Circuitos LC e RLC

José Humberto de Araújo[1]

[1]DFTE-UFRN

5 de abril de 2022

Sumário

Introdução

- Neste aula, trataremos da análise de circuitos LC e RLC autônomos e com fontes constantes independentes.

- Neste aula, trataremos da análise de circuitos LC e RLC autônomos e com fontes constantes independentes.
- Circuitos autônomos são aqueles que não possuem fontes independentes.

Introdução

- Neste aula, trataremos da análise de circuitos LC e RLC autônomos e com fontes constantes independentes.
- Circuitos autônomos são aqueles que não possuem fontes independentes.
- Sendo os capacitores e indutores armazenadores de energia, os circuitos contendo estes dispositivos não dependem somente das fontes, mas também das tensões ou cargas iniciais nos capacitores ou das correntes ou fluxos iniciais nos indutores.

Introdução

- Neste aula, trataremos da análise de circuitos LC e RLC autônomos e com fontes constantes independentes.
- Circuitos autônomos são aqueles que não possuem fontes independentes.
- Sendo os capacitores e indutores armazenadores de energia, os circuitos contendo estes dispositivos não dependem somente das fontes, mas também das tensões ou cargas iniciais nos capacitores ou das correntes ou fluxos iniciais nos indutores.
- As equações que descrevem estes circuitos são equações diferenciais obtidas através da aplicaçao da Lei das malhas e das leis de Kirchhoff, considerando a relação tensão-corrente dos dispositivos armazenadores.

- Os circuitos LC comportam-se como ressonadores eletrônicos, sendo um circuito chave em muitas aplicacões, tais como osciladores, filtros e misturadores de frequência. Esse circuito é muito usado em transmissores sem fio como as comunicações de rádio tanto para emissão quanto recepção.

- Os circuitos LC comportam-se como ressonadores eletrônicos, sendo um circuito chave em muitas aplicacões, tais como osciladores, filtros e misturadores de frequência. Esse circuito é muito usado em transmissores sem fio como as comunicações de rádio tanto para emissão quanto recepção.
- Um circuito LC consiste de um indutor e um capacitor, como mostrado na figura 1.

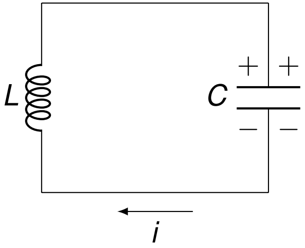


Figura 1: Circuito LC autônomo

- Aplicando a lei das malhas

$$V_L + V_C = 0 \tag{1}$$

- Aplicando a lei das malhas

$$V_L + V_C = 0 \tag{1}$$

- Como:

$$V_L = L\frac{dI(t)}{dt} \tag{2}$$

$$V_C = \frac{q(t)}{C} \tag{3}$$

- Aplicando a lei das malhas

$$V_L + V_C = 0 \tag{1}$$

- Como:

$$V_L = L\frac{dI(t)}{dt} \tag{2}$$

$$V_C = \frac{q(t)}{C} \tag{3}$$

- Assim,

$$L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0 \tag{4}$$

- Aplicando a lei das malhas

$$V_L + V_C = 0 \tag{1}$$

- Como:

$$V_L = L\frac{dI(t)}{dt} \tag{2}$$

$$V_C = \frac{q(t)}{C} \tag{3}$$

- Assim,

$$L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0 \tag{4}$$

- derivando e dividindo por L, temos

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}I(t) = 0 \tag{5}$$

Solução

- Se definirmos o parâmetro ω como:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{6}$$

a equação 5 fica da forma

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \omega^2 I(t) = 0. \tag{7}$$

Solução

- Se definirmos o parâmetro ω como:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{6}$$

a equação 5 fica da forma

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \omega^2 I(t) = 0. \tag{7}$$

- Supondo uma solução do tipo $I(t) = e^{rt}$, a equação característica fica da forma

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i\omega. \tag{8}$$

Solução

- Se definirmos o parâmetro ω como:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{6}$$

a equação 5 fica da forma

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \omega^2 I(t) = 0. \tag{7}$$

- Supondo uma solução do tipo $I(t) = e^{rt}$, a equação característica fica da forma

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i\omega. \tag{8}$$

- Portando, a solução completa para a equação diferencial é

$$\tilde{I}(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \tag{9}$$

- Como a corrente elétrica é uma quantidade física, ela deve ter um valor real. A combinação linear de duas soluções também é solução.

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(\tilde{I}_1(t) + \tilde{I}_2(t)) \tag{10}$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2i}(\tilde{I}_1(t) - \tilde{I}_2(t)) \tag{11}$$

- Como a corrente elétrica é uma quantidade física, ela deve ter um valor real. A combinação linear de duas soluções também é solução.

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(\tilde{I}_1(t) + \tilde{I}_2(t)) \tag{10}$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2i}(\tilde{I}_1(t) - \tilde{I}_2(t)) \tag{11}$$

- Assim a solução geral pode ser escrita da forma:

$$I(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{12}$$

- Como a corrente elétrica é uma quantidade física, ela deve ter um valor real. A combinação linear de duas soluções também é solução.

