Условное мат. ож.

$X \ Y \quad f(x,y)$ **Опр. 1 (технич.)**

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

$$\mathbb{E}(X|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x|y)\, dx$$

Условное ож. — это наилучший прогноз, доступный мне

$\mathbb{E}(X \mid A)$ — число

сл. вел. соб.

смысл-1

$\mathbb{E}(X \mid Y)$ — сл. вел.

сл. вел. сл. вел.

$\mathbb{E}(X \mid \sigma(Y))$ $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})$

смысл-2

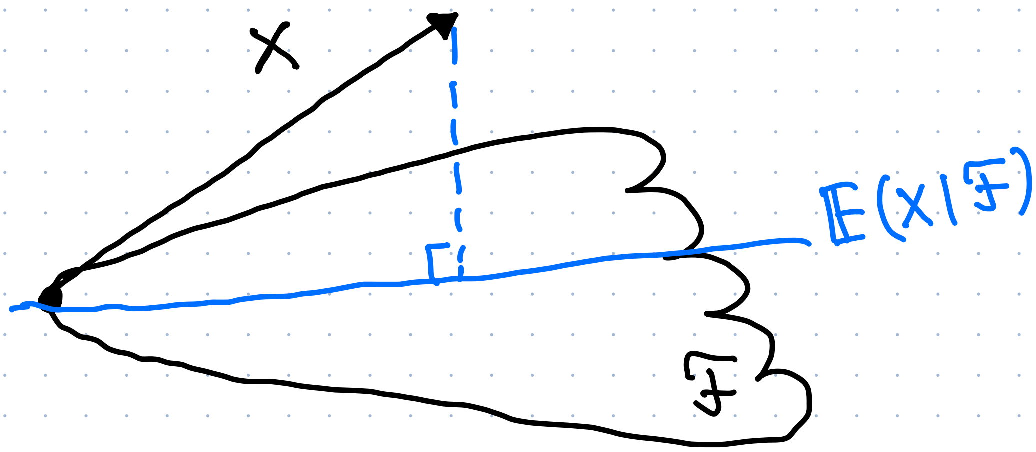
Опр. 2 (смысловое)

Пусть X — сл. вел. : $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, а $\mathcal{F}$ — σ-алгебра тогда

$\hat{X}$ наз. усл. мат. ож. $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})$, если

1) $\sigma(\hat{X}) \subseteq \mathcal{F}$
2) $\mathbb{E}(\hat{X}) = \mathbb{E}(X)$
3) $Z \quad \sigma(Z) \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow Cov(\hat{X} - X, Z) = 0$

$Cov(X, Z) = Cov(\hat{X}, Z)$



Упражнение

Ω	a	b	c
X	2	6	7
P	$1/2$	$1/4$	$1/4$
$\hat{X}_1$	$10/3$	$10/3$	7
$\hat{X}_2$	2	6.5	6.5

$\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, \{a\}, \{b,c\}\}$

$\mathcal{H} = \{\varnothing, \Omega, \{a,b\}, \{c\}\}$

$\hat{X}_1 = \mathbb{E}(X|\mathcal{H})$

$\hat{X}_2 = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$

$\mathbb{E}(X|\{a\}) = 2$

$\mathbb{E}(X|\{b,c\}) = \frac{1}{2}\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 7 = \frac{13}{2}$

$\mathbb{E}(X|\{a,b\}) = 2/3 \cdot 2 + 1/3 \cdot 6 = 10/3$

$X\|\{a,b\}$	2	6
P	$\frac{1/2}{1/2+1/4}$	$\frac{1/4}{1/2+1/4}$

$\mathbb{E}(X|\Omega) = \mathbb{E}(X) = \frac{17}{4}$

Св-ва:

1) $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{F}) = a \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) + b \cdot \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F})$

2) $\sigma(Z) \subseteq \mathcal{F}$ — мы знаем Z

$$\mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}) = Z$$

$$\mathbb{E}(Z \cdot X \mid \mathcal{F}) = Z \cdot \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})$$

$$\mathbb{E}(Z \cdot X \mid Z) = Z \cdot \mathbb{E}(X \mid Z)$$

3) $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing\}$ $\quad \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$

4) Если X и $\mathcal{F}$ нез. $\quad \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) = \mathbb{E}(X)$

5) $\mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})}_{\hat{X}}) = \mathbb{E}(X)$

$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$

Петя $\quad$ Паша

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_2) \mid \mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1)$$

