

# Métodos Lattice Boltzmann

Johan S . Méndez



Universidad Nacional de  
Colombia  
Bogotá  
Marzo 2018



# Métodos de simulación comunes

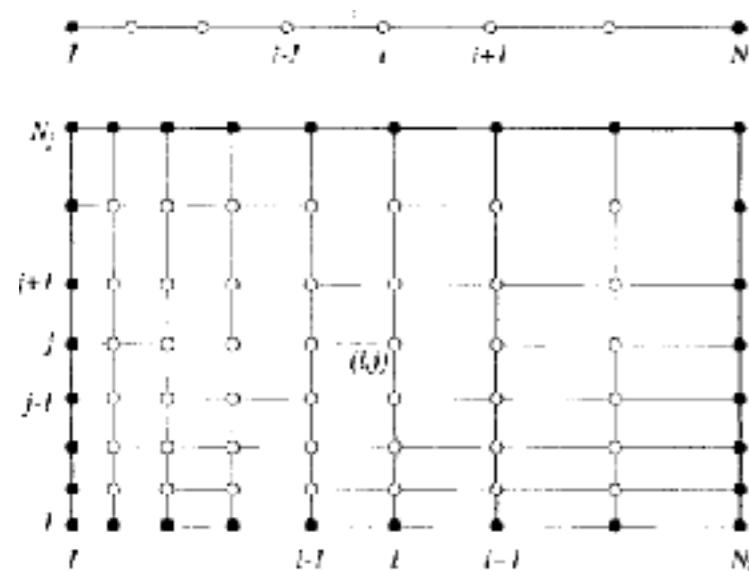
# **Diferencias finitas**

# Diferencias finitas

**Concepto : Las derivadas parciales de una ecuación diferencial se aproximan por Combinaciones lineales de funciones evaluadas en puntos de mallas**

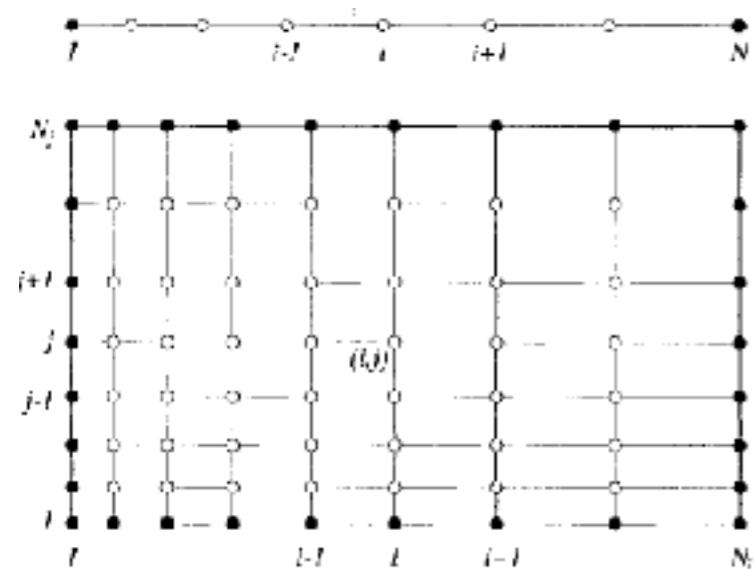
# Diferencias finitas

**Concepto : Las derivadas parciales de una ecuación diferencial se aproximan por Combinaciones lineales de funciones evaluadas en puntos de mallas**



# Diferencias finitas

**Concepto : Las derivadas parciales de una ecuación diferencial se aproximan por Combinaciones lineales de funciones evaluadas en puntos de mallas**



