① Пр-во эл. исходов

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ пр-во эл. исходов

$A \subset \Omega$ - события

Упражнение (классич. вер.)

часто не так

$$\boxed{\mathbb{P}(w_i) = \frac{1}{n}}$$

$\Omega = \{ ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ \}$

A – выпало чётное число

$A = \{ ⚁ ⚃ ⚅ \} \subset \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = 1/2$$

важная мысль:

надо уметь считать сколько событий бывает

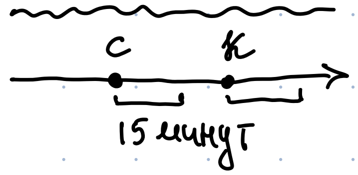
$\Rightarrow$ комбинаторика

Упражнение (геом. вер.)

1 час — 09:00 – 10:00

Саша

Катя

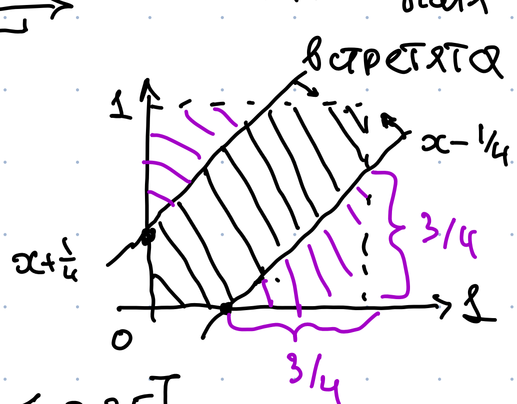


Какова вер., что Саша и Катя встретятся?

$\Omega = [0;1] \times [0;1]$

$(0.2, 0.7) \in \Omega$

(x, y)



$A = \{(x,y) \in \Omega \mid |x-y| \leq 0.25\}$

$|x-y| \le \frac{1}{4}$ $\quad x>y \quad x-y\le 1/4 \quad y=x-1/4$

$x<y \quad y-x \le 1/4 \quad y=x+1/4$

$$\mathbb{P}(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=1-\left(3/4\right)^2=7/16$$

→ Можно ли $\forall A\subset\Omega$ считать событием?

иногда да иногда нет $\quad \mathcal{F}$

→ А как правильно определить $\mathbb{P}$?

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – вероятностная тройка

② Сигма-алгебра

σ-алгебра – список мн-в, которые мы считаем соб.

Опр.1 (удобное)

Набор $\mathcal{F}$ подмн. мн. Ω наз. σ-алгеброй, если

1) ~~[illegible]~~, $\Omega\in\mathcal{F}$
2) Если соб. $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$, тогда $\forall$ их комбинация $(\cup \cap \setminus \Delta A^c)$ тоже в $\mathcal{F}$

$\overline{A}$

Опр. 2 (формальное)

$\boxed{A^c=\overline{A}}$

1) $\Omega\in\mathcal{F}$
2) $A\in\mathcal{F} \Rightarrow \overline{A}=\Omega\setminus A\in\mathcal{F}$
3) $A_1, A_2, \dots \in\mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\in\mathcal{F}$

$\boxed{\text{минимальный набор требований}}$

Упр

$$A \cap B = \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})}$$

Упр.

$\Omega = \{$⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅$\}$

Вася умеет считать до трёх

Знает остаток от деления на три

$\mathcal{F}$ - набор событий, которые Вася понимает

$\mathcal{F} = \{ \sigma($ $\underbrace{\{⚀, ⚃\}}_{\text{остаток 1}}$, $\underbrace{\{⚁, ⚄\}}_{\text{остаток 2}}$, $\underbrace{\{⚂, ⚅\}}_{\text{остаток 3}}$ $)$, $\varnothing$, Ω,

$\underbrace{\{⚀, ⚃, ⚁, ⚄\}}_{\text{выпал ост 1 или 2}}$, $\{⚀, ⚃, ⚂, ⚅\}$, $\underbrace{\{⚁, ⚄, ⚂, ⚅\}}_{\text{выпал ост 2 или 3}}$ $\}$

