① Свойства оценок

Ген. сов. θ

Выборка $X_1, \ldots, X_n \sim iid$

$\mathbb{E}(X_i) = \mu \qquad Var(X_i) = \sigma^2$

$\hat{\theta} = f(X_1, \ldots, X_n)$

estimator

формула для получения $\hat{\theta}$

estimate

конкретное значение

Хотелки:

→ несмещенность $\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$

| асимпт. несмещ. $\mathbb{E}(\hat{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$

→ Состоятельность $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$

→ Эффективность — минимальный разброс

ⓐ Несмещенность

$\bar{X}$ – оценка для μ

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)\right) = \frac{1}{n}\left(\underset{\mu}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}(X_1)}} + \ldots + \underset{\mu}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}(X_n)}}\right) = \mu$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum (X_i - \bar{X})^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2 \text{ – оценка для } \sigma^2$$

$$\mathbb{E}(\overline{X^2}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}(X_1^2 + \ldots + X_n^2)\right) = \mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\underset{\sigma^2}{Var(Y)} = \mathbb{E}(Y^2) - \underset{\mu^2}{\mathbb{E}^2(Y)}$$

$$\mathbb{E}(\bar{x}^2) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n^2}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\Big(\underbrace{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}_{n} + \underbrace{2X_1X_2 + \ldots + 2X_{n-1}X_n}_{C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!\,2} = \frac{n(n-1)}{2}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\Big(n\,\mathbb{E}(X_i^2) + n(n-1)\cdot \underbrace{\mathbb{E}(X_1X_2)}_{\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)}\Big) =$$

$$\mu^2$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sigma^2 + \mu^2 + (n-1)\mu^2\right)$$

$$\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2 + \mu^2}{n} - \frac{n-1}{n}\mu^2 =$$

$$= \frac{(n-1)(\sigma^2 + \cancel{\mu^2})}{n} - \cancel{\frac{(n-1)}{n}\mu^2} = \frac{(n-1)}{n}\sigma^2$$

смещена

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\hat{\sigma}^2 = \frac{\cancel{n}}{n-1}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

несмещ. оценка дисперсии

Pandas | кто-то из них считает
numpy | смещ. вариант

ddof = 1 — корр. вариант

⑧ Состоятельность

? $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$ ЗБЧ **Да!**

? $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$

арифм. св.-ва

$$\operatorname*{Plim}_{n\to\infty} \hat{\sigma}^2 = \operatorname*{Plim}_{n\to\infty}(\overline{X^2} - \bar{X}^2) = \operatorname*{Plim}_{n\to\infty} \underbrace{\overline{X^2}}_{\substack{\parallel \text{ ЗБЧ} \\ \mathbb{E}(X_i^2)}} - \underbrace{\operatorname*{Plim}_{n\to\infty} \bar{X}^2}_{\substack{\parallel \text{ ар. св.-ва} \\ \operatorname{Plim}\bar{X}\cdot\operatorname{Plim}\bar{X}}} =$$

$\operatorname{Plim}\bar{X}$ $\parallel$ ЗБЧ μ, $\operatorname{Plim}\bar{X}$ $\parallel$ ЗБЧ μ

$$= \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}^2(X_i) = \operatorname{Var}(X_i) = \sigma^2$$

Да!

? $s^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$

$\Leftrightarrow$ тогда и только тогда

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

$\frac{n}{n-1} \xrightarrow{P} 1$, $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ — ар. св-ва

$\Rightarrow$ дост.

$\Leftarrow$ необх.

III. Достаточное условие Чебышёва

Если

$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta$

$\operatorname{Var}(\hat{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ оценка состоятельная

$$\operatorname{Var}(\bar{x}) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_i x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i \operatorname{Var}(x_i) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Отсюда вывод что $\bar{X}$ - сост для μ.

$\hat{\theta}_n$	$\theta - 100^n$	θ	$\theta + 100^n$
	$0{,}1^n$	$1 - 2\cdot(0.1)^n$	$0{,}1^n$

$n \to \infty \qquad \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Упражнение

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ U[0; a]$

$\hat{a}$ - ?

