试题（A）参考答案评分标准

一、选择题(每小题 4 分，共 20 分)

1.A

2.B

3.A

4.C

5.C

二、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1. $\frac{7}{8}$

2. $\frac{9}{64}$

3. $\frac{1}{2}$

4. $\frac{2(n-1)}{n}\sigma^2$

5. $(5.616, 6.384)$

三、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

1.**解** 设 X 表示电源电压，B_1 表示事件“电源电压不超过 200V”，B_2 表示事件“电源电压在 200～240V”，B_3 表示事件“电源电压超过 240V”，A 表示事件“电子元件损坏”，则 $X \sim N(200, 25^2)$，$B_1 = \{X \le 200\}, B_2 = \{200 < X \le 240\}, B_3 = \{X > 240\}$，且

$$P(B_1) = P(X \le 200) = \Phi\left(\frac{200-220}{25}\right) = \Phi(-0.8) = 1-\Phi(0.8) = 0.212$$

$$P(B_2) = P(200 < X \le 240) = \Phi\left(\frac{240-220}{25}\right) - \Phi\left(\frac{200-220}{25}\right)$$

$$=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=2\Phi(0.8)-1=0.576$$

$$P(B_3)=P(X>240)=1-P(X\le 240)=1-\Phi\left(\frac{240-220}{25}\right)=1-\Phi(0.8)=0.212$$

$$P(A|B_1)=0.1, P(A|B_2)=0.001, P(A|B_3)=0.2 \text{.............. 3 分}$$

（1）由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.212\times 0.1+0.576\times 0.001+0.212\times 0.2$$

$$=0.0642 \text{.. 4 分}$$

（2）由 Bayes 公式，得

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.576\times 0.001}{0.0642}=0.009 \text{.......... 3 分}$$

2.**解**（1）由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，得$1=\int_0^{2\sqrt{3}}3Cxdx=18C$，故$C=\frac{1}{18}$......... 2 分

（2）由（1）知 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x, & 0<x<2\sqrt{3}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，由于 X 是连续型随机变量，因此所求的概率为 $P\left(\frac{1}{2}<X<2\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{6}xdx=\frac{5}{16}$......... 2 分

（3）当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；当 $0\le x<2\sqrt{3}$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x\frac{1}{6}tdt=\frac{x^2}{12}$；

当 $x\ge 2\sqrt{3}$ 时，$F(x)=1$，即 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{12}x^2, & 0\le x<2\sqrt{3}\\ 1, & x\ge 2\sqrt{3}\end{cases} \text{........................ 3 分}$$

（4）当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $0\le y<12$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y=P(X^2\le y)=P(X^2<0)+P(0\le X^2\le y)$$

$$=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{6}xdx=\frac{y}{12}$$

当 $y\ge 12$ 时，$F_Y(y)=1$，故 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{y}{12}, & 0\le y<12\\ 1, & x\ge 12\end{cases}$$ .... 3 分

3.解（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x}dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ .... 2 分

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}dx=1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ .... 2 分

（2）方法一　先求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$.当 $\frac{z}{2}<0$，即 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\le\frac{z}{2}<1$，即 $0\le z<2$ 时，

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X-Y\le z)=\iint_{2x-y\le z}f(x,y)dxdy=z-\frac{z^2}{4}$$

当 $\frac{z}{2}\ge 1$，即 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$，即 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ z-\dfrac{z^2}{4}, & 0\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

再求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2},0<z<2\\0, \qquad 其它\end{cases}\text{......................} 4分$$

方法二 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)dx$

由$\begin{cases}0<x<1\\0<2x-z<2x\end{cases}$，得$0<z<2x$，从而$0<z<2$.故当$0<z<2$时，$f_Z(z)>0$，

在其他点，$f_Z(z)=0$.

