Simulation : cahier des charges

Malo Leroy – Ulysse Tanguy–Bompard

23 février 2023

1 Objectifs

On cherche à réaliser une sirholation des échanges thermiques entre deux systèmes :

- Un ordinateur (Σ), recevant une puissance entre t et $t + \mathrm{d}t$ δP, initialement à la température T_0
- Le milieu extérieur (Λ), qu'on considèrera être de l'air (sec)

On supposera dans un premier temps que le système Λ est un thermostat à la température T_0 (hypothèse A). Dans un second temps on considèrera que $\{\Sigma + \Lambda\}$ est un système isolé (hypothèse B).

2 Constantes thermodynamiques

2.1 Ordinateur

On considère que l'ordinateur a une masse m et une capacité thermique massique c uniforme, d'où une capacité thermique $C = cm$. Sa conductivité thermique est notée λ. Sa masse volumique (moyenne), supposée uniforme, est notée ρ. La diffusivité thermique est alors $D = \frac{\lambda}{\rho c}$.

Le processeur a une capacité thermique C_p, ainsi la capacité thermique de la carcasse est $C - C_p$.

2.2 Air

On notera les constantes thermodynamiques relatives à l'air avec un indice a. On prend pour conductivité thermique de l'air à pression consante $P = 1$ bar, avec T la température de l'air exprimée en degrés celsius[1] et λ_a en mW m^{-1} K^{-1}.

$$\lambda_a = -0.000044075614398888 \times T^2 + 0.0766069577308689 * T + 24.3560822452597$$

1. Voir WG Kannuluik and EH Carman, *The Temperature Dependence of the Thermal Conductivity of Air*, DOI CH9510305

```
def lambda_air(T): # W.m^-1.K^-1, a 1 bar
    vA =celsius(T)
    l = -0.000044075614398888*vA*vA+0.0766069577308689*vA+24.3560822452597
    return l /1000
```

La loi des gaz parfaits donne pour l'air, lorsque T est exprimé en kelvins

$$\rho_a = \frac{PM}{RT} = \frac{346384}{T}$$

```
def rho_a(T):
    return 346384 /T
```

Cela permet de définir la diffusivité de l'air $D_a = \frac{\lambda_a}{\rho_a c_a}$

3 Calculs généraux

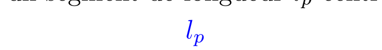
L'équation de la chaleur obtenue est, au point M de l'espace et à l'instant t

$$\rho(M)c(M)\frac{\partial T}{\partial t}(M,t) = \lambda(M)\Delta T(M,t)$$

4 Modélisations

4.1 Modèle unidimentionnel

On considère que l'espace de travail est un axe (Ox), en fait un cylindre de section S, et que l'ordinateur est représenté par un segment de longueur l (toutes les grandeurs ne dépendent de y ou z). On considère que la source de puissance est un segment de longueur l_p centré par rapport au segment de longueur l.



La température dépend de l'espace via la variable x et du temps via la variable t, ainsi on la représente par la fonction notée $T(x,t)$, ou par la matrice `T[i][j]`, où `i` et `j` sont des entiers lorsque l'espace et le temps sont discrétisés.

L'équation bien connue obtenue est, en faisant apparaître les dépendances aux variables x et t

$$\rho(x)c(x)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + P_v(x)$$

Les fonctions ρ, c et λ étant des fonctions en escalier (toutes de mêmes paliers), on peut raisonnablement écrire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + P_c$$

où $P_c = P_v/(\rho c)$ s'exprime en K s^{-1}. Détaillons la valeur de $D(x)$ et celle de $P_c(x)$ dans chacun des trois milieux.

— Source : $D(x) = D$ et $P_c(x) = P/C_p$ où $C_p = l_p S \rho c$
— Carcasse : $D(x) = D$ et $P_c(x) = 0$
— Air : $D(x) = D_a$ et $P_c(x) = 0$

Dans un modèle discret où le pas de temps est t_e et le pas d'espace est x_e, cette équation se réécrit

$$T(x, t+t_e) = T(x,t) + \frac{t_e}{{x_e}^2} D(x) \left(T(x+x_e, t) - T(x,t) + T(x-x_e, t)\right) + P_c(x) t_e$$

```
T[xi, ti+1] =T[xi, ti] +(t_e /(x_e**2)) *D(xi)
    (T[xi+1, ti] -T[xi, ti] +T[xi-1, ti])
    + P_c(xi) *t_e
```

4.1.1 Hypothèse A

Puisque les bords extérieurs de l'ordinateur sont à la même température que l'air, on se limite à l'étude d'un espace de longueur l : les positions s'étalent entre $x = 0$ et $x = l$.

L'hypothèse A se traduit ainsi par les conditions aux limites $\forall t$, $T(x = 0, t) = T(x = l, t) = T_0$, c'est-à-dire $\forall$ `ti`, `T[0, ti] = T[-1, ti] = T0`.

4.1.2 Hypothèse B

Annexe : notations

— Un nom de variable, un nom de fonction, n'a pas de majuscule. On ne peut pas nommer une variable ou une fonction `lambda`.
— Si on a besoin de donner un nom long à une variable, ou à une fonction, on met des « _ » par exemple `grande_chaise_rouge`
— Il n'y a pas d'espace autour de parenthèses lors d'un appel ou d'une définition de fonction
— Autour d'un égal de définition (`=`) ou d'un signe de relation (`==`, `<=`, `<`, etc.) il y a des espaces, un avant et un après
— Dans du code comme dans un LaTeX, après une virgule il y a un espace