

大跨度桥梁随机风场的模拟

曹映泓 项海帆 周颖

(同济大学)

(西南交通大学)

【提要】 本文针对用于大跨度桥梁抖振时域分析的随机风场和 Davenport 相干函数的特点,对模拟多变量平稳随机过程的谐波合成法进行了改进。文中直接导出了互谱密度矩阵 $S(\omega)$ 的 Cholesky 分解的显式表达式;在不失精度的前提下,适当减少了部分余弦项;同时在模拟中运用了 FFT 技术,从而简化了计算过程,提高了计算速度。文章最后利用改进后的方法模拟了跨度为 1000m 的一座悬索桥的主梁随机风场,验证了方法的有效性。

【关键词】 风场 随机过程 模拟 相干函数

一、引言

随着我国桥梁工程的建设不断向大跨度方向发展,大气风对桥梁的作用越来越显著,对桥梁结构进行风效应分析也逐渐成为桥梁结构分析中的重要一环。由于时域分析方法可以直接计算频域分析中难以处理的非线性响应,因而对大跨度桥梁的风载作用下的抖振行为进行非线性时域分析日益受到人们的关注。在时域分析中首先要解决的问题就是模拟桥梁上的随机风场或抖振力场。

大跨度桥梁主梁上的风速不仅包含了在 x , y , z 三个方向上的脉动,而且还沿着主梁长度方向变化。若将风场近似看作沿主梁长度方向上若干点处的随机风波的总和,则该随机风场可以看作是一个多维多变量的平稳高斯随机过程。若不考虑 x , y , z 三个方向的风速之间的互相关性,则该随机风场又可以处理为三个独立的一维多变量随机过程。

模拟随机过程的一类方法是基于三角级数叠加的谐波合成法。在 70 年代以前就已有许多模拟单一随机过程的谐波合成法产生,但直到 1972 年,才有可以考虑多维、多变量及非平稳随机过程的方法问世(Shinozuka and Jan 1972)。之后, Yang (1973) 将 FFT 技术应用到了模拟算法中。Shinozuka (1974) 又将 FFT 技术扩展到多维情况。Deodatis 和 Shinozuka (1989) 进一步将该方法扩展用于模拟多个随机波。Yamazaki 和 Shinozuka (1988) 提出了一个迭代的方法来模拟非高斯随机场^[3]。George Deodatis (1996) 运用 Shinozuka 的方法模拟了高层建筑的随机风场^[2]。

Inure Kovacs (1992) 提出了一个简化的谐波合成方法来模拟了大跨度桥梁的随机风场,但他未对其方法进行证明和有关检验^[4]。同济大学的刘春华 (1994) 运用该方法模拟了广东虎门大桥的随机风场,获得了一定的效果^[5]。但他模拟的风场的谱密度与目标谱有较大误差,并且未进行相关性检验。

针对以上情况,本文作者直接从 Shinozuka 的理论出发,针对大跨度桥梁的特点,对其模拟算法进行了改进。文中直接推导了对风速谱密度矩阵进行 Cholesky 分解的显式表达式;合理地减少了一些对结果影响极小的余弦项;同时在算法中引入了快速傅立叶变换;从而大

大地提高了算法的效率。作者运用这一改进的谐波合成法模拟了一座大跨度桥梁的随机风场,并进行了谱和相关性检验,从而证实了该方法的有效性。

二、一维多变量随机过程的模拟

考虑一个一维, n 变量, 零均值的高斯随机过程 $\{f(t)\}$ 。它包含 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\dots, f_n(t)$ n 个变量。其互谱密度矩阵为:

$$S^0(\omega) = \begin{bmatrix} S_{11}^0(\omega) & S_{12}^0(\omega) & \cdots & S_{1n}^0(\omega) \\ S_{21}^0(\omega) & S_{22}^0(\omega) & \cdots & S_{2n}^0(\omega) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n1}^0(\omega) & S_{n2}^0(\omega) & \cdots & S_{nn}^0(\omega) \end{bmatrix} \quad (1)$$

