Simulation : cahier des charges

Malo Leroy – Ulysse Tanguy–Bompard

28 mai 2023

1 Objectifs

On cherche à réaliser une simulation des échanges thermiques entre deux systèmes :

— Un ordinateur (Σ), recevant une puissance P, initialement à la température T_0

— Le milieu extérieur (Λ), qu'on considèrera être de l'air (sec)

On supposera dans un premier temps que le système Λ est un thermostat à la température T_0 (hypothèse A). Dans un second temps on considèrera que $\{\Sigma + \Lambda\}$ est un système isolé (hypothèse B).

2 Constantes thermodynamiques

2.1 Ordinateur

On considère que l'ordinateur a une masse m et une capacité thermique massique c uniforme, d'où une capacité thermique $C = cm$. Sa conductivité thermique est notée λ. Sa masse volumique (moyenne), supposée uniforme, est notée ρ. La diffusivité thermique est alors $D = \frac{\lambda}{\rho c}$.

Le processeur a une capacité thermique C_p, ainsi la capacité thermique de la carcasse est $C - C_p$.

2.2 Air

On notera les constantes thermodynamiques relatives à l'air avec un indice a. On prend pour conductivité thermique de l'air à pression consante $P = 1$ bar, avec T la température de l'air exprimée en degrés celsius [1] et λ_a en mW m^{-1} K^{-1}

$$\lambda_a = -0.000044075614398888 \times T^2 + 0.0766069577308689 * T + 24.3560822452597$$

1. Voir WG Kannuluik and EH Carman, *The Temperature Dependence of the Thermal Conductivity of Air*, DOI CH9510305

```python
def lambda_air(T): # W.m^-1.K^-1, a 1 bar
    vA =celsius(T)
    l = -0.000044075614398888*vA*vA+0.0766069577308689*vA+24.3560822452597
    return l /1000
```

La loi des gaz parfaits donne pour l'air, lorsque T est exprimé en kelvins

$$\rho_a = \frac{PM}{RT} = \frac{346384}{T}$$

```python
def rho_a(T):
    return 346384 /T
```

Cela permet de définir la diffusivité de l'air $D_a = \frac{\lambda_a}{\rho_a c_a}$

3 Calculs généraux

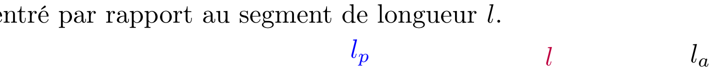
L'équation de la chaleur obtenue est, au point M de l'espace et à l'instant t

$$\rho(M)c(M)\frac{\partial T}{\partial t}(M,t) = \lambda(M)\Delta T(M,t)$$

4 Modélisations

4.1 Modèle unidimentionnel

On considère que l'espace de travail est un axe (Ox), en fait un cylindre de section S et de longueur $l_a = 1$ m, et que l'ordinateur est représenté par un segment de longueur $l = 10$ cm (toutes les grandeurs ne dépendent de y ou z). On considère que la source de puissance est un segment de longueur $l_p = 1$ cm centré par rapport au segment de longueur l.



La température dépend de l'espace via la variable x et du temps via la variable t, ainsi on la représente par la fonction notée $T(x,t)$, ou par la matrice `T[i][j]`, où `i` et `j` sont des entiers lorsque l'espace et le temps sont discrétisés.

L'équation bien connue obtenue est, en faisant apparaître les dépendances aux variables x et t

$$\rho(x)c(x)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + P_v(x)$$

Les fonctions ρ, c et λ étant des fonctions en escalier (toutes de mêmes paliers), on peut raisonnablement écrire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + P_c$$

où $P_c = P_v/(\rho c)$ s'exprime en K s^{-1}. Détaillons la valeur de $D(x)$ et celle de $P_c(x)$ dans chacun des trois milieux.

