Circuitos RC como integradores e diferenciadores

Gabriel Wendell Celestino Rocha*

12 de novembro de 2023

Resumo

Circuitos eletrônicos são uma parte básica de todos os aparelhos eletrônicos existentes. Diante desse fato, é importante que se tenha um conhecimento básico sobre o funcionamento e a montagem dos circuitos mais básicos, em particular o circuito RC que é o mais simples circuito elétrico existente. Neste experimento foi estudado os procedimentos experimentais necessários para a montagem e análise de um circuito RC que se comporte como um integrador e como um diferenciador.

1 Introdução

Existem três componentes básicos de circuitos analógicos: o resistor (R), o capacitor (C) e o indutor (L). Estes componentes podem ser combinados em quatro importantes circuitos conhecidos como *circuito RC*, *circuito RL*, *circuito LC* e *circuito RLC*, onde cada abreviação indica a componente eletrônica usada no circuito. Neste experimento, vamos estudar o comportamento circuito RC, que por sua vez é o mais simples dos quatro mencionados anteriormente. Em particular, vamos avaliar as condições necessárias para que este circuito atue como um integrador ou como um diferenciador no sistema como um todo.

2 Embasamento teórico

Nesta seção iremos abordar os fundamentos teóricos necessários para a análise dos dados e posterior compreendimento dos mesmos, bem como a física envolvida durante todo o processo.

2.1 Circuito RC

Considere um circuito composto por um capacitor R que está sendo carregado por uma fonte do tipo DC (do inglês, *direct current*) cuja tensão vale V_i e que por sua vez está associado em série com um resistor R, conforme ilustra a Fig. 1.

*gabrielwendell@fisica.ufrn.br

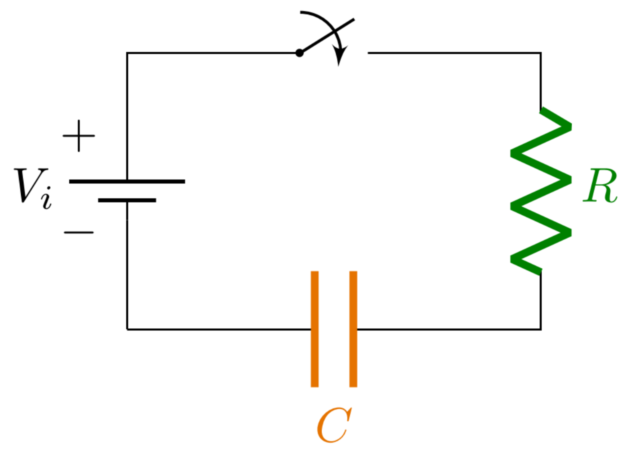

Figura 1: Circuito RC com a chave aberta.

Ao fecharmos a chave a corrente passará a fluir no circuito e com isso irá carregar o capacitor, polarizando as suas placas com cargas iguais a $+Q$ e $-Q$, respectivamente, como ilustrado na Fig. 2. A corrente I no capacitor será

$$I = C\frac{dV}{dt} \tag{1}$$

onde C é a capacitância do capacitor, V é a DDP (diferença de potencial) no qual o capacitor está submetido e t o tempo necessário para que o mesmo seja carregado.

A corrente que passa pelo resistor será dada pela primeira lei de Ohm:

$$V_R = IR \implies I = \frac{V_R}{R} \tag{2}$$

Pela lei das malhas, temos que $V_i - V_R - V = 0$. Como a corrente deve ser a mesma ao longo da malha, então

$$C\frac{dV}{dt} = \frac{V_i - V}{R} \tag{3}$$

Reagrupando os termos semelhantes e integrando ambos os lados da equação obtemos a equação abaixo, onde A é uma constante a ser determinada pelas condições iniciais do sistema.

$$V = V_i + A\exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \tag{4}$$

Se impormos como condições iniciais que em $t = 0$, $V = 0$, obtemos $A = -V_i$. Portanto, obtemos finalmente uma função que relaciona a tensão V durante o processo de carga com o t necessário para carregar o capacitor

$$V_C(t) = V_i \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right] \tag{5}$$

