

# DA BLACK-SCHOLES A HESTON

## APPLICABILITÀ AI MERCATI FINANZIARI

Relatore:

**Prof. Impedovo Michele**

Lavoro finale di:

**Tumminello Giampaolo**

Anno accademico

2015/2016



# Indice

Introduzione .....	4
1. I titoli di Opzione .....	7
1.1 Ipotesi.....	7
1.2 Opzioni call e opzioni put .....	7
1.3 La parità put-call .....	9
2. Il modello Binomiale .....	11
2.1 Il modello binomiale uniperiodale .....	11
2.2 Il modello Cox-Ross-Rubinstein (CRR) .....	14
2.3 Formula del modello CRR.....	16
2.4 Passaggio al modello di Black-Scholes .....	17
3. Il modello di Black-Scholes .....	22
3.1 Ipotesi.....	22
3.2 Dalle greche all'equazione di Black-Scholes .....	22
3.3 Il processo di Wiener nel modello di Black-Scholes .....	25
3.4 La volatilità: da costante a processo stocastico .....	28
3.4.1 La volatilità come variabile .....	29
3.4.2 La volatilità come processo stocastico .....	30
4. I modelli a volatilità stocastica .....	31
4.1 Il modello Hull-White.....	31
4.2 Il modello Ball-Roma .....	31
4.3 Il modello di Heston .....	31
4.3.1 La calibrazione del modello di Heston.....	33
4.3.2 La trasformata di Fourier Veloce (FFT) .....	35
5. Confronto tra i modelli di Black-Scholes ed Heston .....	37
5.1 Il modello di Black-Scholes su Excel .....	37
5.2 Il codice VBA per il modello di Heston .....	37
5.3 La scelta dei parametri .....	39
5.4 Analisi delle variazioni dei parametri comuni ai due modelli.....	41
5.5 Analisi dei modelli applicati ai mercati finanziari .....	47
Conclusioni.....	49
Bibliografia e sitografia .....	51



## INTRODUZIONE

Le opzioni sono prodotti finanziari che conferiscono al compratore il diritto, ma non il dovere, di acquistare, nel caso di opzioni *call*, o di vendere, nel caso di opzioni *put*, una quantità determinata di un'attività finanziaria o reale, detta *sottostante*, ad un prezzo determinato, detto *strike price*, ad una data specifica, nel caso di Opzioni Europee, od entro una data specifica, nel caso di Opzioni Americane.

“La convenienza o meno nell'esercitare l'opzione da parte dell'acquirente/venditore entro i termini di scadenza o al termine temporale dipende dalla differenza tra prezzo di esercizio dell'opzione, stipulato inizialmente nel contratto, e il valore finale del sottostante alla scadenza”<sup>1</sup>.

Il sottostante, che può essere di varie tipologie (azioni, valute, tassi di interesse, merci, commodity, tassi di interesse, altre opzioni o titoli derivati, etc), «deve avere un mercato con quotazioni ufficiali o pubblicamente riconosciute»<sup>2</sup>.

Le opzioni sono scambiate sia su mercati regolamentati, quelli cioè caratterizzati da efficacia, trasparenza e liquidità, garantite dagli organi di controllo, sia "over the counter" (OTC), ovvero quei mercati in cui la negoziazione si svolge fuori dai circuiti di scambio ufficiali e non vigono i principi sopracitati. In Italia sono negoziate sul mercato IDEM (Italian Derivatives Market), uno dei mercati finanziari in cui sono negoziati contratti derivati, dove sono trattate opzioni sull'Indice MIB 30 e sui singoli titoli azionari<sup>3</sup>.

Dal 1973 negli Stati Uniti, quando furono commerciate per la prima volta, le opzioni hanno avuto un incredibile sviluppo, probabilmente dovuto alla loro versatilità nell'utilizzo sia come mezzo di copertura che di trading, dando origine a derivati sempre più complessi, detti opzioni esotiche, il cui payoff è più complesso di quello delle opzioni standard. Alcuni esempi sono le opzioni asiatiche, le opzioni barriera, le binarie, le lookback ecc.

---

<sup>1</sup> [https://it.wikipedia.org/wiki/Opzione\\_\(finanza\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Opzione_(finanza))

<sup>2</sup> <http://www.consob.it/web/investor-education/i-derivati>

<sup>3</sup> <https://it.wikipedia.org/wiki/IDEM>

Contemporaneamente a questo fenomeno si è avuta una spinta all'implementazione di moderni e più accurati modelli di valutazione per il prezzo di tali titoli. Valutare correttamente questi derivati è infatti di fondamentale importanza, poiché il vantaggio nell'esercitare l'opzione dipende proprio dalla differenza tra lo strike price e il valore del sottostante alla scadenza. Vista tale caratteristica tecnica del contratto, è necessario saperne stabilire accuratamente il prezzo al fine di essere competitivi sul mercato.

La tesi si pone l'obiettivo di verificare quanto un certo modello, il modello di Heston del 1993, sia agevolmente applicabile ai mercati finanziari, mantenendo una complessità accettabile che non penalizzi, in termini di tempo e difficoltà di implementazione, il suo utilizzo, rispetto ai modelli di valutazione che lo hanno preceduto. Si descrivono i principali modelli presenti in letteratura, non in ordine cronologico, ma dal punto di vista della semplificazione delle ipotesi adottate: dalle più forti alle più realistiche.

Nel primo capitolo si introducono le opzioni e le loro caratteristiche da un punto di vista matematico, analizzando le call e le put e la cosiddetta parità put-call che si rivelerà utile nell'analisi svolta nei capitoli successivi. Nel secondo capitolo si presenta il modello binomiale uniperiodale, la cui generalizzazione dà luogo al modello di Cox-Ross-Rubinstein (CRR), per poi giungere alla formula di Black-Scholes (BS). Si proseguirà con l'analisi di quest'ultimo modello, partendo dalle ipotesi su cui si basa, analizzando in seguito l'equazione di BS, prima dal punto di vista delle Greche (i coefficienti di sensibilità delle opzioni), poi seguendo il lavoro originale. Nell'ultimo paragrafo di questo capitolo si parlerà della volatilità con successive generalizzazioni: volatilità costante, volatilità variabile ed infine volatilità come processo stocastico. Nel quarto capitolo si analizzeranno i principali modelli a volatilità stocastica, quelli di Hull-White e Ball-Roma; ci si soffermerà sul modello di Heston e sulle sue caratteristiche, sulla sua forma chiusa e sulla sua calibrazione. Nel quinto capitolo si effettueranno delle prove tramite il Solver di Excel per verificare le differenze tra i valori di output, cioè i prezzi delle opzioni, dei due principali modelli trattati, BS ed Heston, prima con input puramente teorici e poi con input più realistici.

Nell'ultimo capitolo verranno presentate le conclusioni sul lavoro svolto, parlando dell'applicabilità ai mercati finanziari dei modelli trattati.





# CAPITOLO I: I TITOLI DI OPZIONE

## 1.1 IPOTESI

Le ipotesi sotto cui si darà la definizione dei titoli di opzione sono quelle di un mercato perfetto, cioè:

- i) sono consentite vendite allo scoperto;
- ii) non esistono frizioni del mercato;
- iii) i titoli sono infinitamente disponibili e infinitamente divisibili.

La seconda ipotesi si riferisce a differenze bid-ask, costi di transazione, sconti di quantità e imposte, e fa sì che tutti gli agenti sul mercato siano price-taker<sup>4</sup>. La terza ipotesi rende possibile acquistare o vendere (anche allo scoperto, per la prima ipotesi) qualunque quantità di titoli.

## 1.2 OPZIONI CALL E OPZIONI PUT

Dal punto di vista matematico le opzioni possono essere definite come una variabile aleatoria che dipende da un'altra variabile aleatoria, cioè il sottostante; in particolare, chiamato  $y$  il vettore dei pagamenti del sottostante e  $K$  il prezzo di esercizio, un'opzione call europea stipulata in  $t = 0$ , conferisce a chi l'acquista un payoff alla data  $t = 1$  così definito:

$$y_c = \max[y - K; 0];$$

poiché se nell' $i$ -esimo stato del mondo  $Y_i > K$  conviene esercitare l'opzione, mentre se  $Y_i \leq K$  è opportuno abbandonarla<sup>5</sup>.

---

<sup>4</sup> E. Castagnoli, *Abbecedario di Matematica Finanziaria - Versione lunga*, Edizioni Cakuntala, 2015, pp. 19-20

<sup>5</sup> E. Castagnoli, *Abbecedario di Matematica Finanziaria - Versione lunga*, Edizioni Cakuntala, 2015, pp. 51

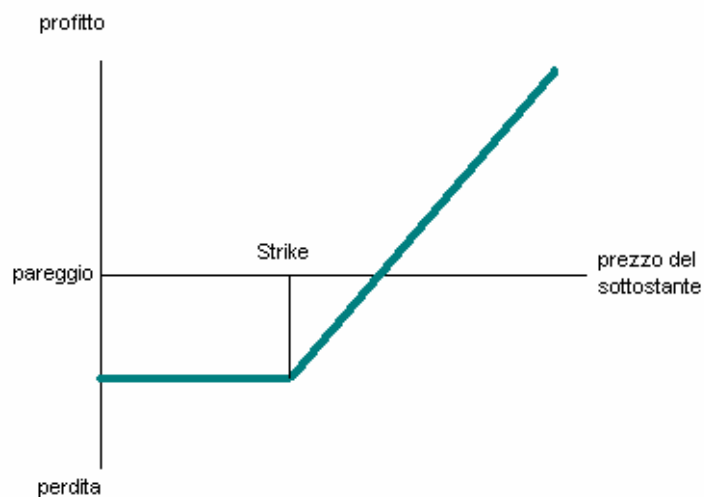


Figura 1: Grafico dell'andamento di una opzione call<sup>6</sup>.

Nel caso di una opzione put si ha:

$$y_P = \max[K - y; 0]$$

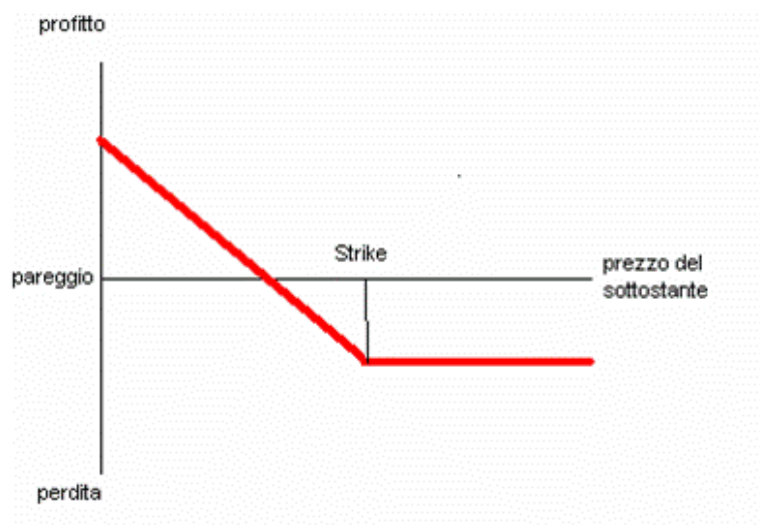


Figura 2: Grafico dell'andamento di una Put<sup>7</sup>.