再由$\begin{cases}0<x<1\\0<2x-z<2x\end{cases}$，得$\begin{cases}0<x<1\\\dfrac{z}{2}<x\end{cases}$，即$\dfrac{z}{2}<x<1$，从而$Z$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_{\frac{z}{2}}^{1}1dx=1-\dfrac{z}{2},\ 0<z<2\\0, \qquad 其他\end{cases}\text{................} 4分$$

（3）$P(Y\le\dfrac{1}{2}\Big|X\le\dfrac{1}{2})=\dfrac{P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2})}{P(X\le\frac{1}{2})}=\dfrac{\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}}dx}{\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx}=\dfrac{3}{4}$............ 2分

4.**解**（1）X的可能取值为0，1，Y的可能取值为0，1，2

$$P(X=0,Y=0)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}，\ P(X=0,Y=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{2}{5}$$

$$P(X=0,Y=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}，\ P(X=1,Y=0)=\frac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=1,Y=1)=\frac{C_1^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15}，\ P(X=1,Y=2)=0$$

即(X,Y)的联合分布律为.. 5分

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

（2）由 (X,Y) 的联合分布律可得，X,Y,XY 的分布律分别为

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

XY	0	1
P	$\frac{13}{15}$	$\frac{2}{15}$

$EX=\frac{1}{3}$，$DX=\frac{2}{9}$，$EY=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$，$EXY=\frac{2}{15}$

$EY=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{4}{5}$，　$EY=EY^2-(EY)^2=\frac{4}{5}-\frac{4}{9}=\frac{16}{45}$

从而 $\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{45}$，故 X 与 Y 的相关系数为

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{-\frac{4}{45}}{\sqrt{\frac{16}{45}}\sqrt{\frac{2}{9}}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$ ………………… 5分

5.**解**（1）$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{2}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$，由矩估计法，得 $\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}=\bar{X}$，

解之得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1=\frac{4\bar{X}^2}{\pi}$ ……………………………………… 3分

（2）对于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一组样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

(i)似然函数为：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\theta}x_ie^{-\frac{x_i^2}{\theta}}=\frac{2^n}{\theta^n}(\prod_{i=1}^{n}x_i)e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$，$x_i>0,i=1,2,\cdots,n$；

(ii)取自然对数：$\ln L(\theta)=n\ln 2-n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$；

(iii)令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$，解之得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，从

而 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ ……………………………… 3分

（3）由于$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\theta}x^3e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\theta$，因此

$$E\hat{\theta}_2=E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX^2=\theta$$

即$\hat{\theta}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$为$\theta$的无偏估计量……………………………… 2分

又$E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\theta}x^5e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=2\theta^2$，故$D(X^2)=E(X^4)-(EX^2)^2=\theta^2$，

从而$D\hat{\theta}_2=D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i^2=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX^2=\frac{\theta^2}{n}$，由切比雪夫不等式，$\forall\varepsilon>0$，有

$$0\le P(\left|\hat{\theta}_2-\theta\right|)=P(\left|\hat{\theta}_2-E\hat{\theta}_2\right|\ge\varepsilon)\le\frac{D\hat{\theta}}{\varepsilon^2}=\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}\to 0,n\to\infty$$

从而$\lim_{n\to\infty}P(\left|\hat{\theta}_2-\theta\right|\ge\varepsilon)=0$，即$\hat{\theta}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$为$\theta$的相合估计量………………… 2分

6.解（i）需检验

$$H_0:\mu\le 225,H_1:\mu>225$$ ……………………… 2分

（ii）选择检验统计量

$$T=\frac{\bar{X}-225}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$ ……………………… 2分

（iii）由于$\alpha=0.05,n=16$，因此临界点为$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(15)=1.7531$，从而接受域为$(-\infty,1.7531)$…………………………………………………………… 2分

（iv）由于$n=16,s=99,\bar{x}=241.5$，因此检验统计量的样本值为

$$t=\frac{241.5-225}{99/\sqrt{16}}=0.6667$$ ………………… 2分

（v）由于$t=0.6667\in(-\infty,1.7531)$，因此接受$H_0$，即可以认为元件的平均寿命不大于225小时………………………………………………………………… 2分