第一章

1.1 节

1.1-1

a. 是命题，真命题
b. 不是命题
c. 是命题，真值取决于明天是否去郊游
d. 不是命题
e. 是命题，假命题
f. 是命题，不确定
g. 是命题，假命题
h. 不是命题

1.1-2

a. 是命题，假命题
b. 不是命题
c. 不是命题
d. 不是命题
e. 是命题，真命题
f. 不是命题
g. 是命题，真值取决于是否下雨

1.1-3

逆命题：如果我去郊游，那么天不下雨而且我有时间。
否命题：如果天下雨或者我没时间，那么我不去郊游。
逆否命题：如果我不去郊游，那么天下雨或者我没时间。

1.1-4

逆命题：若我去华山，则明天是晴天。
否命题：若明天不是晴天，则我不去华山。
逆否命题：若我不去华山，则明天不是晴天。

1.1-5

a. $\neg Q$
b. $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R$
c. $\neg R \rightarrow P$
d. $R \leftrightarrow (Q \wedge \neg P)$

1.1-6

a. P：11 是偶数　$\neg P$
b. P：小王很聪明　Q：小王喜欢学习　$P \wedge (\neg Q)$
c. P：小王不聪明　Q：小王不够用功　$\neg P \wedge Q$

d. P：小王的专业是软件工程 Q：小王的专业是通信工程 $P \vee Q$
e. P：天不下雨 Q：我骑车去上街 $Q \rightarrow P$
f. P：1+1=2 Q：3 不是奇数 $\neg P \leftrightarrow Q$
g. P：小王是计算机专业的学生 Q：小王出生于 1986 年 S：小王出生于 1987 年 R：小王是班长 $P \wedge (Q \vee S) \wedge R$

1.1-7

a. T
b. T

1.1-8

a. P：2+3=5 Q：19 是素数 $P \leftrightarrow Q$ 真
b. P：2+3=5 Q：19 是素数 $\neg P \leftrightarrow Q$ 假
c. P：4 是偶数 Q：5 是偶数 $Q \rightarrow P$ 假
d. P：2+2=6 Q：地球静止不动 $\neg Q \leftrightarrow P$ 假
e. P：2+2=6 Q：地球静止不动 $Q \rightarrow P$ 真
f. P：√3 是无理数 Q：√7 是无理数 $P \oplus Q$ 假

1.1-9

a. T
b. F (1972)
c. T
d. Not T or F
e. Not T or F

1. 2 节

1.2-1

a. 是
b. 是
c. 是
d. 不是 根据课本第 7 页定义 1.2.2-ii，该公式不是命题。
e. 不是 根据课本第 7 页定义 1.2.2-ii，该公式不是命题。

1.2-2

a. P：天下雨 Q：天下雪 R：我去学校
R 或$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$
b. P：天下雨 Q：天下雪 R：我去学校
$\neg(P \vee Q) \rightarrow R$
c. P：天下雨 Q：天下雪 R：我去学校
$R \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

d. Q：天下雪　R：我去学校

$R \to \neg Q$

e. P：天下雨　　Q：天下雪　R：我去学校

$P \vee Q \to \neg R$

1.2-3

a. 天下雪当且仅当我去学校且天不下雨

b. 我去学校且天下雪。

c. 当且仅当天下雪我去学校

d. 我不去学校且天不下雪

1.2-4

a. P：小李去　Q：小王去　R：他去

$(\neg P \wedge \neg Q) \to R$

b. P：我们划船　　Q：我们跑步

$\neg(P \wedge Q)$

c. P：你来了　Q：他唱歌　R：你伴奏

$P \to (R \to Q)$

d. P：你年满 18 岁　Q：身高不足 1.6　　R：坐过山车

$(\neg P \wedge Q) \longrightarrow \neg R$

e. P：小张生病　Q：小李生病　R：我出差　S：小王出差

$((P \wedge Q) \to R) \vee (\neg(P \wedge Q) \to S)$

1.2-5

第一个命题公式的自然语言公式为静静在陕西上学不在四川上学；静静在四川上学不在陕西上学。第二个自然语言公式为：静静在陕西上学或在四川上学。这两个命题的自然语言公式意思相同，所以原式可以符号化为$P \vee Q$。

1.2-6

a. T

b. T

c. T

d. F

1.2-7

a. P：1+1=2　Q：地球是静止的

$P \to Q$　假

b. P：1+1=2　Q：地球是运动的

$P \to Q$　真

c. P：地球上没有水　Q：人类无法生存

$P \to Q$　真

d. P：√2 是无理数　Q：地球上没有水

$P \to Q$　假

1.2-8

a. P: 3>4 Q: 3≤5 $P \to Q$
b. P: 3>4 Q: 3>5 $P \to Q$
c. P: 3>4 Q: 3≤5 $Q \to P$
d. P: 3>4 Q: 3>5 $\neg Q \to P$
e. P: 3>4 Q: 3>5 $P \leftrightarrow Q$

1.2-9

a. F
b. F
c. F
d. F

1.2-10

(a)$(P\wedge Q\wedge R)\vee\neg((P\vee Q)\wedge(R\vee Q))$

P	Q	R	$P\vee Q$	$R\vee Q$	$\neg((P\vee Q)\wedge(R\vee Q))$	$(P\wedge Q\wedge R)\vee\neg((P\vee Q)\wedge(R\vee Q))$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1

(b)

P	Q	$P \to Q$	$Q\wedge(P \to Q)$	$Q\wedge(P \to Q) \to P$
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

(c)

P	Q	R	$P\vee Q$	$Q\wedge R$	$P\vee Q \to Q\wedge R$	$P\wedge(\neg R)$	$(P\vee Q \to Q\wedge R) \to P\wedge(\neg R)$
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1

1	0	1	1	1	1	0	0

(d)

P	Q	R	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg R$	$P\wedge(\neg Q)$	$\neg P \to P\wedge(\neg Q)$	$(\neg P \to P\wedge(\neg Q)) \to R$	$((\neg P \to P\wedge(\neg Q$ $\to R)\wedge Q$	$(((\neg P \to P\wedge(\neg$ $\to R)\wedge Q$
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1

1.2-11

a. 如果 2 是偶数，那么雪是白的
b. 如果雪是白的，那么 2 是偶数。
c. 如果 2 不是偶数，那么雪不是白的。
d. 如果雪不是白的，那么 2 不是偶数。

1.2-12

(答案不唯一)
a. 真：$P.Q.R$ 为 F 假：$P.Q$ 为 T，R 为 F
b. 真：$P.R.S$ 为 F，Q 为 T 假：$P.R.S.Q$ 为 F
c. 真：$P.R.S$ 为 T，Q 为 F 假：$P.Q.R.S$ 为 T
d. 真：P 为 F，$Q.R$ 为 T 假：$P.Q.R$ 为 F

1.2-13

(a) $P\vee(\neg P\wedge Q) \Leftrightarrow P\vee Q$

(b) $P\wedge\big(\neg P\vee(\neg Q)\big) \Leftrightarrow P\wedge(\neg Q)$

(c) $\neg(P\vee Q) \leftrightarrow \big(\neg P\wedge(\neg Q)\big) \Leftrightarrow \neg(P\vee Q) \leftrightarrow \neg(P\vee Q) \Leftrightarrow T$

(d) $(\neg P\vee Q) \leftrightarrow (P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P\vee Q) \leftrightarrow (\neg P\vee Q) \Leftrightarrow T$
(e) $P\wedge(Q\vee R) \leftrightarrow (P\wedge Q\vee P\wedge R) \Leftrightarrow P\wedge(Q\vee R) \leftrightarrow P\wedge(Q\vee R)$

(f) $\neg P \vee Q \to Q \Leftrightarrow P \wedge (\neg Q) \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$
(g) $P \wedge Q \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q) \vee Q \Leftrightarrow T$

(h) $(P \wedge Q \leftrightarrow P) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q \to P) \wedge (P \to (P \wedge Q)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow$

$((\neg P \vee (\neg Q) \vee P) \wedge (\neg P \vee P \wedge Q)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (T \wedge (\neg P \vee Q)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow$

$(P \to Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$
(i)

P	Q	$Q \wedge (P \to Q)$	$P \to \neg Q$	$Q \wedge (P \to Q) \to (P \to \neg Q)$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

(j)

P	Q	R	$P \wedge (\neg(Q \to P)$	$Q \wedge R$	$(P \wedge (\neg Q \to P)) \wedge (Q \wedge R)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0

重言式 c d e g
矛盾式 j
偶然式 a b f h i
可满足式 a b c d e f g h i

1.2-14

a. $\neg P$
b. $P \wedge Q$
c. $P \wedge \neg Q$
d. $\neg P \wedge \neg Q$
e. $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
f. $P \vee Q \wedge \neg P$

1.2-15

a. $P \to Q$
b. $P \wedge Q \to R$
c. $R \to \neg(R \wedge \neg Q)$
d. $Q \leftrightarrow (P \wedge \neg R)$

1.2-16

a. $R \wedge \neg Q$
b. $P \wedge Q \wedge R$
c. $P \rightarrow R$
d. $P \wedge \neg Q \wedge R$
e. $P \wedge Q \rightarrow R$
f. $R \leftrightarrow (Q \vee P)$

1. 3 节

1.3-1

(a)

P	Q	R	$P\wedge(Q\wedge R)$	$(P\wedge Q)\wedge R$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

(b)

P	Q	R	$P\vee(Q\vee R)$	$(P\vee Q)\vee R$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

(c)

P	Q	R	$P\wedge(Q\vee R)$	$(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0

1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

(d)

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge (\neg Q)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

1.3-2

a. 证明：左式$\Leftrightarrow \neg Q \vee (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee \neg P) \vee R$

$\Leftrightarrow \neg(Q \wedge P) \vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$

b. 证明：左式$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee P)$

$\Leftrightarrow P \vee (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$

c.

d. 证明：左式$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee (\neg P \vee Q))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee \neg P) \vee Q)$

$\Leftrightarrow ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg P)) \vee Q$

$\Leftrightarrow (T \wedge (Q \vee \neg P)) \vee Q$

$\Leftrightarrow \neg P \vee Q$

e. 证明：左式$\Leftrightarrow \neg\big((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)\big)$

$\Leftrightarrow \neg\big((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)\big)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

f. 证明：左式$\Leftrightarrow (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow R$

g. 证明：左式$\Leftrightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee R) \wedge (\neg Q \vee (S \vee R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee S \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge S) \vee (\neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg Q \vee (\neg P \wedge S)) \vee R$

$\Leftrightarrow \neg(Q \wedge (\neg S \vee P)) \vee R$

$\Leftrightarrow \neg(Q \wedge (S \rightarrow P)) \vee R$

$\Leftrightarrow (Q \wedge (S \rightarrow P)) \rightarrow R$

1.3-3

a. $P \vee (\neg Q) \vee R \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow \neg\big(Q \wedge (\neg R \wedge \neg P)\big)$

b. $P \vee (\neg Q \vee (\neg R) \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \vee \big(Q \vee (\neg R)\big) \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q \vee (\neg R) \vee Q \Leftrightarrow$

$P \vee (\neg R) \vee Q \Leftrightarrow \neg R \vee \Big(\neg\big(\neg R \wedge (\neg Q)\big)\Big) \Leftrightarrow \neg\big(R \wedge (\neg Q \wedge \neg P)\big)$

c. $P \rightarrow (\neg Q \vee P) \Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q) \vee P \Leftrightarrow T$

1.3-4

a. $P \wedge Q \wedge (\neg P) \Leftrightarrow F$

b. $\neg P \wedge \Big(\neg P \vee \big(Q \vee (\neg R)\big)\Big) \wedge Q \Leftrightarrow \Big(\neg P \vee (\neg P \wedge Q) \vee \big(\neg P \wedge (\neg R)\big)\Big) \wedge Q \Leftrightarrow$

$\big((\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge (\neg R) \wedge Q)\big) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(P \vee \neg Q)$

c. $\neg P \wedge (R \vee P) \wedge (\neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge R \vee F) \wedge (\neg Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge R \wedge (\neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q \vee \neg R)$

1.3-5

a. 否定后件法可证
设$P \rightarrow Q$为 F,则 P 为 T，Q 为 F。
当 R 为 T，则$Q \rightarrow R$为 T，$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$为 F
当 R 为 T，则$Q \rightarrow R$为 T，$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$为 F
得证。

b. 肯定前件法可证
设 P 为 T，则$\neg P$为 F
当 Q 为 T 时，$\neg P \rightarrow Q$为 T
当 Q 为 F 时，$\neg P \rightarrow Q$为 T
得证。

c. 否定后件法可证
设$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$为 F
则$P \rightarrow Q$为 T，$P \rightarrow R$为 F，进而得 P 为 T，Q 为 T，R 为 F
则$Q \rightarrow R$为 F，$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$为 F，得证。

1.3-6

a. 肯定前件法可证
设$P \wedge (P \rightarrow Q)$为 T，则 P 为 T，$P \rightarrow Q$为 T，蕴含 Q 为 T。
则 Q 为 T，
证之。

b. 否定后件法可证

设$P \vee Q$为 F，则 P 为 F, Q 为 F。

$P \to Q$为 T，$P \to Q \to Q$为 F。

证之。

c. 否定后件法可证

设$Q \to R$为 F，则 Q 为 T，R 为 F。

设 P 为 T，$\neg P$为 F，$P \vee (\neg P)$为 T，$\left(P \vee (\neg P)\right) \to Q$为 T

$\left(P \vee (\neg P)\right) \to R$为 F, 则$\left(\left(P \vee (\neg P)\right) \to Q\right) \to \left(\left(P \vee (\neg P)\right) \to R\right)$为 F

设 P 为 F 时，过程同上。

证之。

d. 否定后件法可证

设$R \to Q$为 F，则 R 为 T，Q 为 F，$P \wedge (\neg P)$为 F，$Q \to (P \wedge (\neg P))$为 T，

$R \to (P \wedge (\neg P))$为 F，$\left(Q \to \left(P \wedge (\neg P)\right)\right) \to (R \to (P \wedge (\neg P)))$为 F

证之。

1.3-7

P：我学习　Q：我离散数学不及格　R：我沉迷于网络游戏

H_1： $P \to \neg Q$;

H_2： $\neg R \to P$;

H_3 ：Q;

C：R。

由于：

$Q \wedge (P \to \neg Q) \Rightarrow \neg P$;

$\neg P \wedge (\neg R \to P) \Rightarrow R.$

由前提可推出结论，论述有效。

1.3-8

令命题 P：罗宾恢复了健康　　命题 Q：罗宾能继续工作

命题 R：罗宾出外疗养　　命题 S：罗宾卧床在家

则前提 $H1$：$P \to Q$

前提 $H2$：$\neg Q \to (R \vee S)$

前提 $H3$：$\neg \mathrm{R} \wedge \neg S$

结论：P

验证$(P \to Q) \wedge (\neg Q \to R \vee \neg S) \wedge (\neg R \wedge \neg S) \Rightarrow P$

设：$(P \to Q) \wedge (\neg Q \to R \vee S) \wedge (\neg R \wedge \neg S)$为 T，则$(\mathrm{P} \to \mathrm{Q})$为 T、$(\neg Q \to R \vee S)$为 T

且$(\neg R\wedge\neg S)$也为 T，即$\neg R$、$\neg S$ 为 T，R、S 为 F，所以 $R\vee S$ 为 F，即$\neg Q$ 为 F，Q 为 T，所以 P 为 T，$(P\rightarrow Q)\wedge(\neg Q\rightarrow R\vee\neg S)\wedge(\neg R\wedge\neg S)\Rightarrow P$成立。即罗宾必须恢复健康成立。

1.3-9

P：琼斯学习　　Q：琼斯的英语四级通过了　R：琼斯玩 DOTA 游戏。

$(P\rightarrow Q)\wedge(\neg R\rightarrow P)\wedge\neg Q\Rightarrow R$

设$(P\rightarrow Q)\wedge(\neg R\rightarrow P)\wedge\neg Q$为 T，则$\neg Q$ 为 T，Q 为 F，P 为 F，$\neg R$ 为 F，R 为 T，即$(P\rightarrow Q)\wedge(\neg R\rightarrow P)\wedge\neg Q\Rightarrow R$成立，即琼斯玩 DOTA 游戏成立。

1.3-10

8 个　P　Q　$\neg P$　$\neg Q$　$P\rightarrow Q$　$P\rightarrow\neg Q$　$\neg P\rightarrow Q$　$\neg P\rightarrow\neg Q$

能不能用括号？

1.3-11

$\neg(R\vee\neg S)$

1.3-12

a.

$P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$

P	Q	$P\vee Q$	$P\wedge(P\vee Q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

b.

$P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$

P	Q	$P\wedge Q$	$P\vee(P\wedge Q)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

1.3-13

a.

$\neg(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$

证明　$\neg(A\leftrightarrow B)$

$\Leftrightarrow\neg((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee B)\vee\neg(\neg B\vee A)$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(B\wedge\neg A)$

b.

$P \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \rightarrow(\neg Q \wedge P)$

证明 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow(\neg Q \wedge P)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$

$\Leftrightarrow P$

1.3-14

(a)From the True-False table we can figure out that $PimpQ \Leftrightarrow Q$

So we can infer$(PimpQ)\wedge(QimpP) \Leftrightarrow P\wedge Q$, and it's a common sense that $P\wedge Q$ will never be logically equivalent to $P \leftrightarrow Q$.

(b)

P	Q	$PimpQ$	$QimpP$	$(PimpQ)\wedge(QimpP)$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

1.3-15

$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge R)$

$\Leftrightarrow T$

1. 4 节

1.4-1

a. $\neg p \Leftrightarrow \neg(p\vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$

b. $(p\vee q) \Leftrightarrow \neg\big(\neg(p\vee q)\big) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

c. $p\vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

d. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p\vee q \Leftrightarrow \neg\big(\neg(\neg p\vee q)\big) \Leftrightarrow \big((p \downarrow p) \downarrow q\big) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

1.4-2

a. $\neg p \Leftrightarrow \neg(p\wedge p) \Leftrightarrow p \uparrow p$

b. $p\vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p \uparrow \neg q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

c. $p\wedge q \Leftrightarrow \neg\big(\neg(p\wedge q)\big) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow q) \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

d. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p\vee q \Leftrightarrow \neg\big(\neg(\neg p\vee q)\big) \Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$

1.4-3

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$$
$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee (\neg q)))$$
$$\Leftrightarrow \neg\big((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)\big)$$
$$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$$

1.4-4

$$\neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q \Leftrightarrow \neg\big(\neg p \wedge (\neg q)\big) \Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q$$

$$\neg(p \uparrow q) \Leftrightarrow p \wedge q \Leftrightarrow \neg\big(\neg p \vee (\neg q)\big) \Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q$$

1.4-5

$$p \rightarrow \neg q \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q)$$

因为$\{\neg,\vee\}$ 是全功能连接词集合，所以$\{,\}$ $\{\neg,\rightarrow\}$ 是全功能连接词集合；又，去掉→后，{¬ }不是全功能连接词集合，所以$\{\neg,\rightarrow\}$ 是极小全功能连接词集合。

1.4-6

$p \oplus \neg q \Leftrightarrow \neg(\mathrm{p} \leftrightarrow \mathrm{q})$

因为$\{\leftrightarrow,\neg\}$不是全功能连接词集合，由上式可知，$\{\oplus,\neg\}$ 不是全功能连接词集合。

1.4-7

a. 由表可知，该连接词 g 是或非↓ ，

$$P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$$

因为$\{\neg,\vee\}$ 是全功能连接词，所以该连接词 g 是全功能连接词。

b. $A = (P \rightarrow Q) \vee R \Leftrightarrow \neg P \vee Q \vee R \Leftrightarrow (P \downarrow P) \vee \big((Q \downarrow R) \downarrow (Q \downarrow R)\big)$

$$\Leftrightarrow (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow R) \downarrow (Q \downarrow R) \downarrow (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow R) \downarrow (Q \downarrow R)$$

$A=g(g(g(g(g(P,P),g(Q,R)),g(Q,R)),g(P,P)),g(Q,R))$

1.4-8

For binary operation, there are 16 conditions.