<sup>6</sup> <http://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/grafico1.gif>

<sup>7</sup> <http://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/g2.gif>

### 1.3 LA PARITÀ PUT-CALL

Se si considera una posizione che consiste nell'acquisto di una put e nella vendita di una call si ha un vettore dei pagamenti del seguente tipo:

$$y_P - y_C = \max[K - y; 0] - \max[y - K; 0]$$

Poiché, per ogni funzione  $f$  risulta

$$\min(f) = -\max(-f)$$

si può scrivere:

$$y_P - y_C = \max[K - y; 0] + \min[K - y; 0]$$

Se  $K - y > 0$ , il primo addendo del secondo membro vale  $K - y$  e il secondo è pari a 0; viceversa se  $K - y < 0$ , il primo addendo del secondo membro è nullo e il secondo è  $K - y$ . In entrambi i casi si ha:

$$y_P - y_C = K - y$$

che è una identità tra variabili aleatorie. La posizione  $y_P - y_C$  ha lo stesso vettore di pagamenti dell'acquisto di un titolo certo  $K$  e la vendita allo scoperto del sottostante  $y$ . Quindi anche i prezzi dei due membri dell'equazione soprariportata devono coincidere. Definendo  $\pi(y_i)$  il prezzo unitario di un titolo e  $B = (1 + r)^{-1}$  il fattore di sconto, si può scrivere:

$$\pi(y_P) - \pi(y_C) = BK - \pi(y)$$

Tale equazione è chiamata *parità put-call* e permette di affermare che i quattro prezzi non sono indipendenti, ma che, avendo a disposizione i dati di tre di essi, il quarto è univocamente determinato<sup>8</sup>.

I valori  $y_P$  e  $y_C$  di opzioni put e call al tempo 0 verranno d'ora in poi indicati rispettivamente con  $c_0$  e  $p_0$ . Si continua quindi la trattazione sui titoli di opzione analizzandone i modelli per la loro valutazione. Inoltre, per semplicità di esposizione, verranno considerate solo opzioni europee su azioni.

---

<sup>8</sup> E. Castagnoli, *Abbecedario di Matematica Finanziaria - Versione lunga*, Edizioni Cakuntala, 2015, pp. 52-53



## CAPITOLO II: IL MODELLO BINOMIALE

### 2.1 IL MODELLO BINOMIALE UNIPERIODALE

È il più semplice modello di valutazione, che fu introdotto per la prima volta da William Sharpe nel 1978, ma generalmente è associato al modello di Cox-Ross-Rubinstein del 1979<sup>9</sup>. Si basa sull'ipotesi che il prezzo di un titolo venga descritto nel discreto da una funzione binomiale, cioè che, al tempo  $t = 1$ , indicato in questo paragrafo con  $T$ , possa muoversi solo in su o in giù con dei tassi fissati.

Si consideri un mercato costituito da un titolo privo di rischio  $A$  e un titolo azionario  $S$ , in un intervallo di tempo  $[0; T]$ , dove  $T$  è la maturità dell'Opzione.

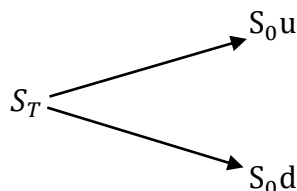
$A$  è caratterizzato da un processo deterministico, ciò vuol dire che il suo ripetersi sotto le medesime condizioni iniziali produce gli stessi risultati:

$$A_0 = 1; A_T = 1 + rT$$

Dove  $r$  è il tasso di rendimento di periodo, costante.

L'azione invece ha un comportamento crescente con probabilità  $p$  o discendente con probabilità  $1 - p$ :

$$S_T = \begin{cases} S_0 u & \text{con probabilità } p \\ S_0 d & \text{con probabilità } 1 - p \end{cases}$$



---

<sup>9</sup> [https://it.wikipedia.org/wiki/Modello\\_binomiale](https://it.wikipedia.org/wiki/Modello_binomiale)

Con  $u, d, p$  costanti positive,  $d < u$  e  $0 < p < 1$ .

Tale mercato viene definito come  $(A, S)$ .

Definiamo il termine *opportunità di arbitraggio* come un portafoglio  $a = (x, y)$ , con  $x$  la quantità del titolo certo e  $y$  la quantità dell'azione (entrambi infinitamente reperibili sul mercato e infinitamente divisibili), tale che i pagamenti offerti in  $T$  non siano nulli e il suo costo al tempo 0 sia negativo (arbitraggio di I tipo) o che i pagamenti non siano mai negativi e, con probabilità non nulla, il costo sia strettamente positivo (arbitraggio di II tipo). In simboli il valore del portafoglio è:

$$V^a = Ax + Sy$$

$$V_0^a = x + S_0y$$

$$V_T^a = (1 + r)x + S_Ty$$

Si dimostra che il modello binomiale uniperiodale è libero da opportunità di arbitraggio se e soltanto se

$$d < 1 + r < u$$

o alternativamente

$$d < \frac{1}{B} < u$$

Tale condizione implica che esiste un numero  $0 < p^* < 1$  tale che  $(1 + r) = p^*u + (1 - p^*)d$ , sia cioè una combinazione lineare dei valori  $u$  (up) e  $d$  (down). Ciò implica che il valore atteso del titolo azionario sia:

$$E^*(S_T) = S_0(p^*u + (1 - p^*)d) = S_0(1 + r)$$

quindi

$$S_0 = \frac{1}{1 + r} E^*(S_T)$$

o

$$S_0 = BE^*(S_T)$$

Si afferma quindi che sul mercato  $(A, S)$  una misura di probabilità  $(p^*; 1 - p^*)$ , sull'intervallo  $\{u, d\}$ , è detta misura neutrale al rischio, o *misura di martingala*, se

$$S_0 = BE^*(S_T)$$

da cui

$$p^* = \frac{\frac{1}{B} - u}{u - d}$$

e

$$1 - p^* = \frac{u - \frac{1}{B}}{u - d}$$

“Si può quindi dimostrare che il modello binomiale ad un periodo è libero da arbitraggi (di I e II tipo) se e soltanto se esiste una misura di probabilità  $(p^*; 1 - p^*)$  neutrale al rischio”<sup>10</sup>.

Nel mercato  $(A, S)$ , utilizzando il portafoglio  $a = (x, y)$ , si cercano ora i valori  $x^*$  e  $y^*$  che replichino una opzione call caratterizzata da un payoff del tipo  $c_T = \Phi(S_T)$ . Questi esistono e sono definiti da:

$$\begin{cases} x^* = \frac{\Phi(S_0 u)S_0 d - \Phi(S_0 d)S_0 u}{(1 + r)(S_0 d - S_0 u)} \\ y^* = \frac{\Phi(S_0 u) - \Phi(S_0 d)}{(S_0 u - S_0 d)} \end{cases}$$

Il portafoglio  $a^* = (x^*, y^*)$  replica, cioè ha lo stesso vettore di pagamenti, il valore del contratto derivato, quindi, per evitare arbitraggi, il valore iniziale deve coincidere, cioè  $c_0 = x^* - y^* S_0$ . Sostituendo e riordinando si ottiene:

$$c_0 = B[\Phi(S_0 u)p^* + \Phi(S_0 d)(1 - p^*)]$$

In questo modo si è definito il valore iniziale dell'opzione, ma anche la strategia che permette di replicarne il valore finale, qualunque sia lo scenario che si presenti<sup>11</sup>.

In altri termini si può scrivere il premio della call come:

<sup>10</sup> A. Ramponi, MF1 – metodi matematici per i mercati finanziari, Capitolo 4, AA. 2005/2006, pp. 4

<sup>11</sup> A. Ramponi, MF1 – metodi matematici per i mercati finanziari, Capitolo 4, AA. 2005/2006, pp. 5-6

$$c_0 = B[\max\{S_0u - K, 0\}p^* - \max\{S_0d - K, 0\}(1 - p^*)]$$

Nel caso di una put si ha:

$$p_0 = B[\max\{K - S_0u, 0\}p^* - \max\{K - S_0d, 0\}(1 - p^*)]$$

La generalizzazione del modello uniperiodale, considerando più periodi nel discreto, dà luogo al modello CRR.

## 2.2 MODELLO COX-ROSS-RUBINSTEIN

«Cox, Ross e Rubinstein, nel 1979, hanno proposto una metodologia di valutazione del prezzo delle opzioni basata anch'essa sul concetto di neutralità al rischio e sulla costruzione di un albero binomiale a più periodi che rappresenta l'evoluzione del prezzo del sottostante in diversi stati del mondo»<sup>12</sup>.

Anche in questo caso si considerano il titolo privo di rischio e un'azione, con tempi discreti  $t = 0, \dots, T$ .

Il titolo segue lo sviluppo:

$$A_0 = 1; A_{t+1} = (1 + r)A_t$$

Dove  $r$  è il tasso di rendimento, che rimane costante in tutto l'intervallo  $[t, t + 1]$ .

Il titolo azionario si comporta invece seguendo un albero binomiale in più periodi, che, se  $u$  e  $d$  si mantengono costanti nel tempo, è detto *albero ricombinante*.

---

<sup>12</sup> <http://www.borsaitaliana.it/bitApp/glossary.bit?target=GlossaryDetail&word=Modello%20Cox-Ross-Rubinstein>



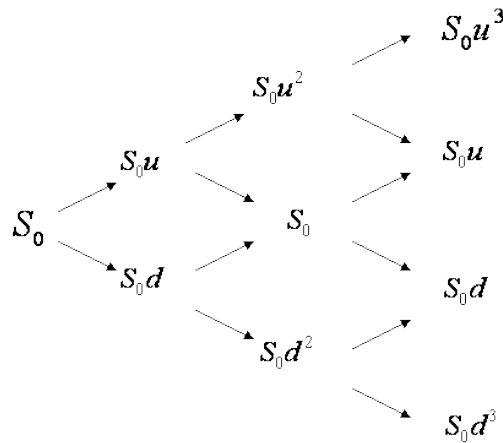


Figura 3: Un generico albero binomiale ricombinante<sup>13</sup>.

Il valore del titolo al tempo  $t$  può scriversi come:

$$S_t = S_0 u^k d^{t-k} \quad \text{con } k = 0, \dots, t$$

dove  $k$  indica il numero di volte in cui le variazioni del prezzo dell'azione hanno avuto il valore  $u$ .

«Una strategia di portafoglio è una sequenza di variabili aleatorie che dipendono dai valori di  $S_i$ , la si indica con  $h_t$  e, in simboli:

$$h_t = \{(x_t, y_t), t = 1, \dots, T\}$$

il cui valore è:

$$V_t^h = (1+r)x_t + S_t y_t \quad \text{con } t = 1, \dots, T$$

Una strategia di portafoglio è detta *autofinanziante* se ad ogni tempo  $t$  non vi sono entrate o uscite di moneta da esso, cioè se la condizione:

$$(1+r)x_t + S_t y_t = x_{t+1} + S_{t+1} y_{t+1}$$

vale per ogni  $t = 0, \dots, T-1$ .<sup>14</sup> Tramite un portafoglio autofinanziante è possibile costruire una opportunità di arbitraggio.

<sup>13</sup> : [http://www.goddardconsulting.ca/image-files/binomial\\_MultiStepLattice.gif](http://www.goddardconsulting.ca/image-files/binomial_MultiStepLattice.gif)

<sup>14</sup> A. Ramponi, MF1 – metodi matematici per i mercati finanziari, Capitolo 4, AA. 2005/2006, pp. 7

Prima di proseguire si dà la definizione di probabilità equivalenti: "due misure di probabilità  $P$  e  $Q$  sono dette equivalenti se associano probabilità non nulle agli stessi eventi, cioè se comunque preso un evento  $F$  risulta  $P(F) > 0$ , se e solo se  $Q(F) > 0$ "<sup>15</sup>.

«È possibile dimostrare che un mercato è libero da opportunità di arbitraggio se e solo se esiste una misura di probabilità  $P^*$  equivalente a  $P$  tale che:

$$S_t = BE^*(S_{t+1}|S_t)$$

Tale misura è detta *misura di martingala equivalente* o neutrale al rischio»<sup>16</sup>.