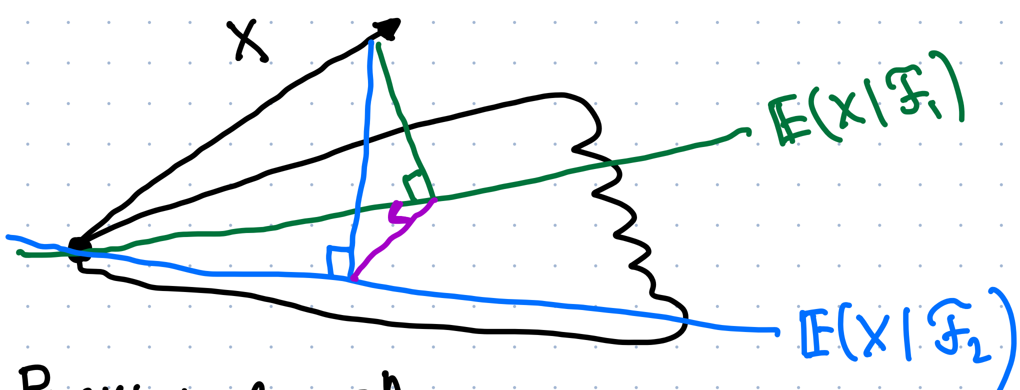
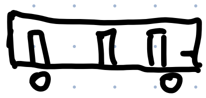


Рисунок в $\mathbb{R}^n$

Если я опущу $\perp$ на пол, а потом на плинтус или сразу на плинтус — я получу 1 точку. (Т. о 3-х перп.)

Упр.

Петя 

Эвнь 1: T – время до 1 авт.

Эвнь 2: идёт T минут

N – число авт.

$T \sim \operatorname{Exp}(2)$

$N \mid T \sim \operatorname{Poiss}(2T)$

$X \sim \operatorname{Poiss}(\lambda)$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\cdot \lambda^k}{k!}$$

$\mathbb{E}(X) = \lambda$

$\operatorname{Var}(X) = \lambda$

$Y \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$

$f(y) = \lambda e^{-\lambda y},\ y \geq 0$

$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}$

$\operatorname{Var}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$

$N \mid T \qquad T \qquad N$

$\hat{N} = \mathbb{E}(N \mid T)$ – лучший прогноз при зн. T

$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(\hat{N})$ – ср. лучш. прогноз.

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(N \mid T)) = \mathbb{E}(2T) = 2\cdot\mathbb{E}(T) = 2\cdot\tfrac{1}{2} = 1$$

Упр.

n грибов

R - рыжики P_r

L - лисички P_e

n - R - L $\quad 1 - P_r - P_e$

$\mathbb{E}(R|L) - ?$

$\mathbb{E}(R) - ?$

$R \sim Bin(n; P_r)$ $\quad R|L \sim Bin\left(n-L; \dfrac{P_r}{1-P_e}\right)$

$\mathbb{E}(R) = n \cdot P_r$

$\mathbb{E}(R|L) = (n-L) \cdot \dfrac{P_r}{1-P_e}$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(R|L)) = \mathbb{E}\left((n-L) \cdot \frac{P_r}{1-P_e}\right) =$$

$$= \left[n - \underbrace{\mathbb{E}(L)}_{n \cdot P_e}\right] \cdot \frac{P_r}{1-P_e} = n \cdot P_r$$

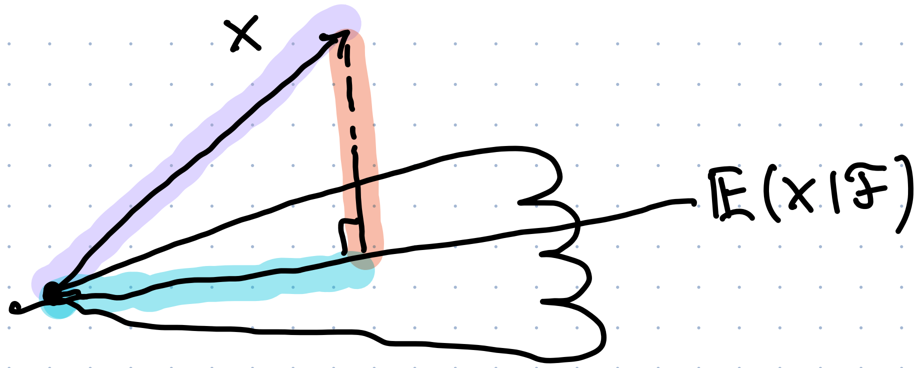
$$Var(Y|X) = \mathbb{E}(Y^2|X) - \mathbb{E}^2(Y|X)$$

