《概率论与数理统计》试题B参考答案及评分标准

一. 单项选择题（每小题4分，共20分）

1. A　　2. B　　3. B　　4. D　　5. A

二. 填空题（每小题4分，共20分）

1. $\frac{1}{8}$　　2. 3　　3. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2$　　4. $g(y)$　　5. (0.2738, 1.48)

三. 解答题（共60分）

1. (15分)解：依题意 $P(AB)/P(B)=P(AB)/P(A)$，故

$$P(B)=P(A)=\tfrac{1}{3},\qquad P(AB)=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{6}$$ ……………………………2分

（1）(X,Y) 取值于 $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$．由 X,Y 的定义有

$$p_{00}=P(X=0,Y=0)=P(\overline{AB})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(AB))=\tfrac{1}{2}$$

或者 $p_{00}=P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A}-\overline{A}B)=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=P(\overline{A})-P(\overline{A}\mid B)P(B)=\tfrac{1}{2}$，

类似地有

$p_{01}=P(X=0,Y=1)=\tfrac{1}{6}$，$p_{10}=P(X=1,Y=0)=\tfrac{1}{6}$，$p_{11}=P(X=1,Y=1)=\tfrac{1}{6}$ ………6分

列表如下：

Y \ X	0	1	$p_{\cdot j}$
0	1/2	1/6	2/3
1	1/6	1/6	1/3
$p_{i\cdot}$	2/3	1/3	

（2）由 (X,Y) 的联合分布律立得边缘分布律

$$P\{X=0\}=P\{Y=0\}=\tfrac{2}{3},\quad P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\tfrac{1}{3},$$

故 $E(X)=0\times\tfrac{2}{3}+1\times\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{3}$，　$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\tfrac{2}{9}$

$E(Y)=\tfrac{1}{3}$，　$D(Y)=\tfrac{2}{9}$，　$E(XY)=0\times\tfrac{1}{2}+0\times\tfrac{1}{6}+0\times\tfrac{1}{6}+1\times\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{6}$ ……………12分

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\tfrac{1}{6}-(\tfrac{1}{3})^2=\tfrac{1}{18}$，$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{1}{4}$ ……………15分

2. (10分) 解：依题意，X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[-1,1]\\ 0, & x\notin[-1,1]\end{cases}$$ ………………………2分

首先求Y的分布函数$F_Y(y)$. $\forall\, y\in \mathrm{R}$，由定义

$$F_Y(\mathrm{y})=\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(1-X^2\le y)=\mathrm{P}(X^2\ge 1-y)$$ ………………………3分

因$0\le X^2\le 1$，而当$y\ge 1$时，$1-y\le 0$；当$y\le 0$时$1-y\ge 1$，故

$$F_Y(y)=\begin{cases}1, & y\ge 1\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$ ………………………5分

当$0<y<1$时，$0<1-y<1$，从而

$$F_Y(\mathrm{y})=\mathrm{P}(X^2\ge 1-y)=\int_{x^2\ge 1-y}f_X(x)dx=\int_{\{\sqrt{1-y}\le x\le 1\}\cup\{-1\le x\le -\sqrt{1-y}\}}\frac{1}{2}dx=1-\sqrt{1-y}$$ ………8分

综上，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}}, & 0<y<1\\ 0, & y\le 0 \text{ 或 } y\ge 1\end{cases}$$ ………………10分

3. (10 分) 证：设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $X_1,\cdots,X_n$ 的一组观测值，则似然函数为

$L(t)=\prod_{k=1}^{n}t^2x_ke^{-tx_k}$，从而对数似然方程为

$$\ln L(t)=\sum_{k=1}^{n}(2\ln t+\ln x_k-tx_k)$$ ………………………4分

令$\dfrac{d\ln L(t)}{dt}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{2}{t}-x_k)=0$，解得

$$t=\frac{2}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k}=\frac{2}{\bar{x}},$$ ………………………8分

故t的最大似然估计量为$\hat{t}=\frac{2}{\bar{X}}$. ………………………10分

4. (10 分) 解：检验统计量为 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ ……………3 分

这里 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2$， $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$. 要使

$$\mathrm{P}\{\text{犯第一类错误}\}=\mathrm{P}_{H_0}\{H_1\text{为真}\}=\mathrm{P}_{H_0}\{\overline{X}<k\}\le\alpha \quad\text{……………4 分}$$

其中 k 是待定常数. 考虑到

$$\mathrm{P}_{H_0}\{\overline{X}<k\}=\mathrm{P}_{H_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}<\frac{k-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right\}\le\mathrm{P}_{H_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<\frac{k-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right\}\quad\text{……………6 分}$$

不妨令 $\mathrm{P}_{H_0}\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<\frac{k-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right\}=\alpha$. 而 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，从而 $\dfrac{k-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=-t_\alpha(n-1)$ ……8 分

故相应于检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 的拒绝域为 $(-\infty,-t_\alpha(n-1))$. ………………10 分

注： 也可取 $\overline{X}$ 为检验统计量，相应拒绝域为 $(-\infty,k)$，$k=-t_\alpha(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}+\mu_0$.

5. (15 分) 解：定义随机事件 $W=$“步行去的教学楼”，$\overline{W}=$“骑车去的教学楼”
$B=$“选中 **Mobike**”，$\overline{B}=$“选中 **Ofo**”，$D_1=$“**Mobike** 故障”，$D_2=$“**Ofo** 故障”，则 B 与 $D_k\ (k=1,2)$ 相互独立，D_1 与 D_2 也相互独立且

$$\mathrm{P}(B)=0.48,\ \mathrm{P}(\overline{D_1})=0.97,\ \mathrm{P}(D_2)=0.08 \quad\text{………………………2 分}$$

（1）所求概率为 $\mathrm{P}(W)$. 依题意 $W=D_1D_2$，由独立性有

$$\mathrm{P}(W)=\mathrm{P}(D_1)\mathrm{P}(D_2)=0.03\times0.08=0.0024 \quad\text{………………………6 分}$$

（2）所求概率 $p=\mathrm{P}(B\overline{D}_1\cup\overline{B}D_2\overline{D}_1\mid\overline{W})$. 由 **Bayes** 公式有

$$\mathrm{P}(B\overline{D}_1\cup\overline{B}D_2\overline{D}_1\mid\overline{W})=\frac{\mathrm{P}(\overline{W}\mid B\overline{D}_1\cup\overline{B}D_2\overline{D}_1)\mathrm{P}(B\overline{D}_1\cup\overline{B}D_2\overline{D}_1)}{\mathrm{P}(\overline{W})}\quad\text{…………10 分}$$

显然在事件 $B\overline{D}_1\cup\overline{B}D_2\overline{D}_1$ 发生的条件下，$\overline{W}$ 必发生，即 $\mathrm{P}(\overline{W}\mid B\overline{D}_1\cup\overline{B}D_2\overline{D}_1)=1$，故

$$p=\frac{\mathrm{P}(B\overline{D}_1\cup\overline{B}D_2\overline{D}_1)}{\mathrm{P}(\overline{W})}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(B\overline{D}_1)+\mathrm{P}(\overline{B}D_2\overline{D}_1)}{1-\mathrm{P}(W)}=\frac{0.48\times0.97+0.52\times0.08\times0.97}{1-0.0024}=0.5072\quad\text{…………15 分}$$