Per il modello binomiale in più periodi valgono le seguenti proposizioni:

- la condizione  $d < \frac{1}{B} < u$  è necessaria e sufficiente per l'assenza di opportunità di arbitraggio;
- le probabilità di martingala equivalente sono:

$$\begin{cases} P^* = \frac{\frac{1}{B} - u}{u - d} \\ 1 - P^* = \frac{u - \frac{1}{B}}{u - d} \end{cases}$$

- il modello Cox-Ross-Rubinstein è completo, ossia tutti i titoli derivati possono essere replicati<sup>17</sup>;
- dato un derivato  $X_T = \Phi(S_T)$ , se il mercato è completo, in assenza di opportunità di arbitraggio, il suo valore è uguale al valore del portafoglio che lo replica:

$$X_T = V_t^a \quad \text{con } t = 0, \dots, T$$

### 2.2.1 FORMULA DEL MODELLO CRR

In assenza di opportunità di arbitraggio, il prezzo al tempo  $t = 0$  di un derivato  $X = \Phi(S_T)$  è:

<sup>15</sup> [http://www.treccani.it/enciclopedia/martingala\\_\(Dizionario-di-Economia-e-Finanza\)/](http://www.treccani.it/enciclopedia/martingala_(Dizionario-di-Economia-e-Finanza)/)

<sup>16</sup> A. Ramponi, MF1 – metodi matematici per i mercati finanziari, Capitolo 4, AA. 2005/2006, pp. 8

<sup>17</sup> A. Ramponi, MF1 – metodi matematici per i mercati finanziari, Capitolo 4, AA. 2005/2006, pp. 8-9

$$X_0 = B^T E^*[\Phi(S_T)]$$

dove il valore atteso è calcolato rispetto alla misura  $P^*$  di martingala equivalente. Si può scrivere anche:

$$X_0 = B^T \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} (P^*)^k (1 - P^*)^{T-k} \Phi(S_0 u^k d^{T-k})$$

Dove  $P^*$  e  $1 - P^*$  sono definite al precedente punto 2.

## 2.3 PASSAGGIO AL MODELLO DI BLACK-SCHOLES

Si supponga ora di dividere l'arco temporale  $[0, T]$  in  $N$  sottoperiodi di ampiezza  $\Delta t = \frac{T}{N}$ . In ciascun sottoperiodo il titolo azionario (d'ora in poi sottostante) si comporta seguendo il modello binomiale multiperiodale di CRR. Così si definiscono i valori di  $r$ ,  $u$  e  $d$  :

$$r = r_N = \frac{RT}{N}$$

$$u = u_N = \left(1 + \frac{RT}{N}\right) e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}}$$

$$d = d_N = \left(1 + \frac{RT}{N}\right) e^{-\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}}$$

con  $R > 0$  detto tasso istantaneo di interesse e  $\sigma$  la volatilità del sottostante<sup>18</sup>. Poiché  $\sigma > 0$  il modello è privo di arbitraggio, infatti vale  $d_N < 1 + r_N < u_N$ . Le probabilità neutrali al rischio indicate ora come  $p^*$  e  $1 - p^*$  sono:

$$p^* = \frac{1 + \frac{RT}{N} - e^{-\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}}}{e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}} - e^{-\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}}}$$

---

<sup>18</sup> A. Ramponi, MF1 – metodi matematici per i mercati finanziari, Capitolo 4, AA. 2005/2006, pp. 11-12

$$1 - p^* = \frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1}{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}}$$

Si dimostra che, se  $N$  è un numero intero fissato, il valore scontato del sottostante al tempo  $T$ , sotto le probabilità neutrali al rischio, è:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{RT}{N}\right)^N} S_T = S_0 e^{\sum_{j=1}^N X_j^{(N)}}$$

$X_j^{(N)}$ , per ogni  $j = 1, \dots, N$ , sono variabili aleatorie indipendenti e distribuite nel seguente modo:

$$X_j^{(N)} = \begin{cases} \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} & \text{con probabilità } p^* \\ -\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} & \text{con probabilità } (1 - p^*) \end{cases}$$

Il valore atteso  $\mu_N$  di  $X_j^{(N)}$  e la varianza  $\sigma_N^2$  di  $X_j^{(N)}$ , sotto la probabilità neutrale al rischio, sono tali che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N\mu_N = -\frac{\sigma^2 T}{2}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N\sigma_N^2 = \sigma^2 T$$

Si consideri ora una Opzione Put Europea con strike price  $K$  e maturità  $T$ . Il prezzo al tempo  $t = 0$ , per la formula di CRR è:

$$p_0^{(N)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{RT}{N}\right)^N} E^Q[\max(K - S_T, 0)]$$

ovvero

$$p_0^{(N)} = E^Q \left[ \max \left( \frac{K}{\left(1 + \frac{RT}{N}\right)^N} - S_0 e^{\sum_{j=1}^N X_j^{(N)}}, 0 \right) \right] = E^Q[f(X_j^{(N)})]$$

con  $X_j^{(N)}$  variabili aleatorie indipendenti che seguono quanto enunciato fin ora. Applicando il Teorema del Limite centrale (poiché  $f$  è una funzione continua e limitata), si ottiene che:

$$p_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} E^Q[f(\sum_{j=1}^N X_j^{(N)})] = E^Q[\max(e^{-RT}K - S_0 e^X, 0)]$$

dove  $X \sim N\left(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma^2 T\right)$ .

Si può scrivere anche  $X = -\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T}Y$  con  $Y \sim N(0,1)$ , da cui

$$\begin{aligned} P_0 &= E\left[\max\left(e^{-RT}K - S_0 e^{-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T}Y}, 0\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(e^{-RT}K - S_0 e^{-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T}Y}, 0\right) e^{-\frac{Y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

La disuguaglianza implicita nella funzione di massimo:

$$e^{-RT}K - S_0 e^{-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T}Y} \geq 0$$

è soddisfatta se e solo se

$$y \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( -\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) - RT + \frac{\sigma^2 T}{2} \right)$$

Il secondo membro di questa disequazione viene indicato con il termine  $-d_2$ .

Quindi  $P_0$  ora è dato da:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2} \left( e^{-RT}K - S_0 e^{-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T}Y} \right) e^{-\frac{Y^2}{2}} dy \\ &= \frac{e^{-RT}K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{Y^2}{2}} dy - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2} \left( e^{-\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T}Y} \right) e^{-\frac{Y^2}{2}} dy \\ &= e^{-RT}KN[-d_2] - \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2} \left( e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{T})^2} \right) dy \end{aligned}$$

Con un cambio di variabile il secondo addendo diventa:

$$- \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2 + \sigma\sqrt{T}} \left( e^{-\frac{t^2}{2}} \right) dt = -S_0 N[-d_1]$$

con  $-d_1 = -d_2 + \sigma\sqrt{T}$ .  $P_0$  assume ora la seguente forma:

$$P_0 = e^{-RT}KN[-d_2] - S_0N[-d_1]$$

con

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R + \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right)$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \right)$$

A questo punto, utilizzando la parità Put-Call e le proprietà della distribuzione normale, si ottiene la formula per una Call europea:

$$c_0 = S_0N[d_1] - e^{-RT}KN[d_2]$$

Tale formula è nota come *formula di Black-Scholes* ed è largamente applicata nei mercati finanziari. Essa permette di calcolare il valore di un contratto di opzione europeo in funzione di  $T$  e  $K$ , determinati da contratto, e di  $S_0$  ed  $R$ , osservabili sul mercato. Essa dipende inoltre dalla volatilità,  $\sigma$ , che non è determinata né può essere osservata (ma deve essere stimata e ciò richiede tecniche statistiche) e indica la variabilità del rendimento sottostante.

$$c_0 = c(0, S_0, K, T, R, \sigma)$$

Tramite una inversione della funzione di prezzo, a partire dai prezzi osservati, si può definire la volatilità implicita  $\sigma^*$ , tale che:

$$\hat{c}_0 = c(0, S_0, K, T, R, \sigma^*)$$

dove  $\hat{c}_0$  è il valore di mercato dell'opzione.

## CAPITOLO III: MODELLO DI BLACK – SCHOLES

«Il modello di Black-Scholes-Merton, o semplicemente Black-Scholes (BS), fu introdotto nel 1973 (prima del modello CRR, che ne rappresenta una semplificazione nel caso discreto), in un lavoro di Fischer Black e Myron Scholes. Sulla base delle precedenti ricerche di Robert Merton e Paul Samuelson, essi derivarono l'equazione differenziale del modello, su cui si fonda la formula omonima. Nel 1997 Merton e Scholes ricevettero il Premio Nobel per l'economia (Black era morto nel 1995)»<sup>19</sup>.

### 3.1 IPOTESI

Il modello di BS si muove sotto le seguenti ipotesi:

- i) Il mercato è perfetto, così come espresso nel primo capitolo, ovvero:
  - è perfettamente competitivo: gli operatori non sono in grado di influenzare il prezzo dei titoli con le loro operazioni;
  - è privo di attriti: non ci sono costi di transazione, tasse ed è possibile vendere allo scoperto; si può acquistare e vendere in quantità arbitrarie ed infinitamente divisibili ad un tasso di interesse  $R$  costante che coincide con il tasso di rendimento degli zero coupon bond;
  - c'è assenza di arbitraggio.
- ii) il prezzo del sottostante è un moto browniano geometrico con media e varianza note e costanti nel tempo (su cui si svilupperà parte della trattazione in seguito);
- iii) il prezzo di esercizio  $K$  è noto e costante nel tempo e il sottostante non ha flussi di cassa secondari (ad esempio dividendi)<sup>20</sup>.

---

<sup>19</sup> [https://it.wikipedia.org/wiki/Modello\\_di\\_Black-Scholes-Merton](https://it.wikipedia.org/wiki/Modello_di_Black-Scholes-Merton)

<sup>20</sup> R. M. Mininni, *Valutazione delle opzioni col modello di Black e Scholes*, Università di Bari Aldo Moro, AA. 2015-2016, pp 1

### 3.2 DALLE GRECHE ALL'EQUAZIONE DI BLACK-SCHOLES

Sia  $c(0, S_0, K, T, R, \sigma)$  la funzione prezzo di un'opzione call europea. Le cosiddette greche, che rivestono un'importanza cruciale nella valutazione e nell'investimento in titoli di opzione, sono le derivate parziali di tale funzione in base al prezzo del sottostante.

Si espongono le principali.

È chiamata Delta:

$$\delta(t) = \frac{\partial}{\partial S_t} c(0, S_0, K, T, R, \sigma)$$

la quale è la derivata prima del premio rispetto al prezzo del sottostante; indica la sensibilità del premio dell'opzione rispetto alle variazioni del sottostante.

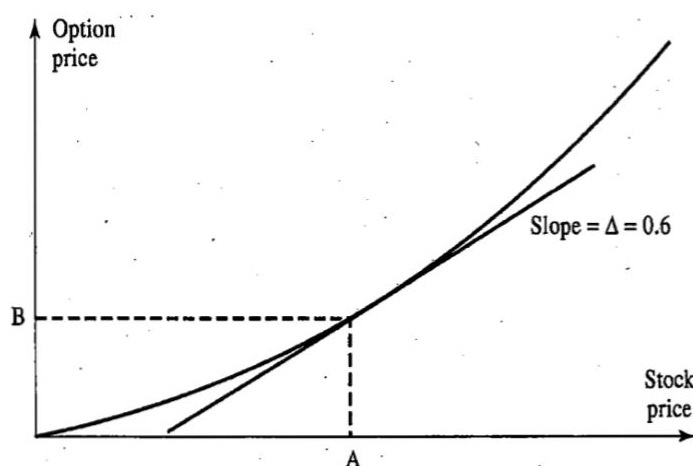


Figura 4: Calcolo del Delta<sup>21</sup>.

Tralasciando tutte le variabili da cui dipende la funzione  $c$  e considerando solo  $c(t, S_t)$ , esplicitando inoltre la dipendenza dei valori di  $d_1$  e  $d_2$  dalle stesse variabili,  $d_1(t, S_t)$  e  $d_2(t, S_t)$ , si può riscrivere delta come:

$$\delta(t) = \frac{\partial}{\partial S_t} c(t, S_t) = N[d_1(t, S_t)]$$

<sup>21</sup> J. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives 7th*, Pearson Education, Inc. 2009, figure 17.2, pp. 353



«In un'ottica di copertura, il delta indica la quantità di sottostante da comprare (vendere) per compensare le perdite (guadagni) derivanti dal movimento del premio dell'opzione (cosiddetto delta hedging)»<sup>22</sup>.

