Laboratório de Física Moderna

Relatórios 10 - 11

Gabriel Wendell Celestino Rocha

Vinícius Câmara Filgueira

Atividade 10 - Difração de elétrons

1. Com base no experimento em sala, mediu-se os valores dos diâmetros D_1 e D_2 (em mm) dos anéis para cada valor de tensão V (em kV). Com base nisso, foi possível obter os valores dos raios dos anéis como sendo metade do valor dos diâmetros, ou seja, $r_1 = D_1/2$ e $r_2 = D_2/2$. Para obter o valor do comprimento de onda em cada etapa do experimento, utilizou-se a conservação da energia e calculou-se a velocidade de escape dos elétrons e a partir desta calculou-se o comprimento de onda λ da seguinte forma:

$$E = eV = \frac{1}{2}mv_e^2 \implies v_e = \sqrt{\frac{2meV}{m}} \quad \therefore \quad \boxed{\lambda = \frac{h}{mv_e}} \tag{1}$$

$\blacksquare$

Por fim, sendo $R = 65$ mm uma constante do nosso experimento, calculou-se o parâmetro $2\lambda R$ para cada comprimento de onda utilizado ao longo do experimento. Com base nessas considerações, foi possível realizar a construção da Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros relevantes para o experimento sobre difração de elétrons.

V (kV)	λ ($\times 10^{-9}$ m)	D_1 (m)	r_1 (m)	D_2 (m)	r_2 (m)	$2\lambda R$ (m^2)
3.5	207.304	$46.35 \cdot 10^{-3}$	$23.175 \cdot 10^{-3}$	$27.050 \cdot 10^{-3}$	$13.525 \cdot 10^{-3}$	$2.695 \cdot 10^{-12}$
4.0	193.915	$44.4 \cdot 10^{-3}$	$22.2 \cdot 10^{-3}$	$25.825 \cdot 10^{-3}$	$12.9125 \cdot 10^{-3}$	$2.521 \cdot 10^{-12}$
4.5	182.824	$42.125 \cdot 10^{-3}$	$21.0625 \cdot 10^{-3}$	$24.575 \cdot 10^{-3}$	$12.2875 \cdot 10^{-3}$	$2.377 \cdot 10^{-12}$
5.0	173.443	$40.575 \cdot 10^{-3}$	$20.2875 \cdot 10^{-3}$	$23.325 \cdot 10^{-3}$	$20.2875 \cdot 10^{-3}$	$2.255 \cdot 10^{-12}$
5.5	165.371	$38.4 \cdot 10^{-3}$	$19.2 \cdot 10^{-3}$	$21.7 \cdot 10^{-3}$	$10.85 \cdot 10^{-3}$	$2.15 \cdot 10^{-12}$
6.0	158.331	$36.925 \cdot 10^{-3}$	$18.4625 \cdot 10^{-3}$	$21.225 \cdot 10^{-3}$	$10.6125 \cdot 10^{-3}$	$2.05 \cdot 10^{-12}$

2. Com base na teoria abordada em sala, temos que

$$2\lambda R = d \cdot r \iff d = \frac{2\lambda R}{r} \tag{2}$$

$\blacksquare$

É fácil ver que a Equação (2) é claramente linear. Em particular, a distância interplanar d é justamente o coeficiente angular da reta gerada pelo gráfico $2\lambda R \times r$. Dessa forma, vamos plotar os gráficos $2\lambda R \times r_1$ e $2\lambda R \times r_2$ e em seguida usar uma curva de ajuste linear para extrais os parâmetros d_1 e d_2. Os resultados dos ajustes bem como os resultados das distâncias interplanares se encontram nas Figuras 1 e 2.

