = \frac{30}{28}$$

$$\mathbb{E}(X_2) = 30/29$$

$\boxed{\text{Ещё 27 уравнений!}}$

$$E(X) = 1 + \frac{30}{29} + \frac{30}{28} + \frac{30}{27} + \ldots + \frac{30}{2} + \frac{30}{1} =$$

$$= 30\underbrace{\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{29} + \frac{1}{28} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right)}_{\sum_{i=1}^{30} \frac{1}{i}} \approx 30 \ln 30 = 102$$



$$\int_1^{30} \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^{30} =$$

$$= \ln 30 - \ln 1 = \ln 30$$

Если яйцо стоит 30 ₽ и в магазине только 1 коллекция без сраных мозаек, надо ~ 300 ₽

Чуточку более формально

Опр. Марковская цепь –

послед. сл. вел. $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=k \mid \underbrace{X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1, X_0}_{\mathcal{F}_n}) = \mathbb{P}(X_{n+1}=k \mid X_n)$$

начальное состояние $\mathbb{P}(X_0=k) = \lambda_k$

Т. (Эргодичность конечной цепи Маркова)

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} 1 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & P_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$\mathbb{P}(X=j) = \pi_j$

стационарное р-е

Если цепь Маркова имеет конечное кол-во состояний и для какого-то n_0 все элементы матрицы $P^{(n_0)}$ отличны от нуля, тогда $\forall\, i$ и j $\exists$ пределы

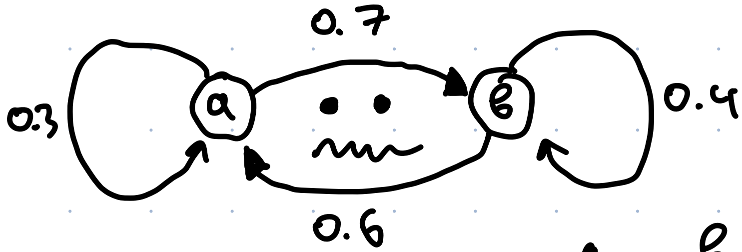
$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$$

Вер-ти π_j являются наименьшим решен. системы ур-ий

$$\sum_j \pi_j = 1 \qquad \pi_j = \sum_i \pi_i \cdot P_{ij}$$

Упражнение

$$\begin{cases} P_{a\to a} = 0.3 \cdot P_{a\to a} + 0.6\, P_{b\to a} \\ P_{b\to a} = 0.4\, P_{b\to a} + 0.7\, P_{a\to a} \end{cases}$$



$$0.6\, P_{b\to a} = 0.7\, P_{a\to a}$$

$$P_{b\to a} = \tfrac{7}{6}\, P_{a\to a}$$

$$\boxed{x_0 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \end{array}}$$

$$P = \begin{array}{cc} a & b \\ \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \qquad \begin{bmatrix} P_{1\to 1} & P_{1\to 2} \\ P_{2\to 1} & P_{2\to 2} \end{bmatrix}$$

$$x_1^T = x_0^T \cdot P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.6 \\ 0.3 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(S_1 = a) = \mathbb{P}(S_0 = a) \cdot \mathbb{P}(S_1 = a \mid S_0 = a) + \mathbb{P}(S_0 = b) \cdot \mathbb{P}(S_1 = a \mid S_0 = b)$$

$$x_{t+1}^T = x_t^T \cdot P$$

$$x_{t+1}^T = x_{t-1}^T \cdot P \cdot P$$

$$x_{t+1}^T = x_{t-2}^T \cdot P \cdot P \cdot P$$

$$x_{t+1}^T = x_0^T \cdot P^{t+1}$$

Как возвести матрицу в степень?

$$P = C \cdot D \, C^{-1}$$

vls. vek. $\rightarrow C$, $\quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$\cancel{\| \, C^{-1} D C} = C D C^{-1}$$

$$= C^{-1} D C \; \cancel{= C D C^{-1}}$$

$$P^n = C \cdot D \cdot \cancel{C^{-1} \cdot C} \cdot D \cdot \cancel{C^{-1} \cdot C} \cdot D \cdot \cancel{C^{-1}} \ldots \cdot \cancel{C} \cdot D \cdot C^{-1} =$$

$$= C \cdot D^n \cdot C^{-1}$$

$$|P - \lambda \cdot I| = 0 \qquad v \qquad P \cdot v = \lambda \cdot v$$

$$(P - I \cdot \lambda) \cdot v = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0.3 - \lambda & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(0.3 - \lambda)(0.4 - \lambda) - 0.6 \cdot 07 = 0$$

$$0.12 - 0.3\lambda - 0.4\lambda + \lambda^2 - 0.42 = 0$$

$$\lambda^2 - 0.7\lambda - 0.3 = 0$$

$$D = 0.49 + 1.2 = 1.69 \qquad \sqrt{D} = 1.3$$

$$\lambda_1 = \frac{0.7 - 1.3}{2} = -0.3 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{0.7 + 1.3}{2} = 1 \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.3-1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -0.7\,\vartheta_1 + 0.6\,\vartheta_2 = 0 \\ 0.7\,\vartheta_1 - 0.6\,\vartheta_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \vartheta_1 = 6 \\ \vartheta_2 = 7 \end{matrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$P^n = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-0.3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-13} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{13} = \begin{pmatrix} 6/13 & 6/13 \\ 7/13 & 7/13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6/13 & 7/13 \\ 6/13 & 7/13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \to a & a \to b \\ b \to a & b - \end{pmatrix}$$

$$x_t^T = x_0^T P^t$$

$$x_\infty^T = x_0^T \cdot P^\infty = (0.3, 0.7) \cdot \begin{pmatrix} 6/13 & 6/13 \\ 7/13 & 7/13 \end{pmatrix} =$$

$$= \Big(\overset{18}{\frac{3}{10} \cdot \frac{6}{13}} + \overset{49}{\frac{7}{10} \cdot \frac{7}{13}} \, ; \, \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{13} + \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{13} \Big)$$

$\frac{67}{130}$ a в

$$\boxed{x_{t+1} = P \cdot x_t}$$

Кажется, что у нас получились не оч. стандартные обознач.

$$x_n^T = x_{n-1}^T \cdot P$$

$$\lim x_n^T = \lim x_{n-1}^T \cdot P$$

$$x^T = x^T \cdot P$$

$$\begin{pmatrix} z \\ 1-z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} z \\ 1-z \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$z = 0.3z + 0.6(1-z)$$

$$1-z = z \cdot 0.7 + (1-z)0.4$$

$$0.7z = 0.6 - 0.6z$$

$$1.3z = 0.6$$

$$z = 6/13$$

$$x_\infty = \left(6/13 \quad 7/13 \right)$$

$$\begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1\to1} & P_{1\to2} \\ P_{2\to1} & P_{2\to2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

$$x_1^1 = P_{1\to1} \cdot x_1^0 + \underbrace{P_{1\to2}}_{1\to2} \cdot \underbrace{x_2^0}_{2}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} P_{1\to1} & P_{2\to1} \\ P_{1\to2} & P_{2\to2} \end{bmatrix} x_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_t &= P^T x_{t-1} \\ P^T &= C D C^{-1} \end{aligned}}$$

ok

$$(1\,1) \cdot D \cdot (1\,1)^{-1}$$

$$x_t^T = x_{t-1}^T P$$

$$P = (C D C^{-1})^T = C^{-T} D C^T$$

$$(=)^{-1} \cdot D \cdot (=)$$