— Source : $D(x) = D$ et $P_c(x) = P/C_p$ où $C_p = l_p S \rho c$
— Carcasse : $D(x) = D$ et $P_c(x) = 0$
— Air : $D(x) = D_a$ et $P_c(x) = 0$

Dans un modèle discret où le pas de temps est t_e et le pas d'espace est x_e, cette équation se réécrit

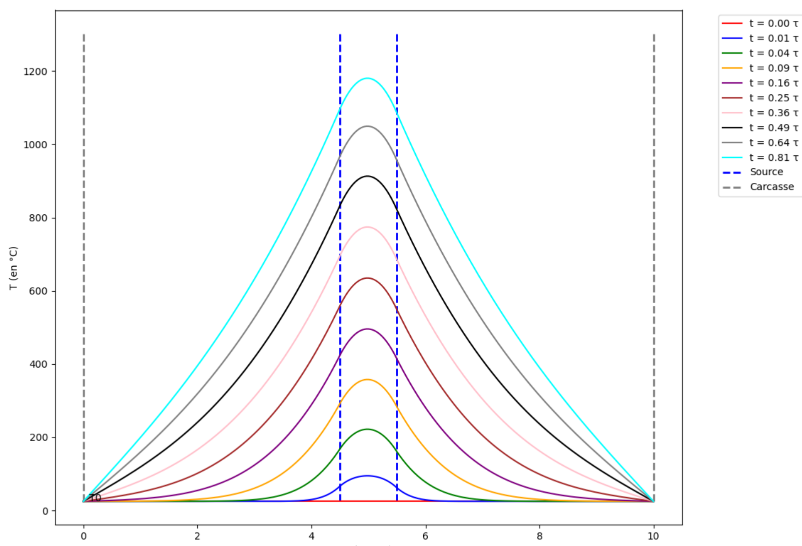
$$T(x, t+t_e) = T(x,t) + \frac{t_e}{{x_e}^2} D(x) \left(T(x+x_e, t) - T(x,t) + T(x-x_e, t)\right) + P_c(x) t_e$$

```
T[xi, ti+1] =T[xi, ti] +(t_e /(x_e**2)) *D(xi)
    (T[xi+1, ti] -T[xi, ti] +T[xi-1, ti])
    + P_c(xi) *t_e
```

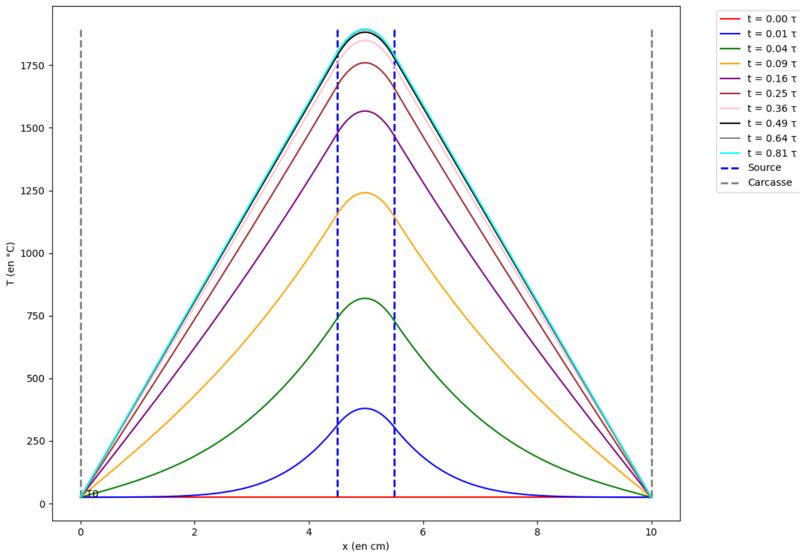
4.1.1 Hypothèse A

Puisque les bords extérieurs de l'ordinateur sont à la même température que l'air, on se limite à l'étude d'un espace de longueur l : les positions s'étalent entre $x = 0$ et $x = l$.

L'hypothèse A se traduit ainsi par les conditions aux limites $\forall t$, $T(x = 0, t) = T(x = l, t) = T_0$, c'est-à-dire $\forall$ `ti`, `T[0, ti] = T[-1, ti] = T0`.