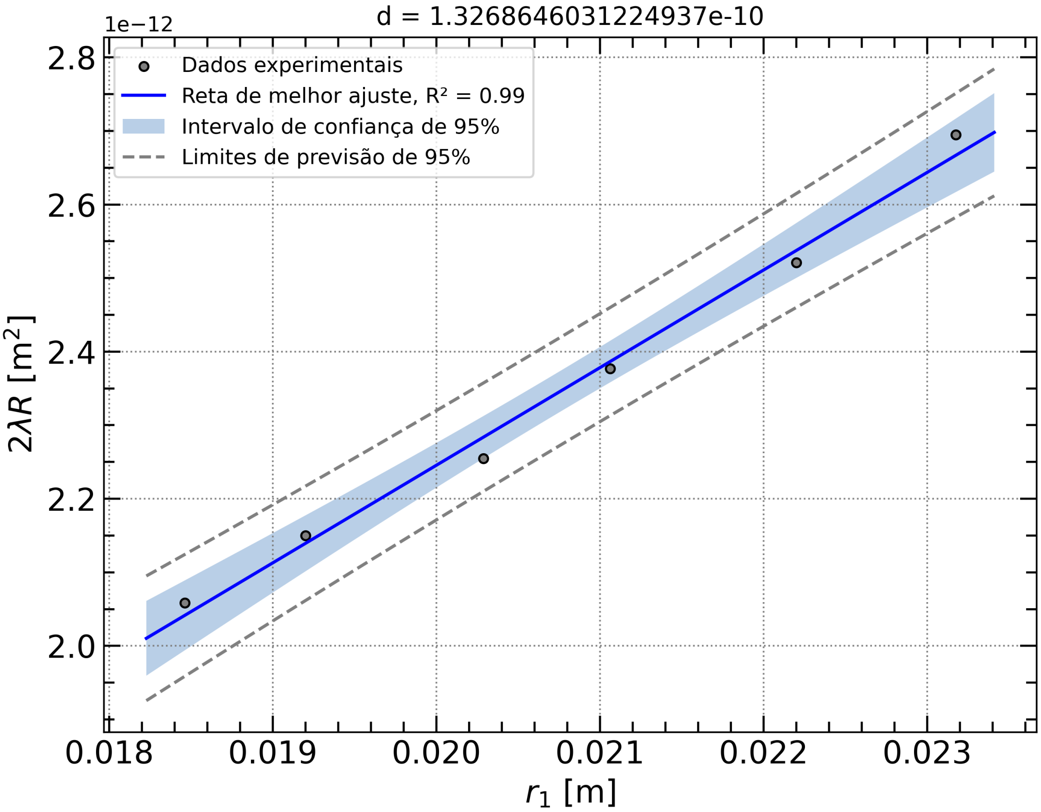

Figura 1: Ajuste linear (reta) para os dados experimentais (pontos). A região hachurada indica o intervalo de confiança padrão de 95%.