P	Q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

From the table we can construct f_0 with $\neg(\neg P \vee P)$

f_1： $\neg(\neg P \vee (\neg Q))$

f_2： $\neg(\neg P \vee Q)$

f_3： P

f_4： $\neg(P \vee (\neg Q))$

f_5： Q

f_6： $\neg\big(P \vee (\neg Q)\big) \vee (\neg(\neg P \vee Q))$

f_7： $P \vee Q$

f_8： $\neg(P \vee Q)$

f_9： $\neg f_6$

f_{10}： $\neg Q$

f_{11}： $P \vee (\neg Q)$

f_{12}： $\neg P$

f_{13}： $\neg P \vee Q$

f_{14}： $\neg P \vee (\neg Q)$

f_{15}： $\neg P \vee P$

We can construct all conditions with $\{\neg, \vee\}$.
Therefore, $\{\neg, \vee\}$ is a functionally complete set.

1. 5 节

1.5-1

a. $(\neg P \wedge Q) \vee R$

b. $(P \vee Q) \wedge T$
c. $\neg(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg(Q \vee \neg R))$
d. $(\neg P \wedge R) \wedge Q$
e. $(\neg P \wedge Q) \vee R$
f. $(P \wedge Q) \wedge \neg R$

1.5-2

a. 证明 原式$\Leftrightarrow P \vee \neg[(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge Q)]$
$\Leftrightarrow P \vee \neg(P \wedge Q)$
$\Leftrightarrow P \vee \neg P \vee \neg Q$
$\Leftrightarrow T \vee \neg Q \quad \Leftrightarrow T$
对偶式： $P \wedge \neg [(P \wedge \neg Q) \vee Q] \Leftrightarrow F$

b. 证明：原式$\Leftrightarrow P \vee (\neg Q \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$
$\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
$\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)$
$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$
对偶式：$(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge Q)$

c. 证明：原式$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
$\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q) \quad \Leftrightarrow P$
对偶式：$[\neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg(\neg P \wedge R)] \Leftrightarrow P$

d. 证明：原式$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q)$
$\Leftrightarrow (Q \vee \neg P) \vee Q$
对偶式：$(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$

1. 6 节

1.6-1

a. $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$

$$\Leftrightarrow \big(\neg(P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)\big) \wedge \big((P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)\big)$$

$$\Leftrightarrow \big((P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q)\big) \wedge \Big(\neg(\neg P \vee Q) \vee \big(\neg(P \vee Q)\big)\Big)$$

$$\Leftrightarrow T \wedge \Big(\big(P \wedge (\neg Q)\big) \vee \big(\neg P \wedge (\neg Q)\big)\Big) \Leftrightarrow (P \wedge (\neg Q)) \vee (\neg P \wedge (\neg Q))$$

b. $\neg\big(P \vee (\neg Q)\big) \wedge (S \rightarrow R) \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge (\neg S \vee R) \Leftrightarrow \neg P \wedge (\neg S \vee R) \wedge Q \Leftrightarrow$

$\Big(\big(\neg P \wedge (\neg S)\big) \vee (\neg P \wedge R)\Big) \wedge Q \Leftrightarrow (\neg P \wedge (\neg S) \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R \wedge Q)$

c. $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow \left(\neg(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)\right) \wedge \left((P \wedge Q) \rightarrow \neg(P \vee Q)\right) \Leftrightarrow$

$\left((P \vee Q) \vee (P \wedge Q)\right) \wedge \left(\left(\neg P \vee (\neg Q)\right) \vee \left(\neg(P \vee Q)\right)\right) \Leftrightarrow (\vee Q) \wedge \left(\neg P \vee (\neg Q)\right) \Leftrightarrow$

$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

d. $\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q \Leftrightarrow F$

1.6-2

a. $P \wedge (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg P \vee P \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge Q$

b. $\neg P \leftrightarrow (\neg Q \vee R) \Leftrightarrow \left(\neg P \rightarrow (\neg Q \vee R)\right) \wedge \left((\neg Q \vee R) \rightarrow \neg P\right) \Leftrightarrow$

$(P \vee (\neg Q \vee R)) \wedge (\neg\, (\neg Q \vee R) \vee \neg P)$

c. $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

d. $P \rightarrow Q \rightarrow R \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \rightarrow R \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R)$

1.6-3

a. 构造真值表：

P	Q	$\neg P \vee (\neg Q)$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee (\neg Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

主析取范式$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
主合取范式$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

b. 构造真值表：

P	Q	$\neg(P \rightarrow Q)$	$P \rightarrow \neg Q$	$\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q)$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

主析取范式$P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
主合取范式$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

c. 构造真值表：

P	Q	R	$\neg R$	$Q \to P$	$Q \vee R$	$P \to Q \vee R$	$\neg R \wedge (Q \to P) \to (P \to Q \vee R)$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1

主析取范式$\sum(0,1,2,3,5,6,7)$

主合取范式$\prod(4)$

d. 构造真值表：

P	Q	R	S	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge (\neg Q) \wedge S$	$\neg P \wedge Q \wedge R$	$(P \wedge (\neg Q) \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$
0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0

主析取范式$\sum(6,7,9,11)$
主合取范式$\prod(0,1,2,3,4,5,8,10,12,13,14,15)$

1.6-4

不存在

1.6-5

主析取范式$\sum(0,3,5,6)$

主合取范式$\prod(1,2,4,7)$

1.6-6

P	Q	R	$P\wedge Q$	$P\rightarrow(P\wedge Q)$	$(P\rightarrow(P\wedge Q))\vee R$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

7 个极小项　1 个极大项

1.6-7

a. $(P\rightarrow Q)\rightarrow R\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow(P\vee R)\wedge\big(R\vee(\neg Q)\big)\Leftrightarrow$

$(P\vee R\vee Q)\wedge(P\vee R\vee(\neg Q))\wedge(R\vee(\neg Q)\vee P)\wedge(R\vee(\neg Q)\vee(\neg P))$

$$Q\rightarrow(P\rightarrow R)\Leftrightarrow\neg Q\vee(\neg P\vee R)$$

不等价

b. $(P\rightarrow Q)\rightarrow R\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

等价

c. $\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$

$$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge(\neg Q)\Leftrightarrow\big(P\vee(\neg Q)\big)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee(\neg Q))$$

不等价

d. $\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow\neg\big((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)\big)\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge\big((\neg Q\vee P)\big)\Leftrightarrow$

$\big(P\wedge(\neg Q)\big)\vee\big(Q\vee(\neg P)\big)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge\big(\neg P\vee(\neg Q)\big)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee(\neg Q))$

等价

1.6-8

a. $\neg((\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (Q \wedge \neg R \vee P))$

b.

c. $\neg P \vee ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee Q))$

其他等价的符合条件即可

1.6-9

N 个变元有 2^n 个极小项，等价类共有

$$C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + C_{2^n}^2 + C_{2^n}^3 + \cdots\cdots + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n}$$

1.6-10

P	Q	R	$(P \wedge Q) \rightarrow (P \wedge \left(\neg\left(Q \vee (\neg R)\right)\right))$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

主析取范式 $\sum(2,3,4,5,6,7)$

主合取范式 $\prod(0,1)$

1.6-11

设命题 P：A 得第一，Q：B 得第二，R：C 得第二 S：D 得第四，E：A 得第二。
依题意得：$(P \oplus Q) \wedge (R \oplus S) \wedge (E \oplus S)$

$$\Leftrightarrow \left((\mathrm{P} \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)\right) \wedge \left((R \wedge \neg S) \vee (\neg R \wedge S)\right) \wedge \left((E \wedge \neg S) \vee (\neg E \wedge S)\right)$$

$\Leftrightarrow$
$((\mathrm{P} \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg P \wedge S))$
因为$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S)$与$(\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S)$不符题意，舍去。
故原式化为
$(P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S \wedge E \wedge \neg S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S \wedge \neg E \wedge S)$

$\vee(\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge E \wedge \neg S) \vee(\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge \neg E)$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S \wedge E) \vee(\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge \neg E)$

因为 R 与 E 矛盾，故$\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge S \wedge \neg E$为真。

即 A 未得第一，B 得第二，C 未得第二，D 得第四，A 未得第二。

由此可得排名顺序为 CBAD。

1.6-12

设命题 P：A 出差。

命题 Q：B 出差。

命题 R：C 出差。

命题 S：D 出差。

由题意我们可得：条件 (a) $P \rightarrow (R \wedge \neg S) \vee (\neg R \wedge S)$

(b) $\neg(Q \wedge R)$

(c) $R \rightarrow \neg S$

设命题 X：$P \rightarrow (R \wedge \neg S) \vee (\neg R \wedge S)$

Y：$\neg(Q \wedge R)$

Z：$R \rightarrow \neg S$

P	Q	R	S	$R \oplus S$	X	Y	Z	$X \wedge Y \wedge Z$
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0

选取真值表中 $PQRS$ “1”的个数等于 2 的项。

则有 0101，1010,1001，

则可得组合：A 和 D 去或 A 和 C 去或 B 和 D 去

1.6-13

ABC 取 1 时代表开关关闭

A	B	C	$A\wedge C$	$B\wedge C$	$A\wedge C\vee B\wedge C$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

主析取范式 $\sum(3,5,7)$

主合取范式 $\prod(0,1,2,4,6)$

1.7 节

1.7-1

a.

(1) $\neg D$ $\quad$ P(假设前提)

(2) $D\vee A$ $\quad$ P

(3) $\neg D\rightarrow A$ $\neg D\rightarrow A$ $\quad$ T (1),(2) $E14$

(4) A $\quad$ T(3) $I10$

(5) $A\rightarrow B$ $\quad$ P

(6) B $\quad$ T (5) $I10$

(7) $A\rightarrow C$ $\quad$ P

(8) C $\quad$ T(7) $I10$

(9) $(B \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C)$矛盾 T(6)(8) I1

b.

(1) S P (假设前提)

(2) $\neg(\neg P \wedge S)$ P

(3) $P \vee \neg S$ T (2) E 10

(4) $\neg P \to \neg S$ T (3) E 14

(5) $\neg P$ P

(6) $P \to Q$ P

(7) $\neg Q$ T (5)(6) I 11

(8) $\neg Q \vee R$ P

(9) $Q \to R$ T (8) E 14

(10) $R \wedge \neg R$ 矛盾 T (8) I 1

c.

(1) $\neg R \vee S$ P

(2) $R \to S$ T (1) E 14

(3) $\neg S$ P

(4) $\neg R$ T (2)(4) I 11

(5) $P \wedge Q \to R$ P

(6) $\neg(P \wedge Q)$ T (5) E 14

d.

(1)$B \wedge C$ P

(2)$B \leftrightarrow C$ (1)

(3)$(B \leftrightarrow C) \to (H \vee G)$ P

(4)$H \vee G$ (2)(3)

(5)$G \vee H$ (4)

e.

(1)$R \wedge S$ P

(2)R (1)

1.7-2

a.

(1) $\neg P \vee Q$ P

(2) $P \to Q$ T (1) E 14

(3) $\neg Q \vee R$ P

(4) $Q \to R$ T (3) E 14

(5) $P \to R$ T (3)(4) I 13

(6) $R \to S$ P

(7) $P \to S$ T (6) I 13

b.

(1) $P \to Q$ P

(2) $\neg P \vee Q$ T (1) E 14

(3) $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee P)$ T (2) E 12

(4) $\neg P \vee (P \wedge Q)$ T (3) E 9

(5) $P \to P \wedge Q$ T (4) E 14

c.

(1) $P \vee Q \to R$ P

(2) $\neg(P \vee Q) \vee R$ T (1) E 14

(3) $(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$ T (2) E 7

(4) $(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$ T (3) E 9

(5) $(P \wedge Q) \to R$ T (4) E 14

d. (1)P 附加前提

(2) $P \to (Q \to R)$ P

(3) $Q \to R$ T (1) I 10

(4) $Q \to (R \to S)$ P

(5) $R \to S$ T (3) I 10

(6) $Q \to S$ T (2)(4) I 13

(7) $P \to (Q \to S)$ T (1)(5) I 14

1.7-3

a.

(1)P

(2)$P \to R$

(3)R

(4)$P \to Q$

(5)Q

(6)$Q \to \neg R$

(7)$\neg R$

(8)$R \wedge \neg R$ 矛盾

b.

(1)$A \wedge D$

(2)A

(3)D

(4)$A \to (B \to C)$

(5)$B \to C$

(6)$\neg(B \wedge \neg C)$

(7)$D \to (B \wedge \neg C)$

(8)$\neg(B \wedge \neg C) \wedge (B \wedge \neg C)$矛盾

1.7-4

a.

(1)P	附加前提
(2)$\neg P \vee Q$	P
(3)$P \to Q$	(2)
(4)Q	(1)(3)
(5)$S \to \neg Q$	P
(6)$Q \to \neg S$	(5)
(7)$\neg S$	(4)(6)
(8)$P \to \neg S$	(7)

b.

(1)P P(假设前提）

(2)$P \leftrightarrow Q$ P

(3)$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ (2)

(4)$P \rightarrow Q$ (3)

(5)Q (1)(4)

(6)$S \rightarrow \neg Q$ P

(7)$Q \rightarrow \neg S$ (6)

(8)$S \vee R$ P

(9)R (7)(8)

(10)$\neg R$ P

(11)$R \wedge \neg R$ 矛盾

c.

(1)R P

(2)$R \vee S$ (1)

(3)$((Q \rightarrow P) \vee \neg R)$ P

(4)$Q \rightarrow P$ (1)(3)

(5)$\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)$ P

(6)$R \vee S \rightarrow (P \rightarrow Q)$ (5)

(7)$P \rightarrow Q$ (2)(6)

(8)$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ (4)(7)

(9)$P \leftrightarrow Q$ (8)

1.7-5

设 P： 有球赛

Q： 交通顺畅

R：按时到

已知： $P \rightarrow \neg Q, R \rightarrow Q, R \Rightarrow \neg P$

(1) P P(假设前提)

(2) $P \rightarrow \neg Q$ P

(3) $\neg Q$ T(2) I 10

(4) $R \rightarrow Q$ P

(5) $\neg R$ T(4) I 6

(6) $R \wedge \neg R$ 矛盾 T(5) I 1

1.7-6

a.　有效结论 R 无效结论 $\neg R$
b.　有效结论 $\neg P$ 无效结论 P
c.　有效结论 R 无效结论 $\neg R$

1.7-7

P：ω是奇数

Q：ω能被 2 整除

R：ω是偶数

前提：

$P \to \neg Q, R \to Q$

结论：

$R \to \neg P$

真值表法略

主范式法

证明 $(P \to \neg Q) \wedge (R \to \neg Q) \to (R \to \neg P)$ 的主析取范式由八个极小项组成，也就是这个式子永真

逻辑演绎法

(1) P　　P（附加前提）

(2) $P \to \neg Q$　　P

(3) $\neg P \vee \neg Q$　　E

(4) $\neg Q$　　T（3）

(5) $\neg Q \to \neg R$　　P

(6) $P \to \neg R$　　T（2）(4)

(7)　$R \to \neg P$　　(6)

1.7-8

(1) B　　P (附加前提)

(2)　$\neg B \vee D$

(3) D　　(1)(2)

(4) $B \to D$　　(2)

(5) $(H \to \neg E) \to \neg D$　　P

(6) $D \to (H \wedge E)$　　(5)

(7) $B \to E$　　(4)(6)

1.7-9

P：ω和t的乘积为负数；

Q：ω为负数；

R：t为负数；

前提：$P \to (Q \oplus R), \neg P$

结论：$\neg Q \wedge \neg R$

(1) $P \to (\neg Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R)$ P

(2) $\neg((\neg Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R)) \to \neg P$ T (1)

(3) $\neg P$ P

(4) $\neg(Q \wedge R) \wedge \neg(Q \wedge \neg R) \to \neg P$ T (2)(3)

(5) $(Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee R) \to \neg P$ T (4)

(6) $(Q \vee (\neg R \wedge \neg Q)) \wedge ((Q \wedge R) \vee \neg R) \to \neg P$ T (5)

(7) $(\neg R \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$ T (6)

1.7-10

P：小张是计算机系的学生；

Q：小李是计算机系的学生；

R：小红是汉语言文学系的学生；
S：小红喜欢看古典文学书籍；
前提：

$P \wedge Q \to R, R \to S, \neg S, P$

结论：

$\neg Q$

(1) $\neg S, R \to S$ P

(2) $\neg S \to \neg R$ (1)
(3) $\neg R$ (2)

(4) $\neg R \to \neg(P \wedge Q)$ P

(5) $\neg P \vee \neg Q$ (4)

(6) P P

(7) $\neg Q$ (6)

1.7-11

设命题 P：A 曾经到过受害者房间，Q：A 在 10 点前离开，R：门卫看到他，S：A 是嫌犯。

即证明：$P \wedge \neg Q \to A$、P、$Q \to R$、$\neg R$，可推出 A。

证： (1) $\neg R$ P

(2) $Q \to R$ P

(3) $\neg Q$ (1) (2)

(4) P P

(5) $P \wedge \neg Q$ (3) (4)

(6) $P \wedge \neg Q \to S$ P

(7) S (5) (6)

1.7-12

a.

设命题 P：今天是周六，Q：我们去兵马俑玩，R：我们去华清池玩，S：兵马俑游人太多。

$P \to (Q \vee R), S \to \neg Q, P, S \Rightarrow R$

(1) P, S P

(2) $S \to \neg Q$ P

(3) $\neg Q$ (1) (2)

(4) $P \to (Q \vee R)$ P

(5) $Q \vee R$ (1) (4)

(6) R (3) (5)

b.