Т. (Пифагора)

$$Var(X) = \mathbb{E}(Var(X|\mathcal{F})) + Var\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\right)$$

Var(x) - кв. длины

$$Var(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) - \underset{0}{\cancel{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))}})^2\right]$$



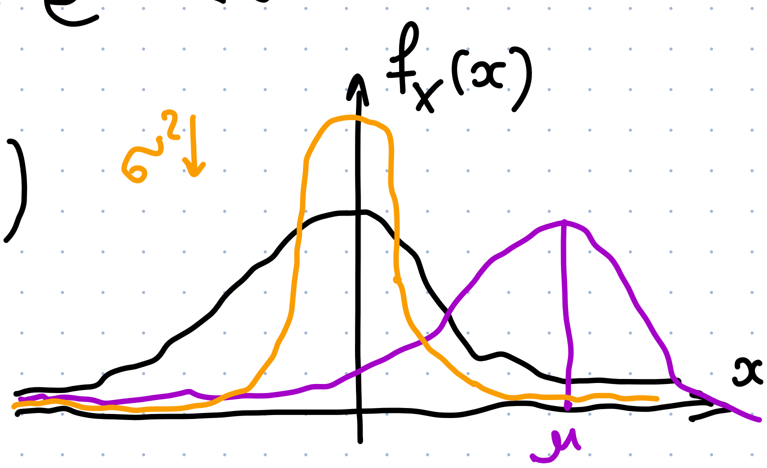
Нормальное р.-е

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

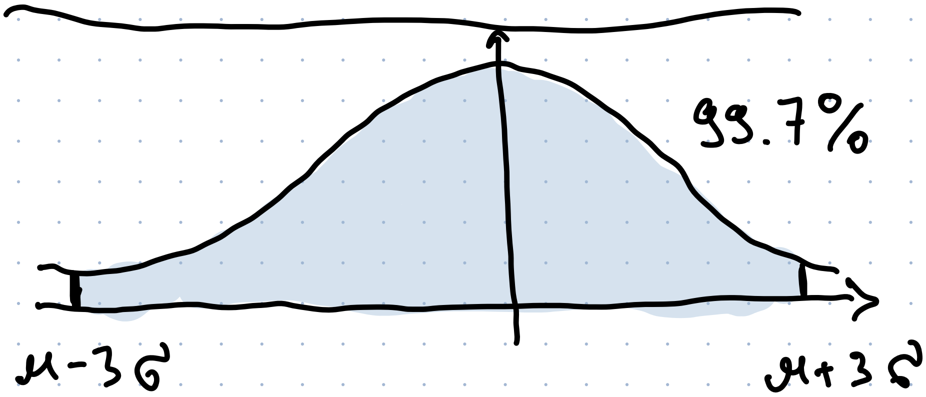


$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$ – не выражается в явном виде

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

- центрирование $\mathbb{E}(Y) = 0$
- нормирование $Var(Y) = 1$

Правило „скольких-то" σ:



$$\mathbb{P}(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) = 0.997$$

$2 \qquad 2 \sim 0.95$

$1.96 \qquad 1.96 = 0.95$

$1 \qquad 1 \sim 0.67$

Как:

$Y \sim N(0, 1)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ — вычисли численно

вроде бы это ф. Лапласа

Важное св-ва:

$X \sim N(\mu_1; \sigma_1^2) \qquad Y \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$

1) $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2;\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

2) $X-Y \sim N(\mu_1-\mu_2;\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

3) $a\cdot X \sim N(a\cdot\mu_1;\ a^2\sigma_1^2)$

4) $X+b \sim N(\mu_1+b;\ \sigma_1^2)$

5) $\frac{X}{Y} \sim$ р.-е. Коши

не $\exists$ мат. ож.

$ctr = \frac{click}{show} \sim$ Коши

ЦПТ: $click \sim N(\ldots)$

$show \sim N(\ldots)$

→ Невозможно оценить $\mathbb{E}(ctr)$

→ Сложно проверять гипотезы

- Линеаризация

$$\ln\frac{X}{Y} = \ln X - \ln Y$$

- Байесовский подход

- Проверять гипотезы про мед

Многомерное нормальное

$$Z=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{bmatrix}$$

$$\underset{[2\times 1]}{H} = \underset{[2\times 2]}{A} \cdot \underset{[2\times 1]}{Z} = \begin{pmatrix} a_{11}X + a_{12}Y \\ a_{21}X + a_{22}Y \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}(H) = \mathbb{E}(A\cdot Z) = A\cdot \mathbb{E}(Z)$$

$$Var(H) = Var(A\cdot Z) = A\, Var(Z)\, A^T$$

$$Var(a_{11}X + a_{12}Y) = a_{11}^2 Var(X) + a_{12}^2 Var(Y) =$$

$$+\ 2\cdot a_{11}\cdot a_{12}\, Cov(X,Y)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Var(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & Var(Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T$$

