Modeling the Polycentric Transition of cities

摘要翻译

经验分析显示，大部分城市系统经历了从单中心到多中心的过程。作者提出了一个城市的随机的、非均衡模型，用以解释*副中心的出现是由于交通堵塞*。这个模型显示，交通堵塞使单中心状态变得不稳定；次中心的数量和城市中的总通勤距离的scale是亚线性关系的。

Keys

- 城市演化的时间尺度：换工作率高于换房率。
  - 短期内，可以只关注找工作的问题，假设每个人的住址是不变的。
- 城市的发展分为3个regime
  - 单中心
  - 距离驱动-多中心
  - 吸引力驱动-多中心

Models

1. Fujita & Ogawa

一个人搬到这个城市，会选择住在i, 工作在j，使得

$$Z_0 = W(j) - C_R(i) - C_T(i, j)$$

达到最大。自左到右是：效用，j的工资，i的租金，i到j的通勤费用。

通勤费用一般来讲正比于欧式距离：$C_T(i,j) = td_{ij}$.

2. Modifications

2.1 Thoughts

1. 由于换工作率高于换房率，我们认为，一个人**先**随机找一个住处，在此条件下，再从N_c个工作中随机找一个。
   - 定义：active subcenters：潜在中心的子集。

   在此假设之下，租金就会被预先确定下来，那么i处定居的人找一个j处的工作就会要求Z_{ij}达到最大，

   $$Z_{ij} = W(j) - C_T(i,j).$$

   所以下面就讨论一下$W(j)$和$C_T(i,j)$
2. $W(j)$:
   - 设η为$[0,1]$上的随机变量。则$W(j) = s\eta_j$.
3. $C_T(i,j) = td_{ij}[1 + \left(\frac{T_{ij}}{c}\right)^{\mu}]$
   - T_{ij}: 单位时间的路流量；c: 路容量
   - t: 文章中没说，应该是t时刻，也就是截至t时刻的人口数。人口越多通行代价越大。
   - d_{ij}: 住处i到工作地点j的欧式距离。
   - μ: 堵塞的 *摩擦系数*。
4. 下面我们认为T_{ij}只与就业位置j附近的交通状况有关。写成$T(j)$.

2.2 Summary

- 城市中有N_c个位置，已经是/未来可能是一个就业中心。
- 每一个来到这个城市的人，会先选择一个位置i定居。如果对于$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N_c\}$, $Z_{ik} \leq Z_{ij}$ 他会选择就业中心j工作。其中

$$Z_{ij} = \eta_j - \frac{d_{ij}}{l}\left[1 + \left(\frac{T(j)}{c}\right)^{\mu}\right]$$
$$l := \frac{s}{t}$$

- 假设l足够大，也即最大收入相对于城市规模足够大，也即经济状况足够好，使得在人口比较少的时候，每个人都可以去唯一的市中心工作（工资比较高），也就是说，经济发展水平足够好，使得中心可以出现。

Regime transition analysis

单中心到多中心

单中心结构中，η_j处于绝对统治地位。可以写成$Z_{ij} \approx \eta_j$.

解释：小城市中，市民都会选择到the most attractive center(η_t最大的位置)来工作。

我们以后默认$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \cdots$. 最有吸引力的结点的吸引力是$\eta_1$.

当人口P增加的时候，η_1附近的交通状况会变差。这会使得单中心η_1的优势减小，直到某一时刻，对某个新加入的居民来说，η_2是一个更好的选择。这一时刻，一定有

$$\begin{aligned}&Z_{i1} < Z_{i2}\\&\eta_1 - \frac{d_{i1}}{l}\left[1 + \left(\frac{T(1)}{c}\right)^{\mu}\right] < \eta_2 - \frac{d_{i2}}{l}\left[1 + \left(\frac{T(2)}{c}\right)^{\mu}\right]\end{aligned}$$