设命题P:静静是艺术生,Q:静静会绘画,R:静静是文科生。$P \to Q, \neg P \to R, \neg Q \Rightarrow R$。

(1) $P \to Q$ P

(2) $\neg Q$ P

(3) $\neg P$ (1)(2)

(4) $\neg P \to R$ P

(5) R (3)(4)

1.7-13

设命题 A：小王喜欢数学，B：小田喜欢数学，C：小强喜欢数学，D：小田喜欢物理。

$A \to (B \vee C), B \to D, A, \neg D \Rightarrow C$

证： (1) $B \to D$ P

(2) $\neg$D P

(3) $\neg B$ (1)(2)

(4) $A \to (B \vee C)$ P

(5) A P

(6) $B \vee C$ (4)(5)

(7) C (3)(6)

1.7-14

P 铁矿 Q 铜矿 R 锡矿

甲： $\neg P \wedge \neg Q$ 乙 $\neg P \wedge R$ 丙 $P \wedge \neg R$

甲全对 $A_1 = \neg P \wedge \neg Q$

甲对一半 $A_2 = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

甲全错 $A_3 = P \vee Q$

乙全对$B_1 = \neg P \wedge R$

乙对一半$B_2 = (\neg P \wedge \neg R) \vee (P \wedge R)$

乙全错$B_3 = P \vee \neg R$

丙全对$C_1 = P \wedge \neg R$

丙对一半$C_2 = (P \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg R)$

丙全错$C_3 = \neg P \vee R$

$E = (A_1 \wedge B_2 \wedge C_3) \vee (A_1 \wedge B_3 \wedge C_2) \vee (A_2 \wedge B_1 \wedge C_3) \vee (A_2 \wedge B_3 \wedge C_1) \vee (A_3 \wedge B_1 \wedge C_2) \vee (A_3 \wedge B_2 \wedge C_1)$

为真

$A_1 \wedge B_2 \wedge C_3 \Leftrightarrow 0$ $\quad$ $A_1 \wedge B_3 \wedge C_2 \Leftrightarrow 0$

$A_2 \wedge B_1 \wedge C_3 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge R$ $\quad$ $A_2 \wedge B_3 \wedge C_1 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

$A_3 \wedge B_2 \wedge C_1 \Leftrightarrow 0$ $\quad$ $A_3 \wedge B_1 \wedge C_2 \Leftrightarrow 0$

所以$(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow 1$

因为 PQR 只能有一个为真，所以$P \wedge \neg Q \wedge \neg R \Leftrightarrow 1$

所以是铁矿。

1.7-15

假设丙一半对，则有
1、甲全对，乙全错，则小王为上海人。
2、甲全错，乙全对，则小王为江苏人。
故此题无唯一答案。

1.7-16

a. P：there is a gas in the car
Q：I go to the store
R：I get a soda

$P \to Q, Q \to R, P \Rightarrow R$

(1)P

(2)$P \to Q$

(3)Q

(4)$Q \to R$

(5)R

b. P：there is a gas in the car

Q：I go to the store

R：I get a soda

$$P \to Q, Q \to R, \neg R \Rightarrow \neg P$$

(1)$\neg R$

(2)$Q \to R$

(3)$\neg R \to \neg Q$

(4)$\neg Q$

(5)$P \to Q$

(6)$\neg Q \to \neg P$

(7)$\neg P$

c. P：Jill can sing

Q： Dweezle can play

R：I buy the compact disk

S： I buy the compact disk player

$$P \vee Q \to R, P, S \to R \wedge S$$

(1)P

(2)$P \vee Q \to R$

(3)R

(4)S

(5)$R \wedge S$

第二章

2.1 节

2.1-1

A. 设 $A(x)$表示 x 是工人,a 表示小张$\neg A(a)$。

B. 设 $P(x)$表示 x 是田径运动员,$Q(x)$表示 x 是球类运动员, $P(a)\vee Q(a)$.

C. 设 $P(x)$表示 x 是非常美丽的,$Q(x)$表示 x 是非常聪明的, $P(a)\wedge Q(a)$.

D. 设 $A(x)$表示 x 是奇数,答案为:$A(m)\rightarrow\neg A(2m)$

E. 设 $P(x)$表示 x 是有理数,$Q(x)$表示“x 是实数”, $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$

F. 设 $P(x)$表示 x 是有理数,$Q(x)$表示 x 是实数,$\exists x(Q(x)\wedge P(x))$

G. 设 $P(x)$表示 x 是有理数,$Q(x)$表示 x 是实数, $\neg\forall x(Q(x)\rightarrow P(x))$

H. 设 $P(x,y)$表示 x 平行于 y,$Q(x,y)$表示 x 与 y 不相交, $P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y)$.

I. 设 $P(x)$表示 x 大于 0，$Q(x)$表示 x 是偶数，$R(x,y)$表示 x 与 y 有大于 1 的公约数， $\forall a(P(a)\wedge Q(a))\wedge\forall b(P(b)\wedge Q(b))\rightarrow R(a,b)$

J. 设 $P(x)$表示 x 为实数,$Q(x)$表示 x 能表示成分数, $\neg\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$

2.1-2

A. 设 $P(x)$表示 x 是整数,$Q(x)$表示 x 是 D 中的元素, $\forall x(Q(x)\rightarrow P(x))$.

B. 设 $P(x)$表示 x 是奇数,$Q(x)$表示 x 是 D 中的元素, $\forall x(Q(x)\rightarrow P(x))$.

C. 设 $P(x)$表示 x 是偶数,$Q(x)$表示 x 是 D 中的元素,$R(x)$表示 x 能被 2 整除, $\forall x(P(x)\wedge Q(x)\rightarrow R(x))$.

D. 设 $P(x)$表示 x 能被 4 整除,$Q(x)$表示 x 是偶数,$R(x)$表示 x 是 D 中的元素, $\exists x(R(x)\wedge P(x)\wedge Q(x))$.

2.1-3

A. $P(x)$ 表示 x 是偶数， $Q(x)$ 表示 x 能被 2 整除， $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge\forall y(P(y)\rightarrow Q(y))$

B. $P(x)$ 表示 x 是奇数， $Q(x,y)$ 表示 x,y 有大于 1 的公约数， $\exists x(P(x)\wedge\exists y(P(y)\wedge Q(x,y)))$

C. *P(x)*表示 *x* 是火车，*Q*（*x*）表示 *x* 是汽车，*R(x,y)*表示 *x* 的速度比 *y* 快。

$\neg\forall x(P(x)\to\forall y(Q(y)\to R(x,y))$

D. *P(x)*表示 *x* 是整数，*Q*（*x*）表示 *x* 是负整数，*R*（*x*）表示 *x* 是正整数，*I*（*x*）表示 *x* 是 0。$\forall x(P(x)\to(Q(x)\vee R(x)\vee I(x)))$

2.1-4

A. 设 *P(x)*表示 $x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$，$\forall xP(x)$ D_1:*T* D_2:*T*

B. 设 *P(x)*表示 $x+6>100$，$\exists xP(x)$ D_1:*T* D_2:*T*

2.1-5

A. 7 是素数。

B. 2 既是偶数又是素数。

C. 所有能被 2 整除的数都是偶数。

D. 存在能被 3 整除的偶数。

2.1-6

F，当 *y* 取值为 1 时在论域{1,2}中不存在满足 *x+y=4* 的 *x* 值。

2.1-7

A. 设 *P(x,y)*表示，$\forall x\exists yP(x,y)$ *T*

B. 设 *P(x,y)*表示，$\exists x\forall yP(x,y)$ *T*

C. 设 *P(x,y)*表示 $y=x+1$，$\forall x\exists yP(x,y)$ *T*

D. 设 *P(x,y)*表示 $x+y=y+x$，$\forall x\forall yP(x,y)$ *T*

E. 设 *P(x,y)*表示，$\forall x\forall yP(x,y)$ *F*

F. 设 *P(x,y)*表示 $x^2+y^2<0$，$\forall x\exists yP(x,y)$ *F*

2.1-8

A. $P(a)\wedge P(b)\wedge P(c)$

B. $R(a)\wedge R(b)\wedge R(c)\wedge S(a)\wedge S(b)\wedge S(c)$

C. $(P(a)\to Q(a))\wedge(P(b)\to Q(b))\wedge(P(c)\to Q(c))$

D. $(P(a)\wedge P(b)\wedge P(c))\vee(\neg P(a)\wedge\neg P(b)\wedge\neg P(c))$

2.1-9

$\exists x\left(A(x)\rightarrow B(x)\right)\Leftrightarrow\left(A(a_1)\rightarrow B(a_1)\right)\vee\left(A(a_2)\rightarrow B(a_2)\right)\vee$
$\cdots\left(A(a_n)\rightarrow B(a_n)\right)\Leftrightarrow\neg A(a_1)\vee B(a_1)\vee\neg A(a_2)\vee B(a_2)\vee\cdots\neg A(a_n)\vee$
$B(a_n)\Leftrightarrow\neg\left(A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots A(a_n)\right)\vee\left(B(a_1)\vee B(a_2)\vee\cdots B(a_n)\right)$
$\Leftrightarrow\left(A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots A(a_n)\right)\rightarrow\left(B(a_1)\vee B(a_2)\vee\cdots B(a_n)\right)$
$\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

2.1-10

A. $\exists x\forall yL(x,y)$ T

B. $\forall x\forall yL(x,y)$ F

C. $\exists x\exists yL(x,y)$ T

D. $\forall x\exists yL(x,y)$ T

2.2 节

2.2-1
A. 是
B. 是
C. 不是
D. 不是

2.2-2

A. 设 *P(x)*表示 *x* 有理数，*Q(x)*表示 *x* 是实数，$\neg\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$

B. 设 *P(x)*表示 *x* 有理数，*Q(x)*表示“*x* 是实数”,*R(x)*表示 *x* 大于 0
$\exists x(P(x)\wedge R(x))\wedge\neg\forall x((R(x)\wedge Q(x))\rightarrow P(x))$

C. 设 *P(x)* 表示 *x* 是实数，*Q(x,y)* 表示 *x* 大于 *y*
$\forall x((P(x)\wedge Q(x,0))\rightarrow\exists y(P(y)\wedge Q(y,x)))$

D. 设 *P(x)*表示 *x* 是实数，*Q(x,y)*表示 *x* 大于等于 *y*，$\neg\exists x\left(P(x)\wedge\forall yQ(x,y)\right)$

E. 设 *P(x)*表示 *x* 是素数，*Q(x)*表示 *x* 是偶数,*R(x,y)*表示 *x* 等于 *y*，
$\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\wedge\forall y\left(P(y)\wedge Q(y)\right)\right)\rightarrow R(x,y)$

2.2-3

$\forall x(G(x)\rightarrow F(x))\wedge\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

2.2-4

A. $\neg\forall xI(x)$

B. $\forall x(\neg I(x)\rightarrow\neg\exists y(N(x,y)\wedge T(x,y)))$

C. $\exists x(I(x)\wedge\neg\exists y(T(x,y)\wedge N(x,y)))$

D. $\exists x\forall zT(x,z)\wedge\exists y(N(x,y)\wedge\forall zT(y,z))$

2.2-5

A. 第一个$\forall x$的辖域为$P(x)\wedge Q(x)$，后一个$\forall x$的辖域是$P(x)$,最后一个$Q(x)$中的x为自由变元，其他为约束变元。

B. 第一个$\forall x$的辖域为$P(x)\wedge\exists xQ(x)$，后一个$\forall x$的辖域是$P(x)$,$\exists x$的辖域为$Q(x)$，最后一个$Q(x)$中的x为自由变元，其他为约束变元。

C. $\forall x$和$\exists y$的辖域为$P(x,y)\leftrightarrow Q(x,y)$，$\exists x$的辖域为$S(x)$，最后一个$S(x)$中的$x$为自由变元，其他为约束变元。

D. $\exists y$的辖域为$Q(y)$，$\forall x$和$\forall y$的辖域为$R(x,y,z)$，$P(x,y)$的x,y是自由变元，z是自由变元，其他为约束变元。

2.2-6

A. $\forall w\exists v(P(w,z)\rightarrow Q(v))\leftrightarrow S(x,y)$

B. $\left(\forall w\left(P(w)\rightarrow\left(R(x)\vee Q(x)\right)\right)\wedge\exists vR(v)\right)\rightarrow\exists zQ(x,z)\Big)$

2.2-7

A. $(\exists yA(w,y)\rightarrow\forall xB(x,x))\wedge\exists x\forall zS(x,v,z)$

B. $(\forall yP(w,y)\wedge\exists zQ(v,z))\vee\forall xR(x,r)$

2.2-8

A. $H(x,y)$: x is a man and y is his wife.
$C(x,y)$: x cheats on y.

$\forall x\forall y\big(H(x,y)\rightarrow\neg C(x,y)\big)$

B. $P(x)$: x is a environmental problem.
$Q(x)$: x is a tragedy.

$\forall x\big(P(x)\rightarrow\neg Q(x)\big)$

C. $L(x)$: x is a lampshade.
$C(x)$: x can be cleaned.

$\forall x\big(L(x)\rightarrow\neg C(x)\big)$

D. $P(x)$: x is a human.

$Q(x)$:　x can afford home.

$\forall x\big(P(x) \to \neg Q(x)\big)$

E. $P(x)$:　x is formal investigations.
$Q(x)$:　x is a sound practice.
$R(x)$:　x is in the right circumstance.

$\big(P(x) \wedge R(x) \to Q(x)\big) \wedge \forall y\big(\neg R(y)\big)$

2.3 节

2.3-1

x	y	$\neg P(x)$	$D(x,y)$	$E(x,y)$	$\forall x \exists y\big(\neg P(x) \vee D(x,y) \to E(x,y)\big)$
2	2	0	1	1	1
2	3	0	0	0	1
3	2	0	0	0	1
3	3	0	1	0	0

故真值为真

2.3-2

A. F

B. T

C. F

2.3-3

$\forall x(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x P(x)$
$\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(x))$
$\Leftrightarrow \forall x((\neg P(x) \wedge P(x)) \vee (Q(x) \wedge P(x)))$
$\Leftrightarrow \forall x(Q(x) \wedge P(x))$
$\Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
$\Rightarrow \forall x Q(x)$

A. $\Rightarrow \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

B. 设 $P(x)$ 表示 x 参加球赛，$Q(x)$ 表示 x 在比赛中得分了，论域为甲乙两人，所以右式就是甲乙任意参加比赛都得分了，而左式则有四种表示其中有甲参加比赛，乙得分，与右式不符合，说明原式不成立。

$$\exists xP(x) \to \forall xQ(x)$$
$$\Leftrightarrow \neg\exists xP(x) \vee \forall xQ(x)$$
$$\Leftrightarrow \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$$
$$\Leftrightarrow \forall x(P(x) \to Q(x))$$

C.

设$P(x)$表示x参加球赛，$Q(x)$表示x在比赛中得分了，论域为甲乙两人，所以左式就是甲乙任意参加比赛都得分了，右式表示甲或者乙参加比赛时能推出所有人都得分，前后存在矛盾，所以原式不成立。

2.3-4

左式的$P(x)$的x为自由变元，先换名为$P(y)$，则左式为$P(y) \wedge \forall xQ(x)$，

$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$，而$P(y) \Rightarrow \exists xP(x), \forall xQ(x) \Rightarrow \exists xQ(x)$，所以

$P(x) \wedge \forall xQ(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$。

2.3-5

设$P(x)$表示x是自然数，$Q(x)$表示x是整数，个体域为实数集R，所以

$\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists xP(x) \Rightarrow \exists xQ(x)$

(1)$\exists xP(x)$

(2)$P(a)$

(3)$\forall x(P(x) \to Q(x))$

(4)$P(a) \to Q(a)$

(5)$Q(a)$

(6)$\exists xQ(x)$

2.3-6

证明：

(1)$\exists x(P(x) \wedge H(x))$

(2)$P(a) \wedge H(a)$

(3)$P(a)$

(4)$H(a)$

(5)$\forall x(P(x) \to Q(x))$

(6)$P(a) \to Q(a)$

(7)$Q(a)$

(8)$Q(a) \wedge H(a)$

(9)$\exists x(Q(x) \wedge H(x))$

2.3-7

$\neg\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x))$ 错误

2.3-8

$\forall x \forall y(P(x) \to Q(y))$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg P(x) \vee Q(y))$

$\Leftrightarrow \forall x \neg P(x) \vee \forall y Q(y)$

$\Leftrightarrow \neg\exists x P(x) \vee \forall y Q(y)$

$\Leftrightarrow \exists x P(x) \to \forall y Q(y)$

2.3-9

A. $\forall x\big(P(x) \to \exists y Q(x,y)\big)$

$\Leftrightarrow \forall x\left(\exists y\big(P(x) \to Q(x,y)\big)\right)$

$\Leftrightarrow \forall x \exists y\big(P(x) \to Q(x,y)\big)$

B. $\forall x \forall y\left(\exists z\big(P(x,z) \wedge P(y,z)\big) \to \exists u Q(x,y,u)\right)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\left(\exists u\left(\exists z\big(P(x,z) \wedge P(y,z)\big) \to Q(x,y,u)\right)\right)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \exists z \exists u\left(\big(P(x,z) \wedge P(y,z)\big) \to Q(x,y,u)\right)$

C. $\exists x\left(\neg\exists y P(x,y) \to \big(\exists z Q(z) \to R(x)\big)\right)$

$\Leftrightarrow \exists x\left(\forall y \neg P(x,y) \to \big(\exists z Q(z) \to R(x)\big)\right)$

$\Leftrightarrow \exists x\left(\forall y \neg P(x,y) \to \forall z\big(Q(z) \to R(x)\big)\right)$

$\Leftrightarrow \exists x\left(\forall z\left(\forall y \neg P(x,y) \to \big(Q(z) \to R(x)\big)\right)\right)$

$\Leftrightarrow \exists x \forall y \forall z\left(\neg P(x,y) \to \big(Q(z) \to R(x)\big)\right)$

D. $\forall x\big(P(x,y) \vee \forall y R(y,z)\big) \to \forall z Q(x,z)$

$\Leftrightarrow \forall x\big(P(x,u) \vee \forall y R(y,v)\big) \rightarrow \forall z Q(w,z)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\big(P(x,u) \vee R(y,v)\big) \rightarrow \forall z Q(w,z)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\Big(\big(P(x,u) \vee R(y,v)\big) \rightarrow Q(w,z)\Big)$

E. $\neg\Big(\forall x \exists y P(a,x,y) \rightarrow \exists x\big(\neg \forall y Q(y,b) \rightarrow R(x)\big)\Big)$

$\Leftrightarrow \neg\Big(\forall x \exists y P(a,x,y) \rightarrow \exists z\big(\neg \forall u Q(u,b) \rightarrow R(z)\big)\Big)$

$\Leftrightarrow \neg\Big(\forall x \exists y P(a,x,y) \rightarrow \exists z\big(\exists u \neg Q(u,b) \rightarrow R(z)\big)\Big)$

$\Leftrightarrow \neg\Big(\forall x \exists y P(a,x,y) \rightarrow \exists z\Big(\forall u\big(\neg Q(u,b) \rightarrow R(z)\big)\Big)\Big)$

$\Leftrightarrow \neg\Big(\forall x \exists y \exists z \forall u\Big(P(a,x,y) \rightarrow \big(\neg Q(u,b) \rightarrow R(z)\big)\Big)\Big)$

$\Leftrightarrow \exists x \forall y \forall z \exists u\Big(P(a,x,y) \rightarrow \big(\neg Q(u,b) \rightarrow R(z)\big)\Big)$

2.3-10

A. $F(x): x$ 是汽车； $G(y)$ 是火车， $H(x, y)$ 比 y 快；

$\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge$

B. $F(x): x$ 是汽车； $G(y)$ 是火车， $H(x, y)$ 比 y 快；

$\exists y \forall x(F(x) \wedge G(y) \rightarrow$

C. $F(x): x$ 是汽车； $G(y)$ 是火车， $H(x, y)$ 比 y 快；

$\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge$

D. $F(x): x$ 是汽车； $G(y)$ 是飞机， $H(x, y)$ 比 y 慢；

$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow$

2.3-11

A.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

B. According to question a can prove it.

2.4 节

2.4-1

$(1)\forall x(\neg A(x)\to B(x))$	P
$(2)\neg A(c)\to B(c)$	US (1)
$(3)\forall x\neg B(x)$	P
$(4)\neg B(c)$	US (3)
$(5)\neg B(c)\to A(c)$	E (2)
$(6)A(c)$	(4)(5)
$(7)\exists xA(x)$	EG

$$\begin{aligned}&\exists xP(x)\to\forall xQ(x)\\ \Leftrightarrow\ &\neg\exists xP(x)\vee\forall xQ(x)\\ \Leftrightarrow\ &\forall x\neg P(x)\vee\forall xQ(x)\\ \Rightarrow\ &\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\\ \Leftrightarrow\ &\forall x(P(x)\to Q(x))\end{aligned}$$