根据 Shinozuka 的理论, 随机过程 $\{f(t)\}$ 的样本可以由下式来模拟^[1]:

$$f_j(t) = \sqrt{2(\Delta\omega)} \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^N |H_{jm}(\omega_{ml})| \cos(\omega_{ml}t - \theta_{jm}(\omega_{ml}) + \Phi_{ml}), j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

式中各变量意义如下:

N 为一充分大的正整数,

$\Delta\omega = \frac{\omega_{up}}{N}$, 为频率增量,

ω_{up} 为截止圆频率, 即当 $\omega > \omega_{up}$ 时, $S^0(\omega) = 0$,

Φ_{ml} 为均匀分布于 $(0, 2\pi)$ 区间的随机相位,

$H_{jm}(\omega_{ml})$ 是矩阵 $H(\omega)$ 中的元素。 $H(\omega)$ 是 $S^0(\omega)$ 的 Cholesky 分解, 即:

$$S^0(\omega) = H(\omega)H^{T*}(\omega) \quad (3)$$

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & 0 & \cdots & 0 \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{n1}(\omega) & H_{n2}(\omega) & \cdots & H_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (4)$$

由于 $S^0(\omega)$ 通常情况下为一复数矩阵, 且不一定正定, 因此 $H(\omega)$ 通常也是复矩阵, 其对角元素为实数, 非对角元素为复数。 $H^{T*}(\omega)$ 是其共轭转置矩阵。 $H(\omega)$ 中的元素之间有如下关系成立:

$$H_{jj}(\omega) = H_{jj}(-\omega), j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$H_{jm}(\omega) = |H_{jm}^*(-\omega)| e^{i\theta_{jm}(\omega)}, j = 1, 2, \dots, n, m = 1, 2, \dots, j-1, j > m \quad (6)$$

$\theta_{jm}(\omega)$ 为 $H_{jm}(\omega)$ 的复角, 由下式给出:

$$\theta_{jm}(\omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}[H_{jm}(\omega)]}{\text{Re}[H_{jm}(\omega)]} \right\} \quad (7)$$

Im 和 Re 分别表示取虚部和实部。

根据 Shinozuka 等人的研究, 为增大模拟样本的周期, ω_{ml} 可按如下取值^[2]:

$$\omega_{ml} = (l-1)\Delta\omega + \frac{m}{n}\Delta\omega, l = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

可以证明, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 式 (2) 模拟的随机过程满足式 (1) 的目标谱^[1,2]。
为避免式 (2) 的模拟结果失真, t 的增量 Δt 须满足以下条件:

$$\Delta t \leq \frac{2\pi}{2\omega_{up}} \quad (9)$$

式 (2) 模拟的随机过程的周期为:

$$T_0 = \frac{2\pi n}{\Delta\omega} = \frac{2\pi nN}{\omega_{up}} \quad (10)$$

由以上可知, 只要已知了 $S^0(\omega)$, 恰当地选择了 N , ω_{up} 和 Δt , 就可以获得好的随机过程的样本。

三、 $H(\omega)$ 的计算

要对 $S^0(\omega)$ 这样的复数矩阵进行 Cholesky 分解是比较繁琐的, 通常要借助于递推公式来计算。由于 $H(\omega)$ 是 ω 的函数, 由式 (2) 可知对每个频率 ω_{ml} 进行一次余弦项叠加时, 都要进行一次 $H(\omega)$ 的 Cholesky 分解, 其计算量是可观的。但对于本文研究的大跨度桥梁, 该计算可以大大简化。

在工程实际中, 空间不同点之间的互谱密度通常用实数函数来表达^[6], 因此式 (1) 可以简化为实数矩阵。假设我们要模拟桥主梁上若干点的水平风速, 则可以将它们看作是一个一维多变量的高斯随机过程。一般情况下 (即地形起伏不大, 离地一定高度), 我们可以近似认为水平风谱沿水平方向是不变的^[6]。因此主梁上各点的水平风谱是相同的, 即有下式成立:

$$S_{11}^0(\omega) = S_{22}^0(\omega) = \cdots = S_{nn}^0(\omega) = S(\omega) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} S_{jm}^0(\omega) &= \sqrt{S_{jj}^0(\omega)S_{mm}^0(\omega)}\text{Coh}(\Delta_{jm}, \omega) \\ &= S(\omega)\text{Coh}(\Delta_{jm}, \omega) \quad j, m = 1, 2, \cdots, n, j \neq m \end{aligned} \quad (12)$$