Podemos relacionar ainda a carga Q armazenada no capacitor durante esse processo em função do tempo t através da definição de capacitância

$$C = \frac{Q}{V} \implies V = \frac{Q}{C} \tag{6}$$

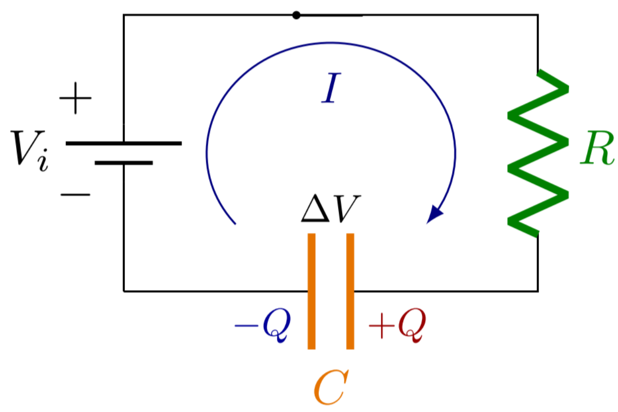

Figura 2: Circuito RC com a chave fechada. Note que temos aqui o processo de carregamento do capacitor.

Combinando as equações (5) e (6), podemos construir o gráfico do processo de carga de um capacitor:

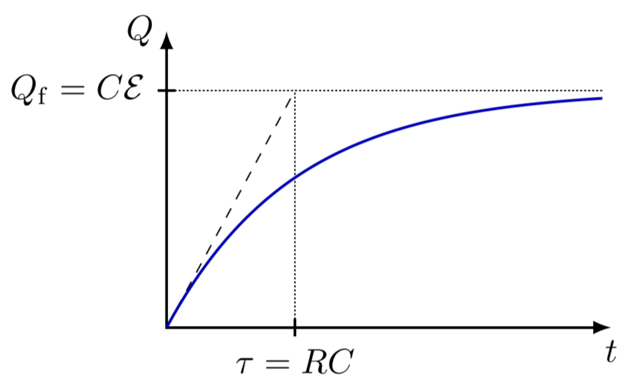

Figura 3: Carga em função do tempo para um circuito RC durante o processo de carregamento.

Para o processo de descarga podemos usar um raciocínio análogo. Igualamos a corrente no capacitor e no resistor, agrupamos os termos semelhantes e os integramos em ambos os lados da equação resultando assim na função

$$V_R(t) = V_i \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \tag{7}$$

O gráfico que irá descrever o processo de descarga será então

Desse modo, a tensão sobre o capacitor tende a V_i conforme o tempo passa, enquanto a tensão sobre o resistor tende a zero, como ilustrado nos gráficos 3 e 4. Isto está de acordo com o conceito intuitivo de que o capacitor estará sendo carregado pela fonte de tensão conforme o tempo decorre, e estará eventualmente totalmente carregado, formando assim um circuito aberto.

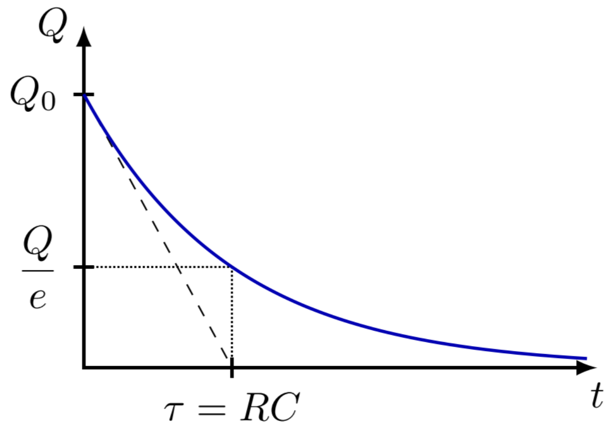

Figura 4: Carga em função do tempo para um circuito RC durante o processo de descarregamento.

As equações (5) e (7) mostram que um circuito RC possui uma constante de tempo característico usualmente representada por $\tau = RC$. Essa constante representa o tempo característico necessário para que a tensão se eleve (sobre C) ou se reduza (sobre R) até $1/e$ do seu valor final. Desta forma, τ é o tempo necessário para que V_C atinja $V_i(1 - 1/e)$ e o tempo para que V_R atinja $V(1/e)$.