8

не в $\mathcal{F}$

$\{⚀\}$

$\{⚁\}$

$\{⚀, ⚁, ⚂, ⚃\}$

Самая богатая σ-алгебра : 2^{Ω} $\quad 2^{6}$

Самая бедная : $\{\varnothing, \Omega\}$

Зачем нужна σ-алгебра:

- моделирование наделённостью инф.
- технические цели в теоремах

Всегда $\exists$ самый маленький набор мн-в, который порождает σ-алгебру

$\sigma(\{1,4\}, \{2,5\}, \{3,6\})$ $\qquad \mathcal{F} = \sigma($набор соб.$)$

③ Вероятность

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0;1]$ и обладает св-вами:

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2) $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3) $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
4) $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

аксиомы Колмогорова

$\cup \quad \sqcup$

х.з. $A \cap B = \varnothing$

Упражнение

$\Omega = \{O \ P\}$

$\mathcal{F} = \sigma(O, P) = 2^{\Omega}$

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0;1]$

O	P	
1/2	1/2	правильная
1/4	3/4	смещенная

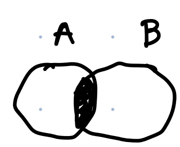
Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ задаёт модель

$2^{\Omega} = \{\text{„O"}, \text{„P"}, \varnothing, \{\text{„O"}, \text{„P"}\}\}$

④ Свойства вероятности

Правило сложения

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$



двойной счёт

Упр.

кубик

A – чётное {⚁, ⚃, ⚅}

B – дел. на 3 {⚂, ⚅}

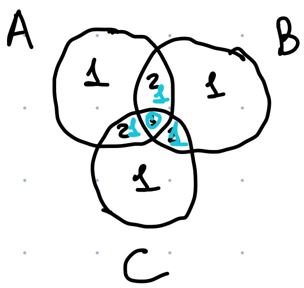
$\mathbb{P}(A \cup B) = 3/6 + 2/6 - 1/6$

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Упр.

А что если мн-ва три?

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

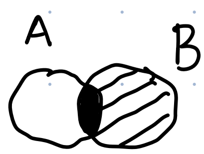


Формула включений-исключений

Опр. Условная вер-ть

B – произошло

$\mathbb{P}(A \mid B) = ?$



A – кость выпала :

B – чётное

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{|A \cap B| / |\Omega|}{|B| / |\Omega|} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

ф-ла Байеса

Опр. Ф-ла полной вероятности

$H_1, \dots, H_k$ – не пересекаются

$$\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{k} H_i = H_1 \sqcup H_2 \sqcup H_3 \sqcup \dots \sqcup H_k$$

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(H_i) = 1$$

Полная группа событий

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)$$

Упражнение

школа 3 9-ых класса А Б В один. по размеру

А 30% $\heartsuit$ географию

Б 40% $\heartsuit$

В 70% $\heartsuit$

$$\mathbb{P}(\text{Петя } \heartsuit \text{ геогр.}) = \mathbb{P}(А) \cdot \mathbb{P}(\heartsuit|А) + \mathbb{P}(Б) \cdot \mathbb{P}(\heartsuit|Б) + \mathbb{P}(В) \cdot \mathbb{P}(\heartsuit|В)$$

$$= 1/3 \cdot 0.3 + 1/3 \cdot 0.4 + 1/3 \cdot 0.7 = \frac{14}{30} = 7/15$$

$$\mathbb{P}(А|\heartsuit) = \frac{\mathbb{P}(\heartsuit|А) \cdot \mathbb{P}(А)}{\mathbb{P}(\heartsuit)} = \frac{0.3 \cdot 1/3}{7/15} = \frac{1}{10} \cdot \frac{15}{7} = \frac{3}{14}$$

$$\mathbb{P}(Б|\heartsuit) = \frac{0.4 \cdot 1/3}{7/15} = \frac{4}{30} \cdot \frac{15}{7} = 2/7 = 4/14$$