$(1)\forall x(A(x)\to B(x))$

$(2)\forall x(\neg B(x)\to\neg A(x))$

$(3)\forall x(C(x)\to\neg B(x))$

$(4)\forall x(C(x)\to\neg A(x))$

$(1)\forall x(A(x)\vee B(x))$

$(2)\forall x(\neg A(x)\to B(x))$

$(3)\forall x(B(x)\to\neg C(x))$

$(4)\forall x(\neg A(x)\to\neg C(x))$

$(5)\forall x(C(x)\to A(x))$

$(6)\forall xC(x)\to\forall xA(x)$

$(7)\forall xC(x)$

$(8)\forall xA(x)$

2.4-2

$(1)\forall xA(x)$	附加前提
$(2)\forall x(A(x)\to B(x))$	P
$(3)\forall x(\neg A(x)\vee B(x))$	E (2)
$(4)\forall xB(x)$	I (3)
$(5)\forall xA(x)\to\forall xB(x)$	(1)(5)
$(1)\forall xA(x)\vee\exists xB(x)$	P
$(2)\exists x\neg A(x)\to\exists xB(x)$	E (1)
$(3)\exists x\neg A(x)$	附加前提
$(4)\neg A(c)$	ES (3)
$(5)\forall x(A(x)\vee B(x))$	P
$(6)A(c)\vee B(c)$	US (5)
$(7)B(c)$	(4)(6)
$(8)\exists xB(x)$	EG (7)
$(9)\exists x\neg A(x)\to\exists xB(x)$	(3)(8)

2.4-3

$P(x):x$ 是天鹅， $Q(x):x$ 是癞蛤蟆， $R(x):x$ 会飞

$$\forall x(P(x)\to R(x)),\forall x(Q(x)\to\neg R(x))\Rightarrow\forall x(Q(x)\to\neg P(x))$$

证明：

$(1)\forall x(Q(x)\to\neg R(x))$	P

(2)$Q(x) \to \neg R(x)$	(1)
(3)$\forall x(P(x) \to R(x))$	P
(4)$\forall x(\neg R(x) \to \neg P(x))$	E (3)
(5)$\neg R(x) \to \neg P(x)$	(4)
(6)$Q(x) \to \neg P(x)$	I (2)(5)
(7)$\forall x(Q(x) \to \neg P(x))$	(6)

2.4-4

设 $P(x): x$ 是自然数， $H(x,y): x > y$ ：

$\forall x \neg(P(x) \to \neg H(x,0)), H(2,0) \Rightarrow P(2)$

(1)$\forall x \neg(\neg P(x) \vee H(x,0))$	P E
(2)$\forall x(P(x) \wedge H(x,0))$	E
(3)$P(2) \wedge H(2,0)$	US
(4)$P(2)$	I (3)

2.4-5

(1)$\exists x P(x)$	P
(2)$\exists x P(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x) \to R(x))$	P
(3)$P(x) \vee Q(x) \to R(x)$	(1)(2)
(4)$P(a)$	ES
(5)$P(a) \vee Q(a)$	I (4)
(6)$P(a) \vee Q(a) \to R(a)$	US
(7)$R(a)$	(5)(6)
(8)$\exists x R(x)$	P

(9)$\exists x\exists y(R(x)\wedge R(y))$	(8)

(1)$\exists xP(x)$	P
(2)$P(a)$	ES
(3)$\forall x(P(x)\to(Q(y)\wedge R(x)))$	P
(4)$P(a)\to(Q(y)\wedge R(a))$	US
(5)$Q(y)\wedge R(a)$	(2)(4)
(6)$Q(y)$	I
(7)$R(a)$	I
(8)$P(a)\wedge R(a)$	(2)(7)
(9)$\exists x(P(x)\wedge R(x))$	EG
(10)$Q(y)\wedge\exists x(P(x)\wedge R(x))$	(6)(9)

(1)$\forall x(\forall y(H(y)\wedge N(x,y)))$	P
(2)$H(a)\wedge N(x,a)$	US
(3)$H(a)$	I
(4)$N(x,a)$	I
(5)$\forall x(H(x)\to A(x))$	P
(6)$H(a)\to A(a)$	US
(7)$A(a)$	(3)(6)
(8)$A(a)\wedge N(x,a)$	(4)(7)
(9)$\exists y(A(y)\wedge N(x,y))$	EG

2.4-6

(4)中的 UG 使用错误

2.4-7

设 $P(x):x$ 是有理数， $Q(x):x$ 是实数， $R(x):x$ 是整数。

$\forall x(P(x)\to Q(x)),\exists x(P(x)\wedge R(x))\Rightarrow\exists x(Q(x)\wedge R(x))$

证明：

$(1)\exists x(P(x)\wedge R(x))$	P
$(2)P(a)\wedge R(a)$	ES
$(3)P(a)$	I
$(4)R(a)$	I
$(5)\forall x(P(x)\to Q(x))$	P
$(6)P(a)\to Q(a)$	US
$(7)Q(a)$	(3)(6)
$(8)Q(a)\wedge R(a)$	(4)(7)
$(9)\exists x(Q(x)\wedge R(x))$	EG

设 $P(x):x$ 是大学生， $Q(x):x$ 是刻苦的，a 代表小王。

$\forall x(P(x)\to Q(x)),\neg Q(a)\Rightarrow\neg P(a)$

证明：

$(1)\forall x(P(x)\to Q(x))$	P
$(2)P(a)\to Q(a)$	US
$(3)\neg Q(a)\to\neg P(a)$	E
$(4)\neg Q(a)$	P
$(5)\neg P(a)$	(3)(4)

设 $P(x):x$ 喜欢步行， $Q(x):x$ 喜欢乘汽车， $R(x):x$ 喜欢骑自行车

$\forall x(P(x)\to\neg Q(x)),\forall x(Q(x)\vee R(x)),\exists x\neg R(x)\Rightarrow\exists x\neg P(x)$

证明：

$(1)\exists x \neg R(x)$ P

$(2)\neg R(a)$ ES

$(3)\forall x(Q(x) \vee R(x))$ P

$(4)Q(a) \vee R(a)$ US

$(5)Q(a)$ (2)(4)

$(6)\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ I

$(7)P(a) \rightarrow \neg Q(a)$ US

$(8)Q(a) \rightarrow \neg P(a)$ E (7)

$(9)\neg P(a)$ (5)(8)

$(10)\exists x \neg P(x)$ EG

2.4-8

设 $P(x): x$ 是大学生， $Q(x): x$ 是文科生， $R(x): x$ 是理科生， $H(x): x$ 是优等生

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x)), \exists x H(x), \neg R(a) \wedge H(a) \Rightarrow P(a) \rightarrow Q(a)$

证明:

$(1)P(a)$ 附加前提

$(2)\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \vee R(x))$ P

$(3)P(a) \rightarrow Q(a) \vee R(a)$ US

$(4)Q(a) \vee R(a)$ (1)(3)

$(5)\neg R(a) \wedge H(a)$ P

$(6)\neg R(a)$ I (5)

$(7)Q(a)$ (4)(6)

$(8)P(a) \rightarrow Q(a)$ (1)(7)

设 $P(x): x$ 是学生， $Q(x): x$ 是科学家， $R(x): x$ 是巫师， $H(x, y): x$ 相信 y

$\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(y)\rightarrow H(x,y))),\forall x(P(x)\rightarrow\forall y(R(y)\rightarrow\neg H(x,y)))\Rightarrow\forall x(Q(x)\rightarrow\neg R(x))$

证明：

(1)$\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(y)\rightarrow H(x,y)))$	P
(2)$P(a)\wedge\forall y(Q(y)\rightarrow H(a,y)))$	ES
(3)$P(a)$	I (2)
(4)$\forall y(Q(y)\rightarrow H(a,y))$	I (2)
(5)$\forall x(P(x)\rightarrow\forall y(R(y)\rightarrow\neg H(x,y)))$	P
(6)$P(a)\rightarrow\forall y(R(y)\rightarrow\neg H(a,y))$	US
(7)$\forall y(R(y)\rightarrow\neg H(a,y))$	(3)(6)
(8)$\forall y(H(a,y)\rightarrow\neg R(y))$	E (7)
(9)$\forall y(Q(y)\rightarrow\neg R(y))$	I (4)(8)

2.4-9

设 $P(x):x$ 是科研工作者，$Q(x):x$ 是刻苦认真专研的，$R(x):x$ 是聪明的，$H(x):x$ 在事业中获得成功。

$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x)),\forall x(Q(x)\wedge R(x)\rightarrow H(x)),P(a)\wedge R(a)\Rightarrow H(a)$

证明：

(1)$P(a)\wedge R(a)$	P
(2)$P(a)$	I (1)
(3)$R(a)$	I (1)
(4)$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
(5)$P(a)\rightarrow Q(a)$	US (4)
(6)$Q(a)$	(2)(5)
(7)$Q(a)\wedge R(a)$	(3)(6)
(8)$\forall x(Q(x)\wedge R(x)\rightarrow H(x))$	P

(9) $Q(a) \wedge R(a) \to H(a)$ US (8)

(10) $H(a)$ (7)(9)

2.4-10

A.

$P(x)$: x is in the class.

$Q(x)$: x has a graphing calculator.

$R(x)$: x understands the trigonometric functions.

a: Ralphie

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(Q(x) \to R(x)) \Longrightarrow P(a) \to R(a)$$

(1) $\forall x(P(x) \to Q(x))$ P

(2) $P(a) \to Q(a)$ US (1)

(3) $\forall x(Q(x) \to R(x))$ P

(4) $Q(a) \to R(a)$ US (1)

(5) $P(a) \to R(a)$ (2)(4)

B.

$P(x)$: x is a member of the Titans.

$Q(x)$: x can hit the ball a long way.

$R(x)$: x can make a lot of money.

a: Ken

$$P(a) \wedge Q(a), \forall x(Q(x) \to R(x)) \Longrightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$$

(1) $\forall x(Q(x) \to R(x))$ P

(2) $(Q(a) \to R(a))$ US (1)

(3) $P(a) \wedge Q(a)$ P

(4) $Q(a)$ (3)

(5) $P(a)$ (3)

(6) $R(a)$ (2)(4)

(7) $P(a) \wedge R(a)$ (5)(6)

(8) $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ EG (7)

C.

$P(x)$: x is in the discrete mathematics class.

$Q(x)$: x loves proofs.

$R(x)$: x has never taken calculus.

$$\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x(P(x) \wedge R(x)) \Longrightarrow \exists x(Q(x) \wedge R(x))$$

(1) $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ P

(2) $P(a) \wedge R(a)$	ES (1)
(3) $P(a)$	(2)
(4) $R(a)$	(2)
(5) $\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$	P
(6) $P(a) \rightarrow Q(a)$	US (5)
(7) $Q(a)$	(3)(6)
(8) $Q(a) \wedge R(a)$	(4)(7)
(9) $\exists x\big(Q(x) \wedge R(x)\big)$	EG (8)

第三章

3.1 节

3.1-1

a. $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

b. $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

c. $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

3.1-2

a. $\{x|ax+b=0 \wedge a\neq 0 \wedge a\in R \wedge b\in R\}$

b. $\{(x,y)|x^2+y^2=1 \wedge x\in R \wedge y\in R\}$

c. $\{x|(x=3n \vee x=7n) \wedge n\in Z^+\}$

3.1-3

$A=\{1\}$ $B=\{1,\{1\}\}$ $C=\{1,\{1,\{1\}\}\}$

3.1-4

证明：

a. 正确

因为$B\subseteq C$, 所以对于$\forall x\in B$，$x\in C$, 又$A\in B$, 所以$A\in C$。

b. 不正确

由 a 得，该命题不正确。

c. 不正确

设$A=\{1\}, B=\{1,\{1\}\}, C=\{\{1,\{1\}\}\}$,

$A\subseteq B, B\in C$, 而$A\notin C$, 所以该命题不正确。

d. 不正确

同 c。

e. 不正确

设$A=\{1\}, B=\{1,\{1\}\}, C=\{\{1\}\}$,

$A\in B, B\not\subset C$, 而$A\in C$，所以该命题不正确。

f. 不正确

设$A=\{1\}, B=\{1,\{1\}\}, C=\{\{1\},\{1,\{1\}\}\}$,

$A\subseteq B, B\in C$, 而$A\in C$，所以该命题不正确。

3.1-5

a. 不正确

b. 正确

c. 不正确

d. 正确

e. 正确

f. 不正确

3.1-6

a. $\rho(A)=\Big\{\emptyset,\{\emptyset\},\{a\},\big\{\{b\}\big\},\{\emptyset,a\},\big\{\emptyset,\{b\}\big\},\big\{a,\{b\}\big\},\big\{\emptyset,a,\{b\}\big\}\Big\}, |\rho(A)|=8$

b. $\rho(A)=\big\{\emptyset,\{\{a,\{b\}\}\}\big\}, |\rho(A)|=2$

c. $\rho(A)=\{\emptyset\}, |\rho(A)|=1$

3.1-7

他自己给自己刮脸。悖论：假如他自己不给自己刮脸，那么他就要给他自己刮脸。但他说他仅给村子里不给自己刮脸的人刮脸。这与他给他自己刮脸相矛盾。

3.1-8

a. 如果$S\in S$，同时 S 应该是一个不以自身为元素的集合，即$S\notin S$，矛盾。

b. 如果$S\notin S$，那么 S 满足 S 中元素的形式定义$A\notin A$，这样就有$S\in S$，矛盾。

3.1-9

(a)(e)

3.1-10

$$\{\emptyset\},\{C\},\{C++\},\{PASCAL\},\{Ada\},\{C,C++\},\{C,PASCAL\},\{C,Ada\},\{C++,PASCAL\},\{C++,Ada\},$$
$$\{PASCAL,Ada\},\{C,C++,PASCAL\},\{C,C++,Ada\},\{C,PASCAL,Ada\},\{C++,PASCAL,Ada\},$$
$$\{C,C++,PASCAL,Ada\}.$$

3.1-11

a. $\{a,b,c,d,e,f,g\}$

b. $\{1,2,4,5\}$

c. $\{x|x\neq 0(mod3), x\in N\}$

3.2 节

3.2-1

a. $\{0,1,2,3,6,7,8,9\}$

b. $\{2,3\}$

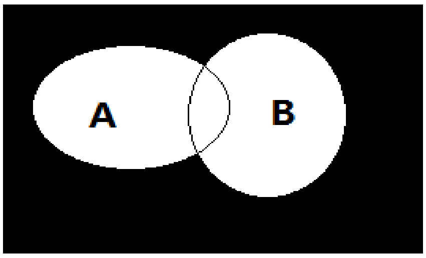
c. $\{0,1,3,4,5,7,9\}$

d. $\{2,6,8\}$

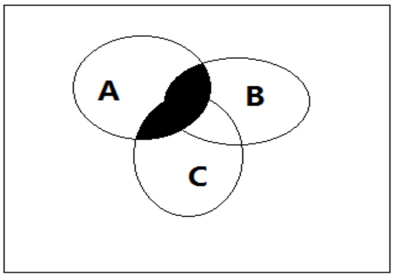
e. $\{2,3\}$

3.2-2

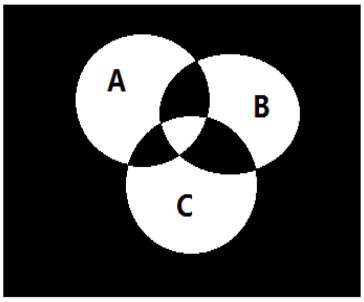
a.



b.



c.



3.2-3

a. $B \cap C - A$

b. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) - (A \cap B \cap C)$

c. $\overline{A \cup B \cup C} \cup (A \cap B \cap C)$

3.2-4

a. 不正确

设$A = \{1,2\}, B = \{1,2\}, C = \{1\}$,

$A \cup B = A \cup C$,而 $B \neq C$。

b. 不正确

设$A = \{1\}, B = \{1,2\}, C = \{1,3\}$,

$A \cap B = A \cap C$,而$B \neq C$。

3.2-5

证明：

a. $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B) \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin B \to x \notin A) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in \bar{B} \to x \in \bar{A})$

$\Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B)$ $\therefore A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} = \{x | x \in B\} = B$

同理得，$A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$ ，$\therefore A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B)$ $\therefore A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} = \{x | x \in A\} = A$

同理得，$A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$，$\therefore A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

b. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \to x \notin B) \wedge (x \in B \to x \notin A)) \Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \to x \in \bar{B}) \wedge (x \in B \to x \in \bar{A})) \Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} \wedge B \subseteq \bar{A}$

又 $A\subseteq\bar{B}\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow x\in\bar{B})\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\rightarrow x\notin B)\Leftrightarrow(\forall x)(x\in B\rightarrow x\notin A)\Leftrightarrow(\forall x)(x\in B\rightarrow x\in\bar{A})\Leftrightarrow B\subseteq\bar{A}$

$$\therefore A\cap B=\emptyset\Leftrightarrow A\subseteq\bar{B}\Leftrightarrow B\subseteq\bar{A}$$

c. $A\cup B=U\Leftrightarrow(\forall x)(x\notin A\rightarrow x\in B)\Leftrightarrow\bar{A}\subseteq B$，

同理得，$A\cup B=U\Leftrightarrow\bar{B}\subseteq A,\therefore A\cup B=U\Leftrightarrow\bar{A}\subseteq B\Leftrightarrow\bar{B}\subseteq A$。

d. $A=B\Rightarrow A\oplus B=\{x|(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}=$
$\{x|(x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in B\wedge x\notin B)\}=\emptyset$

$A\oplus B=\emptyset\Rightarrow\{x|(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}=\emptyset\Rightarrow\{x|(x\in A\wedge x\notin B)\}=\emptyset$*且*$\{x|(x\in B\wedge x\notin A)\}=\emptyset\Rightarrow(\forall x)\big((x\in A\rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\rightarrow x\in A)\big)$
$\Rightarrow A=B$

$$\therefore A=B\Leftrightarrow A\oplus B=\emptyset$$

3.2-6
证明：

a. $A=B$

设$A=B$，则$A\cap B=A=A\cup B$；

设$A\cap B=A\cup B$，则$A\subseteq A\cap B,B\subseteq A\cap B$,所以$A\subseteq B,B\subseteq A$,所以$A=B$。

b. $A=B=\emptyset$

设$A=B=\emptyset$,则$A-B=\emptyset=B$；
设$A-B=B$,即$\{x|x\in A\wedge x\notin B\}=\{x|x\in B\}$
若$B\neq\emptyset,(\forall x)(x\in A\wedge x\notin B)=(\forall x)(x\in B)$显然不成立，所以$B\neq\emptyset$，
则 $A-B=\{x|x\in A\wedge x\in\bar{B}\}=\{x|x\in A\wedge x\in U\}=\{x|x\in A\}=B=\emptyset$，即$A=B=\emptyset$。

c. $A\subseteq\bar{B}\cup\bar{C}$

$$(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{C})=A\cap(\bar{B}\cup\bar{C})$$

所以$(A-B)\cup(A-C)=A\Leftrightarrow A\cap(\bar{B}\cup\bar{C})=A\Leftrightarrow A\subseteq\bar{B}\cup\bar{C}$

d. $A\cap(\bar{B}\cup\bar{C})=\emptyset$

由 c 得，$(A-B)\cup(A-C)=\emptyset\Leftrightarrow A\cap(\bar{B}\cup\bar{C})=\emptyset$

e. $A\subseteq\bar{B}\cap\bar{C}$

$$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap\bar{B})\cap(A\cap\bar{C})=A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$$

