装 订 线

任课教师：

装 订 线

学号：

姓名：

班级：

装 订 线

西 安 电 子 科 技 大 学

考试时间 120 分钟

试　　题　　A

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

1.考试形式闭卷☑ 开卷□ ；2.本试卷共八大题，满分 100 分　　2022.6.24

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.设 **A**，**B**，**C** 均为 n 阶矩阵，**E** 是 n 阶单位矩阵，且 **ABC=E**，则必有（　）

(A) $\mathbf{ACB}=\mathbf{E}$；　（B）$\mathbf{BAC}=\mathbf{E}$；　(C) $\mathbf{CBA}=\mathbf{E}$；　(D) $\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{CA}$.

2. n维行向量$\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{2},0,\ldots,0,\frac{1}{2}\right)$,$\mathbf{A}=\mathbf{E}-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$,$\mathbf{B}=\mathbf{E}+2\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$,则$\mathbf{AB}$=(　　).

(A) **O**；　(B) **E**；　(C) **−E**；　(D) **5E.**

3.设矩阵 **A**，**B** 都是 n 阶非零矩阵，且 **BA=O**，则以下结论正确的是（　　）

（A）**A** 的行向量组线性无关；　(B) **B** 的行向量组线性无关；

（C）**A** 的秩与 **B** 的秩之和等于 n；　(D) **A** 的列向量是方程组 **Bx=0** 的解.

4.设矩阵 **A**，**B** 均为 n 阶实对称矩阵，那么以下命题错误的是（　　）

（A）若 **A** 与 **B** 相似，则 **A** 与 **B** 有相同的特征值；

（B）若 **A** 与 **B** 相似，则 **A** 与 **B** 等价；

（C）若 **A** 与 **B** 相似，则 **A** 与 **B** 合同；

（D）若 **A** 与 **B** 相似，则 **A** 与 **B** 有相同的特征向量.

5.设齐次线性方程组 **Ax=0** 有非零解，则（　　）

（A）**A** 的列向量组线性无关；　（B）**A** 的列向量组线性相关；

（C）**A** 的行向量组线性无关；　（D）**A** 的行向量组线性相关.

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1.已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$，将 **A** 的第 2 列的 3 倍加到第 1 列得到 B，则$|\mathbf{B}|$=_____.

2.设 **A** 为 3 阶方阵，且$|\mathbf{A}|=\frac{1}{2}$，$\mathbf{A}^*$是 **A** 的伴随矩阵，则$\left|\mathbf{A}^*+(2\mathbf{A})^{-1}\right|$=________.

3.设矩阵 $\mathbf{B}$ 为 4×3 矩阵，且 $\mathbf{B}$ 的秩为 2，已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & -2\\ 1 & 4 & 1 & 4\\ 1 & 8 & -1 & 8\end{bmatrix}$，则 r（$\mathbf{AB}$）=______.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,2,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\beta}_3=(-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 都是 $\mathbf{R}^3$ 的基，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵是___________.

5.已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$，则该二次型的正惯性指数为______.

三、（15 分）当 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}2x_1+(a+4)x_2+10x_3=4\\ x_1+(a+2)x_2+7x_3=3\\ 3x_1+(a+6)x_2+(a^2+a+13)x_3=a+6\end{cases}$

有唯一解、无解、无穷多解？有无穷多解时求其通解.

四、（10 分）设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，满足 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}=0$，求 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}$，并找出 $\mathbf{A}$ 的特征值.

五、（10 分）已知下列向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,2,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(t,0,1,2)^{\mathrm{T}}$，

（1）若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，求 t 的值；

（2）若 t=3，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组.

六、（15 分）用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}-2a\,x_1x_3$（ $a>0$ ）

为标准形　$\mathrm{y}_1^{\ 2}+\mathrm{y}_2^{\ 2}+\mathrm{b}\mathrm{y}_3^{\ 2}$，求参数 a 和 b，并写出正交变换.

七、（7 分）证明题

（1）（普通班必做） 设 **A** 为 n 阶正交矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 均为 n 维列向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交的充要条件是 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交。

（2）（实验班必做） 设 **A**，**B** 均为 **n** 阶正定矩阵，k，u 是正实数，证明：矩阵 $(\mathrm{kA}+\mathrm{uB})^{-1}$ 为正定矩阵.

八、（8 分）在钢板热传导的研究中，常用节点温度来描述钢板温度的分布。假设下图中钢板已经达到稳态温度分布，上下左右四个边界的温度值，$T_1,T_2,T_{3,}T_4$ 表示钢板内部四个节点 1，2，3，4 的温度。若忽略垂直于该截面方向的热交换，那么内部某节点温度值近似等于与它相邻四个节点温度的算术平均值，如 $T_1=(10+20+T_2+T_3)/4$。

