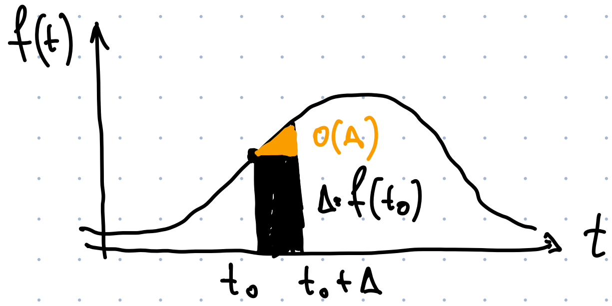
Большая сила „o"-малых

$g(t) = o(f(t))$ $\qquad \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{g(t)}{f(t)} = 0$

$n^3 = o(n^2)$

$\ln n \ll n \le n^k \le a^n \ll n^n \qquad \dfrac{n^2}{e^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



$\mathbb{P}(X \in [t_0; t_0+\Delta]) = \Delta \cdot f(t_0) + o(\Delta)$

$o(\Delta) + o(\Delta) = o(2\Delta) = o(\Delta)$

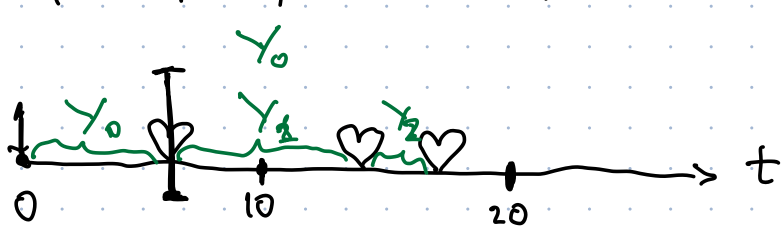
$o(42\Delta) = o(\Delta)$

$-o(\Delta) = o(\Delta)$

Даша

X_t – число ♡ которое получила фотка за время $[0; t]$

Y_n – время, которое прошло между n и $n+1$ ♡

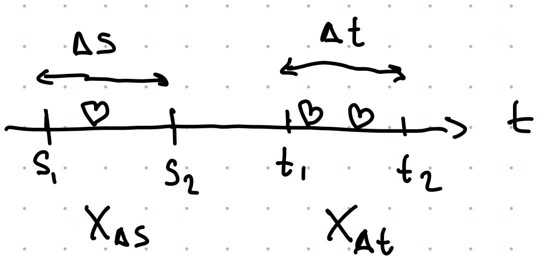


$X_{20} = 3 \qquad X_{10} = 1$

PA-0 За нулевой промежуток времени ничего не происходит

$$\mathbb{P}(X_0>0)=0$$
$$\mathbb{P}(X_0=0)=1$$

PA-1 Отсутствие последействия



$X_{\Delta t}$ не зав. от $X_{\Delta s}$ если Δt и Δs не пересекаются

PA-2 Стационарность

Появление k событий на промеж. Δt зав. только от длины этого промеж. и не зав. от точки отсчёта

PA-3 Ординарность

Наступление более 1 соб. за ∞ малый промежуток времени — невозможно

$$\cancel{\mathbb{P}(X_n=0)=0}$$
$$\cancel{\mathbb{P}(X_n=1)=0}$$

$$\mathbb{P}(X_{\Delta t}\geq 2)=o(\Delta t)$$
$$\mathbb{P}(X_{\Delta t}=1)=\lambda\cdot\Delta t$$

интенсивность потока событий

Простейший поток событий

$$\mathbb{P}(X_{\Delta t}=0)=1-(\lambda\Delta t+o(\Delta t))=$$
$$=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$\mathbb{P}(X_t=k)$ — ?

$h_0(t)=\mathbb{P}(X_t=0)$ $\quad h_1(t)=\mathbb{P}(X_t=1)$ .....

$h_0(t)$ $\quad h_0(t+\Delta t)$ $\quad h_0(\Delta t)$ как связаны?

$\Delta t \to 0$

$\boxed{\text{PA-1}}$ X_t и $X_{\Delta t}$ — незав.