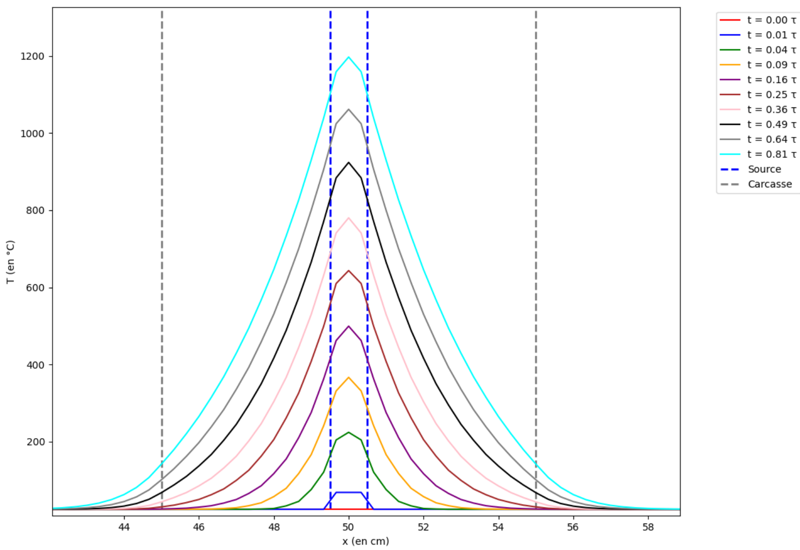
Ci-dessus se trouve une visualisation des résultats sous l'hypothèse d'une puissance constante $P = 500$ mW. Le temps d'échelle vaut $\tau = 11$ s. La figure ci-dessous montre pour un temps $\tau = 2$ min les résultats obtenus en régime permanent.



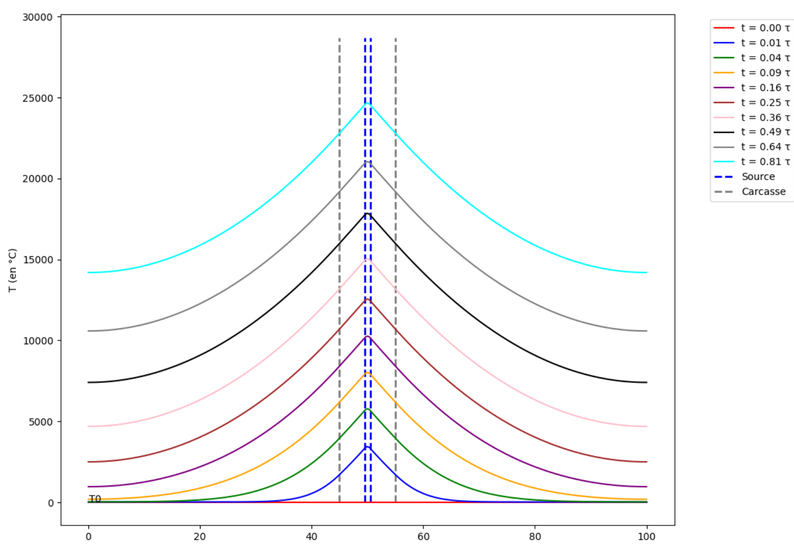
4.1.2 Hypothèse B

On considère plus, dans le cadre de cette hypothèse que l'espace d'observation est limité à l'ordinateur : celui-ci est entouré d'air. L'extension totale de l'espace est alors de l_a (air et ordinateur compris).

La condition aux limites est cette fois dynamique : on impose une « continuité » de la température aux extrémités de l'espace. Physiquement, cela correspond à un modèle où le système (air compris) est placé dans une enceinte parfaitement calorifugée. Pour tout `ti` tel que `T[:, ti]` ait déjà été calculé, on impose alors `T[0, ti+1] = T[1, ti+1]` et `T[-1, ti+1] = T[-2, ti+1]`.