Note que indo de $t = N\tau$ até $t = (N+1)\tau$, a tensão irá atingir cerca de 63% do seu valor quando $t = N\tau$, que será justamente quando a mesma estará próxima de seu valor final. Dessa forma, o capacitor irá se carregar em cerca de 63% após τ, e estará quase totalmente carregado após 5τ (cerca de 99.3%). Quando a fonte de tensão é substituída por um curto-circuito, desde que o capacitor esteja totalmente carregado, a tensão através do mesmo irá sendo reduzida exponencialmente em t com $V \to 0$. Com isso, após um tempo igual a τ o capacitor estará cerca de 37% descarregado, e quase completamente descarregado após 5τ (cerca de 0.7%).

2.2 Integradores e diferenciadores

Vamos estudar agora o comportamento do circuito como um integrador e como um diferenciador. De maneira resumida, um **integrador** é um sistema onde para um dado sinal de entrada $x(t)$ o sinal de saída é a sua integral, ou seja

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \tag{8}$$

Já para um diferenciador, o sinal de saída $y(t)$ é a derivada do sinal de entrada $x(t)$, ou seja

$$y(t) = x'(t) = \frac{d}{d\tau}x(t) \tag{9}$$

Sabe-se que a frequência de corte (o ponto no qual um dado filtro atenua um certo sinal para $1/\sqrt{2}$) de um circuito RC é justamente o inverso do tempo característico deste mesmo circuito. Dessa forma, vamos considerar a saída sobre o capacitor em uma alta frequência

$$\omega >> \frac{1}{\tau} \tag{10}$$

Considere agora a expressão da corrente abaixo

$$I = \frac{V_{in}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \tag{11}$$

onde $j = \sqrt{-1}$ representa a unidade complexa. A condição para a frequência imposta em (**??**) implica que

$$\omega C >> \frac{1}{R} \implies I \approx \frac{V_{in}}{R} \tag{12}$$

que é justamente a lei de Ohm.

Considere agora

$$V_C = \frac{1}{C}\int_0^t I dt \implies V_C \approx \frac{1}{\tau}\int_0^t V_{in} dt \tag{13}$$

que por sua vez é um **integrador** "através do capacitor".

Isto implica que no caso de um integrador o capacitor não possui tempo suficiente para se carregar, o que implica que a sua tensão é muito pequena. Dessa forma, a tensão na entrada é aproximadamente igual à tensão no resistor

Para estudar o circuito atuando como um diferenciador, basta considerarmos as saídas através do resistor a uma frequência baixa, de modo que

$$\omega << \frac{1}{\tau} \tag{14}$$

Considere agora a expressão para I dada a condição abaixo

$$R << \frac{1}{\omega C} \implies I \approx \frac{V_{in}}{\frac{1}{j\omega C}} \implies V_{in} \approx \frac{I}{j\omega C} \approx V_C$$

Donde concluímos que

$$V_R = IR = C\frac{dV_C}{dt}R \implies V_R \approx \tau\frac{dV_{in}}{dt} \tag{15}$$

que por sua vez é um **diferenciador** "através do resistor".

Isto significa que o capacitor necessita de um período de tempo para se carregar até que sua tensão esteja aproximadamente igual à tensão da fonte.

Ou seja, para que o nosso circuito RC atue como um integrador usamos a tensão no capacitor e para que o mesmo atue como um diferenciador usamos a tensão no resistor. Isso significa que, quando um certo sinal de entrada $x(t)$

2.3 Análise de sinais no domínio da frequência

No domínio da frequência um sinal é representado apenas pelos seus parâmetros, ficando subentendida a função temporal (senoidal) escolhida como referência na decomposição:

$$x(f) \to [A, f, \phi] \tag{16}$$

Uma vez que a função periódica de referência já está implícita no domínio da frequência, a caracterização do sinal decomposto em termos dessa referência necessita apenas dos parâmetros resultantes da decomposição.

Jean B. J. Fourier publicou um estudo em 1822 no qual mostrava que um sinal periódico pode ser expresso como uma série de senos e cossenos. Partindo desse ponto, vamos estudar o comportamento de uma onda quadrada de amplitude unitária:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\cos(\omega t) - \frac{1}{3}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega t) - \dots\right] \tag{17}$$

ou de maneira mais geral

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin[2\pi(2k-1)t]}{2k-1} \tag{18}$$

Dessa forma, se aplicarmos um sinal de entrada $x(t)$ como exposto em (17), o sinal de saída $y(t)$ será, como exposto na equação (13), a integral dessa função, logo

$$y(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{9}\sin(3\omega) + \frac{1}{25}\sin(5\omega t) - \dots\right] \tag{19}$$

Ou de maneira mais geral, ao integrar a função (18), obteremos

$$y(t) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\sin[2\pi(2k-1)t] \tag{20}$$

que é justamente a equação que descreve uma onda triangular.