$h_0(t)=\mathbb{P}(X_t=0)$

$h_0(\Delta t)=\mathbb{P}(X_{\Delta t}=0)$

$h_0(t+\Delta t)=\mathbb{P}(X_{t+\Delta t}=0)=\mathbb{P}(X_t=0)\cdot\mathbb{P}(X_{\Delta t}=0)$

$$h_0(t+\Delta t)=h_0(t)\cdot h_0(\Delta t)$$

$$\frac{h_0(t+\Delta t)-h_0(t)}{\Delta t}=\frac{h_0(t)\cdot[h_0(\Delta t)-1]}{\Delta t}$$

$\Delta t\to 0$ $\quad h_0'(t)$ $\quad \dfrac{-\lambda\Delta t+o(\Delta t)}{\Delta t}$

$h_0(\Delta t)=\mathbb{P}(X_{\Delta t}=0)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ $\boxed{\text{PA-3}}$

$$\lim_{\Delta t\to 0} h_0(t)\cdot\left(\frac{-\lambda\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}+\cancelto{0}{\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}}\right)=-\lambda\cdot h_0(t)$$

$$h_0'(t) = -\lambda \cdot h_0(t)$$

$$f'(t) = f(t)$$

$$e^t$$

$$\frac{dh_0}{dt} = -\lambda h_0$$

$$\frac{dh_0}{h_0} = -\lambda \, dt$$

$$\ln h_0 = -\lambda t + \ln(\text{const})$$

$$h_0(t) = \text{const} \cdot e^{-\lambda t}$$

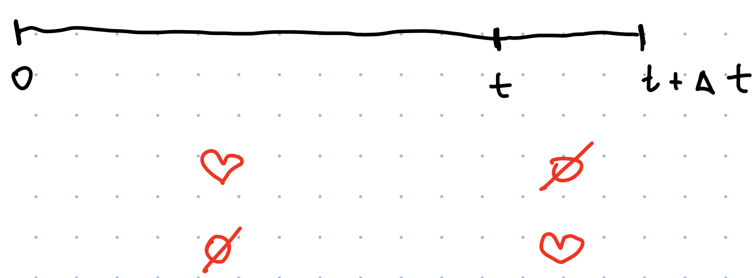
$\boxed{\text{PA-0}}$ $$\mathbb{P}(X_0 = 0) = h_0(0) = \text{const} \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = 1$$

$$\text{const} = 1$$

$$\mathbb{P}(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

$$\mathbb{P}(X_t = 1) = h_1(t)$$

$h_1(t)$ $\quad h_1(\Delta t)$ $\quad h_1(t + \Delta t)$



$X_{t+\Delta t} = 1$

$$h_1(t+\Delta t) = h_1(t) \cdot h_0(\Delta t) + h_0(t) \cdot h_1(\Delta t)$$

$$\frac{h_1(t+\Delta t)-h_1(t)}{\Delta t} = \frac{h_1(t)\cdot\left(h_0(\Delta t)-1\right)}{\Delta t} + \frac{h_0(t)\cdot h_1(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow[\Delta t\to 0]{} h_1'(t)$$

$$h_1(\Delta t) = \lambda\cdot\Delta t$$

$$\frac{h_0(t)\cdot\lambda\,\Delta t + h_0(t)\cdot o(\Delta t)}{\Delta(t)}$$

$$\frac{h_1(t)\cdot\left(-\lambda\Delta t + o(\Delta t)\right)}{\Delta t}$$

$$h_0(t)\cdot\lambda + \cancel{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h_0(t)\cdot o(\Delta t)}{\Delta(t)}} \to 0$$

$$-\lambda\, h_1(t)$$

$$h_1'(t) = -\lambda\, h_1(t) + \lambda\cdot\underbrace{h_0(t)}_{e^{-\lambda t}} \quad \Big|\times e^{\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\cdot h_1'(t) = -\lambda h_1(t)\, e^{\lambda t} + \lambda$$

$$\underbrace{e^{\lambda t} h_1'(t) + \lambda\, h_1(t)\, e^{\lambda t}}_{\left(e^{\lambda t}\cdot h_1(t)\right)'} = \lambda$$

