① Дискретные сл. вел.

<u>Опр.</u> $X : \Omega \to \mathbb{R}$ сл. вел.

дискретные

$\Omega \to A$

A – счётное

непрерывные

A - конт.

$\exists f_X(t)$ – плотн. р-я

другие

<u>Упражнение</u>

X	0	1
$\mathbb{P}(X=k)$	$1/2$	$1/2$

закон р-я

Y	-1	1
$\mathbb{P}(Y=k)$	$2/3$	$1/3$

а) $Z = X \cdot Y$

б) $W = X + Y$

в) совместное р.-е. (X, Y)

г) Y^2

<u>Манифест:</u>

$X\ Y\ Z$ – сл. вел.

$x\ y\ z$ – значения

$A\ B\ C\ D$ – события

$\mathbb{E}$ – мат. ож.

Var – дисперсия

Cov, Corr

ковариация корреляция

Z	0	-1	1
$\mathbb{P}(Z=k)$	$3/6$	$2/6$	$1/6$

W	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(W=k)$	$2/6$	$2/6$	$1/6$	$1/6$

	X	Y	XY	$X+Y$
$1/2 \cdot 2/3$	0	-1	0	-1
$1/2 \cdot 1/3$	0	1	0	1
$1/2 \cdot 2/3$	1	-1	-1	0
$1/2 \cdot 1/3$	1	1	1	2

Y^2	1
$\mathbb{P}(Y^2=k)$	1

$Y \backslash X$	0	1
-1	$2/6$	$2/6$
1	$1/6$	$1/6$

$$\mathbb{P}(X=0 \cap Y=-1) = \mathbb{P}(X=0)\cdot\mathbb{P}(Y=-1) = 1/2 \cdot 2/3$$

② Бином Ньютона

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3$$

$$(x+y)^n = \overbrace{(x+y)(x+y)(x+y)\cdot\ldots(x+y)}^{n\text{ штук}} =$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k y^{n-k}$$

Св-ва биномиальных коэф.:

а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$

$x=1,\ y=1 \qquad 2^n = \sum_{k=0} C_n^k$

5 стаканов (одинаковые)

5 разных чашек

способов взять 5 из 10 сосудов?

$5 - 1 \cdot C_5^0$

$4 - 1 \cdot C_5^1$

$3 - 1 \cdot C_5^2$

$2 \qquad C_5^3$

$1 \qquad C_5^4$

$0 \qquad C_5^5$

$$\sum_{k=0}^{5} C_5^k = 2^5$$

Интерпр. из теории мн-в:

$|A| = n \qquad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots C_n^n = 2^n$

$|2^A| = 2^n \qquad \varnothing \quad \{1\} \quad \{1,2\}$

б) $x = 1 \quad y = -1$

$x = -1 \quad y = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} = (x+y)^n = 0$$

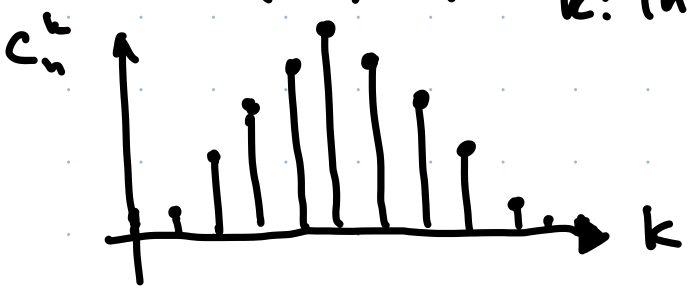
$x = 1 \quad y = -1 \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$

2^{n-1} $\quad$ n – чётное

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^n = 2^{n-1}$$

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}$$

в) $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^{n-k}$



Треуг. Паскаля

г) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

③ Р.-е Бернулли и Биномиальное

Опр.

X	0	1
$\mathbb{P}(X=k)$	$1-p$	p

$X \sim Bern(p)$

$X \sim B(p)$

Упражнение

X	-1	0	1
$\mathbb{P}(X=k)$	$1/4$	$1/4$	$1/2$

а) $\mathbb{E}(X)$

б) $Var(X)$

в) $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Лотерея

Опр.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) \cdot k$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1/4 \text{ тенге}$$

X	-10	10
	$1/2$	$1/2$

Y	-1000	1000
	$1/2$	$1/2$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$$

Опр.

$$Var(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

$$Var(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) \cdot (k - \mathbb{E}(X))^2$$

$$Var(X) = \frac{1}{4} \cdot \left(-1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}(0 - 1/4)^2 + \frac{1}{2}(1 - 1/4)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{4} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 = 3/4$$

$$\mathbb{E}^2(X) = (1/4)^2 = 1/16$$

$$Var(X) = 12/16 - 1/16 = 11/16 \text{ тенге}^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{11}/4 \text{ тенге}$$

Опр. Биномиальное р.-е.