$\mathbb{E}(X_i) = \frac{a}{2}$

$\mathrm{Var}(X_i) = \frac{a^2}{12}$

$\hat{\sigma}^2 \quad \frac{a^2}{12}$

$\sqrt{12}\cdot\hat{\sigma}$

x_{max}

	несм.	смещ.
сост.	$2\bar{X}$	$\sqrt{12}\cdot\hat{\sigma}$; $2\bar{X} + \frac{1}{n}$
не сост.	$X_1 + X_2$	$\cos X_5$

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$$

(в) Эффективность

Опр. Оценка $\hat{\theta}_1$ наз. более эфф. чем $\hat{\theta}_2$, если

$\to$ для несмещ. $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) < \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)$

→ для смещ. $MSE(\hat{\theta}_1) < MSE(\hat{\theta}_2)$

$$MSE(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

$$Var(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\left[(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}))\right]^2$$

$$\boxed{MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + bias^2(\hat{\theta})}$$

между разбросом и смещением можно искать трэйдофф

$$[\theta - \mathbb{E}(\hat{\theta})]^2$$

$$Var(\hat{\theta}) \downarrow \Rightarrow bias(\hat{\theta}) \uparrow$$

Класс всех оценок с фиксир. смещением

$$K_b(\hat{\theta}) = \{\hat{\theta} \mid \mathbb{E}(\hat{\theta}) = \theta + b(\theta)\}$$

$$b(\theta) = \mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$$

Союзники для проверки эфф.:

- → Нер-во Рао-Крамера
- → Достаточные статистики

Потом ⇓

- → Влоб фигануть

Упражнение

$\bar{X}$ – эфф. оценка в классе несмещ. линейных оценок

$$\hat{\theta} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$ Линейность

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = a_0 + a_1 \mathbb{E}(X_1) + a_2 \mathbb{E}(X_2) + \dots + a_n \mathbb{E}(X_n) = \theta$$

$$a_0 = 0 \qquad a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$

$$\begin{cases} \mathrm{Var}(\hat{\theta}) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)\,\sigma^2 \to \min\limits_{a_1, \dots, a_n} \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)\,\sigma^2 + \lambda(1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} = 2 a_i \sigma^2 - \lambda = 0 \qquad a_i = \frac{\lambda}{2\sigma^2} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - a_1 - \dots - a_n = 0 \qquad a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

$$1 - \frac{n\lambda}{2\sigma^2} = 0 \qquad \lambda = \frac{2\sigma^2}{n}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_i X_i$$

② Асимптотическая нормальность

Шахты Британии XIX – XX в.

поломки

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ Pois(\lambda)$

$\hat{\lambda}$ – ?   CI – ?

$\mathbb{E}(X_i) = \lambda$ $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \lambda$

$Var(X_i) = \lambda$ $Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\lambda}{n}$

Метод моментов:

$\hat{\lambda} = \bar{X}_n$

Дов. интервал (асимптотический)

$\hat{\lambda} \overset{asy}{\sim} N\left(\lambda; \frac{\lambda}{n}\right)$

$\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \overset{asy}{\sim} N(0; 1)$

$\mathbb{P}\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \leq +Z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

-1.96 1.96 0.95

$-\sqrt{\frac{\lambda}{n}} \cdot Z \leq \hat{\lambda} - \lambda \leq \sqrt{\frac{\lambda}{n}}\, Z$

$$\hat\lambda - \sqrt{\frac{\lambda}{n}} Z \le \lambda \le \hat\lambda + \sqrt{\frac{\lambda}{n}} Z$$

$$\hat\lambda \pm \sqrt{\frac{\lambda}{n}} Z \qquad \hat\lambda \pm \sqrt{\frac{\hat\lambda}{n}} \cdot Z$$

$$\hat\lambda_- \qquad \hat\lambda_+$$

$$\mathbb{P}(\hat\lambda_- \le \lambda \le \hat\lambda_+) = 0.95$$

$$1-\alpha$$

Почему $\lambda \to \hat\lambda$

$$\mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right) \cdot \underbrace{\frac{\hat\lambda}{\hat\lambda}}_{\approx 1} = \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\hat\lambda}{n}\right) \cdot \frac{\lambda}{\hat\lambda} \xrightarrow{P} 1$$

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ \mathrm{Poiss}(\lambda_1)$ XIX в.

