Lista de Exercícios: Teoria dos Grafos

December 9, 2013

Algumas das questões já foram provadas (em partes) em sala de aula. Recomendo resolver primeiro as questões sem *. As questões com * e com ** são mais difíceis.

1. Quantas arestas tem um K_n?
2. Prove que as componentes de um grafo formam uma partição do conjunto V dos vértices. Isto é, cada elemento de V pertence a exatamente uma componente.
3. Prove que o complemento de um grafo não-conexo é conexo. (Dica: Considere as componentes.)
4. Quantos grafos diferentes existem no conjunto de vértices $V = \{1, 2, ..., n\}$? Apresente todos os grafos em $V = \{1, 2, 3\}$. Identifique grafos isomorfos.
5.* Um grafo é dito asimétrico, se a identidade $v \mapsto v$ é seu único automorfismo. Ache um grafo asimétrico com mais de 1 vértice. (Dica: De fato, não existe tal grafo com menos de 6 vértices! Sendo assim, tente achar um grafo asimétrico com 6 vértices.)
6.* Mostre que um grafo G com n vértices é asimétrico sse $n!$ grafos diferentes no conjunto $V(G)$ são isomorfos a G.
7. Seja $d \in \mathbb{N}$ e $V := \{0, 1\}^d$. Isto é, V é conjunto de todos os d-uplas formados pelos dígitos 0 e 1. Seja G o grafo em V caracterizado pela propriedade que quaisquer dois vértices são adjacentes sse eles se distinguem por exatamente um dígito. G é denominado o cubo de dimensão d. Disenhe os cubos de dimensão $d = 0, 1, 2, 3$. Determine grau médio, número de arestas, diâmetro, cintura e circunferência dos cubos de qualquer dimensão d. (Dicas. Grau médio e número de arestas: Quais são os graus dos vértices? Diâmetro: Como se pode determinar a distância entre dois vértices através das transformações das respectivas d-uplas? Cintura: Existe um circuito de comprimento 3?)
8. Prove: $radG \leq diamG \leq 2radG$, para qualquer grafo G.
9.** Prove que qualquer grafo conexo G com diâmetro k e grau mínimo d tem ao menos approximadamente $kd/3$ vértices. (Dica: Para duas vértices x, y com distância máxima considere as classes de distância D_i a partir de x, definidas como

na aula, e mostre que muitas delas são grandes.)

10. Mostre que qualquer grafo 2-conexo contém um ciclo.

11. Mostre que $\kappa(K_n) = n - 1$, para $n \geq 1$. Mostre que $\lambda(K_n) = n - 1$, para $n \geq 2$.

12.* Determine κ e λ de P_m, C_m, $K_{m,n}$ e do cubo de dimensão n.

13. Prove que $\{A, B\}$ é divisão do grafo G sse $A \cap B$ separa A e B.

14. Prove que um ciclo C num grafo G não contém cordas sse C é um subgrafo induzido em G.

15. Mostre que uma aresta e de um grafo é uma ponte sse e não faz parte de um circuito.

16. Mostre que uma árvore T tem pelo menos $\Delta(T)$ folhas.

17. Seja G um grafo e v um vértice com $d(v) = 1$ (uma folha). Mostre que G é uma árvore sse $G - v$ é uma árvore.

18.* Seja G um grafo conexo e r um vértice de G. Descreva informalmente um simples algoritmo para percorrer todos os vértices do grafo a partir de r sem ciclos. Mostre que o conjunto das arestas gerado por este algoritmo forma uma árvore geradora normal de G.

19.* Prove em detalhe o resultado apresentado em aula: Se T é árvore e G um grafo com $\delta(G) \geq |T| - 1$, então G contém uma cópia de T, isto é, um subgrafo isomorfo a T.

20.* O grafo de Petersen é o seguinte: os vertices são dados por $[1, 2, 3, 4, 5]^2$, isto é, por todos os conjuntos de dois elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Note que são $\binom{5}{2} = 10$ vértices. Dois vértices $\{i, j\}$ e $\{k, l\}$ formam uma aresta sse $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \varnothing$. Desenhe dois grafos isomorfos que representam visualizações “estéticas” do grafo de Petersen.