所以$(A-B)\cap(A-C)=A \Leftrightarrow A\cap\bar{B}\cap\bar{C}=A \Leftrightarrow A\subseteq\bar{B}\cap\bar{C}$

f. $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}=\emptyset$

由 *e* 得，$(A-B)\cap(A-C)=\emptyset \Leftrightarrow A\cap\bar{B}\cap\bar{C}=\emptyset$

3.2-7

证明：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=(A\cap B)\cup C$$

所以$A\cap C=C, C\subseteq A$

3.2-8

$$A=\emptyset$$

证明：

设$A\oplus B=B$

$A\oplus B=B \Rightarrow (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})=B \Rightarrow \big((A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})\big)\cup (A\cap B)=B\cup(A\cap B) \Rightarrow (A\cup B)\cup(A\cap B)=B\cup(A\cap B) \Rightarrow A\cup B=B \Rightarrow A\subseteq B$

由$A\subseteq B$，$(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})=B \Leftrightarrow B\cap\bar{A}=B \Leftrightarrow B\subseteq\bar{A} \Leftrightarrow A\subseteq\bar{B}$

由$A\subseteq B$，$A\subseteq\bar{B}$得，$A=\emptyset$。

设$A=\emptyset$,则$A\oplus B=(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})=B\cap U=B$

得证。

3.2-9

a. $\{x|x\neq-1\ 且x\neq1, x\in R\}$

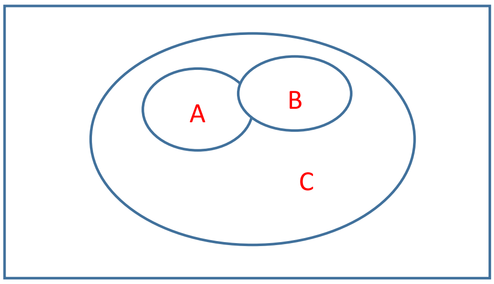
b. $\{x|x\neq0\ 且x\neq1\ 且x\neq-2, x\in R\}$

c. $\{x|x\neq1, x\in R\}$

d. $\{x|x\neq-2\ 且x\neq-1\ 且x\neq1\ 且x\neq0, x\in R\}$

3.2-10

a.



b. $A\cup B$

c. $A\subseteq C, B\subseteq C, \therefore (\forall x)(x\in A\to x\in C)且(\forall x)(x\in B\to x\in C)$，即$(\forall x)(x\in A\vee x\in B\to x\in C)$,即$A\cup B\subseteq C$。

3.3 节

3.3-1

设 A 表示会 C 语言的人的集合，B 表示会 Java 的人的集和，C 表示会 Perl 语言的人的集合

$|A \cup B \cup C| = 50$ 且$|A \cup B \cup C|$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A| = 40, |B| = 35, |C| = 10, |A \cap B \cap C| = 5$$

所以$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| = -50 + 40 + 35 + 10 + 5 = 40$

会两门及以上的人数为：

$$|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 2|A \cap B \cap C| = 40 - 2 * 5 = 30$$

只会两门的人数为：

$$|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)| - |A \cap B \cap C| = 30 - 5 = 25$$

3.3-2

设 A,B,C 分别表示能被 2、3、7 整除的整数的集合，则有

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 125 + 83 + 35 - 41 - 17 - 11 + 5 = 179$$

所以能被 2、3、7 至少一个数整除数的个数为 179。

3.3-3

设 A,B,C 分别表示定杂志甲乙丙的同学集合，则有

a. $|A \cap B \cap C| = -(|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|) + |A \cup B \cup C| = -(25 + 26 + 26 - 11 - 9 - 8) + 52 = 3$

b. 订了两本及以上的人：

$|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 2|A \cap B \cap C| = 11 + 9 + 8 - 2 * 3 = 22$

只订一种杂志的学生人数：

$|A \cup B \cup C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)| = 52 - 22 = 30$

3.3-4

设 A,B,C 分别表示会 C, java, C++的人的集合，则有

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

其中，$|A| = 14, |B| = 12, |C| = 6, |A \cap B| = 6, |A \cap C| = 5, |A \cap B \cap C| = 2$

$$|A \cup B \cup C| = 14 + 12 + 6 - 6 - 5 - |B \cap C| + 2 = 23 - |B \cap C|$$

由或用 C++编程的共六人且他们均会另一种语言和 5 人既会用 C++又会用 C 编程，得$|B \cap C| = 6 - 5 + |A \cap B \cap C| = 3$

$$|A \cup B \cup C| = 23 - 3 = 20$$

三种都不会的人数为

$$25 - |A \cup B \cup C| = 25 - 20 = 5$$

3.3-5

设 A,B,C 分别表示选修 formal logic, operating systems, compiler construction principles 的学生的集合，则有

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 64 + 94 + 58 - 26 - 28 - 22 + 14 = 154$$

a. 所有课都没选的学生人数为

$260-|A\cup B\cup C|=106$

b. 选两门及以上的学生人数为：

$|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)|=|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-2|A\cap B\cap C|=26+28+22-2*14=48$

只选一门的学生人数为

$$|A\cup B\cup C|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)|=154-48=106$$

3.4 节

3.4-1

a. 设 R 表示所有有限长度二进制数的集合，则其归纳证明如下：

(1) 如果$a\in\{0,1\}$, 那么$a\in R$。

(2) 如果$a,b\in R$, 那么$ab\in R$。

(3) R 仅包含能由有限次应用（1）（2）构成的元素。

b. 设 R 表示以 a 开头的有限长度的英文字母串组成的集合，D 为英文字母串集合，则其归纳证明如下：

(1) $a\in R$。

(2) 若$x\in R,y\in D$, 则$xy\in R$。

(3) R 仅包含能由有限次应用（1）（2）构成的元素。

C. 设 R 表示所有不能被 3 整除的正整数组成的集合，则其归纳证明如下：

(1) $1\in R,2\in R$。

(2) 若$a\in R$, 则$a+3\in R$。

(3) R 仅包含能由有限次应用（1）（2）构成的元素。

3.4-2

证明：当$\mathrm{n}=1$时，$\neg A_1\Leftrightarrow\neg A_1$

假设当$\mathrm{n}=\mathrm{k}$时，$\neg(A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_k)\Leftrightarrow(\neg A_1\wedge\neg A_2\wedge\cdots\wedge\neg A_k)$

当$\mathrm{n}=\mathrm{k}+1$时，

$\neg(A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_k\vee A_{k+1})\Leftrightarrow\neg(A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k)\wedge\neg A_{k+1}\Leftrightarrow(\neg A_1\wedge\neg A_2\wedge\cdots\wedge\neg A_k)\wedge\neg A_{k+1}\Leftrightarrow(\neg A_1\wedge\neg A_2\wedge\cdots\wedge\neg A_k\wedge\neg A_{k+1})$

即当 $n=k+1$ 时也成立。所以

$\neg(A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n)\Leftrightarrow(\neg A_1\wedge\neg A_2\wedge\cdots\wedge\neg A_n)$

3.4-3

证明：当$n=1$时，$1*2=2=1*2*3/3$

假设当$n=k$时，$1*2+2*3+\cdots+k(k+1)=k(k+1)(k+2)/3$

当 $n=k+1$ 时，$1*2+2*3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

即当$n=k+1$时也成立。所以

当 n 为正整数时有$1*2+2*3+\cdots+n(n+1)=n(n+1)(n+2)/3$。

3.4-4

证明：当$n=1$时，$2^n*2^n-1=2*2-1=3$，能被 3 整除

假设当$n=k$时，2^n*2^n-1能被 3 整除，即$2^k*2^k-1=3a$，$a\in N^+$

当 $n=k+1$ 时，$2^{k+1}*2^{k+1}-1=4*2^k*2^k-1=4(3a+1)-1=12a+3$，能被 3 整除

即当$n=k+1$时也成立。所以

对所有正整数 n 均有2^n*2^n-1能被 3 整除。

3.4-5

证明：即要证明$n=2p+5q(n\geq 4,$其中p,q为自然数$)$。

(1)4=2*2,5=5*1,6=2*3。

(2)假设$n<k,$且$n-2\geq 4$时，有

$$n=2p+5q(p,q\text{为自然数})。$$

现证$n=k$时，上式亦成立。

由假设$k-2<k,$且$k-2\geq 4,$

所以$(k-2)=2p+5q$

所以$k=2(p+1)+5q$

因此$n=k$时，也成立。证毕。

3.4-6

可以构成 5、6、10、11、12、15、16、17、18、

20 及以上。

证明：当$n<20$时，显然易证

又 20=5*4，21=5*3+6，22=5*2+6*2，23=5+6*3，24=6*4,25=5*5。

假设$n<k,$且$\mathrm{n}-5\geq 20$时，有

$n=5p+6q(p,q$为自然数$)$。

现证$n=k$时，上式亦成立。

由假设$k-5<k,$且$k-5\geq 20$，

所以$k-5=5p+6q$

所以$k=5(p+1)+6q$

因此$n=k$时，也成立。证毕。

3.4-7

证明：当$i=0$时，$c=0$。

假设当$i=k$时成立，则$c=k*k$。

当$i=k+1$时，$c=\ k*k+k+(k+1)=(k+1)*(k+1)$

即当$n=k+1$时也成立。证毕。

3.4-8

无效。

因为*(a)*和*(b)*都为成对证明，所以*(c)*应该改为证明 *p(n+1)*和 *p(n+2)*都为真。

3.4-9

当$n=2$时前一匹马和自己的颜色一样，后一匹马和自己的颜色一样，无法推出这两匹马的颜色相同，因为将 *n* 规模分解成若干个 *n-1* 规模的问题时，如果分解方法并不是对所有的 *n* 都成立，那么数学归纳法将失效，即无法推出这 *k+1* 匹马

的颜色相同。
3.4-10

证明：当$n=7$时，$3^n=729,7!=5040$。

假设当$n=k$时，不等式成立，即$3^k<k!$。

当$n=k+1$时，$3^{k+1}=3*3^k<3*k!$
因为$k\geq 7$,所以$3^{k+1}<3*k!<(k+1)*k!=(k+1)!$
即当$n=k+1$时也成立。所以
当$n>6$时，$3^n<n!$。
3.4-11
n 块需要掰 *n-1* 次。
证明：当$n=1$时，需要掰 0 次。
假设当$n=k$时，需要掰 *n-1* 次。
当$n=k+1$时，由假设得，掰了 *n-1* 次后还剩下一个小矩形巧克力块，它由两个小正方形组成，所以只需再掰一次，即一共需要掰 *n* 次。
即当$n=k+1$时也成立。得证。

3.5 节

3.5-1

$$A\times B=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$$
$$A\times\{1\}\times B=\{\langle 0,1,1\rangle,\langle 0,1,2\rangle,\langle 1,1,1,\rangle,\langle 1,1,2\rangle\}$$
$$A\times A\times B=\{\langle 0,0,1\rangle,\langle 0,0,2\rangle,\langle 0,1,1\rangle,\langle 0,1,2\rangle,\langle 1,0,1\rangle,\langle 1,0,2\rangle,\langle 1,1,1\rangle,\langle 1,1,2\rangle\}$$
$$A\times B\times B=\{\langle 0,1,1\rangle,\langle 0,1,2\rangle,\langle 0,2,1\rangle,\langle 0,2,2\rangle,\langle 1,1,1,\rangle,\langle 1,1,2\rangle,\langle 1,2,1\rangle,\langle 1,2,2\rangle\}$$
3.5-2
$$\rho(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$
$$A\times\rho(A)=\{\langle a,\emptyset\rangle,\langle a,\{a\}\rangle,\langle a,\{b\}\rangle,\langle a,\{a,b\}\rangle,\langle b,\emptyset\rangle,\langle b,\{a\}\rangle,\langle b,\{b\}\rangle,\langle b,\{a,b\}\rangle\}$$
3.5-3
$A\times B$表示所有计算机院教授教授计算机系所开设课程的集合。
3.5-4

因为$A\subseteq B$, 所以$\{\langle a,c\rangle|a\in A,c\in C\}\subseteq\{\langle b,c\rangle|b\in B,c\in C\}$。

因为$C\subseteq D$, 所以$\{\langle b,c\rangle|b\in B,c\in C\}\subseteq\{\langle b,d\rangle|b\in B,d\in D\}$。

所以$\{\langle a,c\rangle|a\in A,c\in C\}\subseteq\{\langle b,d\rangle|b\in B,d\in D\}$，

即$A\times C\subseteq B\times D$。

3.5-5

设$A=\{sedan,coupe,van\},B=\{gas,diesel\}$。

所有可能的汽车模型即为
$A\times B$

$=\{\langle sedan,gas\rangle,\langle sedan,diesel\rangle,\langle coupe,gas\rangle,\langle coupe,diesel\rangle,\langle van,gas\rangle,\langle van,siesel\rangle\}$。

3. 5-6
假设 a,b 为平面坐标。

a. $A \times B$表示$-2 \le x \le 3$ 和 $1 \le y \le 5$所构成的平面图形。

b. $B \times A$表示$1 \le x \le 5$ 和 $-2 \le y \le 3$所构成的平面图形。

3.6 节

3.6-1

$$R = A \times B = \{< a, \alpha >, < a, \beta >, < b, \alpha >, < b, \beta >\}$$

$$R_0 = \emptyset$$

$$R_1 = \{< a, \alpha >\}$$

$$R_2 = \{< a, \beta >\}$$

$$R_3 = \{< b, \alpha >\}$$

$$R_4 = \{< b, \beta >\}$$

$$R_5 = \{< a, \alpha >, < a, \beta >\}$$

$$R_6 = \{< a, \alpha >, < b, \alpha >\}$$

$$R_7 = \{< a, \alpha >, < b, \beta >\}$$

$$R_8 = \{< a, \beta >, < b, \alpha >\}$$

$$R_9 = \{< a, \beta >, < b, \beta >\}$$

$$R_{10} = \{< b, \alpha >, < b, \beta >\}$$

$$R_{11} = \{< a, \alpha >, < a, \beta >, < b, \alpha >\}$$

$$R_{12} = \{< a, \alpha >, < a, \beta >, < b, \beta >\}$$

$$R_{13} = \{< a, \alpha >, < b, \alpha >, < b, \beta >\}$$

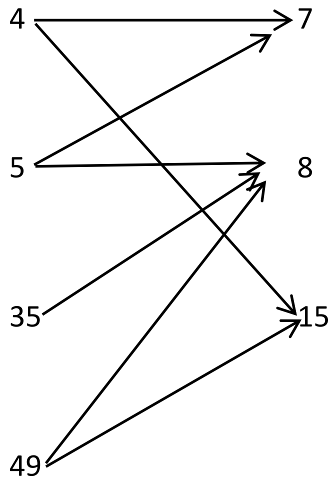
$$R_{14} = \{< a, \beta >, < b, \alpha >, < b, \beta >\}$$

$$R_{15} = R$$

3.6-2

关系矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

关系图为



3.6-3

根据课本 87 页定义 3.6.2 可知：$A_1 \times A_2 \times \dots\dots \times A_n$的任一子集$R$称为$A_1, A_2, \dots\dots, A_n$上的一个 n 元关系.

故从$A_1, A_2, \dots\dots, A_n$上可以定义$|\rho(A_1 \times A_2 \times \dots\dots \times A_n)| = 2^{\prod_{k=1}^{n}|A_k|}$ 个 n 元关系.

3.6-4

$$P \cap Q = \emptyset$$

$$P \cup Q = \{<1,2>,<1,3>,<2,3>,<2,4>,<3,1>,<3,4>,<4,1>\}$$

$$domP = \{1,2,3,4\}, ranP = \{1,2,3,4\}$$

$$domQ = \{1,2,3\}, ranQ = \{1,3,4\}$$

$$domP \cap domQ = \{1,2,3\}$$

$$dom(P \cap Q) = \emptyset$$

$$ranR \cap ranQ = \{1,3,4\}$$

$$ran(P \cap Q) = \emptyset$$

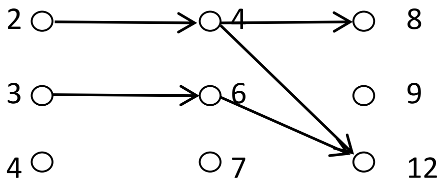
3.6-5

根据题意得：

$$R_1 = \{<2,4>, <2,6>, <3,6>\}$$

$$R_2 = \{<4,8>, <4,12>, <6,12>\}$$

关系图如下：



可得$R_1 \circ R_2 = \{<2,8>, <2,12>, <3,12>\}$

关系矩阵$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

故 $R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.6-6

(a)

According to conditions, we can infer that:

$$R = \{<1,1>, <1,4>, <1,6>, <1,9>, <2,4>, <2,6>, <3,6>, <3,9>, <4,4>\}$$

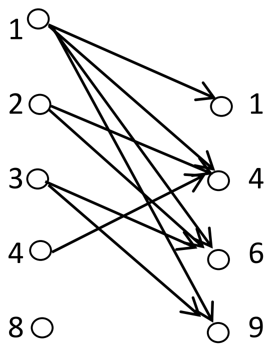
$$domR = \{1,2,3\}$$

$$ranR = \{1,4,6,9\}$$

Matrix of R:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Graph of R:



(*b*)

$$R = \{< 1,1 >, < 2,4 >, < 3,9 >\}$$

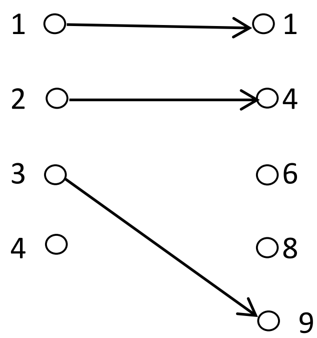
$$domR = \{1,2,3\}$$

$$ranR = \{1,4,9\}$$

Matrix of R:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Graph of R:



(*c*)

$$R = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<2,2>,<2,3>,<2,4>,$$
$$<2,5>,<3,3>,<3,4>,<3,5>,<4,4>,<4,5>,<5,5>\}$$

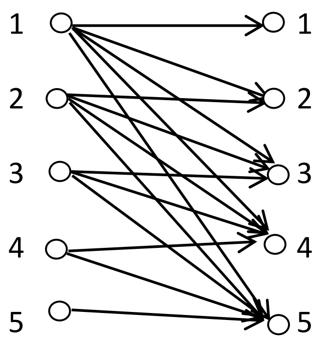
$$domR = \{1,2,3,4,5\}$$

$$ranR = \{1,2,3,4,5\}$$

Matrix of R:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Graph of R:



3.6-7

Formalize the conditions: $R = \{<a,b> | a = b^k, a \in Z, b \in Z, k \in Z^+\}$

We can't find a k in Z^+ *for* $4 = 16^k$, $1 = 7^k$, $2 = 8^k$, $2 = 32^k$.

k = 3 for $8 = 2^3$, *k = 1 for* $13 = 3^1$.

So we can figure out (c), (b) belong to R.