式中 Δ_{jm} 为 j 点和 m 点之间的水平距离, $\text{Coh}(\Delta_{jm}, \omega)$ 为相干函数。

考虑桥面上等间距分布的 n 个点, 间距为 Δ , 则有 $\Delta_{jm} = \Delta |j - m|$ 。根据 Davenport 的研究可得^[6]:

$$\begin{aligned} \text{Coh}(\Delta_{jm}, \omega) &= \exp\left(-\frac{\lambda\omega\Delta_{jm}}{2\pi U(z)}\right) = \exp\left(-\frac{\lambda\omega\Delta |j - m|}{2\pi U(z)}\right) \\ &= \left(\exp\left(-\frac{\lambda\omega\Delta}{2\pi U(z)}\right)\right)^{|j - m|} = C^{|j - m|} \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $\lambda = 7 \sim 10$, $U(z)$ 为桥面处的平均风速, C 是 ω 的函数。

$$C = \exp\left(-\frac{\lambda\omega\Delta}{2\pi U(z)}\right) \quad (14)$$

将式 (11) ~ (14) 代入式 (1) 中可得:

$$S^0(\omega) = S(\omega) \begin{bmatrix} 1 & C & C^2 & \cdots & C^{n-1} \\ C & 1 & C & \cdots & C^{n-2} \\ C^2 & C & 1 & \cdots & C^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C^{n-1} & C^{n-2} & C^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式 (15) 的 Cholesky 分解 $H(\omega)$ 可以显式地写为。

$$H(\omega) = \sqrt{S(\omega)} G(\omega) \quad (16)$$

其中,

$$G(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ C & \sqrt{1-C^2} & & & & \\ C^2 & C\sqrt{1-C^2} & \sqrt{1-C^2} & & & \\ C^3 & C^2\sqrt{1-C^2} & C\sqrt{1-C^2} & \sqrt{1-C^2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ C^{n-1} & C^{n-2}\sqrt{1-C^2} & C^{n-3}\sqrt{1-C^2} & C^{n-4}\sqrt{1-C^2} & \dots & \sqrt{1-C^2} \end{bmatrix} \quad (17.1)$$

写成解析式则为:

$$G_{jm}(\omega) = \begin{cases} 0 & 1 \leq j < m \leq n \\ C^{|j-m|} & m = 1, m \leq j \leq n \\ C^{|j-m|} \sqrt{(1-C^2)} & 2 \leq m \leq j \leq n \end{cases} \quad (17.2)$$

由于 $0 < C < 1$, 故 $H(\omega)$ 为实矩阵, 因此有

$$H^{T*}(\omega) = H^T(\omega) \quad (18)$$

$$\theta_{jm}(\omega) = 0 \quad (19)$$

式 (17) 可以很容易地用数学归纳法给出证明, 兹不赘述。

四、减少余弦项数

在实际情况下, 当空间两点间的距离超过一定值 (如 300m) 时, 两间风速在较高频率上几乎没有什么相关性, 因而在模拟计算中可以不必考虑远距离, 高频率的影响。从式 (17) 也可以看出, $G_{jm}(\omega)$ 值随 ω 和 Δ 的增大而迅速减小。由于 $S_{jm}(\omega) = \sqrt{S(\omega)} \sum_{k=1}^m G_{jk}(\omega) G_{km}^T(\omega)$, 因此当 $G_{jk}(\omega)$ 小到一定程度时, $G_{jk}(\omega)$ 对 $S_{jm}(\omega)$ 的贡献就可以忽略不计。例如, 若 $G_{jk}(\omega) < 10^{-3}$, 则 $G_{jk}(\omega)$ 对 $S_{jm}(\omega)$ 的贡献只在 $10^{-6} \sim 10^{-3}$ 的数量级。因此本文作者认为, 当在某 Δ 和 ω_c 情况下 $G_{jk}(\omega) < 10^{-3}$ 或更小时, 式 (2) 中 $\omega > \omega_c$ 的余弦项可以舍去, 从而达到减小计算量, 提高计算速度的效果。本文作者在模拟桥梁风场中运用了这一结论, 发现总共需计算的余弦项减少到原来的 1/4 左右。同时对模拟风场的功率谱密度几乎没有什么影响 (见后文算例)。