3 Procedimentos experimentais

O experimento como um todo foi realizado em três etapas. Na primeira foi-se investigado o comportamento do circuito como um integrador. Já na segunda se investigou o comportamento do mesmo como um diferenciador. Por fim, na terceira etapa foi realizada uma simulação usando o programa `CircuitMaker` utilizando os mesmos componentes e instrumentos utilizados na experiência no laboratório. A comparação entre os dados experimentais e a simulação se encontra na seção 4.

Abaixo está listado os materiais utilizados nas duas etapas do experimento:

1. 1 gerador de funções AGF1022 da Tektronix;

2. 1 osciloscópio digital TDS11002B da Tektronix;

3. 1 protoboard de duas seções;

4. 1 capacitor de 1μF;

5. 1 resistor de 1kΩ.

Vamos agora descrever o procedimento experimental em cada etapa.

3.1 Etapa 1: Circuito como integrador

1. Primeiramente, montou-se um circuito RC de acordo com a Fig. (2) e usamos um V_i como sendo uma onda quadrada de $\omega = 5$ kHz e $10V_{pp}$, onde V_{pp} representa a tensão de pico a pico da nossa onda quadrada.

2. Em seguida, por meio do osciloscópio, captou-se o sinal direto do gerador de funções. O sinal capturado pelo osciloscópio encontra-se abaixo. O canal utilizado foi o 1.

   - Captura do sinal de entrada no circuito durante a Etapa 1:

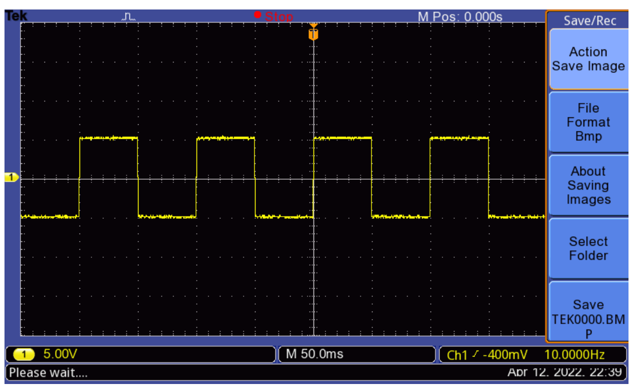

Figura 5: Sinal capturado direto do gerador de funções para uma onda quadrada.

   O valor de referência do eixo horizontal (tempo) é de 50.0 ms enquanto o valor de referência do eixo vertical (tensão) é de 5.00 V.

3. Em seguida, captou-se o sinal entre os terminais do capacitor. O gráfico gerado pelo osciloscópio foi o que se segue.

   - Captura do sinal de saída do capacitor:

   Ou seja, temos que apesar de o sinal de entrada ser uma onda quadrada, quando captamos o sinal no capacitor obtemos uma onda triangular.

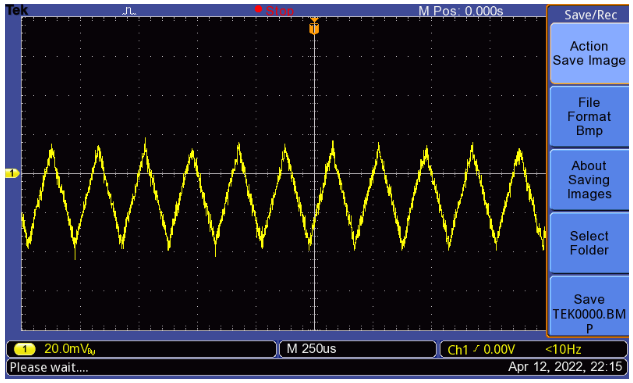

Figura 6: Sinal capturado entre os terminais do capacitor.

3.2 Etapa 2: Circuito como diferenciador

1. Analogamente ao que foi feito na etapa 1, montou-se um circuito RC e selecionou-se V_i como sendo uma onda quadrada, porém utilizamos 10 Hz de frequência e $10V_{pp}$.