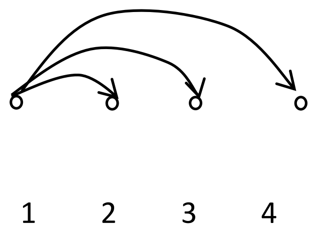
3.7 节

3.7-1

(*a*)$R = \{<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,4>\}$

(*b*)$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

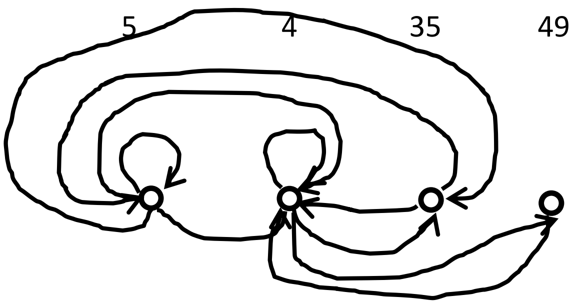
(c)



3.7-2

(a)R 中的所有序偶为<5, 5>, <5,4>, <5,35>, <4, 5>, <4, 4>, <4,35>, <4,49>, <35,5>, <35,4>, <49,4>.

(b)



(c)

对于任意$a \in A$，存在aRa,说明 R 满足对称性.

对于任意$a, b \in A$，若xRy,则必有yRx,说明 R 满足对称性.

3.7-3

满足自反性,对称性,反对称性,传递性.

3.7-4

解：

(a)反自反,反对称,传递

(b)自反,对称,传递

(c)自反,对称,传递

(d)反自反,反对称,传递

3.7-5

(*a*)自反,反对称,传递

(*b*)自反,对称,传递

(*c*)自反,对称

3.7-6

(*a*)*R*1 不具有特性;

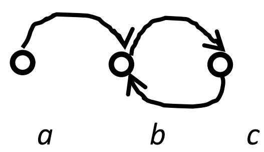
(*b*)*R*2 具有自反性,反对称性,传递性;

(*c*)*R*3 具有自反性,对称性,传递性;

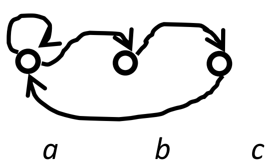
(*d*)*R*4 具有自反性,对称性,反对称性,传递性.

3.7-7

(*a*)



(*b*)



3.7-8

由反对称关系的关系矩阵特点可知:

若$r_{ij} = 1$,则$r_{ji} = 0$,

而由逆关系的定义可知,

若$r_{ij}=1$,则$r_{ij}^{-1}=0$,即r_{ij}和r_{ij}^{-1}不可能同时为 1($i\neq j$)

即主对角线的位置上应该全为 1,此时矩阵中的非零元素最多为 6 个.

3.7-9

不正确；若$R=\emptyset$,则 R 是对称和传递的,然而 R 不是自反的.

3.7-10

(*a*)(充分性) 设$I_A\subseteq R$,对于任意的$x\in A$,有$<x,x>\in I_A$,而$<x,x>\in R$,故 R 是自反；

(必要性) 设 R 是自反的,若$<x,y>\in I_A$,则 $x=y$,从而$<x,x>\in I_A$,故$I_A\subseteq R$.

(*b*) (充分性)设$I_A\cap R=\emptyset$.若存在$x\in A$,使得$<x,x>\in R$,由$<x,x>\in I_A$可得$<x,x>\in I_A\cap R$,这与$I_A\cap R=\emptyset$矛盾.所以对任一$x\in A$,都有$<x,x>\notin R$,因此 R 是反自反的；

(次要性) 设 R 是反自反的,因为对于任意$x\in A$,都有$<x,x>\notin R$,所以$I_A\cap R=\emptyset$.

(*c*) (充分性) 设$R=R^{-1}$对于任意的$x,y\in A$,若有$<x,y>\in R$,则有$<y,x>\in R^{-1}=R$,所以 R 是对称的；

(必要性) 设 R 是对称的,因为$<x,y>\in R,<y,x>\in R\Leftrightarrow <x,y>\in R^{-1}$,所以$R=R^{-1}$.

(*d*)（充分性） 设$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$,对任意的$x,y\in A$,若$<x,y>\in R,<y,x>\in R$,则$<y,x>\in R^{-1}$,从而$<x,y>\in R\cap R^{-1}$,而$R\cap R^{-1}=I_A$,所以$<x,y>\in I_A$,因此有 $x=y$,故 R 是反对称的；

(必要性) 设 R 是反对称的,若$<x,y>\in R\cap R^{-1}$,则$<x,y>\in R$且$<x,y>\in R^{-1}$,即$<x,y>\in R$且$<y,x>\in R$,从而$x=y$,所以$<x,y>=<x,x>\in I_A$,

故$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$.

(e)(充分性)设$R \circ R \subseteq R$,则对于任意$< x, y >, < y, z > \in R$,都有$< x, z > \in R$,即 R 是传递的；

(必要性)设 R 是传递的,则若$< x, y >, < y, z > \in R$,则$< x, z > \in R$,又$R \circ R = \{< x, z > | x \in A \wedge z \in A \wedge (\exists y)(y \in A \wedge < x, y > \in R \wedge < y, z > \in R)\} \subseteq R$

3.7-11

(a)真；

因为 R 是自反的,所以$\forall x(x \in A \to xRx)$,同理得,$\forall y(y \in A \to ySy)$,

所以$\forall x(x \in A \to xR \circ Sx)$,即$R \circ S$也是反自反的.

(b)假；

设$A = \{a, b\}$,A 上的关系$R = \{< a, b >\}$,$S = \{< b, a >\}$,R和 S 都是反自反的,但$R \circ S$不是反自反的;

(c)假；

例如：设$A = \{a, b, c\}$,A 上的关系,$R = \{< a, b >, < b, a >\}$,$S = \{< b, c >, < c, b >\}$,$R$和 S 都是对称的,但$R \circ S$不是对称的;

(d)假；

例如：设$A = \{a, b, c\}$,A 上的关系$R = \{< a, b >, < c, c >\}$,$S = \{< b, c >, < c, a >\}$,$R$和 S 都是反对称的,但$R \circ S$这不是反对称的;

(e)假；

例如:设$A = \{a, b, c\}$,A上的关系$R = \{< b, a >, < b, c >, < c, a >\}$,$S = \{(c, a), < a, b >, < c, b >\}$,由于 R,S 都是传递的,但$R \circ S = \{< b, a >, < b, b >, < c, b >\}$不是传递的.

3.7-12

$(a)$$R \cup S$不一定是传递的;

证明：

设 $A = \{1,2,3\}$, 令 $R = \{< 1,2 >, < 2,1 >, < 1,1 >, < 2,2 >\}$,$S = \{< 2,3 >, < 3,2 >, < 2,2 >, < 3,3 >\}$,不难验证$R \subseteq A \times A$,$S \subseteq A \times A$,$R$和 S 均是传递的,但$R \cup$

$S=\{<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>\}$
不是传递的；

(*b*) $R\cup S$不一定不是传递的;

证明：

例如 *R*=*S*,则$R\cup S$是传递的.

3.7-13

(*a*) 根据自反性的定义,若要证明$R\cap S$是自反的,只需证明$(\forall x)(x\in A\rightarrow<x,x>\in R\cap S)$

对于任意的$x\in A$,因为R和S都是自反的,则$<x,x>\in R\wedge<x,x>\in R\cap S$,所以$R\cap S$是自反的;

(*b*) 要证明$R\cap S$是对称的,即证明：$(\forall x)(\forall y)(<x,y>\in R\cap S\rightarrow<y,x>\in R\cap S)$.

$$<x,y>\in R\cap S\Rightarrow<x,y>\in R\wedge<x,y>\in S\Rightarrow<y,x>\in R\wedge<y,x>\in S\Rightarrow<y,x>\in R\cap S,\text{所以}R\cap S\text{是对称的};$$

(*c*) 要证明$R\cap S$是传递的,即证明$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(<x,y>\in R\cap S\wedge<y,z>\in R\cap S\Rightarrow<x,z>\in R\cap S)$.

$<x,y>\in R\cap S\wedge<y,z>\in R\cap S\Rightarrow<x,y>\in R\wedge<x,y>\in S\wedge<y,z>\in R\wedge<y,z>\in S\Rightarrow<x,z>\in R\wedge<x,z>\in S\Rightarrow<x,z>\in R\cap S$.

3.7-14

(*a*) 正确.对所有 *a* 属于 *A*,因为 *R* 是自反的,所以$<a,a>$属于 *R*,从而$<a,a>\in R^{-1}$,故R^{-1}是自反的；

(*b*) 正确.若 *R* 是对称的,则有$R^{-1}=R$,故R^{-1}也是对称的；

(*c*) 正确.即证明$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x,y)\in R^{-1}\wedge(y,z)\in R^{-1}\rightarrow(x,z)\in R^{-1})$

$<x,y>\in R^{-1}\wedge<y,z>\in R^{-1}\Rightarrow<y,x>\in R\wedge<z,y>\in R\Rightarrow<z,x>\in R\Rightarrow<x,z>\in R^{-1}$.

3.7-15

(a) 8 个

$$\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\},$$

$$\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<b,a>\},$$

$$\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,c>,<c,a>\},$$

$$\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<b,c>,<c,b>\},$$

$$\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<b,a>,<a,c>,<c,a>\},$$

$$\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>\},$$

$$\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,c>,<c,a>,<b,c>,<c,b>\},$$

$$\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<b,a>,<a,c>,<c,a>,<b,c>,<c,b>\}$$

(b)$8 \times 3^3 = 216$

(c)$2^9 - 216 - 8 \times 2^3 = 232$

3.7-16

反对称

3.7-17

证明：

设 R 是 A 上是传递的,即若 xRy 且 yRz,则有 xRz.现若有 xR^2y 且 yR^2z,则存在 $u,v \in A$,使 xRu,uRy 且 yRv,vRz,进而有xRy 且 yRz,即 xR^2z,即 R^2 也是集合 A 上的传递关系.

3.8 节

3.8-1

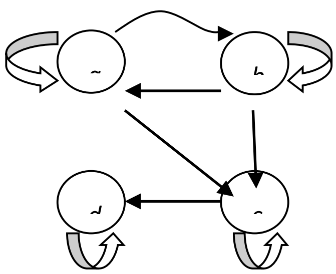
$r(R)=R\cup I_A=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<a,c>\}$

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,b>,<c,d>,<d,c>,<a,c>,<c,a>\}$

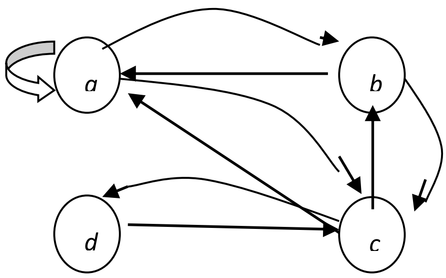
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

t(R)=$\{< a,a >,< a,b >,< a,c >,< a,d >,< b,a >,< b,b >,< b,c >,< b,d >,< c,d >\}$

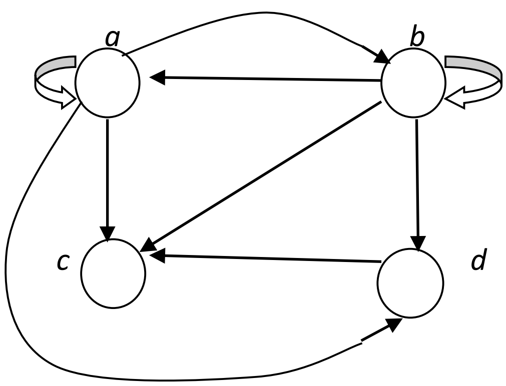
r(*R*)



s(*R*)



t(*R*)



3.8-2

解：　*s*(*R*)不一定是传递的.

设$R = \{< 1,2 >,< 2,3 >,< 1,3 >\}$

$s(R) = R, \cup R^{-1} = \{<1,2>, <2,1>, <2,3>, <3,2>, <1,3>, <3,1>\}$

$\because <1,2> \in s(R), <2,1> \in s(R)$, 但 $<1,1> \notin s(R)$

$\therefore s(R)$不是传递的.

3.8-3

证明：<1> 证 $t(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

任取$<a,b> \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, $<b,c> \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$,必存在正整数 s,t,使得$<a,b> \in R^s$,

$\because t(R)$是包含 R 的最小集合 $\therefore t(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

<2> 证任一$R^n \subseteq t(R)$

数学归纳法：基础：当 n=1 时, $R \subseteq t(R)$

假设：当 n=k 时, $R^k \subseteq t(R)$

推理: 当 n=k+1 时,任取$<a,b> \in R^{k+1}$,若$<a,b> \in R^k$, $\because R^k \subseteq t(R)$, $\therefore R^{k+1} \subseteq t(R)$,

若$<a,b> \notin R^k, R^{k+1} = R^k \circ R$,存在 c, $<a,c> \in R^k$, $<c,d> \in R$,又$\because R^k \subseteq t(R), R \subseteq t(R), \therefore <a,b> \in t(R)$

$\therefore R^{k+1} \subseteq t(R)$ 即$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$

综上所述,所以$t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

3.8-4

(a) $t(R) = \{<a1,a2>, <a1,a3>, <a1,a4>, <a1,a5>, <a2,a3>, <a2,a4>, <a2,a5>, <a3,a4>, <a3,a5>, <a4,a5>\}$

(b) $r(R) = R \cup I_A = \{<a1,a1>, <a2,a2>, <a3,a3>, <a4,a4>, <a5,a5>, <a1,a2>, <a2,a3>, <a3,a4>, <a4,a5>\}$

$sr(R) = \{<a1,a1>, <a2,a2>, <a3,a3>, <a4,a4>, <a5,a5>, <a1,a2>, <a2,a1>, <a2,a3>, <a3,a2>, <a3,a4>, <a4,a3>, <a4,a5>, <a5,a4>\}$

$$tsr(R) = A \times A$$

(c) (i)基础：若$< a,b >\in R$,则$< a,b >\in t(R)$

(ii)归纳:若$< a,b >\in t(R)$, 且 $< b,c >\in t(R)$,则$< a,c >\in t(R)$

(iii)极小性：$t(R)$是满足(i)和(ii)的最小集合.

3.8-5

证明：

(a) $r(R_1) = R_1 \cup I_A$ $r(R_2) = R_2 \cup I_A$

$\because R_1 \subseteq R_2 \quad \therefore r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(b) $s(R_1) = R_1 \cup R_1^{-1}$ $s(R_2) = R_2 \cup R_2^{-1}$ $\because R_1 \subseteq R_2 \quad \therefore R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1} \therefore s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(c) $R_2 \subseteq t(R_2)$ 又$\because R_1 \subseteq R_2$

$\therefore R_1 \subseteq t(R_2) \quad \therefore t(R_1) \subseteq t(R_2)$

3.8-6

(a)$r(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2 \cup I_A$

$r(R_1) \cup r(R_2) = (R_1 \cup I_A) \cup (R_2 \cup I_A) = R_1 \cup R_2 \cup I_A$

$\therefore r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$

(b)$S(R_1) \cup S(R_2) = R_1 \cup R_1^{-1} \cup R_2 \cup R_2^{-1}$

$S(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2 \cup (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1 \cup R_2 \cup R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

$\therefore S(R_1 \cup R_2) = S(R_1) \cup S(R_2)$

(c)任取$< a,b > \in t(R_1) \cup t(R_2)$

若$< a,b > \in t(R_1)$,必然存在正整数 k,使得$< a,b >\in R_1^k$

$R_1^k = R_1 \circ R_1 \circ \cdots\cdots \circ R_1$,易知$R_1$中存在元素$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{k-1}$,使得$< a,x_1 >\in R_1, < x_1,x_2 >\in R_1, \cdots\cdots, < x_{k-1},b >\in R_1$

$\because R_1 \subseteq t(R_1 \cup R_2) \quad \therefore t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

若$< a,b > \notin t(R_1)$, 则$< a,b > \in t(R_2)$

同理可得, $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

3.8-7

(a)反自反,对称

$$(b)\ M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore t(R) = A \times A$$

3.8-8

$$① \ M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to M_{t(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore t(R) = \{< 1,1 >, < 1,2 >, < 1,3 >, < 1,4 >, < 2,1 >, < 2,2 >, < 2,3 >, < 2,4 >, < 3,4 >\}$

R=$\{< 1,2 >, < 2,3 >, < 3,4 >, < 2,1 >\}$

$R^2 = R \circ R = \{< 1,3 >, < 1,1 >, < 2,4 >, < 2,2 >\}$

$R^3 = R^2 \circ R = \{< 1,4 >, < 1,2 >, < 2,3 >, < 2,1 >\}$

$R^4 = R^3 \circ R = \{< 1,3 >, < 1,1 >, < 2,4 >, < 2,2 >\}$

$\therefore t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{< 1,1 >, < 1,2 >, < 1,3 >, < 1,4 >, < 2,1 >, < 2,2 >, < 2,3 >, < 2,4 >, < 3,4 >\}$

3.8-9

证明： $\because$ R 是自反的 $\therefore r(R) = R$

$R^* = t(R)$ 又$\because$ $R \subseteq t(R)$ $I_A \in R$

$\therefore I_A \subseteq t(R)$ 即R^*是自反的

3.8-10

证明：任取$< a,b > \in R^*$, 令$S = r(R)$

必存在正整数t, 使得$< a,b > \in S^t$

$S^t = \underbrace{S \circ S \circ S \circ \cdots \circ S}_{t}$, S 中存在元素$x_1, x_2, \cdots, x_{t-1}$,使得

$< a,x_1 > \in S, < x_1,x_2 > \in S, \cdots, < x_{t-1},b > \in S$

$\because S = r(R) = R \cup I_A$ R 是对称的, I_A也是对称的

$\therefore S$也是对称的.

$\therefore < b,x_{t-1} > \in S, \cdots, < x_2,x_1 > \in S, < x,a > \in S$

$\therefore < b,a > \in S^t$ 即$< b,a > \in R^*$

$\therefore$ R^*是对称的.

3.9 节

3.9-1

(a) 不是等价关系,不满足对称性;

(b) 是等价关系.

3.9-2

(a)R 时自反,对称,传递的,所以 R 是等价关系；

S 不是对称的,所以 S 不是等价关系.

(b)等价关系的每个子图都是有向完全图.

3.9-3

(a) $R=\{<1,1>,<2,2>,<1,2>,<2,1>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<4,5>,<5,4>\}$

(b) $S=\{<1,1>,<2,2>,<1,2>,<2,1>,<3,3>,<4,4>,<5,5>\}$

3.9-4

证明：

1)证明$S\subseteq R$

$\forall<a,b>\in S$, 根据S的定义, $\exists c\in A$, 使得 $<a,c>\in R$且 $<c,b>\in R$,

又由于R是传递的, 因此 $<a,b>\in R$, 故$S\subseteq R$.

(2)证明$R\subseteq S$

$\forall<e,f>\in R$, 由于R是自反的, 所以 $<f,f>\in R$, 根据S的定义, $<e,f>\in S$,

故$R\subseteq S$.

3.9-5

证明：

(1) 假设 R 是等价关系；

显然 R 是自反的,

$\forall a,b,c\in A$, 若有aRb和bRc, 由对称性可推出bRa和cRb, *再由传递性得*cRa,

即R是循环的.

(2) 假设 R 是自反和循环的；

即有aRa, bRb, cRc, 假设有aRb, 由循环性可得必有bRa, 若有bRa则必有aRb, 以此类推, 可得R是对称的.

同理,可推得 R 是传递的,综上得 R 是等价的.

3.9-6

证明：

充分性：设对于任意的$a, b, c \in A$, 若有aRb和aRc, 则必有bRc；

又R是自反的, 则$\forall a, b \in A$, 显然有aRa, 若aRb, 则必有bRa, 所以R是对称的；

$\forall a, b, c \in A$, 显然有aRa, 若aRb, bRc, 则必有bRa, 则必有aRc, 所以R是传递的；

综上得,R 是等价关系；

必要性：R 是等价关系；

$\forall a, b, c \in A$, 若aRb, aRc, 由对称性可得bRa, 又由传递性可得bRc；

综上得,R 是等价关系当且仅当对于任意的$a, b, c \in A$, 若有aRb和aRc, 则必有bRc.

