《概率论与数理统计》试题A参考答案

一. 单项选择题（每小题4分，共20分）

1. B　　2. C　　3. D　　4. B　　5. A

二. 填空题（每小题4分，共20分）

1. 0.18　2. $P(N=k)=\dfrac{2k-1}{36},\ k=1,\cdots,6$　3. 3.2　4. 0　5. $\hat{\mu}_2$；$\hat{\mu}_1$

三. 解答题（每小题10分，共60分）

1. (10分)解：记B为"最终成绩合格"，B_1为"第一次考试超过55分"，B_2"第二次考试超过55分"。依题意，$B_2 \subset \overline{B}_1$且$P(B_1)=0.68,\ \ P(B_2 \mid \overline{B}_1)=0.7$

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B\mid B_1)P(B_1)+P(B\mid \overline{B}_1)P(\overline{B}_1)\\&=P(B\mid B_1)P(B_1)+P(B_2\mid \overline{B}_1)P(\overline{B}_1)=0.68+0.32\times 0.7=0.904\end{aligned}$$ ………3分

（1）所求概率为$P(B_1\mid B)$。由贝叶斯公式

$$P(B_1|B)=\frac{P(B_1)P(B\mid B_1)}{P(B)}\approx 0.75$$ ………6分

（2）显然$P(X=1)=P(B)=0.904,\ P(X=0)=0.096$，故

$$P(\tfrac{1}{X+1}=1)=P(X=0)=0.096，\ P(\tfrac{1}{X+1}=\tfrac{1}{2})=P(X=1)=0.904$$ ……8分

从而$F(x)=\begin{cases}0, & x<\frac{1}{2}\\ 0.904, & \frac{1}{2}\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$。 ………10分

2. (10分) 解：由条件概率与x无关知随机变量X,Y相互独立 …………2分

于是

（1） $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 1\le y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。 …………6分

(2)由于X,Y期望都存在，独立必不相关，从而$\operatorname{cov}(X,Y)=0$ ………10分

3. (10分) 解：似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\theta-x_i}=\mathrm{e}^{n(\theta-\bar{x})}\quad (x_i\ge\theta, i=1,\cdots,n)$ ………3分

由于$\theta\le x_i\ \ (i=1,\cdots,n)\ \Leftrightarrow\ \theta\le\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$， 又$L(\theta)$关于$\theta$单增，故当

$\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$时$L(\theta)$取到最大值。 …………8分

因此$\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$。 …………10分

4. (10分) 解：由于方差$\sigma^2=1$已知，故数学期望μ的置信水平为0.95的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$$ …………4分

将$n=100, \overline{x}=5,\ \sigma=1,\ \alpha=0.05$及$z_{0.025}=1.96$代入得所求区间为

$$(4.804,\ 5.196)$$ …………10分

5. (10分) 解：设这9个数据对应的简单样本为$X_1,\cdots,X_9$。

(I) 需检验： $H_0:\sigma^2\le 0.01,\ \ H_1:\sigma^2>0.01$ …………2分

(II) 检验统计量： $\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{9}(X_i-5.35)^2}{0.01}$ …………4分

(III) 给定$\alpha=0.005$，临界值 $\chi^2_{\alpha}(9)=23.59$，从而接受域为：$(0,\ 23.59)$……6分

(IV) 检验统计量的值：因 $\sum_{i=1}^{9}(x_i-5.35)^2=0.3969=0.63^2$，故 $\chi^2=39.69>23.59$，故拒绝原假设，即在0.5%的显著性水平下，股票价格波动显著地增大了。…………10分

6. (10分) 解：记X_i为第i只Led灯的寿命，则

$$EX_i=5\times10^4,\ \ DX_i=2.5\times10^9$$ …………2分

由中心极限定理，总寿命$\sum_{i=1}^{36}X_i$近似服从正态分布，从而近似地有

$$\frac{\sum_{i=1}^{36}X_i-36EX_i}{\sqrt{36DX_1}}\sim N(0,1)$$ …………6分

于是所求概率为

$$P\left(\sum_{i=1}^{36}X_i\ge 1.92\times10^6\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{36}X_i-36EX_i}{\sqrt{36DX_1}}\ge\frac{1.92\times10^6-36\times5\times10^4}{6\times5\times10^4}\right)$$ …………10分

$$\approx 1-\Phi(0.4)=0.34$$