2. Em seguida, capturou-se então o sinal direto do gerador de funções.

   - Captura do sinal de entrada no circuito durante a Etapa 2:

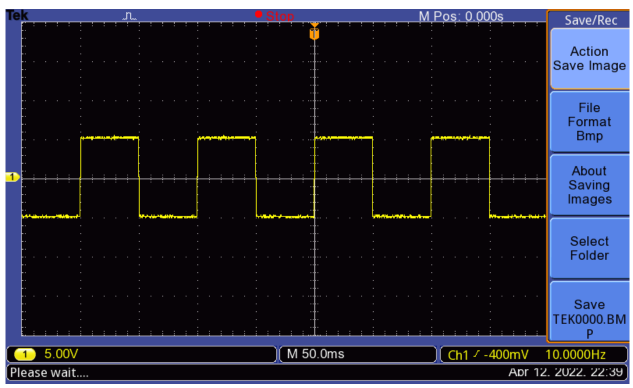

Figura 7: Sinal capturado direto do gerador de funções para uma onda quadrada.

   Note que o resultado foi basicamente o mesmo obtido na etapa anterior.

3. Por fim, avaliou-se o sinal direto dos terminais do resistor.

   - Captura do sinal de saída do resistor:

   Note que o sinal capturado nos terminais do resistor atinge um pico mínimo, cresce exponencialmente, assume um pico máximo, decai exponencialmente e então atinge outro pico mínimo.

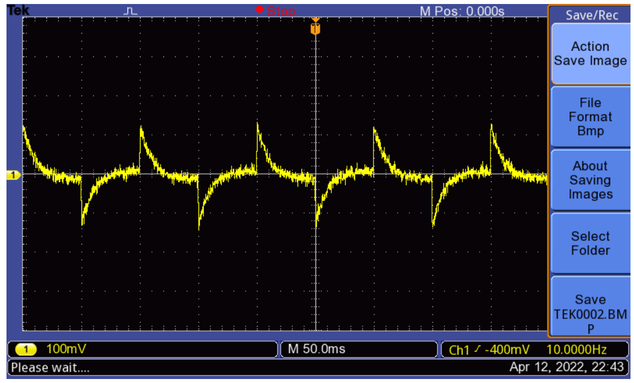

Figura 8: Sinal capturado entre os terminais do resistor.

3.3 Etapa 3: Simulação da Etapa 1 usando o `CircuitMaker`

1. Inicialmente, criou-se um arquivo na extensão `.CKT` intitulado `RC_Circuit_Integrator.ckt` onde se montou um circuito como descrito na etapa 1, subseção 3.1.

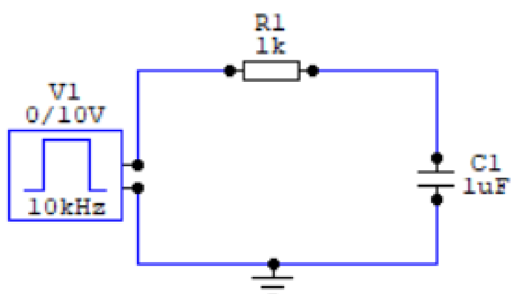

Figura 9: *Schematic* de um circuito RC montado no `CircuitMaker` seguindo a descrição exposta na Etapa 1, Seção 3.1.

2. O sinal de entrada foi definido de forma a ser semelhante ao utilizado durante a prática em laboratório.

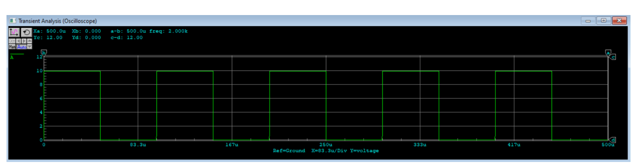

Figura 10: Sinal aplicado ao circuito montado no `CircuitMaker`.

3. Dessa forma, avaliou-se o sinal de saída no terminal do capacitor e obteve-se o seguinte gráfico:

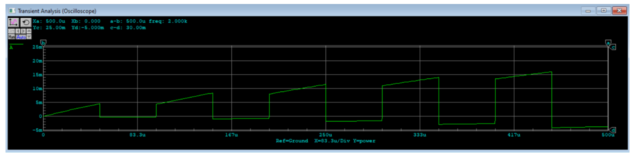

Figura 11: Sinal de saída capturado nos terminais do capacitor.

3.4 Etapa 4: Simulação da Etapa 2 usando o `CircuitMaker`

1. Semelhantemente ao que foi feito na etapa anterior, foi criado um arquivo na extensão `.CKT` intitulado `RC_Circuit_Differentiator.ckt` onde foi montado um circuito como descrito na etapa 2, subseção 3.2.