五、FFT 技术的应用

运用 FFT 技术可以大大地减少风场模拟的计算量, 进一步提高计算效率。为此, 我们可以将式 (2) 改写为如下形式^[2]:

$$f_j(p\Delta t) = \text{Re} \left\{ \sum_{m=1}^j h_{jm}(q\Delta t) \exp \left[i \left(\frac{m\Delta\omega}{3} \right) (p\Delta t) \right] \right\} \quad (20)$$

$$p = 0, 1, \dots, 2N \times n - 1, j = 1, 2, \dots, n$$

其中, q 是 $p/(2N)$ 的余数, $q = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 。

$h_{jm}(q\Delta t)$ 由下式给出:

$$h_{jm}(q\Delta t) = \sum_{l=0}^{2N-1} B_{jm}(l\Delta\omega) \exp\left(i \frac{\pi l q}{N}\right) \quad (21)$$

其中,

$$B_{jm}(l\Delta\omega) = \begin{cases} \sqrt{2(\Delta\omega)} H_{jm}\left(l\Delta\omega + \frac{m\Delta\omega}{n}\right) \exp(i\phi_{ml}) & 0 \leq l < N \\ 0 & N \leq l < 2N \end{cases} \quad (22)$$

观察式 (21) 可知, $h_{jm}(q\Delta t)$ 即是 $B_{jm}(l\Delta\omega)$ 的 Fourier 变换, 因此可以用 FFT 来计算。

六、大跨度桥梁随机风场的模拟

本文作者运用以上方法, 针对一座跨度为 1000m 的悬索桥, 模拟了桥面上沿跨度方向分布, 间距为 100m 的 10 个点的水平脉动风速。所编制的模拟程序在主频为 133MHz 的微机运行仅用了 12 秒钟。模拟计算的主要参数和结果如下: 跨度: $L = 1000\text{m}$; 主梁离地高度: $z = 50.0\text{m}$; 地面粗糙度: $z_0 = 0.03\text{m}$; 主梁处平均风速: $U(z) = 40.0\text{m/s}$; 模拟点数: $n = 10$; 模拟点间距: $\Delta = 100.0\text{m}$; 截止频率: $\omega_{up} = 2\pi \text{ rad/s}$; 频率等分数: $N = 256$; 模拟采样时距: $dt = 0.5\text{s}$; 目标谱: Kaimal 谱, Kaimal 水平脉动风速谱的计算公式为^[6]:

$$\frac{nS_u(n)}{U_*^2} = \frac{200f}{(1 + 50f)^{5/3}} \quad (23)$$

其中

$$f = \frac{nz}{U(z)}, \quad U_* = \frac{KU(z)}{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)}, \quad K = 0.4$$

经简化得:

$$S(\omega) = \frac{1163}{(1 + 9.95\omega)^{5/3}} \text{m}^2/\text{s}$$

Davenport 相干函数:

$$\text{Coh}(\Delta, \omega) = \exp\left(-\frac{\lambda\omega\Delta}{2\pi U(z)}\right) = \exp(-3.98\omega) \quad (\lambda = 10) \quad (24)$$

以下是模拟得到的第 1, 2, 9 点的风速时程的片段及其相关函数。

由图 1 和图 2 可以看出, 点 1, 2 之间距离较近, 相关性较强, 而点 2, 9 之间距离较远, 所以相关性较弱, 并且该三点之间的模拟相关函数与理论值也很接近。

本文作者用最大熵法估计了模拟风速的功率谱密度。结果见图 3。

由图 3 可以看出, 在线性坐标图中, 模拟谱和 Kaimal 谱几乎完全重合。而只有在将低频部分拉长了的对数坐标图中才能看出二者的区别。由此可知, 模拟谱和 Kaimal 谱只在非常低的几个频率点上有差别, 绝大部分是完全一致的。并且, 1~10 点的模拟谱之间也非常接近。由于低频风速对大桥的振动影响很小, 因此以上模拟结果是完全符合要求的。