Ci-dessus se trouve une visualisation des résultats sous l'hypothèse d'une puissance constante $P = 500$ mW. Pour $\tau = 11$ s, on a un résultat équivalent à celui obtenu dans le cadre de l'hypothèse A en raison de la faible valeur de τ. Ce n'est plus le cas pour des temps d'échelle plus grands, ci-dessus avec $\tau = 3$ h, qui permettent d'observer le comportement du système en régime permanent.



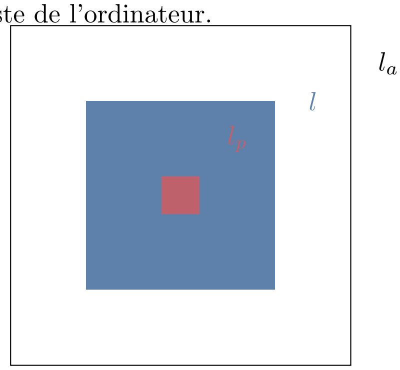
4.1.3 Hypothèse C

Dans le cadre de l'expérience du TP-3, séance 2, on souhaite déterminer la valeur de la conductivité λ de l'ordinateur à partir de deux relevés de température en fonction du temps.

On trouve que

4.2 Modèle bidimensionnel

L'espace est un plan (Oxy), fini et d'extension totale un carré de côté $l_a = 1$ m, si besoin considéré d'épaisseur $e = 1$ cm, mais les grandeurs en jeu ne dépendent spatialement que de x et y. L'ordinateur est représenté par un carré de côté $l = 10$ cm, et le processeur par un carré de côté $l_p = 1$ cm centré sur le reste de l'ordinateur.



L'équation obtenue est, par le même travail que précédemment

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D(x, y)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + P_c$$

À nouveau, une formule utilisant le slicing permet d'écrire :

— Le terme de dérivée seconde par rapport à x est

```
T[1:Nx, ti+1] =A *(T[:Nx-1, ti] +T[2:, ti]) +B *T[1:Nx, ti] +Te *P_c
```

5 Calcul d'une conductivité

On veut calculer la conductivité efficace moyenne d'un ordinateur à partir de relevés expérimentaux. On a mesuré la température $T(t)$ sur le processeur de l'ordinateur en fonction du temps, alors que la face inférieure de l'ordinateur était en contact thermique (supposé parfait) avec une plaque chauffante à la température $T_p(t)$.

On modélise la situation de manière unidimentionnelle, où l'axe de travail est l'axe vertical (Ox). Cet axe est composé de trois parties, qui sont chacune des pavés droits de surface S commune et d'épaisseur variable, de bas en haut

1. L'ordinateur, d'épaisseur 1 cm

2. L'air, d'épaisseur α restant encore à discuter

On impose la condition limite qu'en $x = 0$ la température vaut $T_c(t)$, ce qui traduit la perfection du contact plaque-ordinateur. On cherche à choisir intelligemment λ et α de manière à obtenir une température théorique $T_h(t)$ au niveau du processeur qui soit « proche » de la température expérimentale $T(t)$. L'équation de la chaleur est la même que précédemment.

Après mise en place de la simulation, on trouve par tâtonnements les valeurs $\alpha = 45$ cm et $\lambda = 2{,}13\ 10^{-4}$ W m^{-1} K^{-1}.

Annexe : notations

— Un nom de variable, un nom de fonction, n'a pas de majuscule. On ne peut pas nommer une variable ou une fonction `lambda`.

— Si on a besoin de donner un nom long à une variable, ou à une fonction, on met des « _ » par exemple `grande_chaise_rouge`.

— Il n'y a pas d'espace autour de parenthèses lors d'un appel ou d'une définition de fonction.

— Autour d'un égal de définition (`=`) ou d'un signe de relation (`==`, `<=`, `<`, etc.) il y a des espaces, un avant et un après.

— Dans du code comme dans un LaTeX, après une virgule il y a un espace.