装 订 线

任课教师：

装 订 线

学号：

姓名：

班级：

装 订 线

西 安 电 子 科 技 大 学

考试时间 120 分钟

试 题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
分数									

1.考试形式闭卷☑ 开卷□ ；2.本试卷共八大题，满分 100 分 2021.6.30

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix}$，$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则必有**( ).**

(A) $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}=\mathbf{B}$ ； (B) $\mathbf{AP}_1=\mathbf{BP}_2$； (C) $\mathbf{AP}_2=\mathbf{BP}_1$； (D) $\mathbf{P}_2\mathbf{A}=\mathbf{P}_1\mathbf{B}$.

2.设 **A** 为 n 阶方阵，则**|A|=0** 的必要条件是（ ）

(A) **A** 的两行(或列)元素对应成比例； (B) **A** 中必有一列为其余列的线性组合；

(C) **A** 中有一行元素全为零； (D) 线性方程组 **A**x=0 只有零解.

3.若 **A** 为 n 阶实对称矩阵，且二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ 正定，则下列结论不正确的是（ ）

(A) 对任意 n 维列向量 $\mathbf{x}$，$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ 一定为正； (B) **A** 的一切顺序主子式全为正；

(C) **A** 的主对角线上的元素全为正； (D) **A** 的特征值全为正.

4.设矩阵 **A**，**B** 为 n 阶矩阵，那么以下命题错误的是（ ）

（A）若 **A** 与 **B** 相似，则 **A** 与 **B** 等价； （B）若 **A** 与 **B** 合同，则 **A** 与 **B** 等价；

（C）若 **A** 与 **B** 都为实对称矩阵，且 **A** 与 **B** 相似，则 **A** 与 **B** 合同；

（D）若 **A** 与 **B** 合同，则 **A** 与 **B** 相似.

5.已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 I：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$；向量组

II：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_2$，则（ ）

（A）向量组 I 和 II 都线性相关； （B）向量组 I 和 II 都线性无关；

（C）向量组 I 线性相关，向量组 II 线性无关；

（D）向量组 I 线性无关，向量组 II 都线性相关.

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 4 & x & 3\end{bmatrix}$，**B** 为 3 阶非零矩阵，且 **AB=O**，则 $x=$____________.

2.若对任意 n 维列向量 b，线性方程组 **Ax=b** 均有解，则 n 阶矩阵 **A** 的秩是________.

3. 向量 $\boldsymbol{\beta}=(-4,2,6)^{\mathrm{T}}$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,1,2)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标是________________________.

4. 已知 3 阶方阵 **A** 的每行元素之和都为 0，且 $R(\mathbf{A})=2$，设 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，则非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解是____________________.

5.已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+6x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3$，则其规范形为________________________.

三、（15 分）当 a 为何值时，线性方程组
$$\begin{cases} x_1+ax_2+2x_3=3\\ 2x_1+(1+2a)x_2+(5-a)x_3=1\\ 2x_1+(1+3a)x_2+(2a+5)x_3=3-4a\end{cases}$$
有唯一解、无解、无穷多解？在有无穷多解时求其通解.

四、（10 分）计算 n 阶行列式（注：副对角线元素为 1，2，3，…，n）

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & \cdots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

五、（10 分）已知向量组 I：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^T$；向量组 II：

$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,2)^{\mathrm{T}}$，

（1）证明向量组 I 和向量组 II 都是 3 维实向量组空间 R^3 的一组基；

（2）求从基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

六、（15 分）用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2{x_1}^2+4{x_2}^2+2{x_3}^2-4x_1x_3$ 为标准形，求所用的正交变换及标准形.

七、（7 分） 设 A 为 n 阶正定矩阵，证明$|\mathbf{A}+\mathbf{E}|>1$.

八、（8 分）假设一个城市的总人口数是固定不变，但人口的分布情况变化如下：每年都有 5%的市区居民搬到郊区；而有 15%的郊区居民搬到市区. 若开始有 700000 人口居住在市区，300000 人口居住在郊区.

设第 n 年市区人数和郊区人数分别为：a_n 、b_n ，用向量表示为 $\mathbf{x}_n=\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$ ；第 n＋1 年的市区和郊区人数分别为 a_{n+1} 、b_{n+1} ，用向量形式表示为 $\mathbf{x}_{n+1}=\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}$.

（1）若 $\mathbf{x}_{n+1}=\mathbf{A}\mathbf{x}_n$ ，请写出矩阵 A.