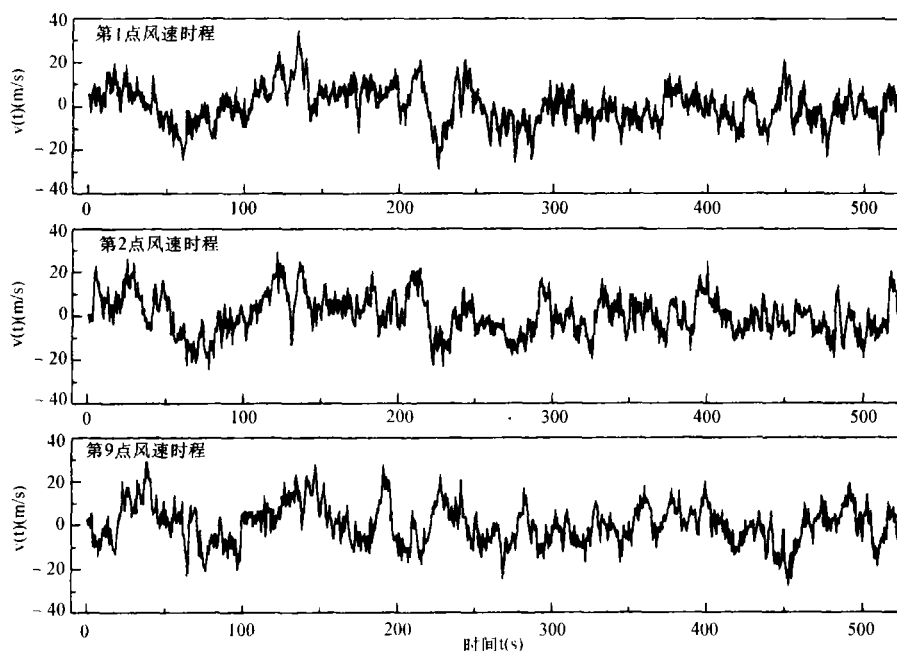


图1 模拟的风速时程

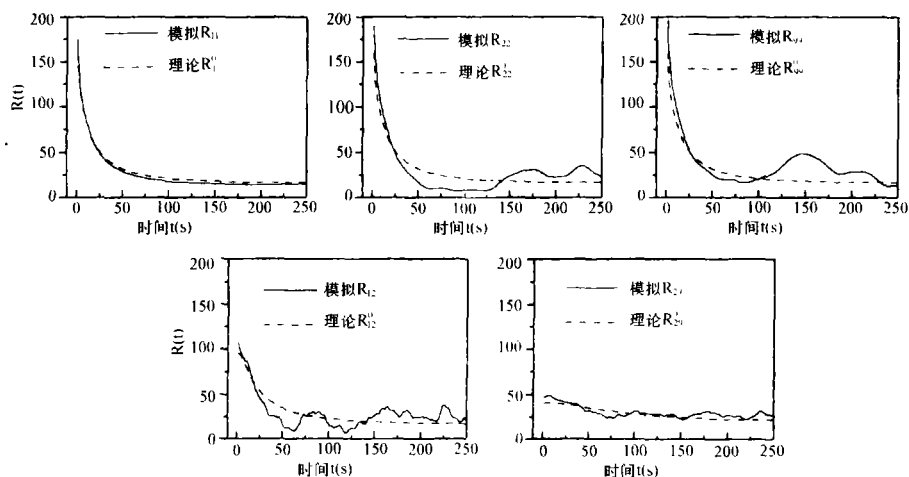


图2 模拟风场的相关函数

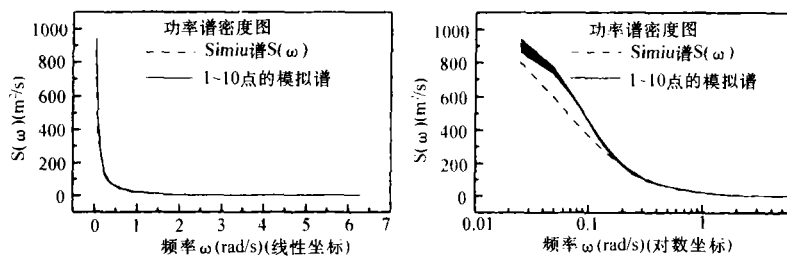


图3 模拟风速的功率谱

七、结 论

快速有效地模拟风速时程是对桥梁进行时程响应分析的必要条件。本文介绍的方法与其它谐波合成法相比有如下三个特点: 1. 直接导出了互谱密度矩阵的 Cholesky 分解的显式表达式; 2. 适当舍去了一些对结果影响极小的余弦项; 3. 运用了 FFT 技术。因此该方法不仅精度高, 而且速度快, 容易实现。

作者还运用上述算法模拟了桥面上的竖向脉动风速时程样本(选用 Panofsky-McCormick 谱公式), 通过谱值及相关性检验也发现模拟结果与目标谱符合得很好。限于文章篇幅, 该部分在此从略。

对于跨越海湾或河谷的桥梁, 若桥梁两岸有山坡或岛屿, 则它们可能干扰桥面上的风速, 使桥梁上的脉动风速谱沿桥长方向发生变化。这时就需要修正常用的风速谱经验公式, 而不能直接用本文的简化算法模拟桥面的风速。如何在这种情况下模拟桥面风速, 还有待于进一步研究。

参 考 文 献

- [1] M. Shinozuka and C. M. Jan: Digital Simulation of Random Processes and Its Applications, Journal of Sound and Vibration, Vol. 25 (1), 111—128, 1972.
- [2] George Deodatis: Simulation of Ergodic Multivariate Stochastic Processes, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 122, No. 8, August, 1996.
- [3] H. J. Niemann and R. Hoffer: Nonlinear Effects in the Buffeting Program, A State of the Art in Wind Engineering. Ninth International Conference on Wind Engineering, New delhi, January, 1995.
- [4] Imre Kovacs, et al.: Analytical Aerodynamic Investigation of Cable-Stayed Helgeland Bridge, Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 1, January, 1992.
- [5] 刘春华: 多个互相关随机过程的计算机模拟及其应用, 同济大学学报, 1994 年 22 卷(增) 5 月。