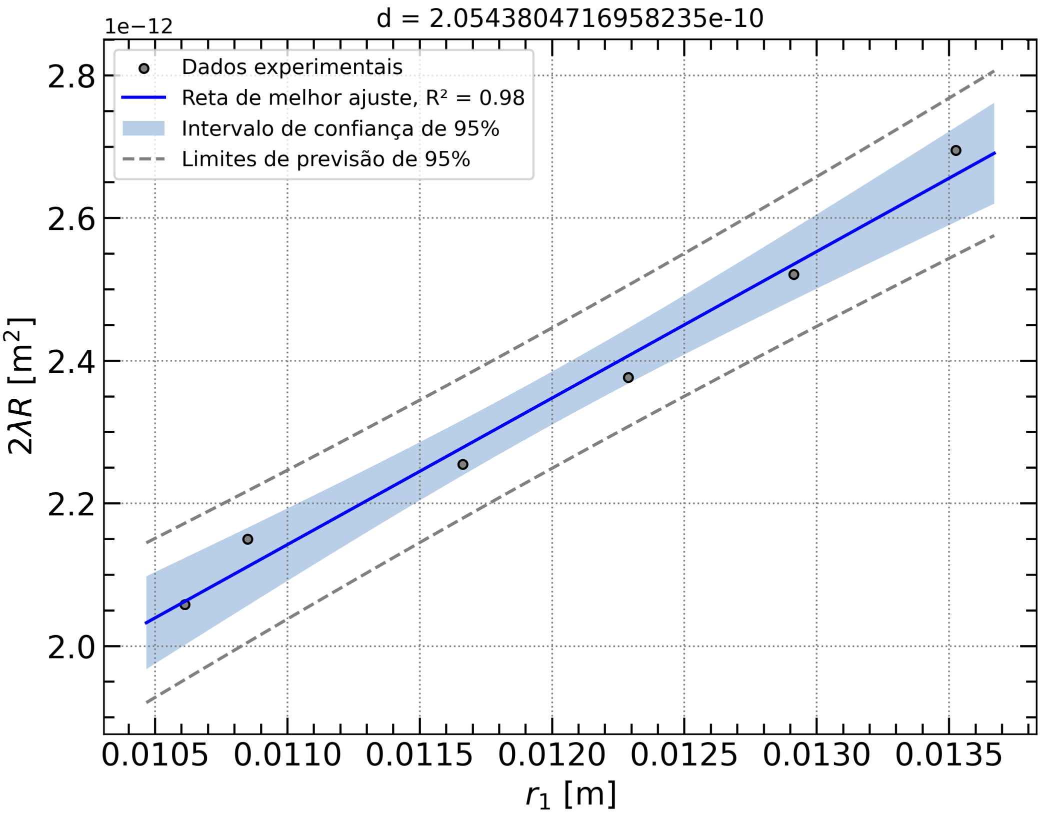

Figura 2: Ajuste linear (reta) para os dados experimentais (pontos). A região hachurada indica o intervalo de confiança padrão de 95%.

3. Considerando a relação demonstrada no item 5., vamos isolar o termo de comprimento de onda, relacionar com a equação de De Broglie e resolver a equação resultante com relação à velocidade de ejeção do elétron:

$$2\lambda R = d \cdot r \implies \lambda = \frac{dr}{2R} = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e v_e} \therefore v_e = \frac{2Rh}{drm_e}. \tag{3}$$

Escrevendo agora a conservação da energia para esse sistema, obtemos:

$$eV = \frac{1}{2}m_e v_e^2 = \frac{1}{2}m_e \frac{4R^2h^2}{d^2r^2m_e^2} \quad \therefore \quad \boxed{V = 2\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{h^2}{d^2em_e}} \tag{4}$$

■

O raio máximo do anel de difração ocorre quando $r = R$ (vide Fig. 3), logo $R/r = 1$. Substituindo $d_1 = 213$ pm na Equação (4) obtemos:

$$\boxed{V = 132.61 \text{ Volts}} \tag{5}$$

■

4. Considerando agora o caso em que $d_3 = 80.5$ pm, $r_3 = 25$ mm e $R = 65$ mm, ao substituirmos tais valores na Equação (4) obtemos:

$$\boxed{V = 6276.212 \text{ Volts} = 6.26 \text{ kV}} \tag{6}$$

■

5. O setup experimental utilizado em sala é baseado no seguinte diagrama:

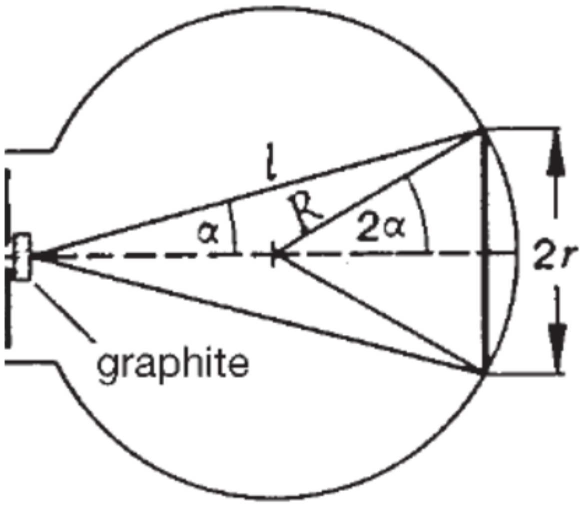

Figura 3: Diagrama experimental.