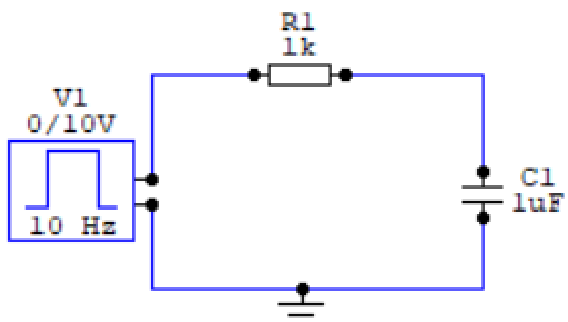

Figura 12: *Schematic* de um circuito RC montado no `CircuitMaker` seguindo a descrição exposta na Etapa 2, Seção 3.2.

2. E da mesma forma como foi feito na etapa anterior, avaliou-se o sinal de saída do resistor:

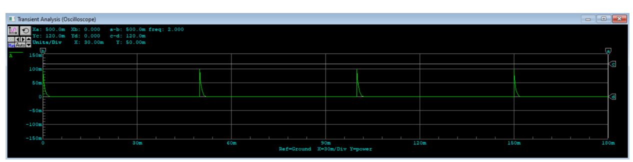

Figura 13: Sinal de saída capturado nos terminais do resistor.

4 Análise dos resultados

Nesta seção iremos discutir os resultados obtidos ao longo das etapas experimentais descritas anteriormente.

Como descrito na seção 2.2, o sinal de saída de um integrador deve ser a integral do sinal de entrada e no caso do diferenciador o sinal de saída deve ser a derivada do sinal de entrada. Como o capacitor e o resistor atuam como um integrador e um diferenciador através do circuito, respectivamente (vide seção 2.2), o sinal medido no capacitor deve ser a integral de uma onda quadrada (equação 18), que por sua vez resulta numa onda triangular (equação 20), como descrito na seção 2.3. Com relação ao sinal de saída do resistor, espera-se que o mesmo seja a derivada da onda quadrada, ou seja, que o mesmo atinja um pico de mínimo seguido de uma tendência modulada como uma função exponencial crescente do tipo (5) semelhante à ilustrada na Fig. 3 e ao tocar o eixo horizontal (tempo) atinja de forma súbita um pico de máximo seguido de uma tendência modulada como uma função exponencial decrescente do tipo (7) semelhante à ilustrada na Fig. 4.

Os sinais de saída do capacitor e do diferenciador expostos nas figuras 6 e 8, respectivamente, ilustram muito bem as tendências esperadas para a integral e a derivada de um sinal de entrada como uma onda quadrada.

Com relação ao modelo teórico obtido por meio de uma simulação através do programa `CircuitMaker`, temos algumas discrepâncias. Primeiramente, devido a limitações do próprio programa que não permite gerar outros tipos de sinais que não seja senoides perfeitos, é necessário modular o mesmo para que este assuma a tendência desejada, a de uma onda quadrada neste caso. Isso faz com que o sinal de entrada não seja uma onda quadrada perfeita causando discrepâncias consideráveis com o modelo teórico esperado. Entretanto, mesmo diante de tais limitações, ainda assim é possível notar nas figuras 11 e 13 uma tendência razoavelmente semelhante à esperada segundo o modelo matemático ideal.

5 Conclusões

Dado o exposto ao longo deste relatório, temos que os resultados experimentais expostos na seção 3 condizem com o modelo matemático exposto na seção 2. Portanto, temos que os resultados experimentais estão dentro do esperado do modelo teórico a menos de alguns ruídos experimentais, mostrando assim que o modelo teórico para um circuito RC exprime muito bem um circuito RC real.

5 ,

Referências

[1] Spitzer, Frank; Howarth (1973). *Principles of Modern Instrumentation*. Nova York: [s.n.] p. Ch. 11

[2] SEDRA, Adel S., *Microeletrônica* 5º ed. volume único, Prentice Hall, 1997

[3] Bakshi, U.A.; Bakshi, A.V., *Circuit Analysis - II*, Technical Publications, 2009 `ISBN 9788184315974`.

[4] Horowitz, Paul; Hill, Winfield, *The Art of Electronics* (3rd edition), Cambridge University Press, 2015 `ISBN 0521809266`.