3.9-7

证明：

(1) 自反性:$\because R$是自反的,$\therefore \forall a \in A$, $有 < f(a), f(a) > \in R$,

由 S 的定义得$< a, a > \in S$,所以 S 是自反的;

(2) 对称性: $\because R$是对称的,$\therefore \forall a, b \in A$,若 $< f(a), f(b) > \in R$,则 $< f(b), f(a) > \in R$,由S的定义得若 $< aa, b > \in S$,则 $< b, a > \in S$,所以S是自反的；

(3) 传递性：$\because R$是对称的,$\therefore \forall a, b, c \in A$,若 $< f(a), f(b) > \in R$, $< f(b), f(c) > \in R$,则 $< f(a), f(c) > \in R$,由S的定义得若 $< a, b > \in S$, $< b, c > \in S$,则 $< a, c > \in S$,所以S是传递的；

综上得,S 是 A 上的等价关系.

3.9-8

证明：

$$M_{s(R)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{ts(R)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵图得,$ts(R)$是 X 上的等价关系.

3.9-9

证明：

(a) 因为R_1和R_2是等价关系,所以$E\subseteq R_1, E\subseteq R_2$,从而$E\subseteq(R_1\cap R_2)$,因此$R_1\cap R_2$是自反的.

又$\widetilde{R_1\cap R_2}=\widetilde{R_1}\cap\widetilde{R_2}= R_1\cap R_2$,因此$R_1\cap R_2$是对称的.

$\forall<x,y>\in R_1\cap R_2,<y,z>\in R_1\cap R_2$,则$<x,y>\in R_1,<y,z>\in R_1$.因此

$$<x,z>\in R_1.\text{同理}<x,z>\in R_2,\text{因此}<x,z>\in R_1\cap R_2.$$

因此$R_1\cap R_2$也是传递的,因而是等价关系.

$(b)[a]_{R1\cap R2}=\{x|x\in A,x(R_1\cap R_2)a\}=\{x|x\in A,xR_1a\cap xR_2a\}=[a]_{R1}\cap[a]_{R2}$

3.9-10

$$R1=\{<a,a><b,b><c,c><d,d><e,e><g,g><f,f><a,b><b,a><a,c><c,a><b,c><c,b><d,e><e,d><e,g><g,e><d,g><g,d>\}$$

$$R2=\{<a,a><b,b><c,c><d,d><e,e><f,f><g,g><a,c><c,a><b,d><d,b><b,e><e,b><d,e><e,d><f,g><g,f>\}$$

$$R1\cap R2=\{<a,a><b,b><c,c><d,d><e,e><f,f><g,g><a,c><c,a><d,e><e,d>\}$$

$$\frac{A}{R1\cap R2}=\{\{a,c\},\{d,e\},\{b\},\{g\},\{f\}\}$$

3.9-11

证明：

(a) $I_A\subseteq R_1, I_A\subseteq R_2$,显然$I_A\subseteq R_1{}^\circ R_2$,满足自反性；

$$\forall<\mathrm{a,b}>\in \mathrm{R_1{}^\circ R_2},\exists \mathrm{c}\text{ 使 }<\mathrm{a,c}>\in \mathrm{R_1},<\mathrm{c,b}>\in \mathrm{R_2},\text{则}<\mathrm{c,a}>\in \mathrm{R_1},<\mathrm{b,c}>\in \mathrm{R_2},\text{则}<\mathrm{b,a}>\in \mathrm{R_2{}^\circ R_1}=\mathrm{R_1{}^\circ R_2},\text{满足对称性}$$

$aR_1{}^\circ R_2 b \wedge bR_1{}^\circ R_2 c \Rightarrow \exists d, e\ aR_1 d \wedge dR_2 b \wedge bR_1 e \wedge eR_2 c \Rightarrow$
$\exists d, e\ aR_1 d \wedge dR_2{}^\circ R_1 e \wedge eR_2 c \Rightarrow \exists d, e, f\ aR_1 d \wedge dR_2 f \wedge fR_1 e \wedge\ eR_2 c \Rightarrow$

$\exists f\ aR_1{}^\circ R_2 f \wedge fR_1{}^\circ R_2 c \Rightarrow aR_1{}^\circ R_2 c$,满足传递性,综上得$R_1{}^\circ R_2$是$A$上的等价关系.

*(b)*因为R_1和R_2是等价关系,所以$R_1 \cup R_2$是等价关系,所以 $r(R_1 \cup R_2)= R_1 \cup R_2$.

$\forall < a, b > \in R_1{}^\circ R_2, \exists c$使$< a, c > \in R_1, < c, b > \in R_2$,则$< \mathrm{a}, c >, < c, b > \in R_1 \cup R_2$,又$R_1 \cup R_2$是等价关系,所以$< a, b > \in R_1 \cup R_2$,所以$R_1{}^\circ R_2 \subseteq R_1 \cup R_2 = r(R_1 \cup R_2)$.

$\forall < a, b > \in R_1 \cup R_2, < a, b > \in R_1$或$< a, b > \in R_2$.假设$< a, b > \in R_1$,因为$R_2$是等价关系,所以$< a, a > \in R_2$,所以$< a, b > \in R_2{}^\circ R_1 = R_1{}^\circ R_2$,所以$r(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2 \subseteq R_1{}^\circ R_2$；若$< a, b > \in R_2$,同理得$r(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2 \subseteq R_1{}^\circ R_2$.

综上得,$r(R_1 \cup R_2) = R_1{}^\circ R_2$.

3.9-12

(a)证明：

自反性：$\forall S \in \rho(A)$,因为$|S| = |S|$,所以SRS;

对称性:$\forall < S, T > \in R$,有$|S| = |T|$,即$|T| = |S|, < T, S > \in R$;

传递性: $\forall < S, A >, < A, T > \in R$,有$|S| = |A|, |A| = |T|$,则$|S| = |T|, < S, T > \in R$.

(b)

$$\frac{\rho(A)}{R} = \{\{\emptyset\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}, \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}, \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}, \{\{1,2,3,4\}\}\}$$

3.9-13

(a)$E = tsr(R) = rst(R) = I_A \cup R \cup R^{-1} \cup R^n$

(b)

(c) $I_A \cup R \cup R^{-1} \cup R^n = \{<1,1>, <2,2>, <3,3>, <4,4>, <5,5>, <6,6>, <1,2>, <1,3>, <2,1>, <2,3>, <3,1>, <3,2>, <3,3>, <4,5>, <5,4>\}$

3.9-14

(1)3 块只含 1 个元素,1 块含 3 个,有$C_6^3 = 20$种；

(2)2 块含 2 个元素,2 块含 1 个,有$\frac{1}{2}C_6^2C_4^2 = 45$种.

3.9-15

(*a*)2^{25};

(*b*) 集合上每个等价关系对应集合的一种划分,集合的每一种划分又对应于该集合的一个等价关系,不同的等价关系对应于集合的划分也不同,因此集合有多少不同划分,就有多少不同等价关系,用 *Bn* 表示 *n* 个元素集合 *X* 的划分个数,其中称 *Bn* 为 *Bell* 数,关于 *Bell* 数有如下递推公式:

Bn+1=*C*(*n*,0)*B*0+ *C*(*n*,1)*B*1+ *C*(*n*,2)*B*2+…+ *C*(*n*,*n*)*Bn*

其中 *B*0=1, *C*(*n*,*k*)是个 *n* 元数取 *k* 个元的组合数,利用公式可以计算出前几个 *Bell* 数:

*B*1= *C*(0,0)*B*0=1×1=1,

*B*2= *C*(1,0)*B*0+ *C*(1,1)*B*1=1×1+1×1=2,

*B*3= *C*(2,0)*B*0+ *C*(2,1)*B*1+ *C*(2,2) *B*2=1×1+2×1+1×2=5,

*B*4= *C*(3,0)*B*0+ *C*(3,1)*B*1+ *C*(3,2) *B*2+ *C*(3,3) *B*3=1+3+6+5=15,

*B*5= *C*(4,0)*B*0+ *C*(4,1)*B*1+ *C*(4,2) *B*2+ *C*(4,3) *B*3+ *C*(4,4) *B*4
=1+4+12+20+15=52,

故 5 个元素的集合的等价关系有 52 种.

3.9-16

(*a*)将 *A* 划分为 1 块有 1 个,划分为两块有 3+4=7 个,划分为三块有 6 个,划分为四块有 1 个,共 15 个；

(*b*)所诱导划分的秩为 2 即划分为两块有 7 个.

3.9-17

证明：若 *A/R* 是 *A* 上的一个划分,那么可以定义二元关系<*x,y*>当且仅当存在 *R* 使 *x,y* 同时属于 *A/R*.直接验证,其确实满足等价关系的定义.

若有一个 *A* 上的等价关系,那么对于任意$x \in A$,记 *A/x* 是与 *x* 等价的元素集合.然后在所有{*A/x*}中,去掉所有重复的集合,即若 *A/x*=*A/y*,只保留其中一个,组成一个新的集合簇,于是 *A/x* 和 *A/y* 的交集为空集并且所有 *A/x* 的并就是 *x*.

3.9-18

$$R=\{<a,a>,<c,c>,<e,e>,<a,c>,<c,a>,<a,e>,<e,a>,<c,e>,\\ <e,c>,<b,b>,<d,d>,<b,d>,<d,b>\}$$

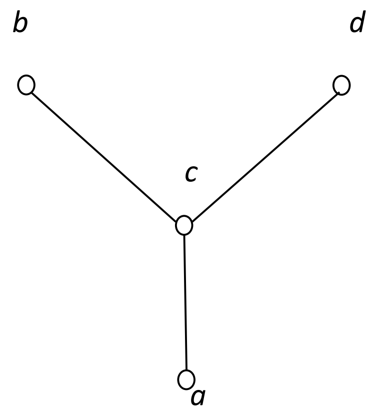
3.9-19

$$A/R=\{\{a,b,c,e\},\{d\}\}$$

3.10 节

3.10-1

(*a*)



(*b*)极大元:*b,d*　极小元:*a*　最大元:无　最小元:*a*.

3.10-2

最大元:无 最小元:无 上界:11 下界:1 最小上界:11 最大下界 1.

3.10-3

(*a*)极大元:*l,m* 极小元:*a,b,c*;

(*b*)没有;

(c)上界:k,l,m　最小上界:k;

(d)无.

3.10-4

极大元:6　极小元:3　最大元:6　最小元:3　最小上界:6　最大下界:3

3.10-5

任取$a \in A$,a 为 A 中单个元素,则不存在$b \in A$使得$b \neq a$且$\{b\} \subseteq \{a\}$所以$\forall a \in A$,$\{a\}$为 B 中的极小元;

任取$a \in A$, $A-\{a\} \in \rho(A)$, $A\{a\}$ 中含有 $|A|-1$ 个元素.且对于任意的$b \in A$ 中$b \neq a$, $A-\{b\}$中各有 $|A|-1$ 个元素且 $A-\{a\}$与 $A-\{b\}$互不包涵.

所以对于 A 中任意单个元素 a, $A-\{a\}$为 B 中的极大元.

因为 A 中至少有 2 个元素,任取$a, b \in A$, $a \neq b$, $\{a\}$和$\{b\}$均为极小元,所以不存在最小元

同理,也不存在最大元.

3.10-6

证明:因为 R 是 A 上的偏序,所以 R 是自反的,R^{-1}是自反的,又$\forall <a,b> \in R$,若$a \neq b$,则$<b,a> \notin R$,综上得,$R \cap R^{-1} = \{<a,a> | a \in A\}$,显然 $R \cap R^{-1}$是等价关系.

3.10-7

(a)令$A=\{a|a$是大于等于 0 的实数$\}$,则$(A,\leq)$是一个非空偏序集.令 B 是大于零的实数的集合,则 B 没有最小元;

(b)令$A=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<a,c>\}$, $(A,\leq)$是非空偏序集但不是线序集合,A 也无最大元;

(c)　令　$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<a,c>,<b,c>,<a,d>,<b,d>\}$,则$(A,R)$是以非空偏序集.令$B=\{a,b\}$,则它有上界的 d,c,但没有最小上界.

3.10-8

$$\{b|b \in B \wedge \neg(\exists x \in B(b \neq x \wedge b \leq x))\}$$

任取$a1 \in A$,若 $a1$ 为 A 的极大元,则结论成立；若不是,则存在$a2 \in A$,使得$a1 \neq a2$ 且$a2 \geq a1$.若 $a2$ 为极大元,则结论成立；否则存在$a3 \in A$,使得$a3 \neq a2, a3 \neq a1$ 且$a3 \geq a2 \cdots\cdots$重复上述过程,因为 A 是有限集,所以一定有$ai \in A$,使得$ai \geq ai-1 \geq \cdots \geq a2 \geq a1$且 ai 为 A 的极大元,否则将与集合 A 的有限性矛盾.

3.10-9

(a)证明：若$\exists x, y \in A$, 使得 $<x, y> \in R \wedge <y, x> \in R$,则由传递性得,$<x, x> \in R$,与$R$是反自反的相矛盾,所以拟序一定是反对称的；

(b)若 R 是拟序,则 $r(R)$是偏序,则$R - I_A$是拟序

3.10-10

(a) 因为$R \cap R^{-1} = I_x$
所以有自反性,反对称性

因为$R^* = tr(R)$ $r(R) = R$

所以$R = t(R)$

所以 R 是传递的

综上得,R 是偏序；

(b)$<x, x> \in R$,即 $<x, x> \in R^{-1}$

所以$<x, x> \in R \cap R^{-1}$ 与$R \cap R^{-1} = \emptyset$ 矛盾

所以 R 满足反自反性

$R = R^+ = t(R)$ 所以 R 满足传递性,

综上得,R 是拟序的.

3.10-11

$(a) display \geq discrete$

$(b) girl \leq girls$

3.10-12

$$0 \leq 1 \leq 00 \leq 01 \leq 10 \leq 11 \leq 000 \leq 001 \leq 010 \leq 011 \leq 100 \leq 101 \leq 110 \leq 111 \leq \cdots\cdots$$

3.10-13

是的,按照词典序和标准序的定义,其任意元素都可比较且每一非空子集都有最小元,所以是良序.

3.10-14

(a)词典序：$quack \leq quick \leq quicking \leq quicksand \leq quicksilver$

标准序：$quack \leq quick \leq quicking \leq quicksand \leq quicksilver$

(b)词典序：$open \leq opened \leq opener \leq opera \leq operand$

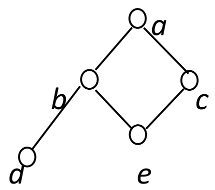
标准序：$open \leq opera \leq opened \leq opener \leq operand$

(c)词典序：$zero \leq zoo \leq zoological \leq zoology \leq zoom$

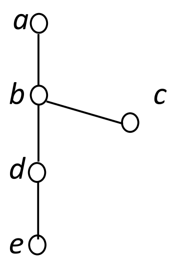
标准序：$zoo \leq zero \leq zoom \leq zoology \leq zoological$

3.10-15

(a)



(b)



3.10-16

证明：

$\forall U \in \rho(S)$,因为$U \not\subset U$,所以$<U,U> \notin R$,所以 R 是反自反的;

$\forall <U,V>,<V,T> \in R$,有$U \subset V$且$V \subset T$,得$U \subset T$,所以$<U,T> \in R$,即$R$是传递的;

综上得,R 是拟序关系.

第 4 章

第一节

4.1-1　a，b 不能构成函数。

$c: \mathrm{dom} f_3 = \mathrm{N}; \mathrm{ran} f_3 = Z^+$;

$d: \mathrm{dom} f_4 = R; ran f_4 = \{y|y \geq 0\}$

4.1-2　(a) 8 种

$f_1 = \{<a,0>,<b,0>,<c,0>\}; f_2 = \{<a,0>,<b,0>,<c,1>\}$;

$f_3 = \{<a,0>,<b,1>,<c,0>\}; f_4 = \{<a,0>,<b,1>,<c,1>\}$;

$f_5 = \{<a,1>,<b,0>,<c,0>\}; f_6 = \{<a,1>,<b,0>,<c,1>\}$;

$f_7 = \{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}; f_8 = \{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}$;

(b) 9 种

$f_1 = \{<0,a>,<1,a>\}; f_{2=}\{<0,a>,<1,b>\}; f_3 = \{<0,a>,<1,c>\}$;

$f_4 = \{<0,b>,<1,a>\}; f_{5=}\{<0,b>,<1,b>\}; f_6 = \{<0,b>,<1,c>\}$;

$f_7 = \{<0,c>,<1,a>\}; f_{8=}\{<0,c>,<1,b>\}; f_9 = \{<0,c>,<1,c>\}$;

4.1-3　(a)证明：

充分性：$\mathrm{h} = \mathrm{f} \cap \mathrm{g}$，$\forall x_0 \in X$，有$\mathrm{h}(x_0) \in Y$。

$\mathrm{h}(x_0) = \mathrm{f}(x_0) = \mathrm{g}(x_0)$，即$\forall x_0 \in X$，都有$\mathrm{f}(x_0) = \mathrm{g}(x_0) \in \mathrm{Y}$，$\therefore \mathrm{f} = \mathrm{g}$。

必要性：$\because \mathrm{f} = \mathrm{g}$，$\therefore \mathrm{h} = \mathrm{f} \cap \mathrm{g} = \mathrm{f}$。又$\because$ f是x到Y的函数，$\therefore$ h 是 x 到 Y 的函数。

(b)不一定。

若$\exists x_1 \in X$时，有$\mathrm{f}(x_1) \neq \mathrm{g}(x_1)$，那么对于$\mathrm{f} \cup \mathrm{g}$，$x_1$存在两个不同的值$\mathrm{f}(x_1)$，$\mathrm{g}(x_1)$与其对应，不符合函数的定义，故不是从X到Y的函数。

4.1-4　证明：

(a)：在f(1)处无定义。

(b)：$\mathrm{f}(2) = \mathrm{f}(0) + 1$，f(0)处无定义。

(c)：$\mathrm{f}(2) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(1)) + 1 = \mathrm{f}(2) + 1$，矛盾。

4.1-5　解：设f：$\mathrm{N} \to \mathrm{N}$。

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} x-2 & x > 50 \\ f(f(x+3)) & x \leq x \leq 50 \end{cases}$$

4.1-6　证明：

(a)令$\mathrm{h(n)} = \mathrm{g(n)} - \mathrm{f(n)}$

由$\mathrm{f(n)} - \mathrm{f(n-1)} \leq \mathrm{g(n)} - \mathrm{g(n-1)}$）可得$\mathrm{g(n-1)} - \mathrm{f(n-1)} \leq \mathrm{g(n)} - \mathrm{f(n)}$

即：$\mathrm{h(n-1)} \leq \mathrm{h(n)}$，$\therefore$ h(n)是单调递增的。

又$\because \mathrm{h}(1) = \mathrm{g}(1) - \mathrm{f}(1) \geq 0$，$\therefore \mathrm{h(n)} \geq \mathrm{h}(1) \geq 0$

即$\mathrm{g(n)} \geq \mathrm{f(n)}$。

(b)令$\mathrm{f(n)} = \frac{1}{n^2}$，$\mathrm{g(n)} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \frac{1}{n(n-1)} & n > 1 \end{cases}$