Петя	А	Б	В
	1/3	1/3	1/3

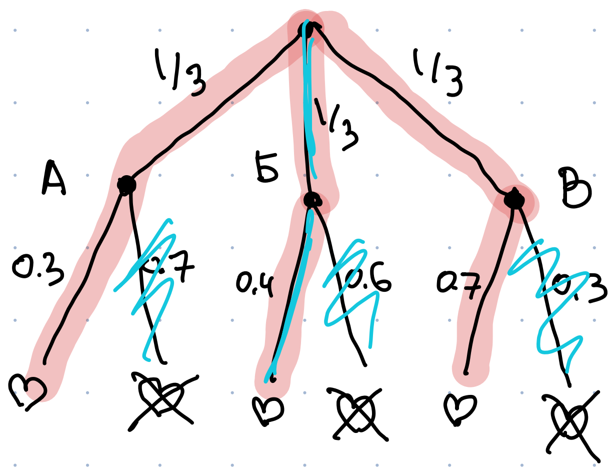
априорное распределение

? геогр. • $\heartsuit$

Петя	А	Б	В
	3/14	4/14	7/14

апостериорное распределение

∃ Байесовская статистика



$\mathbb{P}(♡)$

идем по всем траекториям, где ♡ и суммируем

$\frac{1}{3} \cdot 0.3 + \frac{1}{3} \cdot 0.4 + \frac{1}{3} \cdot 0.7$

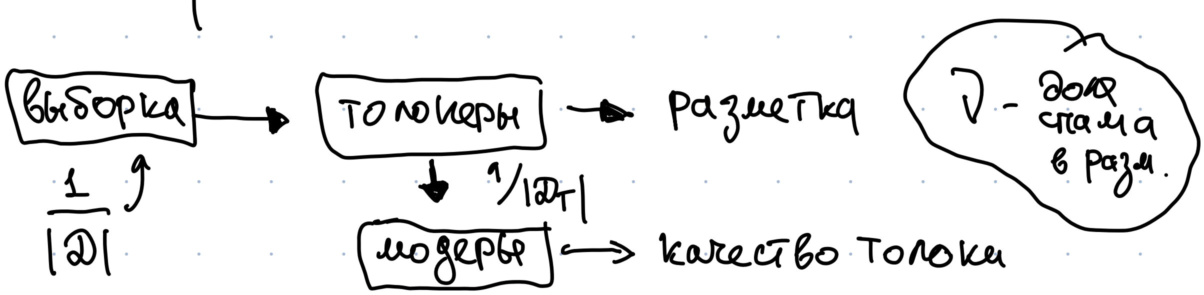
$\mathbb{P}(Б \mid ♡) \quad \dfrac{\frac{1}{3} \cdot 0.4}{\mathbb{P}(♡)}$

Упражнение

Задача: оценить долю спама в комментариях q

толокеры | ошибаются
могут разметить много

модераторы | не ошибаются



толока \ мод.	0	1
0		P_1
1	P_2	

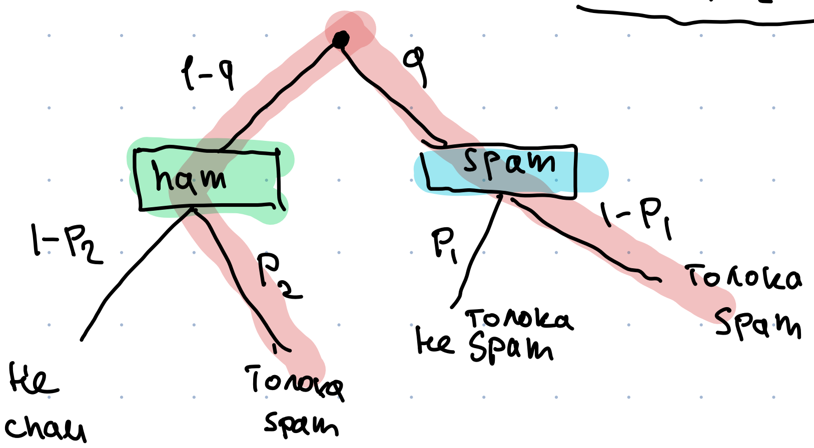
$\nu \quad P_1 \quad P_2$

$q - ?$

$$\nu = (1-q)P_2 + q(1-P_1)$$

P_1, P_2, ν – знаю

$\boxed{\text{получаем } q \text{ решив ур-е}}$



ν – вер того что на доке стоит метка спам

$$\cancel{\mathbb{P}(\text{spam} \mid \text{толока spam}) = \frac{q\cdot(1-P_1)}{\nu} = \frac{q\cdot(1-P_1)}{q(1-P_1) + P_2(1-q)}}$$