$Y_1, \dots, Y_n \sim iid\ \mathrm{Poiss}(\lambda_2)$ XX в.

$\boxed{\text{Вопрос:}}$ Правда ли, что $\lambda_2 < \lambda_1$?

$$\hat\lambda_1 = \bar X_n \overset{asy}{\sim} \mathcal{N}\left(\lambda_1, \frac{\hat\lambda_1}{n_1}\right)$$

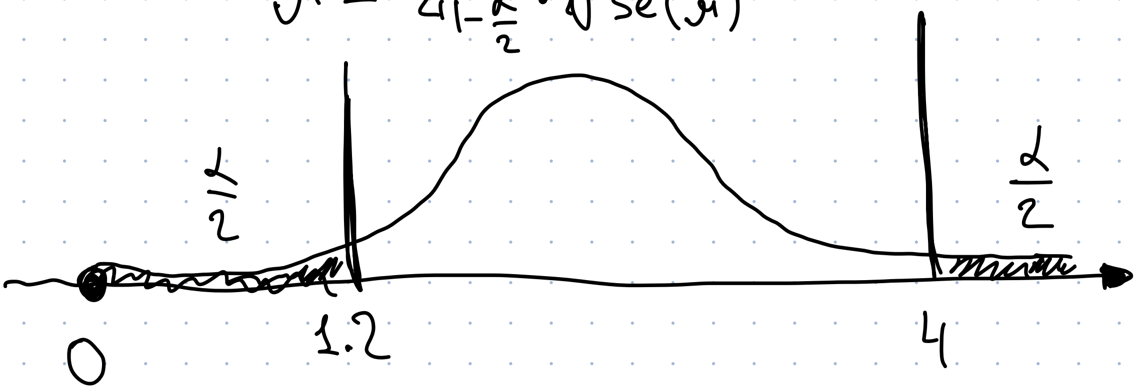
$$\hat\lambda_2 = \bar Y_n \overset{asy}{\sim} \mathcal{N}\left(\lambda_2 \quad \frac{\hat\lambda_2}{n_2}\right)$$

$$\hat\lambda_1 - \hat\lambda_2 \overset{asy}{\sim} \mathcal{N}\left(\lambda_1 - \lambda_2; \frac{\hat\lambda_1}{n_1} + \frac{\hat\lambda_2}{n_2}\right)$$

Д.и. для $\lambda_1 - \lambda_2$:

$$\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_1}{n_1} + \frac{\hat{\lambda}_2}{n_2}}$$

$$\hat{\mu} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{se(\hat{\mu})}$$



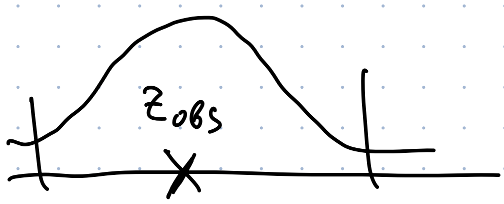
На уровне значимости α

Катастроф стало меньше

$H_0: \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

$H_A: \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$

z_{stat}



③ Дельта-метод

$\hat{\theta} = \ln \overline{X}$ $\qquad$ $\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}^2}$