$$\left(e^{\lambda t}\cdot h_1(t)\right)' = \lambda$$

$$h_1(t)\, e^{\lambda t} = \lambda t + \text{const}$$

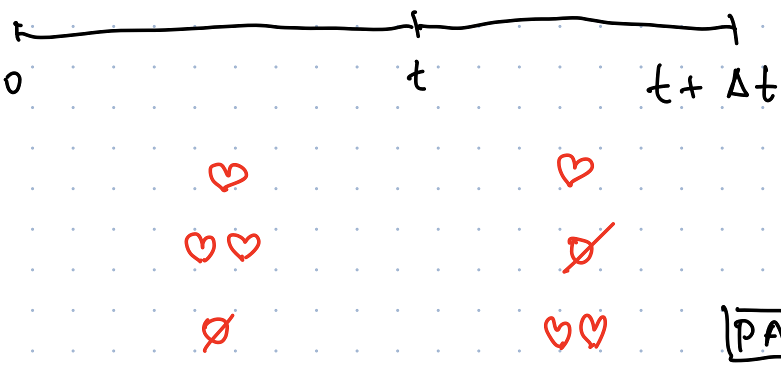
$$h_1(t) = \lambda t\, e^{-\lambda t} + \text{const}\cdot e^{-\lambda t}$$

$$h_1(0) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 0$$

$$\text{const}\cdot e^{-\lambda\cdot 0} = 0 \Rightarrow \text{const} = 0$$

$\mathbb{P}(X_t = 1) = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t$

$\mathbb{P}(X_t = 2)$



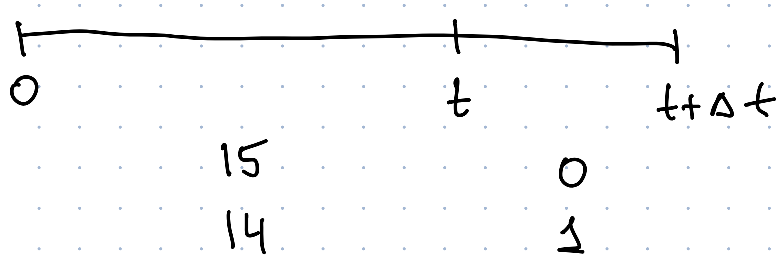
$h_1(t) \cdot h_1(\Delta t)$

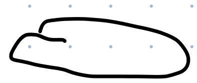
$h_2(t) \cdot h_0(\Delta t)$

$\boxed{PA-3}$ $0 \cdot h_0(t) = o(\Delta t)$

$$h_2(t + \Delta t) = h_1(t) \cdot h_1(\Delta t) + h_2(t) \cdot h_0(\Delta t) + o(\Delta t)$$

$h_{15}(t) = \mathbb{P}(X_t = 15)$



 > 1 $\quad o(\Delta t)$

$$\mathbb{P}(X_t = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \qquad X_t \sim \text{Poiss}(\lambda t)$$

$\mathbb{E}(X_t) = \lambda t \qquad \mathbb{E}(X_1) = \lambda$

Y_n – время между событиями

$$F_{Y_0}(t) = \mathbb{P}(Y_0 \le t) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(Y_0 > t)}_{\underbrace{\mathbb{P}(X_t = 0)}_{e^{-\lambda t}}} = 1 - e^{-\lambda t}, \ t \ge 0$$

$Y_0 \sim Exp(\lambda)$

$\mathbb{E}(Y_0) = \frac{1}{\lambda}$

$\boxed{\text{PA-2}}$ $\quad X_{\Delta t}$ и $X_{\Delta s}$ – незав.

Упражнение (хозяйки кассы)

Тётя Зина $\quad$ 5 кл. / час

Тётя Галя $\quad$ 7 кл. / час

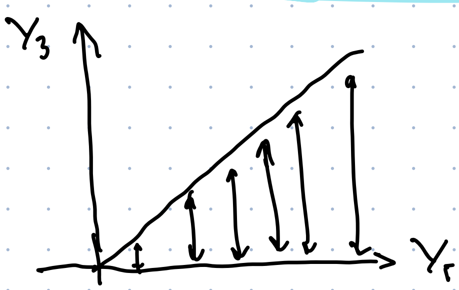
а) Вер. того, что Зина обсл. кл. быстрее Гали?