易知f，g满足(1),(2)条件。

$\therefore \mathrm{f(n)} \leq \mathrm{g(n)}$，即$\mathrm{f}(1) \leq \mathrm{g}(1)$，$\mathrm{f}(2) \leq \mathrm{g}(2)$，…，$\mathrm{f(n)} \leq \mathrm{g(n)}$

即$\mathrm{f}(1) + \mathrm{f}(2) + \cdots + \mathrm{f(n)} \leq \mathrm{g}(1) + \mathrm{g}(2) + \cdots + \mathrm{g(n)}$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1*2} + \cdots + \frac{1}{(\mathrm{n}-1)*\mathrm{n}} = 2 - \frac{1}{n}$$

4.1-7　解：令$\mathrm{f(n)} = h^2(n)$，$\therefore \mathrm{f}(0) = 4$

$\mathrm{f(n)} = 2\mathrm{f(n-1)} + 1$

$f(n)+1=2(f(n-1)+1)=2^2(f(n-2)+1)=\cdots=2^n(f(0)+1)$

$f(n)=5*2^n-1$

当$n=0$时，$f(0)=4$也满足上式。

$\therefore h(n)=\sqrt[2]{5*2^n-1}$

4.1-8 解：

(a) $f(2,1)=2$

(b) $f(3,3)=f(2,f(3,2))$

$f(3,2)=f\big(2,f(3,1)\big)=f(2,2)=f\big(1,f(2,1)\big)=f(1,2)=f\big(0,f(1,1)\big)=f(0,2)=4$

$\therefore f(3,3)=f(2,4)=f(1,f(2,3))$

$f(2,3)=f\big(1,f(2,2)\big)=f(1,4)=f(0,f(1,3))$

$f(1,3)=f\big(0,f(1,2)\big)=f(0,4)=8$

$\therefore f(2,3)=f(0,8)=16$

$\therefore f(3,3)=f(1,16)=2f(1,15)=2^2f(1,14)=\cdots=2^{15}f(1,1)=2^{16}$

(c) $f(m,2)=f\big(m-1,f(m,1)\big)=f(m-1,2)$

$f(m-1,2)=f\big(m-2,f(m-1,1)\big)=f(m-2,2)$

$\cdots$

$f(m,2)=f(1,2)=4$

(d) $f(1,n)=f\big(0,f(1,n-1)\big)=2f(1,n-1)$

$f(1,n-1)=f\big(0,f(1,n-2)\big)=2f(1,n-2)$

$\cdots$

$f(1,n)=2^{n-2}f(1,2)=2^n$

(e) 证明：(1)数学归纳法：证$f(m,n+1)\ge f(m,n)$

基础：当$n=1$时，$f(m,2)=4>f(m,1)=2$

假设：当$n>1$时，对于任何$k<n$，都有$f(m,k+1)>f(m,k)$成立

推理：当$k=n$时，若$m=1$，有$f(1,n+1)=2^{n+1}>f(1,n)=2^n$；

若$m>1$时，$f(m,n+1)=f\big(m-1,f(m,n)\big)$

$f(m,n)=f\big(m-1,f(m,n-1)\big)$

$f(m,3)=f(m-1,f(m,2))$

$f(m,2)=4$

易知，$f(m,n)\ge f(m,n-1)\ge f(m,n-2)\ge\cdots\ge f(m,3)$

由该函数的运算规律可知，$f\big(m-1,f(m,n)\big)\ge f(m-1,f(m,n-1))$

即$f(m,n+1)\ge f(m,n)$。

根据归纳假设可知，$m>0$，$n>0$有$f(m,n+1)\ge f(m,n)$成立。

(2)证明：$f(m+1,n)>f(m,n)$

当$n=1$时，$f(m+1,1)=f(m,1)=2$

当$n>1$时，$f(m+1,n)=f(m,f(m+1,n-1))$

易知$f(m+1,n-1)\ge f(m+1,n-2)\ge\cdots\ge f(m+1,2)=4$

$\therefore f\big(m,f(m+1,n-1)\big)\ge f(m,n+1)\ge f(m,n)$

即$f(m+1,n)\ge f(m,n)$

4.1-9 (a) 不是函数

(b) 是函数，$ranR=\{1,2,3\}$

4.1-10 (a) F

(b) F

(c) T

(d) F

第二节

4.2-1 (a) 单射

(b) 满射

(c) 双射

(d) 既不是单射也不是满射

(e) 双射

(f) 双射

4.2-2 满射，非单射

4.2-3 (a) 证明： (1) f 是满射，故任意$\mathrm{b} \in \mathrm{B}$，都存在$\mathrm{x} \in \mathrm{A}$满足函数 g，即$\mathrm{g(b)}$不为空集。

(2) f 是函数，对于任意$\mathrm{x} \in \mathrm{A}$，都只存在唯一的 $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$使得 f 成立。

设b_1，$\mathrm{b}_2 \in \mathrm{B}$且$b_1 \neq b_2$，由(1)知：

$\mathrm{g}(b_1) = \{x_1, x_2, \ldots\}$，不妨将结果集设为$S_1$，$S_1 \neq \emptyset$

$\mathrm{g}(b_2) = \{x_3, x_4, \ldots\}$，不妨将结果集设为$S_2$，$S_2 \neq \emptyset$

从S_1中取出x_1，由(2)可得，S_1包含唯一的x_1，故$S_1 \neq S_2$，即$\mathrm{g}(b_1) \neq \mathrm{g}(b_2)$。

故 g 是单射。

(b) 不一定。

证明：f 是单射函数，则对于任意的x_1，$x_2 \in A, x_1 \neq x_2$，都有$\mathrm{f}(x_1) \neq \mathrm{f}(x_2)$。

则对于 g 来说，其结果集大小不超过 1. 若$\rho(\mathrm{A})$中有大小大于 1 的集合，则其在 g 中无原像，故 g 不一定是满射。

4.2-4 (a) $\{<1,1>,<2,1>,<3,2>\},\{<1,1>,<2,2,>,<3,1>\},$

$\{<1,2>,<2,1>,<3,1>\},\{<1,1>,<2,2,>,<3,2>\},$

$\{<1,2>,<2,1>,<3,1>\},\{<1,2>,<2,2,>,<3,1>\}$

(b) $\{<1,1>,<2,2>\},\{<1,1>,<2,3>\},\{<1,2>,<2,1>\},$

$\{<1,2>,<2,3>\},\{<1,3>,<2,1>\},\{<1,3>,<2,2>\}$

4.2-5 解：(a) f_1既不是单射也不是满射。

不存在$<x,y> \in N \times N$，使得$\mathrm{f}(<x,y>) = 0$

$\therefore f_1$不是满射

又$\because \mathrm{f}(<1,1>) = \mathrm{f}(<0,2>)$

$\therefore f_1$不是单射

$f_1(N \times \{1\}) = \{x+2 | x \in N\} = \{x | x \in N \& x \geq 2\}$

(b) f_2是单射不是满射。

不存在$\mathrm{x} \in \mathrm{N}$，使得$\mathrm{f(x)} =<0,0>$

$\therefore f_2$不是满射

又对任意$x_1, x_2 \in N, x_1 \neq x_2, f(x_1) =<x_1, x_1+1> \neq f(x_2) =<x_2, x_2+1>$

$\therefore f_2$是单射

$f_2 = \{<0,1>,<1,2>,<2,3>\}$

4.2-6 解：h 是双射，证明如下：

(1) 先证 h 是单射。

反证法：假设 h 不是单射

存在$<a,c>,<b,d> \in A \times C, <a,c> \neq <b,d>$

$\mathrm{h}(<a,c>) =<f(\mathrm{a}), \mathrm{f(c)}>= h(<b,d>) =<f(\mathrm{b}), \mathrm{g(d)}>$

$\because$ f，g都是双射，$<a,c> \neq <b,d>$

$\therefore <f(\mathrm{a}), \mathrm{g(c)}> \neq <f(\mathrm{b}), \mathrm{g(d)}>$，矛盾

$\therefore$ h是单射。

(2)再证 h 是满射。

对于任意$< e,f >\in B \times D$，由于 f,g 都是双射，则存在x_1,x_2，使得$\mathrm{f}(x_1) = \mathrm{e}, \mathrm{f}(x_2) = f$。

$\therefore$ h是满射

综上所述，h 是双射

4.2-7

4.2-8 单射：f 是 A 到 B 的双射函数，任意$a_1,a_2 \in A$，如果$a_1 \neq a_2$，那么$\mathrm{f}(a_1) \neq \mathrm{f}(a_2)$。所以$a_1,a_2 \in \rho(A)$，如果$a_1 \neq a_2$，那么$\mathrm{g}(a_1) \neq g(a_2)$。

满射：由满射定义可知，任意$\mathrm{b} \in \mathrm{B}$，存在$\mathrm{a} \in \mathrm{A}$，使得$\mathrm{f(a) = b}$。

所以任意$\mathrm{b} \in \rho(\mathrm{B})$，存在$\mathrm{a} \in \rho(\mathrm{A})$，使得$\mathrm{g}(\rho(\mathrm{a})) = \rho(\mathrm{b})$。

综上，所以 g 是双射。

4.2-9 (1)Both

(2)Onto

(3)Both

4.2-10 (1)$\mathrm{f(x) = x + 1}$

(2)$\mathrm{f(x) = |x - 1|}$

(3)$\mathrm{f(x) = x}$

(4)$\mathrm{f(x) = x(mod\ 6)}$

第三节

4.3-1 证明:假设没有两个英文单词以同一个字母开头,那么每个单词都以一种字母开头,则需要 27 个不同的英文字母,这与 26 个英文字母矛盾.因此至少有两个单词是由同一个字母开头。

4.3-2 证明:假设 51 栋房子没有门牌号是连续的,那么每个房间之间就要至少要隔着一个门牌号,那么至少要 101 个门牌,这与只有 100 门牌相矛盾,因此至少有两栋房子是门牌号连续的.

4.3-3 证明：1 到 25 中恰有 13 个奇数，而每个正整数 n 均可唯一地写成$n = 2^k * m$的形式，其中 m 是奇数，并且整数$k \geq 0$,m 称为 n 的奇数部分。从 1 到 25 中个任取 14 个不同的数，至少有两个数n_1和n_2的奇数部分同为 m，令$n_1 = 2^{k_1} * \mathrm{m}, n_2 = 2^{k_2} * m$。若$\mathrm{k}_1 > \mathrm{k}_2$，则$\mathrm{n}_1$是$\mathrm{n}_2$的倍数，否则，$\mathrm{n}_2$是$n_1$的倍数。

4.3-4 证:假设任意两台计算机所连接的计算机数目不同，因为每台计算机至少与一台其他计算机相连，则他们连接的计算机数目分别为 1，2，3，4，5，6.不可能存在一台计算机连接 6 台其他计算机，这与只有 6 台计算机相矛盾。因此至少存在 2 台计算机所连接的计算机数目相同。

4.3-5

4.3-6 考虑科学家 A，他要与另外的 16 位科学家每人讨论一个问题，则根据鸽巢定理可知，他必定要与至少 6 位科学家讨论一个相同的问题，不妨设为问题 1，如果这六位科学家之间相互讨论中存在问题 1，那么讨论的这两位科学家必定与科学家 A 在讨论同一个问题 1。如果这六位科学家之间没有人讨论问题 1，那么他们之间只有讨论问题 2 或问题 3。考虑 这六位科学家中有一位科学家 B，根据鸽巢定理，他必定要与其余 5 位科学家中的 3 位讨论同一问题，不妨设为问题 2。那么这三位与科学家 B 讨论问题的科学家之间若有两人讨论了问题 2，则他们两人与科学家 B 在讨论同一个问题 2，否则他们 3 位相互之间只能讨论问题 3，综上所述，

一定存在三个科学家在讨论同一个问题。

4.3-7 将这 12 个数分为 6 组，{1,12}，{2,11}，{3,10}，{4,9}，{5,8}，{6,7}。
则根据推论 2 可得，至少有一个组中的两个数字都被选中，而这两个数之和为 13，得证。

4.3-8 从 10 个人中选出 3 个，则有 120 种方案，这 120 种方案放入 10 个帽子中，根据推论 2 可得，至少 1 个帽子中有 12 种或以上的方案。

第四节

4.4-1 (a) $\mathrm{f} \lozenge \mathrm{g} = \mathrm{f}(x^2) = 2x^2 + 3$
(b) $\mathrm{g} \lozenge \mathrm{f} = \mathrm{g}(2\mathrm{x} + 3) = 4x^2 + 12x + 9$
(c) $\mathrm{f} \lozenge \mathrm{h} = \mathrm{f}\left(\frac{1}{2}\mathrm{x} - 3\right) = \mathrm{x} - 3$

4.4-2 双射
证明：设$\mathrm{n} = 1$时，$\mathrm{f} = I_x$，故 f 是双射的。
当$\mathrm{n} > 1$时，若 f 不是单射，则必有$x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，但$\mathrm{f}(x_1) = \mathrm{f}(x_2)$，因而$f^n(x_1) = f^n(x_2)$，这与$f^n = I_x$矛盾，故 f 必为单射。
若 f 不是满射，则必有$\mathrm{y} \in \mathrm{X}$，使得对于任意$\mathrm{x} \in \mathrm{X}$，有$\mathrm{f(x)} \neq \mathrm{y}$，由此可得，存在$\mathrm{z} \in \mathrm{X}$，必有$f^n(z) \neq y$，与$I_x = f^n$矛盾。
因此 f 必为双射。

4.4-3 (a)证明:假定 f 不是满射
故$\exists y_1 \in \mathrm{Y}\big(\forall \mathrm{x} \in \mathrm{X}(\mathrm{f(x)} \neq y_1)\big)$。
因为 g 是单射，所以$\mathrm{g}(y_1)$所对应的z_1就取不到，则复合函数不是满射函数，这与条件矛盾，所以 f 是满射函数。
(b)不一定
例如：X集合为Z，Y集合为Z，Z'集合为N，$\mathrm{f(x)} = |\mathrm{x}|$，$\mathrm{g(x)} = |\mathrm{x}|$。

4.4-4 因为$\mathrm{f} \lozenge f^{-1} = I_A$，$\mathrm{f} \lozenge \mathrm{f} = I_A$，所以$\mathrm{f} = f^{-1}$，所以$\mathrm{f} = I_A$。

4.4-5 因为$\mathrm{g} \lozenge \mathrm{f} = I_X$，为一个双射函数，由定理 4.4.4 可得，所以$\mathrm{f}$为单射函数，$\mathrm{g}$为满射函数。

4.4-6 (a) 由$\mathrm{f} \lozenge f^{-1} = I_A$求 f 为单射：因为$\mathrm{f} \lozenge f^{-1} = I_A$，所以有$\mathrm{f}\big(f^{-1}(\mathrm{b})\big) = \mathrm{b}$即$f^{-1}\Big(f\big(f^{-1}(b)\big)\Big) = f^{-1}(b)$，令$f^{-1}(b) = a$，即$f^{-1}\big(f(a)\big) = a$，即$f^{-1} \lozenge \mathrm{f} = I_A$，由定理 4.4.4 可得，$\mathrm{f}$为单射。
由f为单射求$\mathrm{f} \lozenge f^{-1} = I_A$：因为 f 为单射，则在陪域$\{\mathrm{f(x)} | \mathrm{x} \in \mathrm{A}\}$上$\mathrm{f}$为双射，而$f^{-1}$在$\{\mathrm{f(x)} | \mathrm{x} \in \mathrm{A}\}$上为双射。由定理 4.4.5 可得，对于任意的$\mathrm{x} \in \mathrm{A}$，$\mathrm{f} \lozenge f^{-1} = I_A$，得证 。
(b)因为$\mathrm{g} \lozenge \mathrm{f} = I_X$，为一个双射函数，由定理 4.4.4 可得，所以$\mathrm{f}$为单射函数，$\mathrm{g}$为满射函数。

4.4-7 (a)$f^{-1}(x) = x$
(b)$f^{-1}(x) = 2x - \frac{1}{2}$
(c)$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2 + x}$
(d)$f^{-1}(x) = \log_2 x$

4.4-8 $\mathrm{g} = \{< 1, a >, < 2, c >, < 3, b >, < 4, a >\}$或
$\mathrm{g} = \{< 1, a >, < 2, c >, < 3, b >, < 4, \mathrm{b} >\}$或
$\mathrm{g} = \{< 1, a >, < 2, c >, < 3, b >, < 4, c >\}$

4.4-9 (a)$\mathrm{f} = \{< a, b >, < b, a >, < c, d >, < d, c >\}$

(b) $f = \{<a,b>,<b,b>,<c,d>,<d,d>\}$

4.4-10 (a) 256

(b) 41

(c) 10

4.4-11 $g \lozenge f = 2x + 2$

$f \lozenge g = 2x + 1$

4.4-12 (a) 不是

(b) 是

第五节

4.5-1 (a) 可数

(b) 可数

(c) 可数

(d) 可数

(e) 不可数

(f) 不可数

4.5-2 证明：

定义函数$f: R \to (0,\infty)$，$f(x) = e^x$。显然 f 是双射函数，所以R与$(0,\infty)$等势。

4.5-3 证明：

设集合$A = \{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\}$，$B = \{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\}$，A，B分别是(0，1]，(0，1)的子集。

定义函数$f: (0,1] \to (0,1)$，使得

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, \text{当 } n \in N^+\text{时} \\ f(x) = x, \text{当 } x \in (0,1] - A \text{ 时} \end{cases}$$

可以验证，f是双射函数，所以$(0,1] \sim (0,1)$

4.5-4 设$A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$，$B = \{b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$

则可以通过下标从$N \times N$到$A \times B$建立一个双射函数，这样就在$N \times N$到$A \times B$之间建立了一个一一映射，所以它们等势，因为$N \times N$是可数集合，则$A \times B$也是可数集合。

4.5-5 设$A = \{a_0, a_1, a_3, \ldots\}$

(1) 当$n = 1$时，$A^1 \sim A$，所以A^1是可数集合。

(2) 假设对于$n = k$时，A^k是可数集合

(3) 当$n = k + 1$时，$A^{k+1} = A^k \times A$，因为 A^k与N等势，A与N等势，易从$N \times N$到$A^k \times A$建立起双射函数，又根据 4.5.8 可知$N \times N$是可数集合，则$A^k \times A$也是可数集合，即A^{k+1}是可数集合。

综上所述，A^n是可数集合。

4.5-6 因为$N \times N$是可数集合，故存在一个枚举S，又因为A是有限集合，不妨设$N = \{1,2,3,\ldots,n\}$为其枚举，则将$S \cup N$即为构造出来的枚举。

4.5-7 (a) 若A为有理数集，则F_n的基数为：$\frac{{\aleph_0}^2}{2}$

(b) 若A为实数集，则F_n的基数为：$\aleph_0 * \frac{\aleph}{2}$

4.5-8 定义函数$f: [0,1) \to (\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$，

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$

易证f是双射函数，所以A~B

4.5-9 $S = \{< m, n > | m, n \in Z^+, m$ 与 n 互质$\}$

因为S是$N \times N$的无限子集，所以S是可数的。

令$g: S \to Q^-, g(< m, n >) = -\frac{m}{n}$，g是双射，故S是$Q^-$的一个枚举。

第六节

4.6-1 令$f(x) = \tan\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right), x \in (0,1)$

$\because$ f(x)为双射函数，故$(0,1) \sim (-\infty, +\infty)$

又易证$[0,1] \sim (0,1)$，故$[0,1] \sim (-\infty, +\infty)$