Вероятность разорения в классической модели коллективного риска

Кодзоев М., Куркин М., Шаповалов Р.

Московский Государственный Университет им. Ломоносова

3 апреля 2019 г.

Модель с непрерывным временем

Используем два случайных процесса с непрерывным временем: процесс числа страховых случаев $\{N(t), t \geq 0\}$ и процесс суммарных выплат $\{S(t), t \geq 0\}$

Пусть $\exists\ N(t)$ - число страховых случаев и $S(t)$ - суммарные страховые выплаты, произведенные до момента t. Начинаем отсчет с нуля.

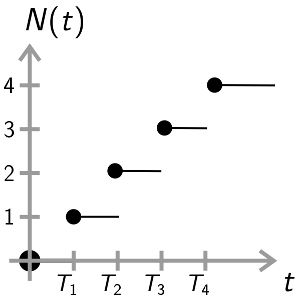
ПустьX_i — величина i-ой страховой выплаты. Тогда $S(t) = X_1 + X_2 + ... + X_{N(t)}$

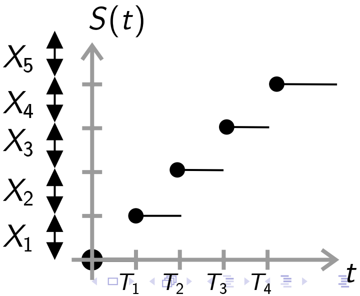
Пусть $t \geq 0$ и $h > 0$. Тогда разность $N(t+h) - N(t)$ является числом страховых случаев, а разность $S(t+h) - S(t)$ - суммарными страховыми выплатами, которые происходят в интервале между t и $t+h$.

Модель с непрерывным временем

Пусть T_i обозначает момент времени, когда происходит i-ый страховой случай. Тогда $T_1, T_2, \ldots$ - случайные величины. Чтобы исключить возможность возникновения одновременно двух и более страховых случаев, будем считать, что $T_1 < T_2 < T_3 < \ldots$

Пусть $V_1 = T_1$ и $V_i = T_i - T_{i-1}, i > 1$ время, прошедшее между двумя последовательными страховыми случаями





Модель с непрерывным временем

Имеется несколько способов определять распределение процесса числа страховых случаев. Рассмотрим два из них:

(1) *Глобальный метод.* Для всех $t \geq 0$ и всех $h > 0$ мы определяем условное распределение с.в. $N(t+h) - N(t)$ при условии, что значения с.в. $N(s)$ для $s \leq t$ известны.

(2) *Дискретныи метод.* Мы определяем совместное распределение с.в. $V_1, V_2, V_3, \ldots$

Мы переходим к пуассоновскому процессу, для которого длины интервала времени между последовательными страховыми случаями взаимно независимы.

В глобальном методе определения пуассоновского процесса исходят из того, что $\mathbf{P}[N(t+h)-N(t)=k \mid N(s)$ для всех $s \leq t] = \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!}$ для всех $t \geq 0$ и $h > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Из этого определения вытекают следующие свойства:

1) Приращения стационарны.

2) Для любого множества непересекающихся временных интервалов приращения независимы, то есть для $t_1 < t_1 + h1 < t_2 < t_2 + h2 < \ldots < t_n + h_n$ приращения $N(t_1+h_1) - N(t_1), N(t_2+h_2) - N(t_2), \ldots, N(t_n+h_n) - N(t_n)$ взаимно независимы.

3)Вероятность того, что несколько страховых случаев произойдет одновременно, равна нулю, то есть:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{P}[N(t+h)-N(t)>1]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-\lambda h}-\lambda h e^{-\lambda h}}{h} = 0$$

Модель с непрерывным временем

Перейдем к определению сложного пуассоновского процесса. Если для $S(t)$ случайные величины $X_1, X_2, X_3, \ldots$ независимы, имеют общую функцию распределения $P(x)$ и если они также независимы от процесса $\{N(t), t \geq 0\}$, то процесс $\{S(t), t \geq 0\}$ называется сложным пуассоновским процессом. Обладает несколькими свойствами. Вот одно из них:

Если $t \geq 0$ и $h > 0$, то распределение с.в. $S(t+h) - S(t)$ является сложным пуассоновским с параметром λh функцией распределения $P(x)$, то есть:

$$\mathbf{P}[S(t+h) - S(t) \leq x \mid S(s)\ \forall s \leq t] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda h} (\lambda h)^k \frac{P^{*k}(x)}{k!}$$

Определение 1

Рассмотрим период длины $t > 0$, где размер собранной премии равен ct, а $S(t)$ - величина суммарных страховых выплат, распределение которой - сложное пуассоновское, причём $\mathbb{E}N(t) = \lambda t$.
Коэффициент Лундберга $\widetilde{R}$ - наименьшее положительное решение уравнения

$$M_{S(t)-ct}(r) = \mathbb{E}[e^{r(S(t)-ct)}] = e^{-rct}M_{S(t)}(r) =$$

$$= e^{-rct}e^{-\lambda t[M_X(r)-1]} = 1 \Leftrightarrow \lambda t[M_X(r) - 1] = cr,$$

или, при $c = (1 + \theta)\lambda p_1 r$, уравнения

$$1 + (1 + \theta)\lambda p_1 r = M_X r \ \mathbf{(2.1)}$$

Определение 2

Рассмотрим случай с показательным распределением величины страховых выплат с параметром $\beta > 0$.

1) Определим коэффициент Лундберга:

Уравнение 2.1 принимает вид

$$1 + \frac{(1+\theta)r}{\beta} = \frac{\beta}{\beta - r}$$

или в форме квадратного уравнения по r,

$$(1+\theta)r^2 - \theta\beta r = 0$$

как и ожидалось, $r = 0$ - решение, а наименьшим положительным решением уравнения 2.1 (коэф. Лундберга), оказывается

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta}$$

2) Вычислим вероятность разорения:

Пусть разорение, если оно происходит, случается в момент T. Пусть $\hat{u}$ является величиной рискового резерва непосредственно перед моментом T.

$$\mathbb{P}(-U(T) > y) = \mathbb{P}(X > \hat{u}+y | X > \hat{u}) = \frac{\beta \int_{\hat{u}+y}^{\infty} e^{-\beta x} dx}{\beta \int_{\hat{u}}^{\infty} e^{-\beta x} dx} = e^{-\beta y}$$

$$p_{-U(T)|T<\infty}(y) = \frac{d}{dy}(1 - e^{-\beta y}) = \beta e^{-\beta y}$$

$$\mathbb{E}[exp(-RU(T))|T < \infty] = \beta \int_0^{\infty} e^{-\beta y} e^{Ry} dy = \frac{\beta}{\beta - R}$$

Вычисление вероятности разорения

Воспользуемся вычисленным ранее коэффициентом Лундберга и теоремой:

$$\psi(u) = \frac{(\beta - R)e^{-Ru}}{\beta} = \frac{1}{1+\theta} exp\left(\frac{-\theta\beta u}{1+\theta}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\theta} exp\left[\frac{-\theta u}{(1+\theta)p_1}\right]$$

Использованная литература

Н. Бауэрс, Х. Гербер, Д. Джонс, С. Несбитт, Дж. Хикман (1997)
Актуарная математика, 355 – 368.