Considerando o diagrama apresentado na Figura 3, podemos escrever:

$$\sin(2\alpha) = \frac{r}{R}, \tag{7}$$

Lembrando da identidade trigonométrica $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$, se considerarmos uma aproximação para ângulos diminutos, temos $\cos(\alpha) \approxeq 1$, logo

$$\sin(2\alpha) \approxeq 2\sin(\alpha) \tag{8}$$

Analogamente para $\alpha = 2\theta$ diminuto, podemos escrever

$$\sin(\alpha) = \sin(2\theta) \approxeq 2\sin(\theta) \implies \sin(2\alpha) = 4\sin(\theta). \tag{9}$$

Partindo da lei de Bragg, escrevemos

$$n\lambda = 2d\sin(\theta) \implies \sin(2\alpha) = 4\frac{n\lambda}{2d}. \tag{10}$$

Substituindo a Equação (10) na Equação (7) e fazendo $n = 1$ obtemos finalmente:

$$\frac{2n\lambda}{d} = \frac{r}{R} \implies r = (2n\lambda R) \cdot \frac{1}{d} \quad \therefore \quad \boxed{2\lambda R = d \cdot r}$$

■

6. Considere agora um caso em que temos uma tela fluorescente de 95 mm de diâmetro, ou seja, $R = 47.5$ mm de raio, um anel de difração de $r = 45$ mm e uma distância interplanar de $d_5 = 46.5$ pm. Substituindo tais valores na Equação (4) obtemos:

$$\boxed{V = 3100.265 \text{ Volts} = 3.1 \text{ kV}} \tag{11}$$

■

Com base nas equações apresentadas anteriormente, nota-se que a tensão medida depende inversamente do raio do anel de difração gerado. Portanto, a medida que aumentamos a tensão, o raio do anel diminui cada vez mais.

Atividade 11 - Lei de Stefan-Boltzmann

1. Considere a equação:

$$t = \frac{1}{2\beta}\left\{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\left[1 - \frac{R\left(t\right)}{R_0}\right]}\right\}. \tag{12}$$

Com base na equação acima podemos calcular a temperatura t considerando os valores de $\alpha = 2.0 \cdot 10^{-3}$ °C^{-1} e $\beta = 1.11 \cdot 10^{-7}$ °C^{-1}. Uma vez que valores de temperatura menores que 273 K não fazem sentido físico, desprezamos a solução com sinal negativo. Além disso, podemos determinar os termos $R(t)$ e R_0 a partir do seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} R(t) = \frac{V_L}{I \cdot L}\,, \\ R_0 = \frac{R(27\,°\mathrm{C})}{1+\alpha(27)+\beta(27)}\,. \end{cases} \tag{13}$$

Substituindo os dados do enunciado do problema nas Equações (13) e (12), obtemos:

$$t = 1451.95\,°\mathrm{C} \approxeq 1452\,°\mathrm{C} \quad \therefore \quad \boxed{T = 1725\ \mathrm{K}} \tag{14}$$

■

2. A lei de Stefan-Boltzmann pode ser modelada seguindo uma dependência da tensão medida pelo sensor e a partir desta pode-se extrair um relação linear entre a tensão V_d medida pelo sensor e a temperatura T da lâmpada a partir do processo de linearização:

$$V_d = S \cdot T^4 \implies \log_{10}\left(V_d\right) = \log_{10}\left(ST^4\right) \quad \therefore \quad \boxed{\log_{10}\left(V_d\right) = \log_{10}\left(S\right) + 4\log_{10}\left(T\right)} \tag{15}$$

■

Com base nos dados obtidos em laboratório e inferidos presentes na Tabela 2, foi possível construir-se um gráfico do tipo $\log_{10}\left(V_d\right) \times \log_{10}\left(T\right)$ e realizar um ajuste linear para assim obter o coeficiente angular da reta de melhor ajuste que representa justamente o expoente do fator temperatura na lei de Stefan-Boltzmann.

O valor encontrado para o expoente neste primeiro caso foi $b \approxeq 2.76$. Uma vez que o valor teórico previsto é de $b \approxeq 4$, nota-se que nossas medições não foram boas. Uma forma de tentar melhorar a precisão do nosso ajuste é excluir a primeira medição de nosso conjunto de medidas uma vez que houve problemas com o medidor de tensão durante o experimento. Ao fazer isso obtemos uma nova curva de ajuste linear com $b \approxeq 3.34$. Claramente não está bom o suficiente, entretanto, dadas as complicações experimentais, esse valor provavelmente é o mais preciso que podemos encontrar para o experimento sobre a lei de Stefan-Boltzmann.