$Y \sim Bin(n, p)$ n - число исп.
p - вер. успеха

(P) $\mathbb{P}(Y=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

○ ○ ● ● ○ ● ○ ○ ● ○

$n=10$
$k=4$

$$C_{10}^{4}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^{10-4}}$$

$\mathbb{E}(Y)$ – ?

Разлагай и властвуй!

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i=k)$	$1-p$	p

$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim iid$

independent
identically
distributed

$\mathbb{E}(X_i) = p$

$\mathbb{E}(X_i^2) = p$

$Var(X_i) = p - p^2 = p(1-p)$

$$\mathbb{E}(a\cdot X + b\cdot Y) = a\cdot\mathbb{E}(X) + b\cdot\mathbb{E}(Y)$$

$$Var(a\cdot X + Y) = a^2 Var(X) + Var(Y) + 2a\cdot cov(X,Y)$$

<u>Опр.</u>

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}\Big[\underbrace{(Y-\mathbb{E}(Y))}_{\text{штуки}}\cdot\underbrace{(X-\mathbb{E}(X))}_{\text{тенге}}\Big] =$$

$$= \mathbb{E}(Y \cdot X) - \mathbb{E}(Y) \cdot \mathbb{E}(X)$$

$$corr(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma^2(X) \cdot \sigma^2(Y)} \in [-1, 1]$$

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) + Cov(X, Y)$$

$$Var(X \cdot Y) = \ldots\ldots$$

$$Var(X) \geq 0$$

$$Var(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = k) = 1$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = n \cdot \mathbb{E}(X_i) = n \cdot p$$

$$Var(Y) = Var(X_1 + \ldots + X_n) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Упражнение

10 коробок

7 карандашей

X - кол-во пустых коробок

$\mathbb{E}(X)$ - ? $Var(X)$ - ?

X	3		8	9
$\mathbb{P}(X=k)$			$C_{10}^{2} \cdot C_{7}^{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{7}$	$\left(\frac{1}{10}\right)^{7} \cdot 10$

Уже стало сложно

$$X = Y_1 + \ldots + Y_{10}$$

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{коробка пустая} \\ 0, & \text{коробка не пустая} \end{cases}$$

Y_i	0	1
$\mathbb{P}(Y_i=k)$	$1-\left(\frac{9}{10}\right)^{7}$	$\left(\frac{9}{10}\right)^{7}$

$$\mathbb{E}(Y_i) = \left(\frac{9}{10}\right)^{7}$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_1 + \ldots + Y_{10}) = \mathbb{E}(Y_1) + \ldots + \mathbb{E}(Y_{10})$$

$$\mathbb{E}(X) = 10 \cdot \mathbb{E}(Y_i) = 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{7} \approx 4.78$$

Y_2 - пуста ли 2 коробка

Y_5 - пуста ли 5 коробка

$Y_2 \uparrow \Rightarrow Y_5 \downarrow \qquad Cov(Y_2, Y_5) < 0$

$Var(Z_1 + Z_2 + Z_3) =$

$= Cov(Z_1 + Z_2 + Z_3, Z_1 + Z_2 + Z_3) =$

$Cov(X+Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$

$= Cov(Z_1, Z_1 + Z_2 + Z_3) +$

$+ Cov(Z_2, \quad \dots \quad) +$

$+ Cov(Z_3, \quad \dots \quad) =$

$= Var(Z_1) + Var(Z_2) + Var(Z_3) +$

$+ 2 \cdot Cov(Z_1, Z_2) + 2 \cdot Cov(Z_1, Z_3) +$

$+ 2\, Cov(Z_2, Z_3)$

$Y_2 \backslash Y_5$	0	1
0	$1 - \dots$	$0.9^7 - 0.8^7$
1	$0.9^7 - 0.8^7$	$(0.8)^7$

$$\mathrm{Cov}(Y_2, Y_5) = \mathbb{E}(Y_2 \cdot Y_5) - \mathbb{E}(Y_2)\cdot\mathbb{E}(Y_5)$$