Если $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ и дисперсия σ^2 мала (X попадает в небольшую окр. около μ) и $g(t)$ непр. дифф. Тогда $g'(\mu) \neq 0$

$$g(X) \approx N\left(g(\mu);\ \sigma^2 \cdot (g'(\mu))^2\right)$$

<u>Док-во:</u>

$g(t) \approx g(\mu) + g'(\mu)(t-\mu)$ ряд Тэйлора в окр. μ

$$g(X) \approx g(\mu) + g'(\mu)(X-\mu)$$

$$\mathbb{E}(g(X)) = g(\mu) + g'(\mu) \cdot (\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{\mu} - \mu) = g(\mu)$$

$$Var(g(X)) = (g'(\mu))^2 \cdot \underbrace{(Var(X))}_{\sigma^2} \quad \blacksquare$$

Упражнение

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{iid } Poiss(\lambda)$

$\hat{\mathbb{P}}(X_i = 0)$ $\qquad$ $\mathbb{P}(X_i = k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

$\hat{p} = \hat{\mathbb{P}}(X_i = 0) = e^{-\hat{\lambda}}$ $\qquad$ $\mathbb{P}(X_i = 0) = e^{-\lambda}$

Хочу д.и. для p

$\dfrac{\hat{\lambda}}{n}$ маленькая $\qquad$ $\dfrac{2}{200} \approx 0.01$ вроде маленькая

$g(t) = e^{-t}$ $\qquad$ $g(\mu) = e^{-\mu}$

$g'(t) = -e^{-t}$ $\qquad$ $(g'(\mu))^2 = e^{-2\mu}$

$$\hat{p} = e^{-\hat{\lambda}} = e^{-\bar{x}} \overset{asy}{\sim} \mathcal{N}\Big(\underset{p}{e^{-\lambda}};\ \underset{\frac{\bar{x}}{n} \cdot e^{-2\bar{x}}}{\frac{\lambda}{n} \cdot e^{-2\lambda}}\Big)$$

$\Rightarrow$ получаем д.и.

④ Конечная ген. сов.

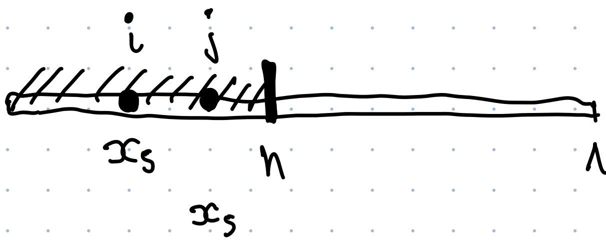
$x_1, x_2, \dots, x_N$ – ген. сов.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ – выборка без повторений

$n < N$ (не iid)

а) $\mathbb{E}(\bar{X}_n)$ б) $\mathrm{Var}(\bar{X}_n)$ $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) < 0$

$$\mathbb{P}(X_i = x_s) = \mathbb{P}(X_j = x_s)$$



Перемешиваю

$$\frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$$

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}(X_1)$$

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \neq 0$$

$$\mathrm{Cov}(\underbrace{X_1 + \dots + X_n + X_{n+1} + \dots + X_N}_{\text{const}}; X_1) = 0$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_1) + \dots + \mathrm{Cov}(X_n, X_1) + \mathrm{Cov}(X_{n+1}, X_1) + \dots + \mathrm{Cov}(X_N, X_1) = 0$$

$$\mathrm{Var}(X_1) + (N-1) \cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$$

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{\operatorname{Var}(X_i)}{N-1} < 0$$

$$\operatorname{Var}(\bar{X}_n) = \operatorname{Var}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\Big(\operatorname{Var}(X_1) + \ldots + \operatorname{Var}(X_n) + 2\operatorname{Cov}(X_1, X_2) + \ldots$$

$$\ldots + 2\operatorname{Cov}(X_{n-1}, X_n)\Big) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n \cdot \operatorname{Var}(X_1) + n \cdot (n-1) \cdot \operatorname{Cov}(X_i, X_j)\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{(n-1)}{(N-1)} \cdot \frac{\sigma^2}{n} = \left(1 - \frac{(n-1)}{N-1}\right) \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

поправка на конечность генеральной совокупности