3. Durante a atividade em laboratório, foi possível medir experimentalmente os valores da tensão do detector V_D, a tensão V_L e a corrente I_L aplicadas na lâmpada, respectivamente. Com auxílio da primeira Equação apresentada em (13) foi possível obter os valores da resistência elétrica como função da temperatura $R(t)$. Por fim, obteve-se os valores da temperatura (em Kelvin) da lâmpada através da Equação (17). De posse desses dados, foi possível construir a Tabela 2 abaixo:

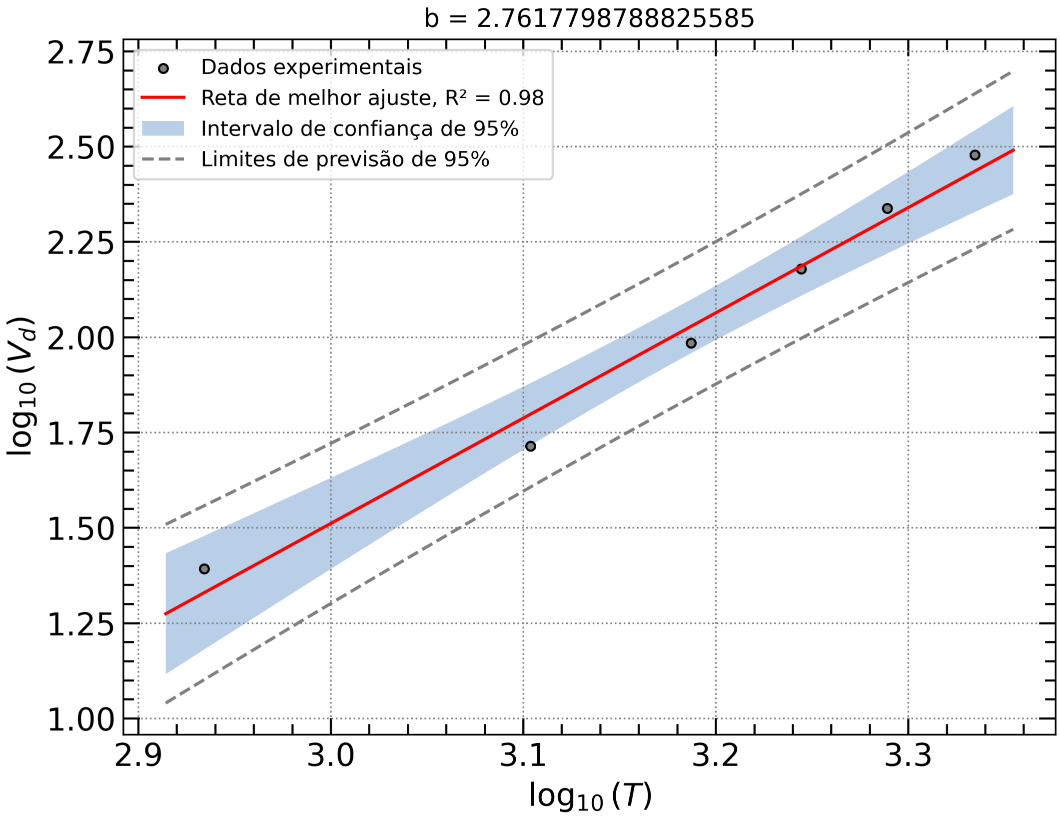

Figura 4: Ajuste linear (reta) para os dados experimentais (pontos). A região hachurada indica o intervalo de confiança padrão de 95%. Ajuste feito utilizando todas as medidas.

Tabela 2: Parâmetros relevantes para o experimento sobre a lei de Stefan-Boltzmann.