Un'altra importante greca è Gamma, la derivata seconda di  $c(t, S_t)$  rispetto al prezzo del sottostante:

$$\Gamma(t) = \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} c(t, S_t)$$

essa indica la sensibilità del delta alle variazioni di prezzo del sottostante e, esplicitando analogamente a quanto fatto in precedenza, si può scrivere:

$$\Gamma(t) = N'[d_1(t, S_t)] \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} = \frac{e^{-\frac{d_1^2(t, S_t)}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}$$

La variabilità nel tempo del premio di un'opzione è rappresentata da Theta, che è la derivata prima di  $c(t, S_t)$  rispetto al tempo:

$$\Theta(t) = \frac{\partial}{\partial t} c(t, S_t)$$

oppure, come per delta e per gamma:

$$\Theta(t) = - \left( \frac{S_t \sigma}{2\sqrt{T-t}} \left( \frac{e^{-\frac{d_1^2(t, S_t)}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right) + r K e^{-r(T-t)} N[d_2(t, S_t)] \right)$$

dove  $r$  è il tasso istantaneo di interesse usato nella formula di BS. «Tra le greche, theta è un indicatore di sensitivity che non dipende da una variabile stocastica (il tempo scorre con probabilità unitaria) e ha rilevanza perché può essere utilizzato come una proxy di Gamma»<sup>23</sup>.

<sup>22</sup> [https://it.wikipedia.org/wiki/Greca\\_\(finanza\)#Prezzo\\_del\\_sottostante](https://it.wikipedia.org/wiki/Greca_(finanza)#Prezzo_del_sottostante)

<sup>23</sup> [https://it.wikipedia.org/wiki/Greca\\_\(finanza\)#Tempo\\_.28Theta.29](https://it.wikipedia.org/wiki/Greca_(finanza)#Tempo_.28Theta.29)

Vega rappresenta invece la sensibilità del premio di un'opzione rispetto a variazioni della volatilità implicita del sottostante, è la derivata del premio rispetto alla volatilità:

$$V(t) = \frac{\partial}{\partial \sigma^*} c(t, St)$$

Di vega si tratterà in seguito parlando della volatilità implicita e dello smile di volatilità.

Rho,  $\rho$ , rappresenta la sensibilità del valore dell'opzione al tasso di interesse istantaneo.

$$\rho(t) = \frac{\partial}{\partial r} c(t, St)$$

Si considera la relazione che intercorre tra le greche delta, gamma e theta:

$$\Theta(t, St) + rSt\delta(t, St) + \frac{1}{2} St^2 \sigma^2 \Gamma(t, St) = rc(t, St)$$

“Il valore di una call europea  $c(t, St)$  nel modello BS soddisfa l'equazione delle derivate parziali (PDE) di tipo parabolico, con coefficienti non lineari:

$$\begin{cases} \Theta(t, St) + rSt\delta(t, St) + \frac{1}{2} St^2 \sigma^2 \Gamma(t, St) = rc(t, St) & \text{con } (t, St) \in (0, t) \times (0, +\infty) \\ c(t, St) = \max\{St - K, 0\} & \forall St \geq 0 \end{cases}$$

Tale equazione è nota come *equazione di Black-Scholes*<sup>24</sup>. La derivazione di tale equazione, seguendo il lavoro originale, è di seguito presentata.

### 3.3 IL PROCESSO DI WIENER IN BLACK-SCHOLES

«Un processo stocastico (cioè non deterministico) standardizzato di N. Wiener, o *moto browniano*, indicato con  $W_t$ ,  $t \in [0, T]$ , soddisfa le seguenti proprietà:

- 1)  $W_0 = 0$  con probabilità unitaria;
- 2)  $\forall t \in [0, T]$ ,  $W_t \sim N(0, t)$ , cioè il processo si distribuisce come una normale di media 0 e varianza  $t$ ;

---

<sup>24</sup> A. Ramponi, MF1 – metodi matematici per i mercati finanziari, Capitolo 4, AA. 2005/2006, pp. 18

- 3) Gli incrementi del processo  $W_t - W_\tau$  sono stocasticamente indipendenti per ogni coppia  $t, \tau \in [0, T]$  con  $t > \tau$ ;
- 4) Le realizzazioni (traiettorie) generate dal processo sono funzioni continue di  $t$ .<sup>25</sup>

“Un processo stocastico  $S_t$ , per cui  $dS_t = a dt + b dW_t$  è una trasformazione affine di  $W_t$  ed è costituito da variabili aleatorie distribuite normalmente di media  $at$  e varianza  $bt$ , prende il nome di processo stocastico non standardizzato di Wiener. I parametri  $a$  e  $b$  sono detti rispettivamente deriva e coefficiente di diffusione”<sup>26</sup>.

Se  $a$  e  $b$  sono dipendenti da  $(t, S_t)$ , brevemente indicati con  $a_t$  e  $b_t$ , il processo:

$$dS_t = a_t dt + b_t dW_t$$

prende il nome di *processo di diffusione*.

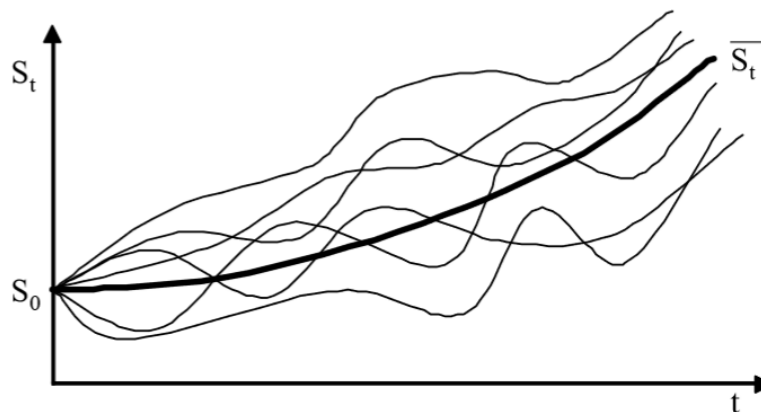


Figura 5: Grafico delle Traiettorie di un processo di diffusione attorno al valor medio  $\bar{S}_t$ .<sup>27</sup>

L'ipotesi principale di BS è che il prezzo di un titolo segua un andamento descritto da un processo di diffusione di tale tipologia.

<sup>25</sup> E. Castagnoli, *Abbecedario di Matematica Finanziaria - Versione lunga*, Edizioni Cakuntala, 2015, pp. 128

<sup>26</sup> E. Castagnoli, *Abbecedario di Matematica Finanziaria - Versione lunga*, Edizioni Cakuntala, 2015, pp. 128

<sup>27</sup> E. Castagnoli, *Abbecedario di Matematica Finanziaria - Versione lunga*, Edizioni Cakuntala, 2015, pp. 129

Si aggiunge un derivato  $C_t$  sul sottostante  $S_t$ , tale che  $C_t = F(t, S_t)$ , se la funzione  $F$  è due volte differenziabile, la formula di Taylor permette di scrivere:

$$\Delta C_t = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} dt^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} dS_t^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial S_t} dt dS_t \right) + o(dt^2 + dS_t^2)$$

$dC_t$  è formata da addendi di ordine non superiore al primo e, poiché  $dt^2$  è del secondo ordine e  $dt dS_t$  è di ordine  $1 + \frac{1}{2}$ , si può scrivere:

$$dC_t = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} dS_t^2$$

Sostituendo per  $S_t$ , si ottiene:

$$dC_t = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} d(a_t dt + b_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} b_t^2 dt$$

ovvero:

$$dC_t = \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t} a_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} b_t^2 \right] dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} b_t dW_t$$

quest'ultima è nota come *lemma di Ito* e permette di affermare che anche  $C_t$  è un processo di diffusione stocastico con deriva

$$\alpha_t = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t} a_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} b_t^2$$

e coefficiente di diffusione

$$\beta_t = \frac{\partial F}{\partial S_t} b_t$$

Si considera ora il mercato composto dai titoli  $S_t$  e  $C_t$ , che dipendono da due variabili esplicative, per cui tale mercato risulta completo. Si vuole quindi replicare il titolo certo, acquistando  $h_t$  unità del sottostante e una unità del derivato:

$$P_t = h_t S_t + C_t$$

Si sceglie la quantità di sottostante  $h_t^*$  tale che:

$$h_t^* = -\left(\frac{\beta_t}{b_t}\right) = \frac{\partial F}{\partial S_t}$$

Dato  $r_t$  il tasso istantaneo di interesse, per il non arbitraggio, deve essere:

$$dP_t = P_t r_t dt = (h_t^* S_t + C_t) r_t dt$$

da cui

$$h_t^* a_t - \alpha_t = (h_t^* S_t + C_t) r_t$$

con alcuni passaggi si ottiene

$$\alpha_t b_t - \beta_t a_t = (b_t F(t, S_t) - \beta_t S_t) r_t$$

poi si sostituiscono deriva e coefficiente di diffusione

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S_t} a_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} b_t^2 \right] b_t - \frac{\partial F}{\partial S_t} b_t a_t = \left( b_t F(t, S_t) - \frac{\partial F}{\partial S_t} b_t S_t \right) r_t$$

per giungere a

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} b_t^2 + \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t r_t = F(t, S_t) r_t$$

Che è la classica *equazione di Black-Scholes*<sup>28</sup>.

Infatti le derivate presenti in tale equazione non sono altro che le greche del paragrafo precedente, quindi, sostituendo e riordinando, si ottiene:

$$\Theta(t, S_t) + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma^2 \Gamma(t, S_t) + r S_t \delta(t, S_t) = r C_t$$

### 3.4 LA VOLATILITÀ: DA COSTANTE A PROCESSO STOCASTICO

«Considerando il prezzo di mercato come un dato e lasciando la volatilità come incognita, si nota che la volatilità stimata dal mercato (già definita come volatilità

---

<sup>28</sup> E. Castagnoli, *Abbecedario di Matematica Finanziaria - Versione lunga*, Edizioni Cakuntala, 2015, pp. 128-131

implicita,  $\sigma^*$ ) non è costante al variare delle caratteristiche delle opzioni ( $K$  e  $T$ ). Ciò contraddice l'ipotesi ii, precedentemente enunciata, del modello di Black-Scholes»<sup>29</sup>.

Si pone  $\sigma^* = I$  e si definisce la volatilità implicita in simboli:

$$I > 0: C_{BS}(t, S_t; I) = C_{Market}$$

Derivando la formula di BS per una call europea si ottiene:

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial I} = \frac{S_t e^{-\frac{d_1}{2}} \sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} > 0$$

che è la greca vega  $V(t)$ , la quale conferma che il prezzo di una call è crescente all'aumentare della volatilità.

In generale, per ogni  $T$ , la volatilità in funzione del prezzo presenta concavità rivolta verso l'alto; questo fenomeno è noto come *volatility smile*.

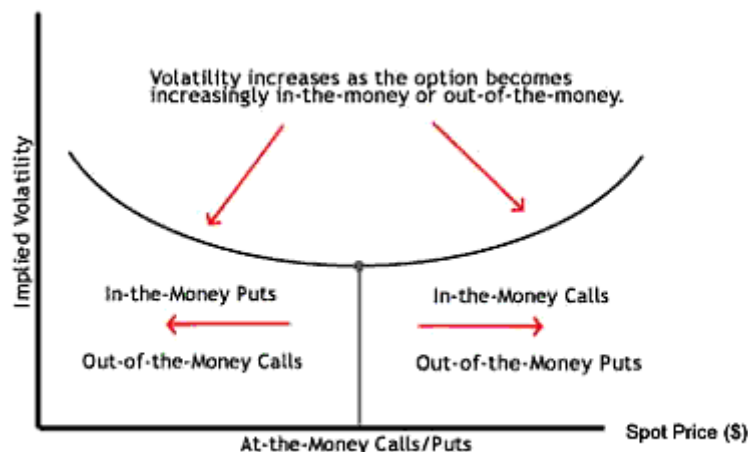


Figura 6: Schema della volatilità in funzione dello Strike price e della volatilità implicita<sup>30</sup>.

