2022 级《线性代数》A 参考答案

一、 选择题

1. B　2. A　3 . D　4. C　5. B

二、 填空题

1. $-\frac{1}{32}(A-7E)$　**2.** $\frac{1}{2}$　**3.** **0**　**4.** $-\frac{16}{27}$　**5.** **21**

三、解

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$ ………………………　4

$$\underset{\substack{c_1+c_j\\ j=2,..,n}}{=}\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$ ……………………… 6

$$\underset{\substack{\text{从第一行开始}\\ \text{各行减去}\\ \text{后一行}}}{=}\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1\text{-}n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{按第一列展开}}{=}\frac{1}{2}n(n+1)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_j-r_1\\ j=2...}}{=}\frac{1}{2}n(n+1)(-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)}(-n)^{n-2}=(-1)^{n-1}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$ ………………………10

四、解：由已知得

$$A^{-1}BA = A^{-1}B + 6E \Rightarrow A(A^{-1}BA)A^* = A(A^{-1}B + 6E)A^*$$

$$\Rightarrow |A|B = BA^* + 6|A|E$$ ……………………………6

而$|A^*| = 8 = |A|^{4-1} \Rightarrow |A| = 2$ ……………………………8

$$\Rightarrow B(2E - A^*) = 12E$$

$$\Rightarrow B = 12(2E - A^*)^{-1} = 12diag(1,1,1,-6)^{-1}$$

$$= 12diag(1,1,1,-1/6) = diag(12,12,12,-2)$$ ……………………………10

五、解：令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta), B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ，

对 A 进行初等行变换得：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+r_4]{\substack{-3r_1+r_4 \\ r_2+r_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{bmatrix}.$$ ……………4

(1) 当 $a \neq 1, b$ 为任意值时， $R(A) = R(B) = 4$ ，表示法唯一； ………6

(2) 当 $a = 1, b = -1$ 时， $R(A) = R(B) = 2 < 4$ ，表示法不唯一；………8

$\beta = (c_1 + c_2 - 1)\alpha_1 + (-2c_1 - 2c_2 + 1)\alpha_2 + c_1\alpha_3 + c_2\alpha_4, c_1, c_2 \in R.$ ………10

(3) 当 $a = 1, b \neq -1$ 时， $R(A) \neq R(B)$, β 不可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示。………12

六、解

(1) f 的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix}$$

因为 $R(A)=2$， 所以 $k=3$. ……………………4

解特征方程

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda-5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-4)(\lambda-9) = 0$$

特征值为 0, 4, 9 ……………………7

(2) 当 $\lambda=0$ 时

$$(0E-A)=\begin{pmatrix}-5&1&-3\\1&-5&3\\-3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系：$\xi_1=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^T$。

当 $\lambda=4$ 时，

得基础解系 $\xi_2=(1,1,0)^T$

当 $\lambda=9$ 时，

得基础解系 $\xi_3=(1,-1,1)^T$ ……………………10

$$\eta_1=\|\xi_1\|^{-1}\xi_1=\frac{\sqrt{6}}{3}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^T=(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})^T$$

$$\eta_2=\|\xi_2\|^{-1}\xi_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)^T$$

$$\eta_3=\|\xi_3\|^{-1}\xi_3=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1)^T$$ ………… 13

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，所求正交变换为 $x=Qy$，其中 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{3}&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$

由（1），f 标准型为 $f=4y_2^2+9y_3^2$， …………14

所以 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示椭圆柱面。 ………… 15

七、证明

（1）因为 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，所以 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

由秩的性质得 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A})\le n$， …………… 3

又 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A})\ge R(\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}))=n$ …………… 6

所以 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A})=n$ …………… 7

（2）由已知易得：$A^T=A$，即 A 是实对称矩阵，所以一定可以对角化。 ……………… 2

$$A\alpha=\alpha\alpha^T\alpha+\beta\beta^T\alpha=\alpha(\alpha^T\alpha)+\beta(\beta^T\alpha)=\|\alpha\|^2\alpha=\alpha$$

同理 $A\beta=\beta$，

所以 1 是 A 的二重特征根。 …………… 4

设 λ 是第三个特征值，γ 是对应的特征向量，则 $\gamma^T\alpha=\gamma^T\beta=0$，

故 $A\gamma=(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\gamma=0$，即 $\lambda=0$.

所以 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$ 相似于对角矩阵 $\Lambda=diag\{1,1,0\}$。 ………………7。

八、解：

由已知设 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$，则收益能耗模型为

$$X-QX=(E-Q)X=\begin{pmatrix}5\\10\\0\end{pmatrix}$$ …………… 4

易得

$$|E-Q|\neq 0$$

所以 $X=(E-Q)^{-1}\begin{pmatrix}5\\10\\0\end{pmatrix}$ ………..…… 6