《概率论与数理统计》试题A参考答案及评分标准

一.单项选择题（每小题4分，共20分）

1. A　　2. D　　3. D　　4. B　　5. A

二.填空题（每小题4分，共20分）

1. $\underline{\frac{3}{4}}$　2. $\underline{4}$　3. $\underline{n(1-e^{-x})}$　4. $\underline{(10,10)；F}$　5. $\underline{84.5；7193.8}$

三.解答题（每小题10分，共60分）

1.（10分）解：首先求Y的分布函数$F_Y(y)$．由于$F(x)$导数大于零， 故$F(x)$有反

$F^{-1}(x)$ 定义在$[0,1]$．　…………………2分

由$0\le F(x)\le 1$于，故$\forall\, y\in R$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$

…………………4分

当 $0\le y<1$时，

$$F_Y(y)=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}=F(F^{-1}(y))=y$$ ……………7分

Y的分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ y, & 0\le y<1;\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$ …………………… 8分

于是

$$D(Y)=E[(Y-EY)^2]=\int_0^1 (y-\tfrac{1}{2})^2\cdot 1dy=\frac{1}{12}$$ …………………10分

2.（10分）解：依题意，Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x\le y\le x+2;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ …………………………2分

从而(X,Y)的联合条件概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x}, & 0<x\le y\le x+2;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ …………4分

故Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \int_0^y \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-y}), & 0< y\le 2;\\ \int_{y-2}^y \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2-y}-\mathrm{e}^{-y}), & y>2.\end{cases}$$ ……………………7 分

从而Y的数学期望为

$$\mathrm{E}(Y)=\int_0^{\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^2 y\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y++\int_2^{\infty}y\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2-y}-\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y=2$$ ……10 分

3. (10 分)解：当$r=0$时，X,Y相互独立，且它们有相同的概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad x\in(-\infty,\infty)$$ ……………………4 分

故T的分布函数为

$$F(t)=\mathrm{P}\{T\le t\}=\mathrm{P}\{X\le t,Y\le t\}=\mathrm{P}\{X\le t\}\mathrm{P}\{Y\le t\}$$

即

$$F(t)=\mathrm{P}\{X\le t\}\mathrm{P}\{Y\le t\}=\int_{-\infty}^t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$ ……………8 分

从而T的概率密度函数为

$$f_T(t)=F'(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$ ……………10 分

4. (10 分)解：依题意，最大似然函数为：

$$L(\sigma)=\frac{x_1\cdots x_n}{\sigma^{2n}}\mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{2\sigma^2}}$$ ……………………4 分

对数似然方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\ln L(\sigma)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left[\sum_{k=1}^n\ln x_k-2n\ln\sigma-\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{2\sigma^2}\right]=0$$ …………6 分

即

$$-\frac{2n}{\sigma}-\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2}(-2)\sigma^{-3}=0$$ …………8 分

解出得σ的最大似然估计为

$$\sigma=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{2n}}$$ …………10 分

5. (10分) 解：检验统计量为

$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{分}$$

其中 $\overline{X}$ 为样本均值，S 为样本标准差. 依题意，拒绝域形如

$$t<k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{分}$$

其中 k 为待定常数，由如下关系确定

$$\mathrm{P}\{\text{当}H_0\text{为真时拒绝}H_0\}=\mathrm{P}\{t<k\}=\alpha$$

当 H_0 为真时，由 t 分布的对称性,

$$\mathrm{P}\{t<-t_\alpha(n-1)\}=\mathrm{P}\{t>t_\alpha(n-1)\}=\alpha$$

故取

$$k=-t_\alpha(35)=-2.7238$$

则

$$\mathrm{P}\{t<-2.7238\}=\alpha=0.005 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{分}$$

而当 H_0 为真时

$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{990-1000}{\sqrt{\frac{486}{36}}}=-\frac{20}{3\sqrt{6}}\approx-2.7216>-2.7238 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 8\text{分}$$

即检验统计量的观测值落在拒绝域之外，从而在 0.5% 的显著性水平下，接受原假设，即网购消费者水平服从均值为 1000 的正态分布. ············10 分

6. (10分) 解：枢轴量为

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{分}$$

依题意 $1-\alpha=0.9$, $\frac{\alpha}{2}=0.05$ 且

$$z_{\alpha/2}=z_{0.05}=1.65,\ n=10, \sigma=10, \overline{X}=169 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5\text{分}$$

从而

$$\mathrm{P}\{-z_{\alpha/2}\le Z\le z_{\alpha/2}\}=0.9$$

$$\mathrm{P}\{\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}=0.9 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8\text{分}$$

故 μ 的置信水平为 0.9 的置信区间为

$$[\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]=[169-1.65\sqrt{10},169+1.65\sqrt{10}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10\text{分}$$