Per migliorare il modello BS, un importante passo è la sostituzione dell'ipotesi sulla volatilità implicita con una più debole: vengono quindi introdotti dei modelli dove la volatilità è considerata variabile.

<sup>29</sup> G. Maienza, *Option Pricing con il modello di Heston*, Politecnico di Milano, Milano, 2007, pp. 9

<sup>30</sup> <http://i.investopedia.com/inv/dictionary/terms/volatilitysmile2.gif>

### 3.4.1 LA VOLATILITÀ COME VARIABILE

Si scrive adesso la volatilità come  $v(t, S_t)$ , funzione del tempo e del sottostante e non più costante, e si riscrive il processo di prezzo del sottostante con una modifica rispetto al modello BS:

$$dS_t = a_t dt + v(t, S_t) dW_t$$

L'equazione delle derivate parziali (PDE) può essere ottenuta, considerando nuovamente  $C_t = F(t, S_t)$ , come:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} v^2(t, S_t) + \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t r_t = F(t, S_t) r_t$$

I modelli a volatilità variabile si basano su ipotesi che legano  $v$  al tempo e al sottostante e non sono generalizzabili, infatti dipendono di volta in volta dal sottostante preso in esame.

Per andare oltre questo problema la volatilità implicita deve essere approssimata con modelli di maggiore complessità, modelli di tipo stocastico.

### 3.4.2 LA VOLATILITÀ COME PROCESSO STOCASTICO

Si indica la volatilità come processo stocastico con  $v_t$  e, chiamato  $X_t$  il sottostante, il processo di prezzo di quest'ultimo può essere scritto come:

$$dX_t = \mu X_t dt + v_t X_t dW_t$$

il processo di volatilità  $v_t$  può essere un processo di Wiener generalizzato (processo di Ito) o qualsiasi altro processo stocastico (ad esempio un processo Markoviano). Si pone anche la condizione:

$$v_t \geq 0$$

“Una caratteristica importante dei modelli a volatilità stocastica è che il processo di volatilità non è correlato perfettamente con il processo  $W_t$ ; esiste quindi un elemento casuale nella volatilità che non dipende dall’andamento del sottostante”<sup>31</sup>.

---

<sup>31</sup> G. Maienza, *Option Pricing con il modello di Heston*, Politecnico di Milano, Milano, 2007, pp. 14



## CAPITOLO IV: MODELLI A VOLATILITÀ STOCASTICA

Posto il processo di volatilità  $v_t = f(Y_t)$  dove  $f(y) > 0, \forall y \in \mathbb{R}$ , il processo  $Y_t$  segue una equazione differenziale stocastica del tipo:

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \dots dZ_t$$

dove  $Z_t$  è un moto Browniano correlato con il termine  $W_t$  tramite  $\rho$  tale che:

$$\rho dt = \langle W, Z \rangle_t^{32}$$

### 4.1 MODELLO HULL-WHITE

Tra i primi modelli proposti in letteratura, che seguono quanto appena descritto, si trova il modello di Hull-White (1987) che presenta il processo  $Y_t$  con distribuzione log-normale:

$$dY_t = \alpha Y_t dt + \beta Y_t dZ_t$$

con la funzione  $f(y) = \sqrt{y}$  e il coefficiente di correlazione dei processi di Wiener  $\rho = 0$ .

### 4.2 MODELLO BALL-ROMA

Un altro modello è quello di Ball-Roma, proposto nel 1994, che considera il processo di Cox-Ingersoll-Ross per  $Y_t$ :

$$dY_t = \alpha(m - Y_t)dt + \beta\sqrt{Y_t}dZ_t$$

con  $f(y) = \sqrt{y}$  e  $\rho = 0$ .

Le stesse equazioni differenziali di Ball-Roma vengono utilizzate nel modello di Heston (1993), primo modello in letteratura che presenta un coefficiente  $\rho \neq 0$ . L'intensità e il segno del termine di correlazione dipendono dalla natura del sottostante.

---

<sup>32</sup> G. Maenza, *Option Pricing con il modello di Heston*, Politecnico di Milano, Milano, 2007, pp. 15

### 4.3 IL MODELLO DI HESTON

Il processo di prezzo  $S_t$  del sottostante e il processo di volatilità  $v_t$  nel modello di Heston si esprimono in simboli come:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t$$

$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} dZ_t$$

con  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\rho \in (-1,1)$ .

Il parametro  $\theta > 0$  rappresenta il processo di *mean-reverting* ed è chiamato *long-term volatility*. La volatilità oscilla infatti intorno a tale valor medio.

Il valore di  $k > 0$ , la cosiddetta *reversion-speed*, indica la velocità di questa oscillazione determinandone la frequenza.

Il parametro  $\sigma > 0$  infine indica l'intensità del disturbo generato dal processo di Wiener  $Z_t$  ed è chiamata *volatility of volatility*.

Vengono stabilite condizioni iniziali per  $S_0 > 0$ , osservabile sul mercato, e  $v_0 > 0$ . Esiste inoltre un vincolo che lega  $k$ ,  $\theta$  e  $\sigma$ , detto *condizione di Feller*, che fa sì che  $v_t$  si mantenga strettamente positivo:

$$\frac{2k\theta}{\sigma^2} > 1$$

Si ha che

$$E[dS_t] = \mu S_t dt$$

poiché l'elemento stocastico  $\sqrt{v_t} S_t dW_t$  è simmetrico con media pari a 0.

Il modello di Heston fornisce una formula in forma chiusa, come il modello di BS, per la valutazione di una opzione call europea:

$$C(\tau, x, v) = e^x P_1 - e^{-r\tau} K P_2$$

$$P_j(\tau, x, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R \left[ \frac{e^{-i\phi \log(K)} f_j(\phi, x, v)}{i\phi} \right] d\phi$$

$$f_j(\emptyset, x, v) = e^{C_j(\tau, \emptyset) + D_j(\tau, \emptyset)v + i\emptyset x}$$

$$C_j(\tau, \emptyset) = ri\emptyset\tau + \frac{a}{\sigma^2} [(b_j - \rho\sigma i\emptyset + d_j)\tau - 2 \log(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j})]$$

$$D_j(\tau, \emptyset) = \frac{b_j - \rho\sigma i\emptyset + d_j}{\sigma^2} \frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j}$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\emptyset - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\emptyset - \emptyset^2)}$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\emptyset + d_j}{b_j - \rho\sigma i\emptyset - d_j}$$

per  $j = 1, 2$

con

$$u_1 = \frac{1}{2}; \quad u_2 = -\frac{1}{2}; \quad a = k\theta; \quad b_1 = k - \rho\sigma; \quad b_2 = k;$$

e in cui si pone  $x = \ln S$  e  $\tau = T - t$ .

«Nella formula di  $C_j(\tau, \emptyset)$  il logaritmo ha un argomento complesso, si pone quindi il problema della scelta tra le infinite determinazioni del logaritmo del tipo

$$\log \omega = \log |\omega| + i(Arg(\omega) + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

fornite da ogni numero complesso  $\omega = |\omega|(\cos Arg(\omega) + i \sin Arg(\omega)) \neq 0$ .

Il termine  $d_j$  ha due determinazioni di segno opposto, poiché è la radice quadrata di un numero complesso. La determinazione da considerare deve essere scelta in modo da rispettare la continuità di  $f_j$ .

Un'altra considerazione che merita attenzione è che la convergenza dell'integrale nella formula di  $P_j(\tau, x, v)$  deve essere verificata per ogni set di parametri  $(\mu, k, \theta, \sigma, \rho)$ »<sup>33</sup>. Diventa quindi di fondamentale importanza la precisione nell'integrazione numerica dell'antitrasformata di Fourier, necessaria per giungere alla formula di  $P_j(\tau, x, v)$ , poiché

---

<sup>33</sup> V. Matteucci, *Il problema della calibrazione nel modello a volatilità stocastica di Heston (Sintesi)*, Università degli studi Roma Tre, 2012, pp. 8

influisce in maniera significativa sulla calibrazione del modello, di cui si tratterà di seguito.

### 4.3.1 LA CALIBRAZIONE DEL MODELLO DI HESTON

Considerato  $\bar{\phi}$  l'insieme dei cinque parametri  $(\mu, k, \theta, \sigma, \rho)$ , questo deve essere stimato, a partire dalle osservazioni sul mercato di opzioni europee, tramite una minimizzazione ai minimi quadrati della differenza tra il valore predetto dal modello e il valore osservato:

$$\min_{\bar{\phi} \in \Phi} \sum_{i=1}^n \omega_i \left( V_i^{Model}(S, v, \tau_i, K_i; \bar{\phi}) - V_i^{Market}(S, v, \tau_i, K_i) \right)^2$$

dove si può individuare un insieme di parametri ammissibili  $\Phi$ , in funzione dei quali si possono costruire diverse approssimazioni del mercato reale<sup>34</sup>.

Il valore  $n$  indica il numero di opzioni utilizzate per la calibrazione.

I pesi  $\omega_i \geq 0$  possono essere scelti in diversi modi; generalmente si dà maggiore importanza ai titoli più scambiati sul mercato, in modo che il valore ottenuto non sia poi deviato da fenomeni come la mancanza di liquidità.

Un altro approccio per la calibrazione è quello di considerare la volatilità implicita  $I(V_i)$  di un'opzione. Così il problema di minimizzazione diventa:

$$\min_{\bar{\phi} \in \Phi} \sum_{i=1}^n \omega_i \left( I \left( V_i^{Model}(S, v, \tau_i, K_i; \bar{\phi}) \right) - I \left( V_i^{Market}(S, v, \tau_i, K_i) \right) \right)^2$$

Fondamentalmente, in entrambe le modalità, il problema è:

$$\min_{\bar{\phi} \in \Phi} f(\bar{\phi})$$

con  $\bar{\phi} = (v_0, k, \theta, \sigma, \rho)$  e le condizioni, in parte già enunciate in precedenza, dell'insieme  $\Phi$ :

$$v_0 \geq 0 \quad \theta \geq 0 \quad k \geq 0 \quad \sigma \geq 0 \quad -1 \leq \rho \leq 1$$

---

<sup>34</sup> G. Maenza, *Option Pricing con il modello di Heston*, Politecnico di Milano, Milano, 2007, pp. 32

dove, si ricorda,  $\Phi$  è l'insieme dei  $\bar{\vartheta}$  ammissibili.

$$\Phi = \mathbb{R}^5 \cap \mathcal{C}$$

“La funzione obiettivo  $f(\bar{\vartheta})$  è chiamata energia ed è sempre positiva poiché è somma di valori positivi”<sup>35</sup>.

Per minimizzare tale funzione vi sono molti metodi di ricerca del minimo particolarmente complessi.

La soluzione, infatti, non è unica e non ne è neppure garantita l'esistenza poiché non esiste nessuna argomentazione per affermare con certezza che il mercato segua il modello assunto. Il problema quindi diventa la ricerca di vari minimi locali, se esistono, e non la ricerca di un minimo globale.

Di seguito, tra le varie metodologie, si presenterà la Trasformata di Fourier Veloce.

#### 4.4.2 FAST FOURIER TRANSFORMATION (FFT)

La trasformata di Fourier è uno strumento utilizzato in molte scienze applicate. La sua prima applicazione fu nel campionamento e nella digitalizzazione di segnali analogici.