V_d (mVolts)	V_L (Volts)	I_L (A)	$R(t)$ (Ω)	T (K)
24.7	1.85	1.505	1.229	859.47
51.8	3.74	2.168	1.725	1269.42
96.7	5.60	2.716	2.062	1538.52
151.2	7.40	3.163	2.340	1755.23
217.9	9.26	3,678	2.588	1945.41
301.	11.18	3.890	2.874	2160.20

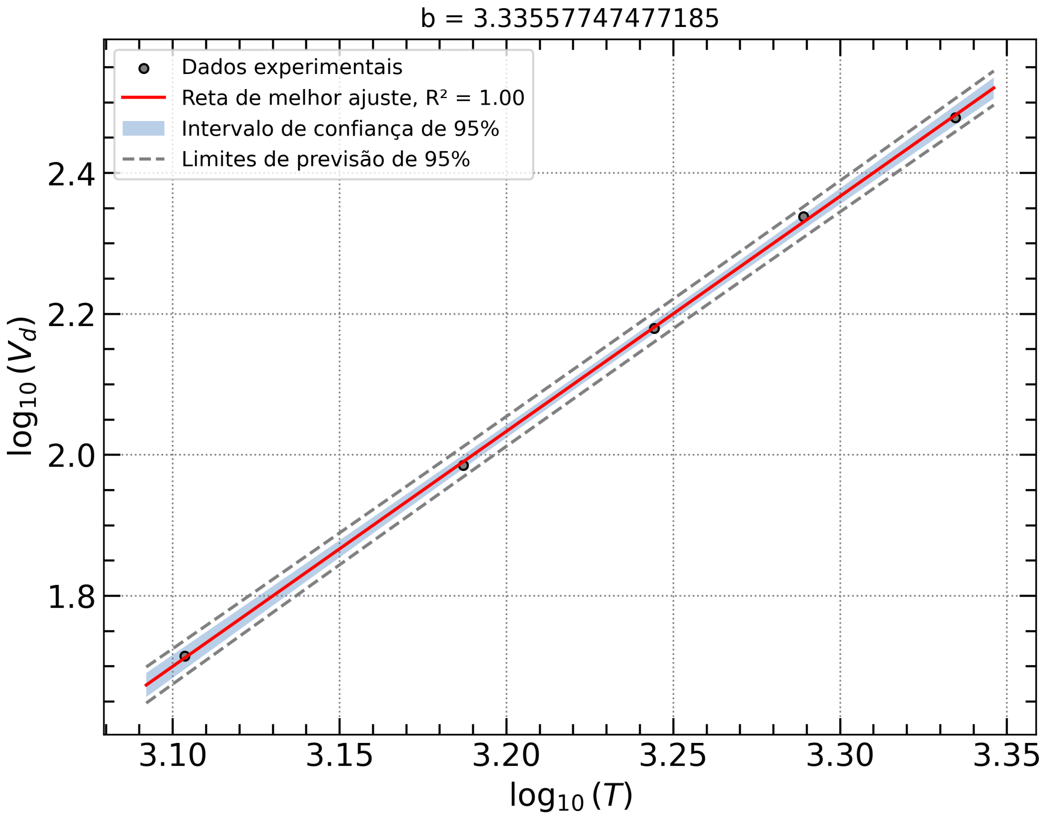

Figura 5: Ajuste linear (reta) para os dados experimentais (pontos). A região hachurada indica o intervalo de confiança padrão de 95%. Ajuste feito descartando a primeira medida.

4. Considere a equação geral que exprime a relação quadrática da resistência de um material com relação à temperatura na qual este se encontra:

$$R(t) = R_0 \left(1 + \alpha t + \beta t^2\right) \iff 1 + \alpha t + \beta t^2 + \frac{R(t)}{R_0} = 0. \tag{16}$$

Note que obtemos uma equação do 2º grau solúvel nos números reais. Resolvendo a Equação (16) obtemos então:

$$t = \frac{1}{2\beta} \cdot \left\{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\left(1 - \frac{R(t)}{R_0}\right)}\right\} \quad \therefore \quad \boxed{T = (t + 273)\ \mathrm{K}} \tag{17}$$

■