$$\mathbb{E}(Y_2 \cdot Y_5) = 0\cdot 0\cdot(1\ldots) + 0\cdot 1\cdot(0.9^7 - 0.8^7) + 1\cdot 0\cdot(0.9^7 - 0.8^7) + 1\cdot 1\cdot 0.8^7 = 0.8^7$$

$$\mathrm{Cov}(Y_2, Y_5) = 0.8^7 - 0.9^{14} \approx -0.019$$

$$\mathrm{Var}(Y_2) = \mathbb{E}(Y_2^2) - \mathbb{E}^2(Y_2) = 0.9^7 - 0.9^{14}$$

$$\mathrm{Var}(X) = 10\cdot\mathrm{Var}(Y_2) + C_{10}^2\cdot 2\,\mathrm{Cov}(Y_2, Y_5)$$

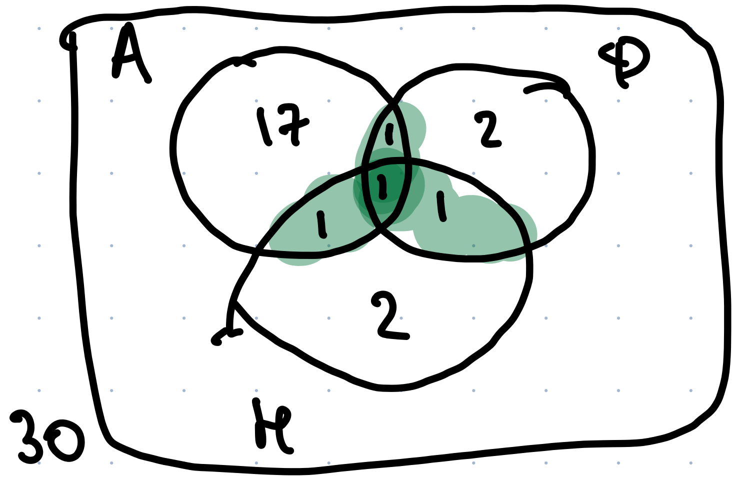
Подставляем цифры => ответ

(4) Формула включений-исключ.

Упражнение

30 - всего	2 англ фр.
20 англ.	2 англ нем.
5 нем.	2 нем фр.
5 фр.	1 все 3

Кто не знает ни 1



$\alpha_a \quad N(\alpha_a)$

$\alpha_ф \quad N(\alpha_ф)$

$\alpha_н \quad N(\alpha_н)$

$N(\alpha_a, \alpha_ф)$

$N(\alpha_a, \alpha_ф, \alpha_н)$

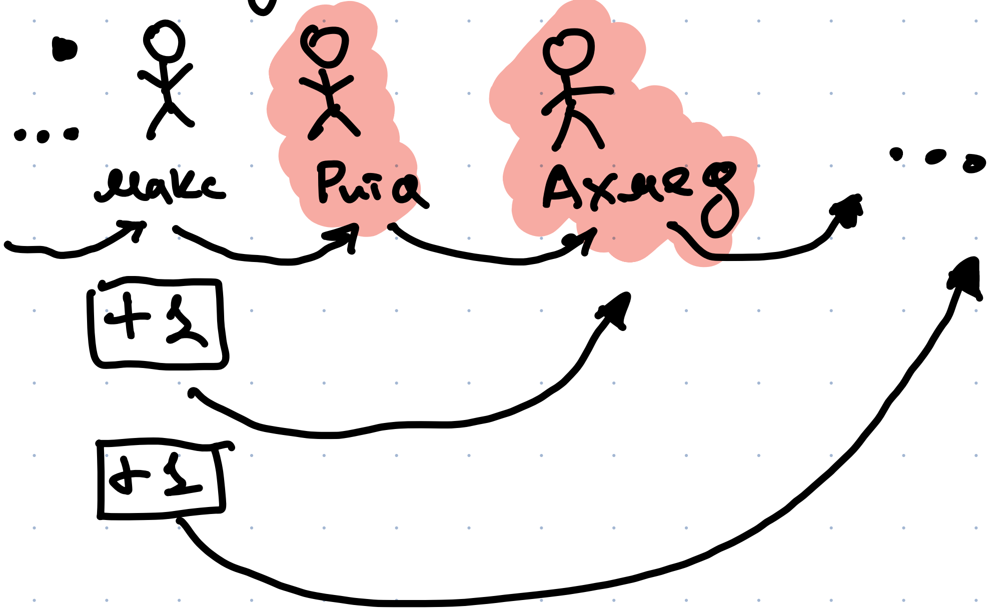
$$N - N(\alpha_a) - N(\alpha_ф) - N(\alpha_н) +$$
$$+ N(\alpha_a \alpha_ф) + N(\alpha_a \alpha_н) + N(\alpha_ф \alpha_н) -$$
$$- N(\alpha_a \alpha_ф \alpha_н)$$