Essa è una trasformazione matematica che fa corrispondere ad una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  una  $F$ :

$$F(t) = F(f(t)) = \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itx} f(x) dx$$

Con  $t$  e  $x \in \mathbb{R}^n$

Da cui si definisce la antitrasformata come:

$$F(-t) = F(f(-t)) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{itx} f(x) dx$$

La trasformata di una somma di funzioni corrisponde alla somma delle trasformate delle due funzioni (proprietà di linearità); inoltre il prodotto di una costante per una

---

<sup>35</sup> G. Maenza, *Option Pricing con il modello di Heston*, Politecnico di Milano, Milano, 2007, pp. 32

funzione di cui si vuole calcolare la trasformata è uguale al prodotto della costante per la trasformata della funzione.

Se, invece di una funzione continua, si utilizza un set di  $N$  osservazioni, è necessario discretizzare la trasformata di Fourier. Per far ciò non si considera la funzione continua, ma i suoi  $N$  valori di ingresso, che restituiscono altrettanti valori di uscita. In particolare considerata la funzione  $h(t)$  e la sua trasformata  $H(x)$ , la trasformata discreta di Fourier è definita dall'uguaglianza:

$$H(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{2\pi i x_n t} dt \cong \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i x_n t_n} \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N}$$

Da cui si può affermare che

$$H(x_n) \cong \Delta H_n$$

Con  $n$  intero.

L'antitrasformata discreta di Fourier è:

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{2\pi i k n / N}$$

La trasformata di Fourier veloce (FFT) è un algoritmo ottimizzato per calcolare la trasformata discreta di Fourier e la sua antitrasformata, e minimizza il numero di operazioni da effettuare per ottenere la trasformata discreta di Fourier.

Tale problema di ottimizzazione si basa sul *lemma di Danielson-Lanczos*: "Una trasformata di Fourier discreta di lunghezza  $N$  può essere riscritta come somma di due trasformate di Fourier discrete di lunghezza  $N/2$ , una formata dai termini di indice pari e l'altra formata dai termini di indice dispari"<sup>36</sup>.

---

<sup>36</sup> D. Lo Buglio, *La trasformata veloce di Fourier (FFT): analisi e implementazione in C++*, Alma Mater Studiorum, Università di Bologna, 2015, pp. 11

Tramite questo procedimento si riesce a giungere a delle trasformate di Fourier discrete di lunghezza unitaria. Si ottiene infine una combinazione lineare degli input  $h_k$  pesati con numeri complessi.

Un algoritmo FFT permette di ottenere il risultato di una trasformata di Fourier in tempi efficienti, con un numero di operazioni  $O(N \ln(N))$ <sup>37</sup>.

Il metodo di calibrazione del modello di Heston tramite FFT fu proposto per la prima volta da Carr e Madan nel 1999.

“Troviamo che l'uso della FFT sia notevolmente più veloce rispetto alla maggior parte metodi disponibili e, inoltre, il metodo tradizionale descritto in Heston, Bates, Bakshi e Madan e Scott risulta lento ed impreciso”<sup>38</sup>.

Infatti il metodo originale di Heston per calibrare il modello ha una complessità pari a  $O(N^2)$ .

---

<sup>37</sup> A. Ngjela, *Calibrazione di modelli a volatilità stocastica su architettura parallela*, Politecnico di Milano, 2011, pp. 35

<sup>38</sup> P. Carr e D. B. Madan, 'Option evaluation the using fast fourier transform', *Journal of Computational Finance* 1999, pp. 61–73





## CAPITOLO V: CONFRONTO TRA I MODELLI DI BLACK-SCHOLES ED HESTON

Dopo aver analizzato l'evoluzione dei modelli di valutazione per il prezzo delle opzioni, ci si sofferma su due modelli: quello di Black-Scholes, il quale risulta essere attualmente il più utilizzato nella pratica, e il modello di Heston, che teoricamente supera alcuni dei problemi legati alle ipotesi di BS e permetterebbe di calcolare in maniera più accurata il prezzo delle opzioni.

Il confronto si basa sull'applicabilità dei due modelli ai mercati finanziari tramite l'utilizzo del Solver di Excel, implementando tramite programmazione in VBA le formule dei due modelli.

Per semplicità si confronteranno i prezzi ottenuti di sole opzioni call europee che non hanno flussi di cassa secondari.

### 5.1 IL MODELLO DI BLACK-SCHOLES SU EXCEL

Per implementare il modello su Excel si considerano i seguenti parametri: il prezzo del sottostante  $S$ , la varianza  $v$ , il prezzo di esercizio  $K$ , il tasso di rendimento  $r$ , e la maturità dell'opzione espressa in anni  $T$ . Avendo tali input si inserisce un nuovo modulo e una nuova routine (function) nell'editor di Microsoft Visual Basic, Application Edition:

```
Public Function BS(S, v, K, r, T)

    d = (Log(S / K) + T * (r + 0.5 * v)) / (Sqr(v) * Sqr(T))

    BS = S * Application.NormSDist(d) - _
    Exp(-r * T) * K * Application.NormSDist(d - Sqr(v) * Sqr(T))
End Function
```

La formula utilizzata è la classica formula di Black-Scholes, in cui il parametro  $d$  corrisponde a  $d_1$ . Nella formula BS si è utilizzata la funzione di distribuzione normale fornita da excel.

## 5.2 CODICE VBA DEL MODELLO DI HESTON

Il procedimento per l'implementazione del modello di Heston è analogo a quanto precedentemente descritto, ma è necessario aggiungere i parametri Kappa, Theta, Lambda, Rho, Sigma ed anche il numero di iterazioni da compiere. Inoltre la maturità dell'opzione questa volta viene inserita come input in giorni e non in anni. Tale implementazione prende spunto dal codice proposto da Hui Hong<sup>39</sup>.

La seguente formulazione sfrutta la versione discreta del modello di Heston tramite lo schema di Euler-Maruyama. Il procedimento tramite il quale si giunge ad un prezzo per la call è quello della simulazione Montecarlo.

```
Public Function heston(S, v, K, r, ngiorni, kappa, theta, lamda, rho, sigma, nsimulazioni)
Dim allS() As Double, Stock() As Double

simpath = 0
ReDim allS(ngiorni) As Double, Stock(nsimulazioni) As Double
deltat = 1 / 365

For itcount = 1 To nsimulazioni
    lnSt = Log(S)
    lnvt = Log(v)
    Vattuale = v
    Sattuale = S

    For daycount = 1 To ngiorni
        e = Application.NormSInv(Rnd)
        eS = Application.NormSInv(Rnd)
        eV = rho * eS + Sqr(1 - rho ^ 2) * e
        lnSt = lnSt + (r - 0.5 * Vattuale) * deltat + Sqr(Vattuale) * Sqr(deltat) * eS
        Sattuale = Exp(lnSt)
        lnvt = lnvt + (1 / Vattuale) * ((kappa + lamda) * (kappa * theta / (kappa + lamda) - _
            Vattuale) - 0.5 * sigma ^ 2) * deltat + sigma * (1 / Sqr(Vattuale)) * Sqr(deltat) * eV
        currentV = Exp(lnvt)
        allS(daycount) = S
    Next daycount

    simpath = simpath + Exp((-ngiorni / 365) * r) * Application.Max(allS(ngiorni) - K, 0)
Next itcount

    heston = simpath / nsimulazioni

End Function
```

<sup>39</sup> H. Gong, UCL, <http://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahgon/>, 2014

### 5.3 LA SCELTA DEI PARAMETRI

Si parte da un esempio puramente teorico in cui il valore del sottostante è pari a 100, mentre il prezzo di esercizio è 90. La varianza è del 50%, il tasso di rendimento è pari a 10%, la maturità è 30 giorni.

Per quanto riguarda i parametri propri del modello di Heston, non ci si addentra nei metodi di stima di questi, ma si suppongono pari ai seguenti valori:

$$k = 3 \quad \theta = 0,05 \quad \lambda = 5 \quad \rho = -0,7 \quad \sigma = 0,5$$

Il numero di simulazioni, pari a 2000, è stato scelto in modo da essere significativo ai fini della valutazione dell'opzione, ma che permettesse al software di calcolare il prezzo della call in tempi efficienti.

Dati tali input il risultato è il seguente:

3	<b>Input</b>	
4		
5	Prezzo sottostante S	100
6	Varianza V	50,00%
7	Strike price K	90
8	Tasso di rendimento r	10,00%
9	Maturità in giorni (ngiorni)	30
10	Reversion-speed (kappa)	3
11	Long-term volatility (theta)	0,05
12	Lamda $\lambda$	5
13	Rho $\rho$	-0,7
14	Volatility of volatility (sigma)	0,3
15	Numero di Simulazioni	2000
16		
17	<b>Output dato dal modello di Heston</b>	
18	Prezzo della call	13,1021727459
19		
20	<b>Output dato dal modello di Black-Scholes</b>	
21	Prezzo della call	14,1716979905
22		
23	Differenza tra i due output	-1,0695252446

Ciò che si nota è la grossa differenza tra il prezzo che ciascuno dei due modelli associa alla call ipotizzata, pari a ben  $|1,0695252446|$ . Per comprendere a cosa sia dovuta tale differenza si eseguono alcune prove facendo variare un parametro per volta partendo dal prezzo del sottostante, arrivando alla maturità.

#### 5.4 ANALISI DELLE VARIAZIONI DEI PARAMETRI COMUNI AI DUE MODELLI

Facendo variare il prezzo del sottostante da 10 a 200 si nota come il prezzo stimato dal modello di Black-Scholes si mantenga al di sopra del prezzo dato dal modello di Heston per tutto l'intervallo. Al crescere di  $S$  la differenza tra i valori che i due modelli restituiscono in media aumenta, quindi si può affermare che il modello di Black-Scholes cresce più velocemente, se pur di poco, rispetto al modello di Heston.