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(\tilde{I}_1(t) + \tilde{I}_2(t)) \tag{10}$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2i}(\tilde{I}_1(t) - \tilde{I}_2(t)) \tag{11}$$

- Assim a solução geral pode ser escrita da forma:

$$I(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{12}$$

- que pode ser escrita na forma.

$$I(t) = I_0\cos(\omega t - \phi) \tag{13}$$

Considere o circuito RLC autônomo mostrado na figura 2.

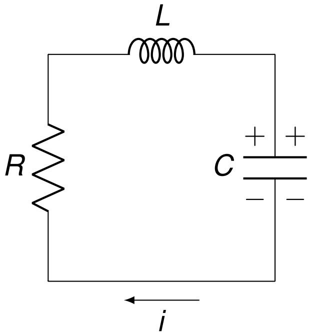


Figura 2: Circuito RLC autônomo

- Aplicando a lei das malhas,

$$V_L + V_R + V_C = 0 \tag{14}$$

- Aplicando a lei das malhas,

$$V_L + V_R + V_C = 0 \tag{14}$$

- Assim,

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{q(t)}{C} = 0 \tag{15}$$

- Aplicando a lei das malhas,

$$V_L + V_R + V_C = 0 \tag{14}$$

- Assim,

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{q(t)}{C} = 0 \tag{15}$$

- derivando e dividindo por L, temos

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC}I(t) = 0 \tag{16}$$

- Aplicando a lei das malhas,

$$V_L + V_R + V_C = 0 \tag{14}$$

- Assim,

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{q(t)}{C} = 0 \tag{15}$$

- derivando e dividindo por L, temos

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC}I(t) = 0 \tag{16}$$

- Se definirmos o parâmetro ω_0 e γ como:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{17}$$

$$\gamma = \frac{R}{2L} \tag{18}$$

- A equação fica,

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0 I(t) = 0 \tag{19}$$

- A equação fica,

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0 I(t) = 0 \qquad (19)$$

- Supondo uma solução do tipo $I(t) = e^{rt}$, a equação característica fica da forma,

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0 = 0. \qquad (20)$$

- A equação fica,

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0 I(t) = 0 \tag{19}$$

- Supondo uma solução do tipo $I(t) = e^{rt}$, a equação característica fica da forma,

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0 = 0. \tag{20}$$

- Cuja solução,

$$r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{21}$$

- A equação fica,

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0 I(t) = 0 \tag{19}$$

- Supondo uma solução do tipo $I(t) = e^{rt}$, a equação característica fica da forma,

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0 = 0. \tag{20}$$

- Cuja solução,

$$r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{21}$$

- Que nos leva a três casos possíveis;
  1) $\omega_0^2 < \gamma^2$ duas soluções reais e distintas.
  2) $\omega_0^2 = \gamma^2$ duas soluções reais e iguais.
  3) $\omega_0^2 > \gamma^2$ duas soluções complexas e distintas,
  $r = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

As soluções gerais dos três casos possíveis:

- a) Duas soluções reais e distintas(supercrítico):

$\omega_0^2 < \gamma^2$

$$I(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \tag{22}$$

onde, $\gamma_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \gamma_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

As soluções gerais dos três casos possíveis:

- a) Duas soluções reais e distintas(supercrítico):

$\omega_0^2 < \gamma^2$

$$I(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \tag{22}$$

onde, $\gamma_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \gamma_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

- b) Duas soluções iguais e reais(crítico):

$\omega_0^2 = \gamma^2$

$$I(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t} \tag{23}$$

As soluções gerais dos três casos possíveis:

- a) Duas soluções reais e distintas(supercrítico):

$\omega_0^2 < \gamma^2$

$$I(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \tag{22}$$

onde, $\gamma_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \gamma_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

- b) Duas soluções iguais e reais(crítico):

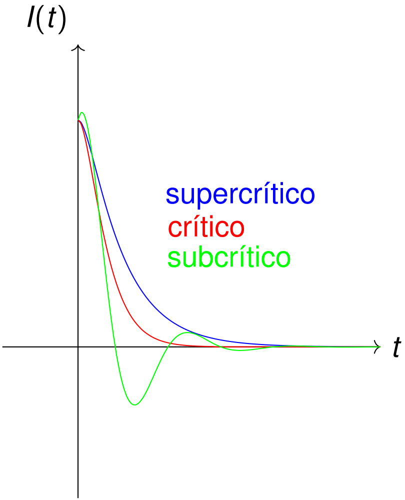
$\omega_0^2 = \gamma^2$

$$I(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t} \tag{23}$$

- c) Duas soluções complexas e distintas(subcrítico):

$\omega_0^2 > \gamma^2$

$$I(t) = e^{-\gamma t}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t); \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{24}$$


$I(t)$
supercrítico
crítico
subcrítico
t