$Y_з \sim Exp(5) \qquad Y_г \sim Exp(7)$

$\mathbb{P}(Y_з < Y_г) - ?$ $\qquad f(t_з, t_г) = f(t_з) \cdot f(t_г)$

незав. хозяйки

Путь „простушки"

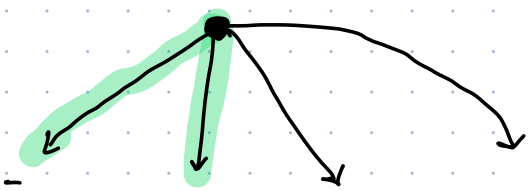


$$\int_0^{+\infty} \int_0^{t_г} 5e^{-5t_з} \cdot 7e^{-7t_г} \, dt_з \, dt_г$$

Путь „хитрюшки" ~ метод первого шага

Δt – маленький

$X_{\Delta t}$ – число происшествий за Δt



$З^- Г^-$	$З^+ Г^-$	$З^- Г^+$	$З^+ Г^+$
$1-(5+7)\Delta t+o(\Delta t)$	$5\Delta t+o(\Delta t)$	$7\Delta t+o(\Delta t)$	$o(\Delta t)$

$З^+ Г^+$ $\quad [5\Delta+o(\Delta)]\cdot[7\Delta+o(\Delta)] =$

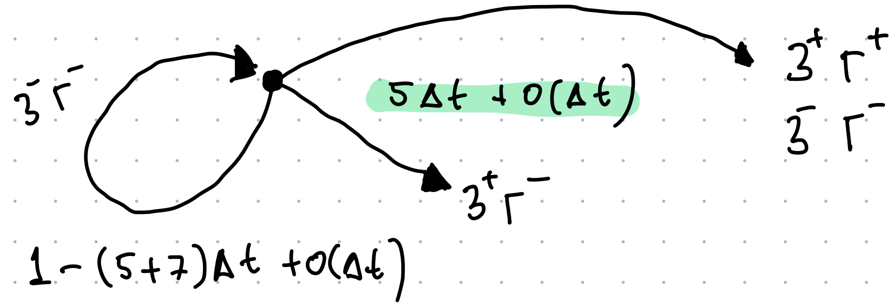
$$= \underbrace{35\Delta^2}_{o(\Delta)} + \underbrace{5\Delta\cdot o(\Delta)}_{o(\Delta)} + \underbrace{7\Delta\cdot o(\Delta)}_{o(\Delta)} + \underbrace{o(\Delta^2)}_{o(\Delta)} = o(\Delta)$$

$З^- Г^+$ $\quad (1-5\Delta+o(\Delta))(7\Delta+o(\Delta)) = 7\Delta$

$З^- Г^-$ $\quad (1-5\Delta+o(\Delta))(1-7\Delta+o(\Delta))$

$$1-5\Delta-7\Delta = 1-12\Delta$$

$$\mathbb{P}(Y_З < Y_Г) = \underbrace{\lambda_З}_{5}\cdot\Delta t + (1-(\lambda_З+\lambda_Г)\Delta t)\cdot\mathbb{P}(Y_З<Y_Г)$$



$$\cancel{P} = \lambda_{\text{з}} \cancel{\Delta} t + \cancel{P} - (\lambda_{\text{з}} + \lambda_{\text{г}}) \cancel{\Delta} t \, P$$

$$P(\lambda_{\text{з}} + \lambda_{\text{г}}) = \lambda_{\text{з}} \qquad \mathbb{P}(Y_{\text{з}} < Y_{\text{г}}) = \frac{\lambda_{\text{з}}}{\lambda_{\text{з}} + \lambda_{\text{г}}} = \frac{5}{5+7}$$

б) Как распределено время обслуж. того клиента, который осв. быстрее?

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \le t) = \mathbb{P}(\min(Y_{\text{з}}, Y_{\text{г}}) \le t) =$$

$$= 1 - (1 - \mathbb{P}(Y_{\text{з}} \le t)) \cdot (1 - \mathbb{P}(Y_{\text{г}} \le t)) =$$

$$= 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda_{\text{з}} \cdot t})) \cdot (e^{-\lambda_{\text{г}} \cdot t}) = 1 - e^{-(\lambda_{\text{з}} + \lambda_{\text{г}}) \cdot t}$$

$$Z = \min(Y_{\text{з}}, Y_{\text{г}}) \sim \text{Exp}(\lambda_{\text{з}} + \lambda_{\text{г}})$$

$$\left.\begin{aligned} X_t^A &\sim \text{Poiss}(\lambda_A) \\ X_t^B &\sim \text{Poiss}(\lambda_B) \end{aligned}\right| \text{ fez.}$$

$$X_t = X_t^A + X_t^B \sim \text{Poiss}(\lambda_A + \lambda_B)$$