2×2 $\quad$ 2×2 $\quad$ 2×2

Тупая техническая работа

Упражнение

Какие матрицы м.б. ков.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$cov(X,Y) = cov(Y,X)$ $\qquad$ $Var(Y) > 0$

нет $\qquad$ нет

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad Var(X_1 - X_2) =$$

$$= 1 + 2 - 2 \cdot 5 = -7$$

$\mapsto$ симметричная

$\mapsto$ полож. опред.

$\forall z \in \mathbb{R}^n$

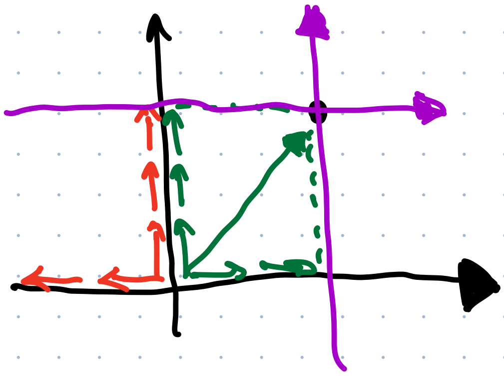
$$\underset{[1\times n]\cdot[n\times n]\cdot[n\times 1]}{z^T A z} > 0$$

Всё нормально (идея-1):

аксиомы Хершела-Максвелла

$V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ сл. вектор скорости

$\boxed{\text{НМ-1}}$ Результат измерения зависит от базиса, но закон распр. не зависит



$(-2, 3)$

$(2, 3)$

$V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ $\tilde{V} = \begin{pmatrix} -X \\ Y \end{pmatrix}$

$V \sim \tilde{V}$

Если бы зависел, вероятности были бы разные.

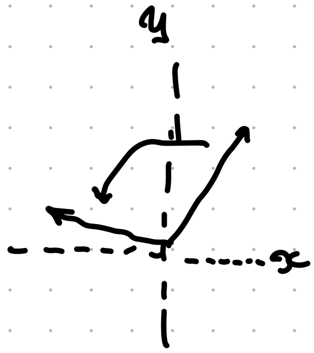
В комнате сквозняк — в разных базисах частецы летят в разные стороны с теми же вер.-ями

$\boxed{\text{НМ-2}}$ Вне зависимости от выбора ортог. базиса X и Y независимы

Частица быстро летит на север
Это утв. не даёт мне инф. о том с какой σ частица летит на восток

$\boxed{\text{НМ-3}}$ Р.е. непрерывное, оно $\exists$
Измерим σ так, что $Var(X) = 1$

$\boxed{HM-2}$ $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ $\tilde{V} = \begin{pmatrix} -Y \\ X \end{pmatrix}$