5 Случ. вел., измеримость, борелевская σ-алгебра

Опр. Случайная величина

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$\{0, P\} \longrightarrow \{1 \; 0\}$

$\{-1 \; 1\}$

$\{42 \; 15\}$

Если я знаю значение X $\Rightarrow$ я понимаю какие события произошли

$X = \sqrt{5}$ $\qquad$ $X > 4$ $\qquad$ $X \in [2;3]$

Опр. $\sigma(X) = \sigma\left(\{ \{X \leq t\} \mid t \in \mathbb{R} \} \right)$

сигма-алгебра, порождённая сл. вел. X

Упр.

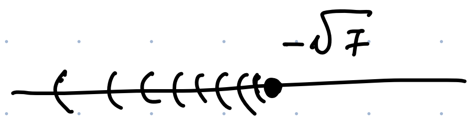
$$\{X^2 > 7\} \in \sigma(X)$$

$$X \in (-\infty; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}; +\infty)$$

$$\underbrace{\{X < -\sqrt{7}\}}_{B} \cup \underbrace{\{X > \sqrt{7}\}}_{A}$$

$$\bar{A} = \{X \leq \sqrt{7}\} \in \sigma(X) \Rightarrow A \in \sigma(X)$$

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{\{X \leq -\sqrt{7} - \tfrac{1}{i}\}}_{B_i}$$



$$\forall B_i \in \sigma(X) \Rightarrow B \in \sigma(X)$$

$\rightarrow$ $\{X = 2\}$ $\qquad$ $\rightarrow$ $X \in [2;3) \cup \{7\}$

$\rightarrow$ $X \in [2;3]$

$\rightarrow$ $X \in (2;3]$

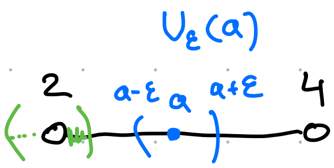
Почему в определении именно $\{X \leq t\}$?

Ответ: потому что такими событиями можно описать все события из Борелевской σ-алгебры.

Опр. Борелевская σ-алгебра — σ-алгебра, порожденная открытыми подмн. мн. Ω

$\mathcal{B}(\Omega)$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

Опр. Открытое мн-во — мн-во все точки которого внутренние



$U_\varepsilon(7)\cap A=\{7\}$

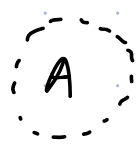
$(2;4)\cup\{7\}$

○—○ внутр. точка A — $\exists U_\varepsilon(a)\subset A$

2 4 граничн. точка A — $\forall U_\varepsilon(a)$ верно, что $\begin{cases} U_\varepsilon(a)\cap A\neq\varnothing \\ U_\varepsilon(a)\cap\bar{A}\neq\varnothing\end{cases}$

7 изолир. точка A — $\exists U_\varepsilon(a): U_\varepsilon(a)\cap A=\{a\}$

$\mathbb{R}$ $(a \; b)$ $\mathbb{R}^2$



Опр. Замкнутое мн — дополнение к открытому

— не замкнутое и не открытое

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – $\sigma((a,b) \mid a,b \in \mathbb{R})$

<u>Опр.</u> Борелевское мн-во – $\forall$ мн. из $\mathcal{B}(\Omega)$

<u>Упр.</u>

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$(2;100) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$[2;100] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty;2) \cup (100;+\infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\{7\} = \mathbb{R} \setminus ((-\infty;7) \cup (7;+\infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$[2;100) = [2;99] \cup (99;100) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Все привычные нам мн-ва – Борелевские

Не бор. $\exists$ но они очень слож. и редко исп. на практике

<u>Опр.</u> Измеримость

сл. вел. X измерима отн. σ-алг. $\mathcal{F}$, если

$\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$

$(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пр-во

$\forall$ мн из $\mathcal{F}$ – измеримое

Y изм. отн. X $\qquad \sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$

Т. Y изм. отн $X \Leftrightarrow Y = f(X)$