《概率论与数理统计》试题A参考答案及评分标准

一.单项选择题（每小题4分，共20分）

1. D　　2. B　　3. C　　4. B　　5. A

二.填空题（每小题4分，共20分）

1. $\frac{1}{6}$　2. $\frac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{24}}$　3. $p_1+p_1p_2-p_1p_2p_3$　4. $\frac{1}{10n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ （或$\frac{\bar{x}}{10}$）　5. (0.2738, 1.48)

三.解答题（每小题10分，共60分）

1.(10分)解：依题意$P\{X=0\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{6}+0=\frac{1}{6}$，同理

$P\{Y=0\}=\frac{2}{3}$，$P\{Y=1\}=\frac{1}{3}$ ……………………2分

故 $E(X)=0\times\frac{5}{6}+1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$，$E(X^2)=0^2\times\frac{5}{6}+1^2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$，$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{5}{36}$，同理

$E(Y)=\frac{1}{3}$，$E(Y^2)=\frac{1}{3}$，$D(Y)=\frac{2}{9}$ ……………………6分

又 $E(XY)=0\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{3}+1\times0=0$，故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{18}$ …8分

从而 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{1}{18}}{\sqrt{\frac{5}{36}}\sqrt{\frac{2}{9}}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ……………………10分

2.(10分)解；(1)因$1=\iint f(x,ydxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}x^2+y^2dxdy=\frac{A\pi}{2}$，故$A=\frac{2}{\pi}$. ……4分

(2)依题意，$|y|>1$时，$f_Y(y)=\int f(x,y)dx=0$；$|y|\le1$时

$$f_Y(y)=\int f(x,y)dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{x^2\le1-y^2}x^2+y^2dx=\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\sqrt{(1-y^2)^3}+y^2\sqrt{1-y^2}\right)$$ …………7分

故条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{\frac{2}{3}\sqrt{(1-y^2)^3}+2y^2\sqrt{1-y^2}}, & x^2+y^2\le1,|y|\ne1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

……………………10分

3. (10分) 证： 由分部积分公式 $\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=2\int_{0}^{\infty}txe^{-tx}dx$ ……………………4分

由 $\int f(x)dx=1$ 可得 $\int_{0}^{\infty}t^2xe^{-tx}dx=1$，从而 $\mathrm{E}(X)=\frac{2}{t}$，即 $t=\frac{2}{\mathrm{E}(X)}$ ……………………8分

从而 t 的矩估计量为 $\hat{t}=\frac{2}{\overline{X}}$. ……………………10分

4. (10分) 解：依题意，被检验的总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2=1$；假设检验形式为：

$$H_0: \mu=\mu_0 \quad H_1: \mu>\mu_0$$

这里 $\mu_0=3.8$，显著性水平为 $\alpha=0.05$. ……………………3分

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 X 的一个样本，则检验统计量为 $Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，此时在 H_0 之下其样本观测值为 $z=\frac{4-3.8}{1/\sqrt{90}}=\sqrt{3.6}$. 因 $z_{0.05}=1.645$，故此时拒绝域为 $(1.645,\infty)$.

显然 $\sqrt{3.6}\in(1.645,\infty)$，即 z 落在拒绝域中，从而在 5%的显著性水平下，拒绝 H_0，接受 H_1，即可以认为发射机发出的数字显著大于 3.8. ……………………10分

5. (10分) 解：$[0,1]$ 区间上的均匀分布有概率密度 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，于是

$$\mathrm{E}(U)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},\quad \mathrm{E}(U^2)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$ ……………………5分

因 U，V 相互独立，故 U^2，V^2 也相互独立，从而

$$\mathrm{D}(UV)=\mathrm{E}(U^2V^2)-[\mathrm{E}(UV)]^2=\mathrm{E}(U^2)\mathrm{E}(V^2)-[\mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V)]^2=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}=\frac{7}{144}$$ …10分

6. (10分) 解：定义随机事件$W=$ "步行去的教学楼"，$\overline{W}=$ "骑车去的教学楼"

$C=$ "首选步行"，$\overline{C}=$ "首选单车"，$B=$ "选中 Mobike"，$\overline{B}=$ "选中 Ofo"，$D_1=$ "Mobike 故障"，$D_2=$ "Ofo 故障"，则C,B,D相互独立且

$$\mathrm{P}(C)=0.3,\ \mathrm{P}(B)=0.45,\ \mathrm{P}(\overline{D}_1)=0.97,\ \mathrm{P}(D_2)=0.07 \cdots\cdots 2\text{分}$$

依题意$W=C\cup(\overline{C}BD_1)\cup(\overline{C}\overline{B}D_2)$，由互不相容性和独立性可知

$$\mathrm{P}(W)=\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(\overline{C}BD_1)+\mathrm{P}(\overline{C}\overline{B}D_2)=0.3+0.7\times0.45\times0.03+0.7\times0.55\times0.07=0.3364 \cdots 4\text{分}$$

（1）所求概率为条件概率$\mathrm{P}(\overline{C}B\overline{D}_1\,|\,\overline{W})$. 由 Bayes 公式有

$$\mathrm{P}(\overline{C}B\overline{D}_1\,|\,\overline{W})=\frac{\mathrm{P}(\overline{W}\,|\,\overline{C}B\overline{D}_1)\mathrm{P}(\overline{C}B\overline{D}_1)}{\mathrm{P}(\overline{W})}$$

显然在事件$\overline{C}B\overline{D}_1$发生时，$\overline{W}$必发生，即$\mathrm{P}(\overline{W}\,|\,\overline{C}B\overline{D}_1)=1$，再由独立性立得

$$\mathrm{P}(\overline{C}B\overline{D}_1\,|\,\overline{W})=\frac{\mathrm{P}(\overline{C}B\overline{D}_1)}{\mathrm{P}(\overline{W})}=\frac{0.7\times0.45\times0.97}{1-0.3364}=0.46 \cdots\cdots 7\text{分}$$

（2）所求概率即条件概率$\mathrm{P}(\overline{C}\overline{B}D_2\,|\,W)$. 由 Bayes 公式有$\mathrm{P}(\overline{C}\overline{B}D_2\,|\,W)=\dfrac{\mathrm{P}(W\,|\,\overline{C}\overline{B}D_2)\mathrm{P}(\overline{C}\overline{B}D_2)}{\mathrm{P}(W)}$

显然在事件$\overline{C}\overline{B}D_2$发生的条件下，$W$必发生，即$\mathrm{P}(W\,|\,\overline{C}\overline{B}D_2)=1$，从而

$$\mathrm{P}(\overline{C}\overline{B}D_2\,|\,W)=\frac{\mathrm{P}(\overline{C}\overline{B}D_2)}{\mathrm{P}(W)}=\frac{0.7\times0.55\times0.07}{0.3364}=0.08 \cdots\cdots 10\text{分}$$