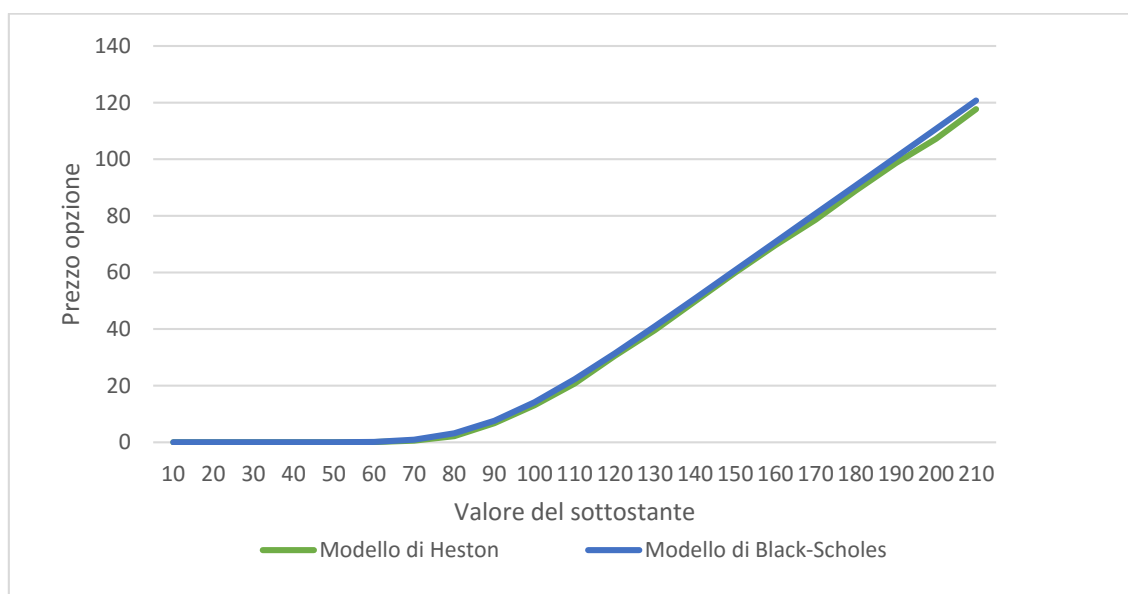
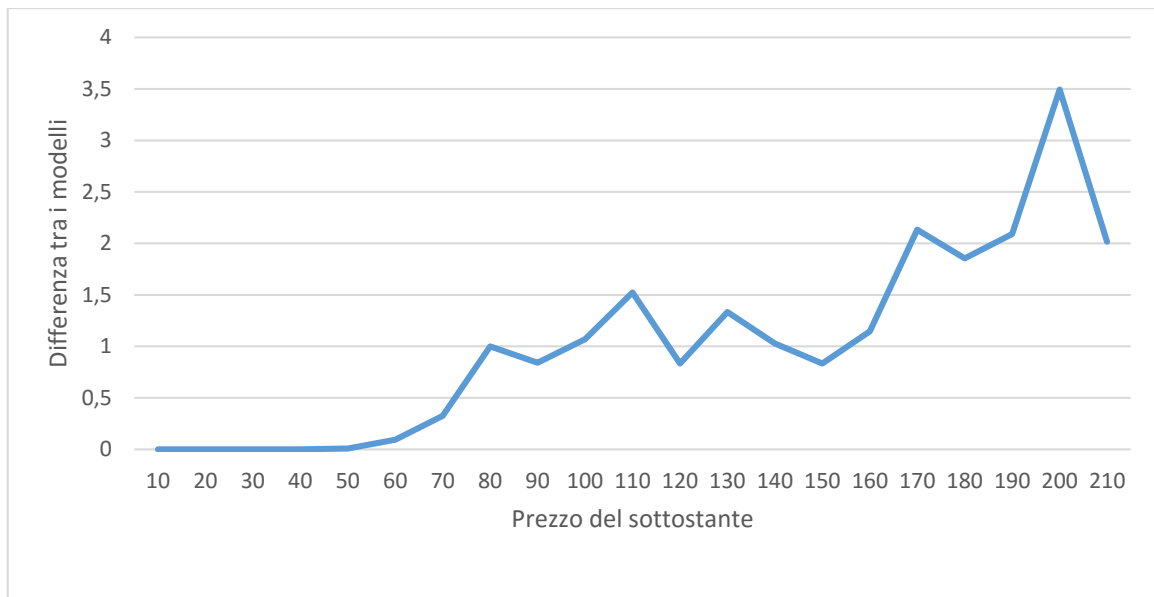


Figura 7: grafico dell'andamento dei prezzi dei modelli all'aumentare del prezzo del sottostante



*Figura 8: grafico dell'andamento della differenza tra il prezzo fornito da BS e il prezzo fornito da Heston, al variare del prezzo del sottostante*

Tornando al valore iniziale del sottostante pari a  $S = 100$  si procede ora ad analizzare l'effetto che la varianza ha nei due modelli. Entrambi i modelli hanno un andamento crescente al crescere della varianza, ma il modello BS cresce in maniera lineare, mentre il modello di Heston no. Ciò è dovuto a come la varianza viene trattata nei due modelli in esame: nel modello di BS è costante, mentre nel modello di Heston è considerata una variabile stocastica. Ancora una volta, in tutto l'intervallo considerato, da varianza pari a 0,05 fino a 1, il modello BS si mantiene con prezzi al di sopra del modello di Heston.

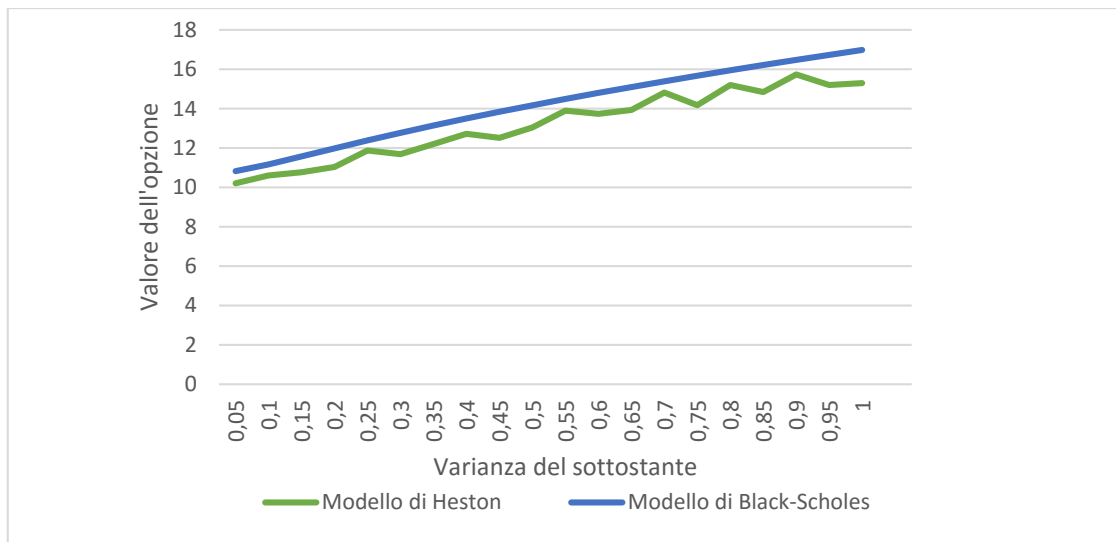


Figura 9: grafico dell'andamento dei prezzi dei modelli all'aumentare della varianza del sottostante

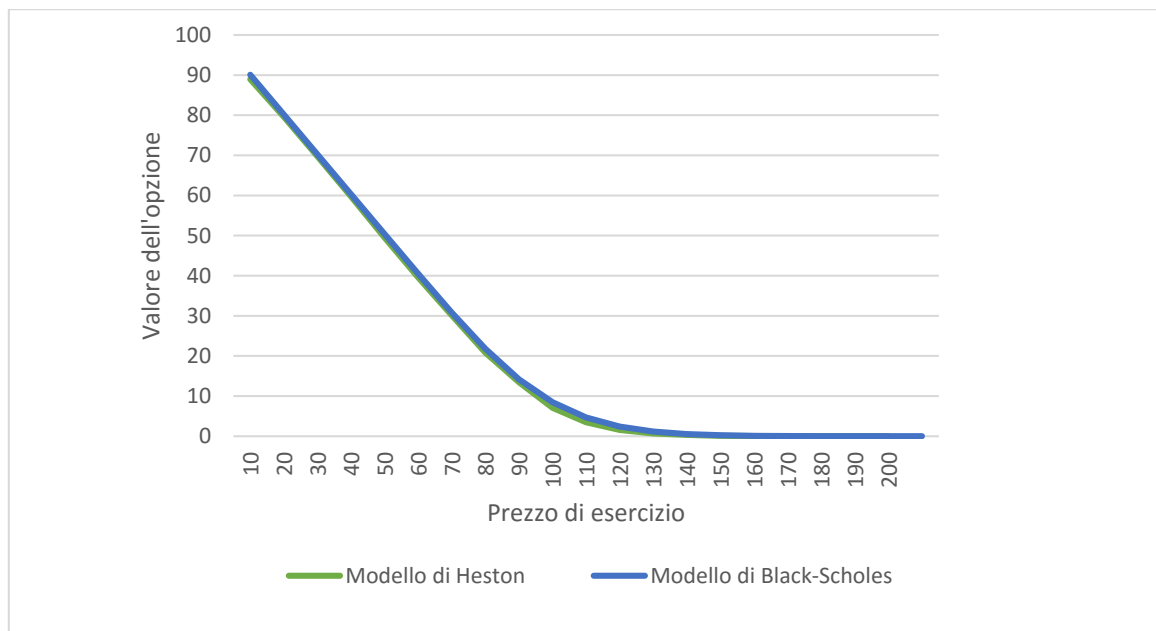


Figura 10: grafico dell'andamento della differenza tra il prezzo fornito da BS e il prezzo fornito da Heston, al variare della varianza del sottostante

Si procede ora ad analizzare, analogamente a quanto fatto per il prezzo del sottostante, la variazione del prezzo di esercizio dell'opzione, nell'intervallo da 0 a 210. La varianza è considerata ora pari al 50% e il prezzo del sottostante pari a 100.

Ancora una volta il prezzo restituito da BS si mantiene al di sopra del prezzo dato dal modello di Heston per tutto l'intervallo, con valori decrescenti al crescere dello strike

price per entrambi i modelli. Per quanto riguarda la differenza, questa sembra avere un andamento casuale fino al valore di  $K = S = 100$ , dove raggiunge il suo massimo, per poi decrescere, quando entrambi i modelli restituiscono valori sempre più prossimi allo 0.



*Figura 11: grafico dell'andamento dei prezzi dei modelli all'aumentare del prezzo di esercizio dell'opzione.*

Analizzando infine la variazione della maturità dell'opzione, si prendono in considerazione le opzioni call che hanno durata pari a uno, due, tre e sei mesi, uno, due e dieci anni (pari rispettivamente a 30, 60, 90, 180, 360, 720, 3600 giorni).

Per le durate maggiori di un anno il modello di Heston così implementato in Excel non è in grado di dare un prezzo (la formula restituisce infatti l'errore #VALORE!). Ciò è dovuto ad un problema di overflow, infatti, per far sì che il modello restituisca un valore con durate maggiori di 360 giorni, è necessario diminuire il numero di simulazioni: inserendo ad esempio 720 giorni, il numero di iterazioni deve scendere a 19 per ottenere un prezzo dal modello, mentre con 3600 giorni, si scende ulteriormente a 2. Tali dati non verranno considerati poiché eccessivamente inaccurati.

Tuttavia per gli altri input si può notare come entrambi i modelli siano direttamente crescenti rispetto alla maturità dell'opzione e come il modello di BS cresca più velocemente rispetto al modello di Heston.

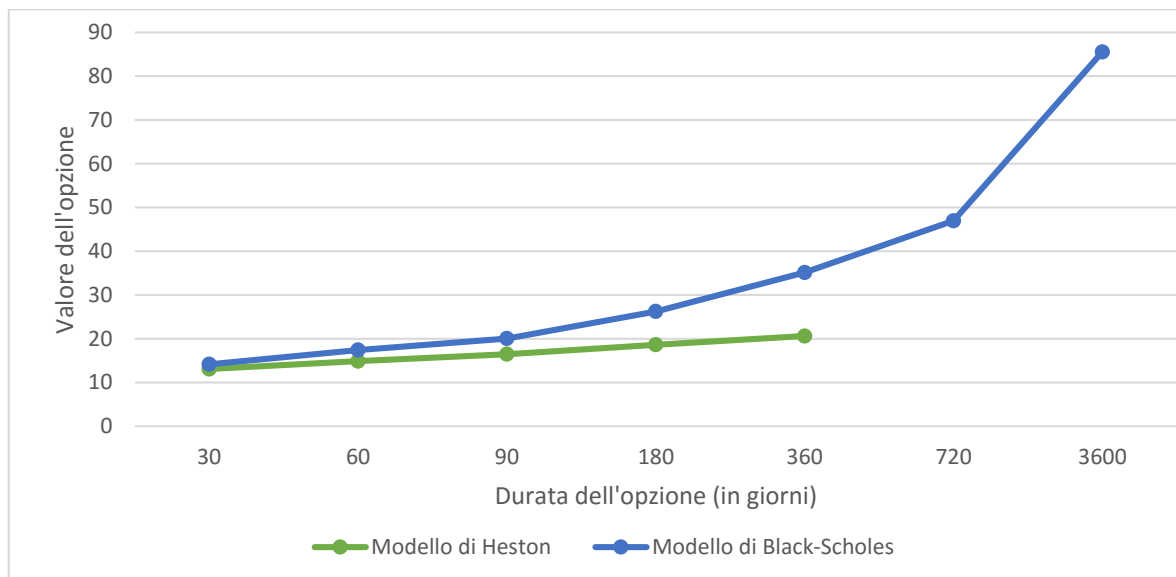


Figura 13: grafico dei prezzi dei modelli per determinate durate dell'opzione.