<u>Опр.</u> ф-ла включений-исключений

$$N(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \dots, \alpha_n') = N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_n)$$
$$+ N(\alpha_1 \alpha_2) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) -$$
$$- N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) - \dots - N(\alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n) +$$
$$\dots\dots + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

⑤ Беспорядки (субфакториал) (!n D_n)

$\boxed{\text{Киллер}}$

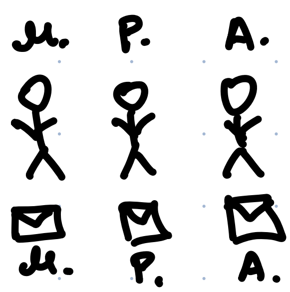
- конверт
- каждый жертва и охотник
- 

n конвертов надо раздать

а) X – число суицидников

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y_1+\dots+Y_n)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

Y_i	0	1
	$1-\frac{1}{n}$	$1/n$



3 суиц.

$\left(\frac{1}{n}\right)^3$

n штук $\qquad n!$ – всего способов

б) Сколько $\exists$ раскладок без счастливчиков?

Это кол-во наз. беспорядком

100 человек

α_i – i-ый человек получил себя

$$\begin{array}{l|l}
N(\alpha_i) = 99! & C_{100}^{1} \\
N(\alpha_1, \alpha_2) = 98! & C_{100}^{2} \\
N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 97! & C_{100}^{3} \\
\dots\dots & \\
N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100}) = 1 & C_{100}^{100}
\end{array}$$

$$\underbrace{\overbrace{\sqcup\ \sqcup\ \sqcup\ \dots\ \sqcup}^{98!}}_{99!}$$

$$N(\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_{100}') = \overset{N}{100!} - 99! \cdot 100 + C_{100}^{2} \cdot 98! - C_{100}^{3} \cdot 97! + C_{100}^{4} \cdot 96! - \dots + (-1)^{100} \cdot C_{100}^{100} \cdot 1 =$$

$$= 100! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{100!}\right) \approx 100! \cdot e^{-1}$$

если n большее

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\mathbb{P}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = \frac{100!\, e^{-1}}{100!} = \frac{1}{e}$$

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1}$$

Св-ва:

а) $$\underbrace{D_{n,k}}_{} = C_n^k \cdot D_{n-k}$$

беспорядки из n эл.
где ровно k в порядку

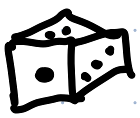
б) $$(D_n - n \cdot D_{n-1}) = -(D_{n-1} - (n-1) D_{n-2})$$

в) $$D_n = (n-1) \cdot (D_{n-1} + D_{n-2})$$

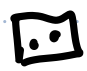
Задание: подоказывать

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{D}_{n,k} = ?$$

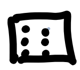
Упражнение

 100 раз

X_1 - число 

X_2 - число 

...

X_6 - число 

$Corr(X_2, X_5) - ?$

$Corr(X_2, X_5) < 0$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 100$$

$$cov(X_2, 100) = \mathbb{E}(100 X_2) - \mathbb{E}(100)\,\mathbb{E}(X_2) =$$
$$= 100\,\mathbb{E}(X_2) - 100\,\mathbb{E}(X_2) = 0$$

$$cov(X_1 + X_2 + \ldots + X_6, X_2) = cov(100, X_2) = 0$$

$$Var(X_2) + 5\,Cov(X_2, X_5) = 0$$

$$1 + 5 \frac{\mathrm{cov}(X_2, X_5)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_2)\,\mathrm{Var}(X_5)}} = 0$$

$$1 + 5\,\mathrm{corr}(X_2, X_5) = 0$$

$$\mathrm{corr}(X_2, X_5) = -1/5$$

$X \quad Y \quad \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$

$$Y = w \cdot X \qquad w = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)} =$$

$$= \mathrm{corr}(X,Y) \cdot \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}$$

$$\sigma(Y) = \sigma(X) = 1$$

$$\tilde{Y} = \frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sigma(Y)} ; \quad \tilde{X} = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

$$\tilde{Y} = w \cdot \tilde{X} \qquad w = \mathrm{corr}(\tilde{X}, \tilde{Y})$$