（2）计算 10 年后市区和郊区的人口情况（用向量 $\mathbf{x}_{10}$ 表示），请用 MATLAB 软件写出相应语句：

输入原来市区和郊区的人口向量：x0=______________________________.

输入变换矩阵 A：A=_________________________________.

计算 $\mathbf{x}_{10}$ ：x10=__________________________.

2020 级线性代数试卷 A 参考答案及评分标准

一、**1. D**　　　**2. B**　　　**3.A**　　　　　　　**4.D**　　　**5. D**

二、**1. -3**　　　**2. n**　　　**3.** $(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$　　**4.** $k(1,1,1)^{\mathrm{T}}+(1,3,-5)^{\mathrm{T}}$，**k** 为任意常数

5. $y_1{}^2-y_2{}^2-y_3{}^2$

三、解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1 & a & 2 & 3\\ 2 & 1+2a & 5-a & 1\\ 2 & 1+3a & 2a+5 & 3-4a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & a & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1-a & -5\\ 0 & 0 & a(a+2) & a+2\end{bmatrix}$$

...... 6 分

1）当 $a\neq 0$ 且 $a\neq -2$ 时，$\mathrm{R}(\mathbf{A})=\mathrm{R}([\mathbf{A},\mathbf{b}])=3$，有唯一解；　**...... 8** 分

2）当 $a=0$ 时，$\mathrm{R}(\mathbf{A})\neq\mathrm{R}([\mathbf{A},\mathbf{b}])$，无解；　**...... 10** 分

3）当 $a=-2$ 时，$\mathrm{R}(\mathbf{A})=\mathrm{R}([\mathbf{A},\mathbf{b}])=2<3$,无穷多解　**......12** 分

其增广矩阵的行最简形为 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 8 & -7\\ 0 & 1 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则通解为 $k\begin{bmatrix}-8\\ -3\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-7\\ -5\\ 0\end{bmatrix}$, k 为任意常数.　……15 分

四、解：

将原行列式第 **2** 行乘**-1** 加到其他行中得：

$$D_n=\begin{vmatrix} & & & & & -1\\ 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2\\ & & & 1 & & \\ & & 2 & & & \\ & \iddots & & & & \\ n-2 & & & & & \end{vmatrix}=(-1)^{n(n-1)/2+1}\times 2\times(n-2)!$$

注：若采用其他方法，答案正确得 10 分.

五、（1）证明：向量组 I 构成矩阵为 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，向量组 II 构成矩阵为 $\mathbf{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，计算两个矩阵的行列式，得|A|= -2≠0，|B|= -1≠0，所以向量组 I 和向量组 II 都是线性无关向量组，3 个 3 维线性无关向量构成的向量组必是 3 维实向量空间的一组基.

……5 分

（2）计算 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&-3&-1\\-1&2&-2\\1&0&2\end{bmatrix}$ ……10 分

六、解：

写出二次型的矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&4&0\\-2&0&2\end{bmatrix}$ ……2 分

根据特征方程 $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=0$，计算得到矩阵 A 的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=0$.

……5 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=4$ 时，解线性方程组 $(\mathbf{A}-4\mathbf{E})\mathbf{x}=0$，得正交特征向量为：

$$\mathbf{p}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{p}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

当 $\lambda_3=0$ 时，解线性方程组 $\mathbf{Ax}=0$，得特征向量为：$\mathbf{p}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

……10 分

对向量 $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ 单位化后：$\mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{q}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\mathbf{q}_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

令 $\mathbf{Q}=(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$，则所用正交变换为 $x=Qy$ ……13 分

二次型的标准形为：$f(y_1,y_2,y_3)=4{y_1}^2+4{y_2}^2$ ……15 分

七、证明：设矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，于是矩阵 A+E 的特征值为

$\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$. ……3 分

因为 **A** 是正定矩阵，于是 A 的所有特征值均大于 0，即 $\lambda_i>0, i=1,2,\cdots,n$，

于是有 $\lambda_i+1>1, i=1,2,\cdots,n$. ……5 分

则有：$\left|\mathbf{A}+\mathbf{E}\right|=\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda_i+1\right)>1$ ……7 分

八、解（**1**）矩阵 $A=\begin{bmatrix}0.95 & 0.15\\ 0.05 & 0.85\end{bmatrix}$ ……5 分

输入原来市区和郊区的人口向量：**X0=[700000;300000]** ……6 分

输入变换矩阵 **A: A=[0.95,0.15;0.05,0.85]** ……7 分

计算 $\mathbf{x}_{10}$：**X10=A^10*X0** ……8 分