装订线 任课教师: 学号: 姓名: 班级:

西 安 电 子 科 技 大 学

考试时间 __120__ 分钟

试　　题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

1.考试形式：闭卷☑　开卷□　；2.本试卷共八道大题，满分 100 分；

3.考试日期：　2023 年 6 月 12 日；(答题内容请写在装订线外)

一、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=n$，则有（　　）。

A. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆　　　　**B.** $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵

C. $\boldsymbol{B}$ 是半正定矩阵　　　**D.** $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 可能有非零解

2. 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(2\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_2,4\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_5)$，其中 $\boldsymbol{A}_i$ 均为 4 维列向量($i=1,\cdots,5$)，若 $|\boldsymbol{A}|=4$, $|\boldsymbol{B}|=1$，则 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=$（　　）。

A. -5　　**B.** 3　　**C.** 4　　**D.** 8

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则下列说法中正确的是（　　）。

A. 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵

B. 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量两两正交

C. 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 必有 n 个不同特征值

D. 若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

4. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则（　　）。

A. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 一定可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

B. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 一定可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示

C. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 一定可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

D. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 一定可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

5. 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列选项错误的是（　　）。

A. $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵

B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值与特征向量

C. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

D. $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E})^{-1}=$____________。

2. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆且每行元素之和为 2，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和为________。

3. 若 $V=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T\in\boldsymbol{R}^3$ 且 $x_1+x_2+x_3=a\}$ 是向量空间，则 $a=$____。

4. 设 3 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^*，且 $|A|=\dfrac{1}{2}$，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$_____。

5. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2，1，-2，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$_____。

三、（10 分）已知行列式的生成方式如下：

$$D_2=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix},\ D_4=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\\3&4&1&2\\2&3&4&1\end{vmatrix},\cdots$$

写出 D_n 并计算其值。

四、(10 分)设 4 阶矩阵 A 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+6\boldsymbol{E}$,其伴随矩阵 $A^*=diag\{1,1,1,8\}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 。

五、（12 分） 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,a-3,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,-2,a)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(0,1,b,-1)^T$ ，问 a, b 为何值时，

1. $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示且表示法唯一；

2. $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示且表示法不唯一，写出所有的表示方法；

3. $\boldsymbol{\beta}$ 不可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示。

六、（15 分） 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+kx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 **2**，

1. 求 k 及二次型矩阵的特征值；

2. 利用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准型，写出所用正交变换并指明 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面。

七、证明题（7 分，注意：平行班与各类实验班题目不同，不要选错）

1.（平行班必做）如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，证明 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A})=n$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵，R 表示矩阵的秩。

2.（实验班必做）设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零实三维单位列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=0$，证明矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$ 相似于对角矩阵 $\Lambda=\boldsymbol{diag}\{1,1,0\}$。

八、（6 分）某地有一个煤矿、一座发电厂和一条铁路，经过核算成本：每生产 1 万元的煤，需要消耗 0.25 万元的电，为了把这 1 万元的煤运出去，需要 0.15 万元的运输费，每生产 1 万元的电需要 0.65 万元的煤做燃料，为了运行电厂设备，需要消耗 0.05 万元的电，还需要 0.05 万元运输费，作为铁路局，每提供 1 万元的运输，需要 0.55 万元的煤，辅助设备要消耗 0.1 万元的电，煤矿、电厂和铁路局相互消耗关系矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 如下：

$$\begin{array}{c} \\ \text{煤} \\ \text{电} \\ \text{运输} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{煤矿} & \text{电厂} & \text{铁路局} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.1 \\ 0.15 & 0.05 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

现在煤矿接到外地 5 万元的订货，电厂有 10 万元的外地需求，问煤矿（产能设为 x_1）、电厂（产能设为 $\boldsymbol{x}_2$）与铁路局（产能设为 $\boldsymbol{x}_3$）各生产多少才能满足外地的需求？（建立模型，不需要精确求解，用字母表示最终结果即可）