我们分析一下上面的式子。现在所有人都在唯一的中心工作。所以$T(1) = P$，$T(2) = 0$. 由于i是随机选取的。所以我们认为$d_{i1} \sim d_{i2}$. 为了计算的方便，直接令$d_{i2} = d_{i1}$. 另外，不妨假设各个区域的工资水平是均匀分布的，$\eta_2 - \eta_1 = \eta_3 - \eta_2 = \cdots = 1/N_c$. 于是

$$(1/N_c = \ ) \quad \eta_1 - \eta_2 < \frac{d_{ij}}{l}\left(\frac{P}{c}\right)^{\mu}$$

$$\therefore P^* = c\left(\frac{l}{LN_c}\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

我们就找到了一个**临界人口**。超过这个人口，城市就会从单中心逐渐变成多中心。

（如果这个值< 1，就不会出现单中心）

- 简单分析
  - $\mu \downarrow 0,\ or\ c \uparrow \infty, P^* \uparrow.$
  - 在第k个中心形成过程中，对于新居民来说，一直改变的是$T(k)$. 不变的是$T(1), T(2), \cdots, T(k-1)$. 所以如果$Z_{i,k+1} > \max_{j \in \{1,\cdots,k\}} Z_k$，那么第$k+1$个中心就会开始形成。
  - 根据统计分析，$T(j)$的分布是**尖峰状的**(前提)。所以每个中心的通行量都差不多，$T(j) \sim P/(k-1)$. 所以把上面公式(5)中的N_c换成$k-1$，把左面换成$\max_{j \in \{1,2,\cdots,k-1\}}(\eta_j) - \eta_k$即可得到第$k+1$个中心出现时的临界人口

$$\frac{L}{l}\left(\frac{P}{(k-1)c}\right)^{\mu} > \max_{j \in \{1,2,\cdots,k-1\}}(\eta_j) - \eta_k$$

$$\left(ave(\eta_1 - \eta_k) = \frac{k-1}{N_c + 1}\right)$$

$$\bar{P}_k = P^*(k-1)^{\frac{1}{\mu}+1}$$

$$k \sim \left(\frac{\bar{P}}{P^*}\right)^{\frac{\mu}{\mu+1}}$$

最后一个公式的意义：人口为$\bar{P}$的城市里，出现的中心个数是人口的亚线性函数。

总交通距离

根据以前的研究成果，总通勤距离是人口的亚线性函数：$L_{tol} \sim P^{\gamma}, \gamma \in [0.5, 1]$. 原作者解释：城市既不是有中心结构，又不是无中心结构。

- 如果城市是吸引力驱动的，那么$L_{tot} \sim P$.
- 如果考虑空间连续性(距离驱动)，那么要进一步**假设**$L_{tot} \sim P\frac{L}{\sqrt{k}}$. 于是$L_{tot} \sim P^{1-\frac{\mu/(\mu-1)}{2}}$. 这个刚好可以解释$\gamma \in [0.5, 1]$.

平均距离

平均距离的导出靠的不是推导，而是模拟。

每个中心都可以理解为一个场的源。在位置i的结点会选择在此处势能最大的中心工作。同时，这个操作会对该中心代表的场起到副作用。从而存在某一时刻，存在一些位置，其他场的势能大于该场，新加入的市民连接到其他中心。

这意味着什么呢？我们假设整个城市在k个独立的场上。那么均衡状态就是新加入市民以等概率连接到这k个场源。也就是每个中心的交通在order statistics意义上，拥堵情况是相同的。(吸引力相同，则Z相同；η是同阶的，那么T也是同阶的。)

新加入的市民会依照家地理位置和到中心的距离来选择工作地点。那么，当一个新中心刚刚建立，它的$T(j) \approx 0$. 她就有很高的可能性选择新中心作为工作地点。这种情况会一直继续，直到最后一个中心也同样拥堵，再有结点倾向于在brand new 中心工作。