- [6] 埃米尔·希缪, 罗伯特·H. 斯坎伦(刘尚培, 项海帆, 谢霁明译): 《风对结构的作用》, 上海, 同济大学出版社, 1992 年。

SIMULATION OF STOCHASTIC WIND FIELD ON LONG-SPAN BRIDGE

Cao Yinghong Xiang Haifan

(Tongji University)

Zhou Ying

(Southwest Jiaotong University)

Abstract

In consideration of the characters of the stochastic wind field on long-span bridges and the Davenport's coherence function, an extended spectral representation method was proposed in this paper for simulating the stochastic wind field on long-span bridges. In this paper, an explicit expression of Cholesy's decomposition of the cross-spectral density matrix

was derived; some cosine functions were reasonably cut without sacrificing the accuracies; and the FFT technique was imposed into the algorithm. So the simulation can be easy and efficiently performed. According to this method, a stochastic wind field on the main beam of a suspended bridge with a span of 1000m was simulated so that the efficiency of the method was verified.

Key words: wind field, stochastic process, simulation, coherence function.

曹映泓 硕士, 在职博士。

项海帆 工程院院士, 教授, 学院院长。

周 颖 硕士, 在职博士。

《土木工程学报》第六届编委会名单

(1997年2月通过)

主任委员: 陈肇元 副主任委员: 范立础 张 弥

编 委 (以姓氏笔画为序):

丁金粟 王春富 牛恩宗 刘允召 刘永颐 包承纲 江欢成 朱伯芳 孙荣植
何广乾 沈世钊 吴学敏 张 弥 张 琳 张在明 林元培 陈祥福 陈肇元
范立础 杨灿文 杨林德 杨嗣信 项海帆 姚念亮 郝学礼 钱七虎 钱稼茹
秦淞君 龚洛书、龚晓南 蓝 天 蒋永生 粟 杰 程良奎 傅作新 彭宝华

主 编: 陈肇元 副主编: 孙荣植