

Контрольная работа №2

Выполнил студент Деменчук Г.М.

Группа ПИ19-4

Вариант 81

In [37]:

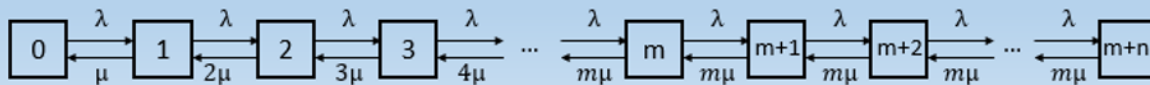
```
import numpy as np
import copy
```

Задание А

Составьте граф марковского процесса, запишите систему уравнений Колмогорова и найдите установившиеся вероятности состояний.

Общее описание входных данных

- Интенсивность поступления требований - λ
- Интенсивность обслуживания требований одним каналом - μ
- Количество каналов - m
- Количество мест в очереди - n



Задаем входные данные

In [38]:

```
L = 29
u = 6
m = 7
n = 6
```

Составляем матрицу интенсивностей переходов

Руководствуемся формулой ниже:

$$\Lambda(t) = \|\lambda_{ij}(t)\| = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_{12}(t) & \dots & \lambda_{1n}(t) \\ \lambda_{21}(t) & 0 & \dots & \lambda_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1}(t) & \lambda_{n2}(t) & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

```
In [39]: p_matrix = np.zeros((m + n + 1, m + n + 1))
for i in range(m + n):
    p_matrix[i, i + 1] = L
    if i < m:
        p_matrix[i + 1, i] = (u * (i + 1))
    else:
        p_matrix[i + 1, i] = u*m

print("Матрица интенсивности переходов")
print(p_matrix)
```

Матрица интенсивности переходов

[illegible]

Рассчитываем установившиеся вероятности

Формула, по которой считаю:

$$M = \begin{bmatrix} -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & -(\lambda_{31} + \lambda_{32}) \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$M = \Lambda^T - D$, где $D = \text{diag}(\sum_j \lambda_{1j}, \sum_j \lambda_{2j}, \sum_j \lambda_{3j})$ – диагональная матрица из сумм строк матрицы интенсивностей переходов Λ

Определяем диагональную матрицу D

```
In [40]: print("Диагональная матрица из сумм строк матрицы интенсивности переходов")
result = []
for i in range(p_matrix.shape[0]):
    result.append(p_matrix[i, :].sum())
D = np.diag(result)
print(D)
```

Диагональная матрица из сумм строк матрицы интенсивности переходов

[29.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.]
[0.	35.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.]
[0.	0.	41.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.]
[0.	0.	0.	47.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.]
[0.	0.	0.	0.	53.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.]
[0.	0.	0.	0.	0.	59.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.]
[0.	0.	0.	0.	0.	0.	65.	0.	0.	0.	0.	0.	0.]
[0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	71.	0.	0.	0.	0.	0.]
[0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	71.	0.	0.	0.	0.]
[0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	71.	0.	0.	0.]

```
[ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  71.  0.  0.  0.]
[ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  71.  0.  0.]
[ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  71.  0.]
[ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  42.]]
```

Определяем M

In [41]:

```
M = p_matrix.T - D
print(M)
```

```
[[-29.  6.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [ 29. -35. 12.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  29. -41. 18.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  29. -47. 24.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  29. -53. 30.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  29. -59. 36.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  29. -65. 42.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -71. 42.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -71. 42.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -71. 42.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -71. 42.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -71. 42.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -71. 42.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -42.]]
```

Определяем M_

Работаем по формуле ниже, согласно которой, элементы последних строк матриц M_ и B меняем на 1

$$M_- = \begin{bmatrix} -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) & \lambda_{32} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$M_- X = B$$

In [42]:

```
M_ = copy.deepcopy(M)
M_[-1, :] = 1
print("После замены на единицы")
print(M_)
```

После замены на единицы

```
[[-29.  6.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [ 29. -35. 12.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  29. -41. 18.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  29. -47. 24.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  29. -53. 30.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  29. -59. 36.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  29. -65. 42.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -71. 42.  0.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -71. 42.  0.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -71. 42.  0.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -71. 42.  0.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -71. 42.  0.  0.]
 [  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  29. -71. 42.]
 [  1.  1.  1.  1.  1.  1.  1.  1.  1.  1.  1.  1.  1.  1.]]
```

Определяем В

```
In [43]:
```

```
b_matrix = np.zeros(M_.shape[0])
b_matrix[-1] = 1
print(b_matrix)
```

```
[0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 1.]
```

Вычисляем результирующий X по формуле:

$$X = M_-^{-1}B$$

In [44]:

```
X = np.linalg.inv(M_).dot(b_matrix)
print("Установившиеся вероятности:\n\n"+"\n".join(map(str,X)))
```

Установившиеся вероятности:

0.007390705126183501
0.03572174144322026
0.08632754182111563
0.1390832618229085
0.16805894136934776
0.16245697665703618
0.1308681200848347
0.09036132101095729
0.06239234069804194
0.04308042572007658
0.029746008235290968
0.020538910448177093
0.014181628642788949
0.009792076920020943

Проверяем корректность вероятностей

In [45]:

```
print("Сумма вероятностей: ", X.sum(), "если = 1, то все правильно")
```

Сумма вероятностей: 1.0000000000000002 если = 1, то все правильно

Задание В

Найдите вероятность отказа в обслуживании.