In tutte le analisi svolte il valore restituito dal modello di BS risulta essere sempre maggiore del prezzo stimato dal modello di Heston. Ciò è dovuto alle ipotesi adottate nei parametri di Reversion-speed, Long-term volatility, Lambda, Rho e Volatility of Volatility. Tra questi, quello che influisce maggiormente è  $\rho$ . Infatti con un valore di  $\rho = -1$  si ottiene, teoricamente, il valore minimo per il modello di Heston (mantenendo tutti gli altri input inalterati rispetto al caso base). I prezzi ottenuti al variare di tale parametro sono riassunti nella seguente tabella:

Rho $\rho$	Prezzo della call per il modello di Heston
-1	12,32196873
-0,9	11,98314223
-0,8	12,51005617
-0,7	13,32448751



-0,6	12,60004365
-0,5	13,04355628
-0,4	13,84584685
-0,3	13,65341095
-0,2	13,51446052
-0,1	13,16707041
0	13,17972731
0,1	14,12413224
0,2	13,9016627
0,3	13,72434285
0,4	14,63543423
0,5	14,60460474
0,6	14,43726915
0,7	15,04989453
0,8	14,7228636
0,9	14,70256065
1	15,54405445

L'andamento è pressoché crescente e per valori di  $\rho \geq 0,4$  il prezzo stimato dal modello di Heston è maggiore di quello di BS, pari a 14,1716979905.

#### 5.4 ANALISI DEI MODELLI APPLICATI AI MERCATI FINANZIARI

Si procede utilizzando i dati forniti da Borsa Italiana per le opzioni call sull'indice FITSE MIB con date di scadenza a novembre 2016 e diversi strike price<sup>40</sup>.

Si prende come valore di riferimento del sottostante  $S = 17230$ , ossia il prezzo di chiusura dell'indice FITSE MIB al 25/10/2016. La sua volatilità implicita è considerata

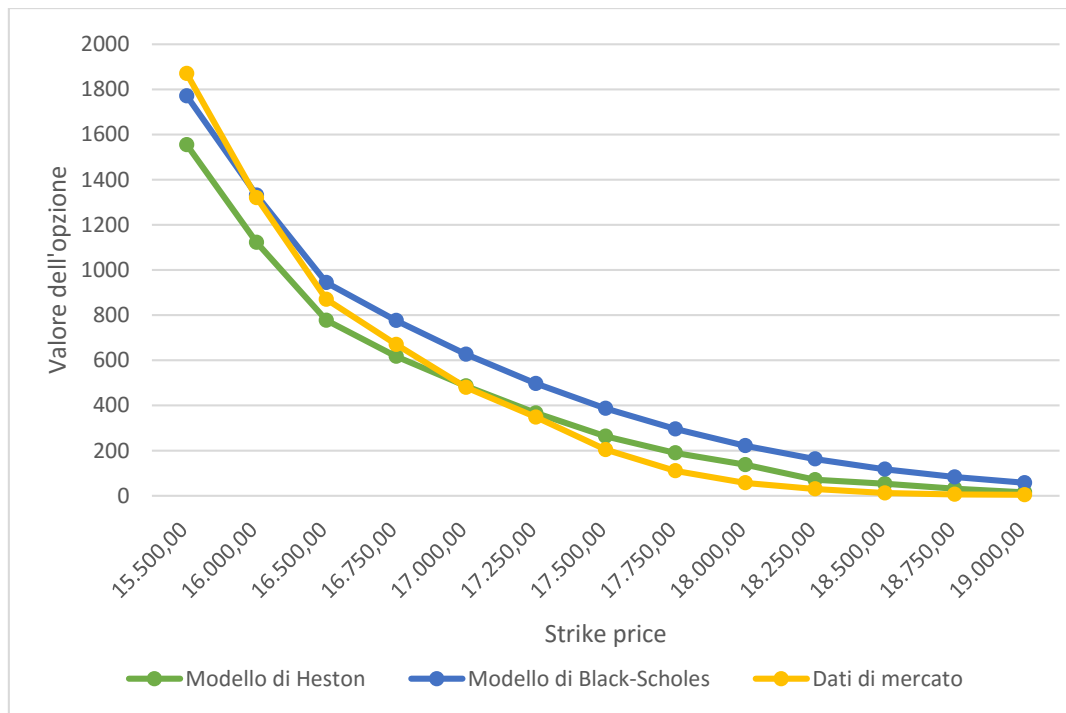
<sup>40</sup> <http://www.borsaitaliana.it/borsa/derivati/ftse-mib-options/lista.html?lang=it>

pari a 23,8% e quindi la varianza è  $V = 0,056644$ . Il tasso di rendimento risk free è considerato pari a 0,01%.

Applicando i due modelli al set di dati descritto si ottiene quanto segue:

<b>K</b>	<b>Valore di Mercato</b>	<b>Prezzo Heston</b>	<b>Prezzo BS</b>	<b>Errore Heston</b>	<b>Errore BS</b>
<b>15.500,00</b>	1.870,00	1554,826779	1770,918843	16,85%	5,30%
<b>16.000,00</b>	1.320,00	1121,850921	1331,080799	15,01%	0,84%
<b>16.500,00</b>	870,00	777,0039561	943,9601304	10,69%	8,50%
<b>16.750,00</b>	670,00	617,1205236	775,7638897	7,89%	15,79%
<b>17.000,00</b>	480,00	486,0057008	626,5265632	1,25%	30,53%
<b>17.250,00</b>	348,00	366,5482863	496,9151411	5,33%	42,79%
<b>17.500,00</b>	204,00	263,2519151	386,8279137	29,05%	89,62%
<b>17.750,00</b>	110,00	189,5588942	295,437826	72,33%	168,58%
<b>18.000,00</b>	57,00	137,549033	221,3112874	141,31%	288,27%
<b>18.250,00</b>	30,00	70,95414826	162,5768286	136,51%	441,92%
<b>18.500,00</b>	12,00	53,16326522	117,1133671	343,03%	875,94%
<b>18.750,00</b>	6,00	31,38876651	82,73003595	423,15%	1278,83%
<b>19.000,00</b>	4,00	15,17135862	57,31661925	279,28%	1332,92%

Entrambi i modelli approssimano in maniera apprezzabile i valori delle 13 call prese in esame, tuttavia i prezzi restituiti dal modello di Heston si discostano dai valori osservati sul mercato con un errore relativo mediamente inferiore all'errore ottenuto utilizzando il modello di Black-Scholes. È interessante notare come per prezzi di esercizio molto bassi rispetto al valore del sottostante entrambi i modelli sottostimino il prezzo osservato sul mercato, mentre per strike price elevati entrambi i modelli sovrastimino tale prezzo.



*Figura 14: grafico dell'andamento dei prezzi dei modelli e dei prezzi di mercato all'aumentare del prezzo di esercizio.*



## CONSIDERAZIONI FINALI

Come si è visto esiste una grande varietà di modelli atti a valutare il prezzo dei titoli di opzione ed ognuno di essi presenta dei vantaggi e dei limiti. Dalle ipotesi troppo semplicistiche del modello binomiale uniperiodale si è cercato di rendere sempre più adattabile il modello ai mercati finanziari. Si è giunti al modello di Black-Scholes, che ha rappresentato una svolta nel campo dell'*option pricing* ed è tuttora ancora il più utilizzato nella prassi del calcolo del prezzo delle opzioni da parte degli agenti. Tuttavia anche questo modello, come si è visto, non si adatta perfettamente ai dati osservati. Successivamente si è cercato di andare oltre il modello BS, arricchendolo di un altro moto browniano, quello della volatilità, dando origine ad una serie di modelli valutativi molto più complessi, i quali richiedono tempi di implementazione e calibrazione più lunghi. Tra questi il modello di Heston è quello sul piano teorico più promettente.

Tuttavia a questo punto sorge un trade-off tra la semplicità di applicazione e l'aderenza alla realtà, infatti riuscire a valutare il prezzo di un'opzione con perfezione quasi assoluta, ma in tempi non concorrenziali, non rappresenterebbe, per gli agenti che operano sul mercato, un vantaggio competitivo.

Dall'analisi svolta su Excel, il modello di Heston pare essere maggiormente predittivo del modello di BS, anche se è necessario puntualizzare che le ipotesi adottate riguardo i parametri dei due modelli sono puramente teoriche e non è stata svolta alcuna analisi statistica per determinarli. Tali analisi statistiche preliminari avrebbero comportato un ulteriore dispendio di tempo, contro la velocità e facile applicazione del modello di Black-Scholes. Inoltre è interessante notare come il modello di Heston vada quasi costantemente ricalibrato, per riadattarsi ai nuovi dati, comportando sempre un lavoro maggiore rispetto a BS.

Motivi per il quale, sul piano pratico, il modello di BS rimane il migliore da applicare ai mercati finanziari.

Sul piano teorico invece, il modello di Heston rappresenta una più che valida alternativa a Black-Scholes, anche se, come fa notare E. Castagnoli:

«La mia malignità mi fa prevedere che anche questi modelli si riveleranno inadeguati e qualche sorridente burlone tenterà di superare i problemi ipotizzando che  $dt$  sia stocastico e non deterministico.»<sup>41</sup>

Egli sottolinea come la tendenza a creare modelli sempre più complessi cercando di adattarli perfettamente alla realtà non sia sempre necessaria.

Infine, in determinate situazioni in cui ci si trova a dover fare una analisi più completa, è consigliabile comunque utilizzare modelli diversi per valutare le opzioni, poiché ogni modello di basa su diverse ipotesi e in tal modo si può comprendere in maniera migliore da cosa sia effettivamente influenzato il prezzo ottenuto.

---

<sup>41</sup> E. Castagnoli, *Abbecedario di Matematica Finanziaria - Versione lunga*, Edizioni Cakuntala, 2015, pp. 132-133

## BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

- E. Castagnoli, *Abbecedario di Matematica Finanziaria - Versione lunga*, Edizioni Cakuntala, 2015.
- J. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*, Pearson Education, 2000-2009.
- J. C. Cox, S. A. Ross, M. Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach*, Journal of Financial Economics, vol. 7, 1979.
- Black, F. e Scholes, M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 81, 1973.
- R. Merton, *The Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science 4, 1973.
- S. L. Heston, *A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, The Review of Financial Studies, 1993.
- A. Savine, *A theory of volatility*, Fixed Income Derivatives Research - BNP Paribas, 2002.
- N. Moodley, *The Heston Model: A Practical Approach*, University of the Witwatersrand, Johannesburg, 2005.
- J. Abate, W. Whitt, *The Fourier-Series Method for Inverting Transforms of Probability Distributions*, Queueing Systems, Volume 10, 1992.
- A. Ramponi, *MF1 – metodi matematici per i mercati finanziari*, Università degli studi Roma Tre, AA. 2005/2006.
- R. M. Mininni, *Valutazione delle opzioni col modello di Black e Scholes*, Università di Bari Aldo Moro, AA. 2015/2016.
- G. Maienza, *Option Pricing con il modello di Heston*, Politecnico di Milano, Milano, 2007.
- V. Matteucci, *Il problema della calibrazione nel modello a volatilità stocastica di Heston*, Università degli studi Roma Tre, 2012.

- D. Lo Buglio, *La trasformata veloce di Fourier (FFT): analisi e implementazione in C++*, Alma Mater Studiorum, Università di Bologna, 2015.
- A. Ngjela, *Calibrazione di modelli a volatilità stocastica su architettura parallela*, Politecnico di Milano, 2011.
- P. Carr e D.B. Madan, *Option evaluation the using fast fourier transform*, Journal of Computational Finance, 1999.
- <http://www.borsaitaliana.it/>
- <http://www.goddardconsulting.ca/>
- <http://www.investopedia.com/>
- <http://www.treccani.it/>
- <http://www.ucl.ac.uk/math>
- <https://it.wikipedia.org/>