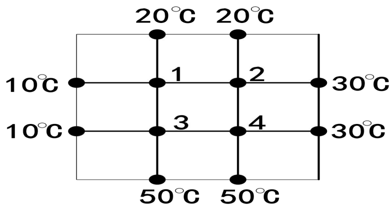

图 钢板的节点温度分布

（1）试建立计算钢板 4 个节点温度值 $T_1,T_2,T_{3,}T_4$ 的线性方程组 **Ax=b**；

（2）在 MATLAB 命令窗口输入：

A=____

b=________________________

x=________________

2021 级线性代数试卷 A 参考答案及评分标准 2022.6.24

一、1. D; 2. B; 3.D; 4.D; 5. B

二、1. -3; 2. 2; 3. 2; 4. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; 5. 1

三、解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix} 2 & a+4 & 10 & 4 \\ 1 & a+2 & 7 & 3 \\ 3 & a+6 & a^2+a+13 & a+6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a & 4 & 2 \\ 0 & 0 & a(a+1) & a+1 \end{bmatrix}$$

...... 6 分

1）当 $a \neq 0$ 且 $a \neq -1$ 时，$\mathrm{R}(\mathbf{A})=\mathrm{R}([\mathbf{A},\mathbf{b}])=3$，有唯一解； ...... 8 分

2）当 $a=0$ 时，$\mathrm{R}(\mathbf{A})\neq\mathrm{R}([\mathbf{A},\mathbf{b}])$，无解； ...... 10 分

3）当 $a=-1$ 时，$\mathrm{R}(\mathbf{A})=\mathrm{R}([\mathbf{A},\mathbf{b}])=2<3$， 无穷多解 ......12 分

增广矩阵的行最简形为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则通解为 $k\begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$，$k$ 为任意数 ……15 分

四、解：$\mathrm{A}^2+\mathrm{A}-2\mathrm{E}=-2\mathrm{E} \Leftrightarrow (\mathrm{A}+2\mathrm{E})(\mathrm{A}-\mathrm{E})=-2\mathrm{E}$ ……2 分

$$(\mathbf{A}+2\mathbf{E})\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{E})\right)=\mathbf{E}$$ ……4 分

$$(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)(\mathbf{A}-\mathbf{E})$$ ……5 分

因为 $\mathrm{A}^2+\mathrm{A}=\mathrm{O}$，设 λ 为 A 的任一特征值，α 为对应的特征向量，则有

$\mathrm{A}\alpha=\lambda\alpha$, $(\mathrm{A}^2+\mathrm{A})\alpha=\lambda^2\alpha+\lambda\alpha=(\lambda^2+\lambda)\alpha=0$, 又 $\alpha\neq 0$, ...8分

所以 A 的特征值为 $\lambda=0$，或 $\lambda=-1$ 10分

五、解：（1）令 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\xrightarrow{\text{初等行变等}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ......4 分

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以 t= -1。 ......5 分

（2）当 t=3 时，显然 r（$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$）=3, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大线性无关组

就是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$。 . ...10 分

六、解：

由公式 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=tr(\mathbf{A})$，得 $-1+1+b=1+1+1$，$\lambda_3=b=3$；

由公式 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\mathbf{A}|$，得 $a=\pm 2$，因为 $a>0$，所以 $a=2$ **……2 分**

二次型矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

得矩阵 **A** 的特征值为：$\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=3$ **……6 分**

当 $\lambda_1=-1$ 时，解线性方程组 $(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 得正交特征向量：$\mathrm{p}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$

当 $\lambda_2=1$ 时，解线性方程组 $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 得特征向量：$\mathrm{p}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$

当 $\lambda_3=3$ 时，解线性方程组 $(\mathbf{A}-3\mathbf{E})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 得正交特征向量：$\mathrm{p}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$ **…12 分**

对 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ 单位化：$\mathbf{q}_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{q}_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，

令 $\mathbf{Q}=(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$，则所用正交变换为 $x=\mathrm{Q}y$ **……15 分**

七、（1）证明：因为 A 为 n 阶正交矩阵，则有 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{E}$ **……2 分**

又因 $(\mathrm{A}\,\alpha_1)^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\,\alpha_2)=\alpha_1{}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\,\alpha_2=\alpha_1{}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}\,\alpha_2=(\mathrm{A}\,\alpha_1)^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\,\alpha_2)$,

所以 $(\mathrm{A}\,\alpha_1)^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}\,\alpha_2)=0$ 的充要条件是 $\alpha_1{}^{\mathrm{T}}\alpha_2=0$ 7分

（2）证明：由 A,B 为正定矩阵可知, A 的任一特征值 a 与 B 的任一特征值均大于 0 ……2 分

从而 $(\mathrm{kA}+\mathrm{uB})^{-1}$ **的任一特征值** $\dfrac{1}{\mathrm{ka}+\mathrm{ub}}$ **大于 0, ……5 分**

所以 $(\mathrm{kA}+\mathrm{uB})^{-1}$ **为正定矩阵. ……7 分**

八、$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$，$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}30\\50\\60\\80\end{bmatrix}$ **……5 分**

若写出 4 个方程得 2 分；若只写出 A 得 4 分.

A=[4,-1,-1,0; -1,4,0,-1; -1,0,4,-1; 0,-1,-1,4]; ……6 分

b=[30; 50; 60; 80]; ……7 分

x=A^-1*b ……8 分

或 x=inv(A)*b 或 x=A\b 或 rref([A,b])的最后一列