$X \sim -Y$

$Y \sim X$

$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(-Y)$

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(-Y) = 0$

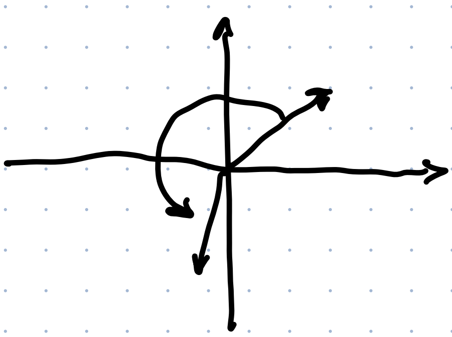
$Var(Y) = 1$ $Var(X) = 1$

$Cov(X, Y) = 0$

$f(x, y) \overset{\boxed{HM-2}}{=} f(x) \cdot f(y)$

$\boxed{HM-1}$

$f(x, y) = h(x^2 + y^2)$



$f(x) \cdot f(y) = h(x^2 + y^2)$

$y = 0$

$f(x) \cdot \underbrace{f(0)}_{const} = h(x^2)$

$$f(x) = \frac{1}{f(0)} \cdot h(x^2)$$

$$f(y) = \frac{1}{f(0)} \cdot h(y^2)$$

$$h(x^2+y^2) = \frac{1}{f^2(0)} \cdot h(x^2) \cdot h(y^2)$$

решаем с ней, она уйдет в C_1

$$\boxed{h(a+b) = h(a) \cdot h(b)}$$

$$h'_b(a+b) = h(a) \cdot h'_b$$

$$h'(a) = h(a) \cdot \underbrace{h'(0)}_{\text{const}}$$

$$h'(a) = h(a)$$

только exp

$$\frac{dh}{da} = c_1 \cdot h$$

$$\frac{dh}{h} = c_1 da$$

$$\ln h = c_1 a + \ln c_2$$

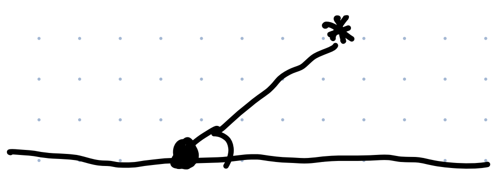
$$h = e^{c_1 a + \ln c_2} = c_2 e^{c_1 a}$$

$$f(x) = c_2 e^{c_1 x^2}$$

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \\ Var(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ c_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Всё нормально (идея 2):

Астрономы



углы на звезду

Маша $y_1 = 35^\circ$

Петя $y_2 = 28^\circ$

Вася $y_3 = 49^\circ$

Получились разные измерения

1000 лет

Что делать?

→ среднее

→ отдаленные с меньшим весом (Кеплер)

→ ......

Гаусс разрешил споры **предп-я Гаусса:**

① Предположим, что те, кто берут среднее „правы":

$$\mu = \bar{y} = \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \quad \text{вер-ть}$$

получить такие измерения max

$$\bar{y} = \arg\max_{\mu} \mathbb{P}(y_1, \ldots, y_n \mid \mu)$$

② Набл. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – незав.

③ $y_i = \mu + u_i$

④ u_i – симм. отн. нуля $\mathbb{E}(u_i) = 0$

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ одинаково распр.

$$f(u_1, u_2) \overset{2,3,4}{=} f(y_1 - \mu) \cdot f(y_2 - \mu)$$

$$\ell(\mu) = \ln f(y_1 - \mu) + \ln f(y_2 - \mu)$$

$$\frac{d\ell}{d\mu} = \frac{f'(y_1 - \mu) \cdot (-1)}{f(y_1 - \mu)} + \frac{f'(y_2 - \mu) \cdot (-1)}{f(y_2 - \mu)}$$

1 $$\frac{f'(y_1-\bar{y})}{f(y_1-\bar{y})}+\frac{f'(y_2-\bar{y})}{f(y_2-\bar{y})}=0 \quad \forall y_1, y_2$$

4 $$f(a)=f(-a)$$
$$f'(a)=-f'(-a)$$

$$\frac{f'(a)}{f(a)}=g(a) \qquad g(-a)=-g(a)$$

$$g(y_1-\bar{y})+g(y_2-\bar{y})\equiv 0$$

$$(y_1-\bar{y})+(y_2-\bar{y})\equiv 0$$

$$\sum y_i - n\bar{y}=0$$

$$\begin{cases} g(t_1)+g(t_2)+g(t_3)=0 \\ t_1+t_2+t_3=0 \end{cases}$$

Давайте добавим третье наблюдение

Двух не хватает

$t_1 = t_2 = t$

$t_3 = -2t$

$$2g(t) = -g(-2t)$$

$$g(2t)$$

$\Rightarrow g(kt) = k \cdot g(t)$

$g(t)$ – линейная функция

$$g(t) = c \cdot t$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = c \cdot t$$

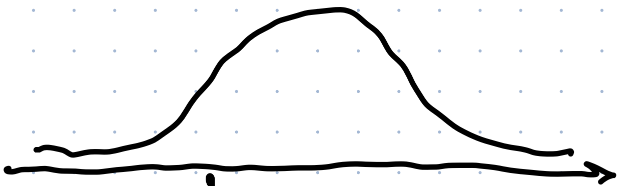
$$\frac{df}{dt} = c \cdot t \cdot f(t)$$

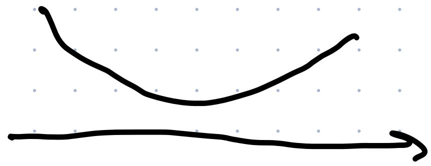
$$\frac{df}{f} = c \cdot t \, dt$$

$$\ln f = c \cdot \frac{t^2}{2} + \ln d$$

$$f(t) = d \cdot \exp\left(c \cdot \frac{t^2}{2}\right)$$

Восст. константы!





$d > 0$

$c < 0$ $\qquad$ $c = -\frac{1}{\sigma^2}$

$$f(t) = d \cdot \exp\left(-\frac{t}{2\sigma^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0 \Rightarrow d = \dots$$