• $p_{\text{отказа}} = p_{n+m}$ - вероятность отказа в обслуживании (новая заявка вынуждена будет покинуть систему необслуженной)

```
In [46]:
```

```
print("Вероятность отказа в обслуживании", X[-1])
```

Вероятность отказа в обслуживании 0.009792076920020943

Задание С

Найдите относительную и абсолютную интенсивность обслуживания.

- $q = 1 - p_{n+m}$ - относительная пропускная способность (доля от всех поступающих заявок)
- $A = (1 - p_{n+m}) * \lambda$ - абсолютная пропускная способность

In [47]:

```
print("Относительная пропускная способность = ", 1 - X[-1])
print("Абсолютная пропускная способность = ", (1 - X[-1]) * L)
```

Относительная пропускная способность = 0.9902079230799791

Абсолютная пропускная способность = 28.716029769319395

Задание D

Найдите среднюю длину в очереди.

$$d) L_{оч} = \sum_{i=1}^n i p_{m+i} - \text{средняя длина очереди}$$

In [48]:

```
results = []

for i in range(1, n + 1):
    buf = i * X[m + i]
    results.append(buf)
d_result = sum(results)

print("d) Средняя длина очереди:", d_result)
```

d) Средняя длина очереди: 0.4496074633708468

Задание E

Найдите среднее время в очереди.

$$e) T_{оч} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{m\mu} p_{m+i} - \text{среднее время в очереди}$$

In [49]:

```
results = []

for i in range(n):
    buf = (i + 1) / (m * u) * X[m + i]
    results.append(buf)

e_result = sum(results)
print("Среднее время в очереди:", e_result)
```

Среднее время в очереди: 0.015503705633477473

Задание F

Найдите среднее число занятых каналов.

$$N_{\text{каналов}} = \sum_{i=1}^m ip_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} mp_i - \text{среднее количество занятых каналов.}$$

Находим сумму левой части

$$N_{\text{каналов}} = \sum_{i=1}^m ip_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} mp_i - \text{среднее количество занятых каналов.}$$

```
In [50]: results_1 = []

for i in range(1, m + 1):
    buf = i * X[i]
    results_1.append(buf)

print("Сумма левой части:", sum(results_1))
```

Сумма левой части: 3.527885226902458

Находим сумму правой части

$$N_{\text{каналов}} = \sum_{i=1}^m ip_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} mp_i - \text{среднее количество занятых каналов.}$$

```
In [51]: results_2 = []

for i in range(m+1, m + n + 1):
    buf = m * X[i]
    results_2.append(buf)

print("Сумма правой части:", sum(results_2))
```

Сумма правой части: 1.258119734650775

Получаем среднее число занятых каналов из двух сумм:

```
In [52]: f_result = sum(results_1) + sum(results_2)
print("Среднее число занятых каналов:", f_result)
```

Среднее число занятых каналов: 4.786004961553234

Задание G

Найдите вероятность того, что поступающая заявка не будет ждать в очереди.

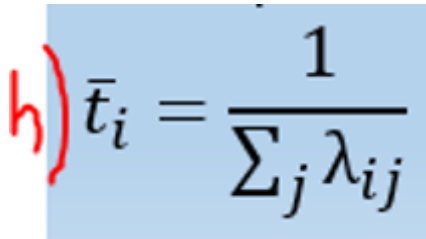
Сумма установившихся вероятностей от 0 до m-1

```
In [53]: g_result = sum(X[:m])
print("Вероятность того, что поступающая заявка не будет ждать в очереди:", g_result)
```

Вероятность того, что поступающая заявка не будет ждать в очереди: 0.7299072883246466

Задание Н

Найти среднее время простоя системы массового обслуживания.


$$h) \bar{t}_i = \frac{1}{\sum_j \lambda_{ij}}$$

```
In [54]: h_result = 1/L  
print("Среднее время простоя системы массового обслуживания:", h_result)
```

Среднее время простоя системы массового обслуживания: 0.034482758620689655

```
In [55]: #Задание i, как я понял, мы не делаем  
#Если же далаем, то пришлите, пожалуйста, какую-нибудь формулу для помощи в решении
```

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```