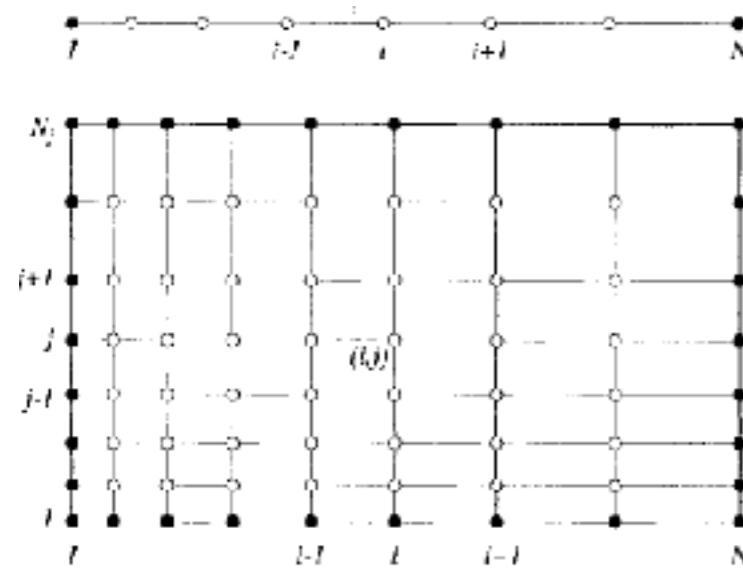
$$\Omega = (0, X)$$

$$f_i \simeq f(x_i)$$

$$i = 0, 1, \dots, N$$

# Diferencias finitas

**Concepto : Las derivadas parciales de una ecuación diferencial se aproximan por Combinaciones lineales de funciones evaluadas en puntos de mallas**



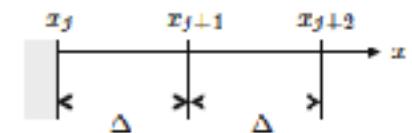
$$\Omega = (0, X)$$

$$f_i \simeq f(x_i)$$

$$i = 0, 1, \dots, N$$

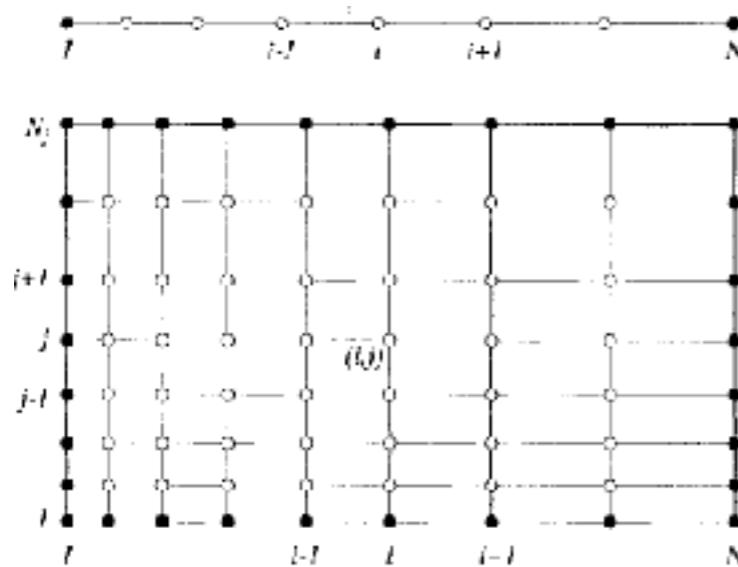
**La expansión de Taylor**

$$f_k = f_i + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_k - x_i)^m}{m!} f_j^{(m)}$$



# Diferencias finitas

**Concepto : Las derivadas parciales de una ecuación diferencial se aproximan por Combinaciones lineales de funciones evaluadas en puntos de mallas**



**Puntos de la malla**

$$x_i = i\Delta x$$

$$\Omega = (0, X)$$

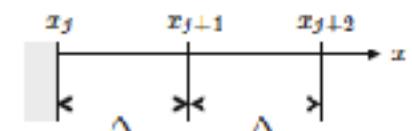
$$f_i \simeq f(x_i)$$

$$i = 0, 1, \dots, N$$

**Ancho de la malla**

**La expansión de Taylor**

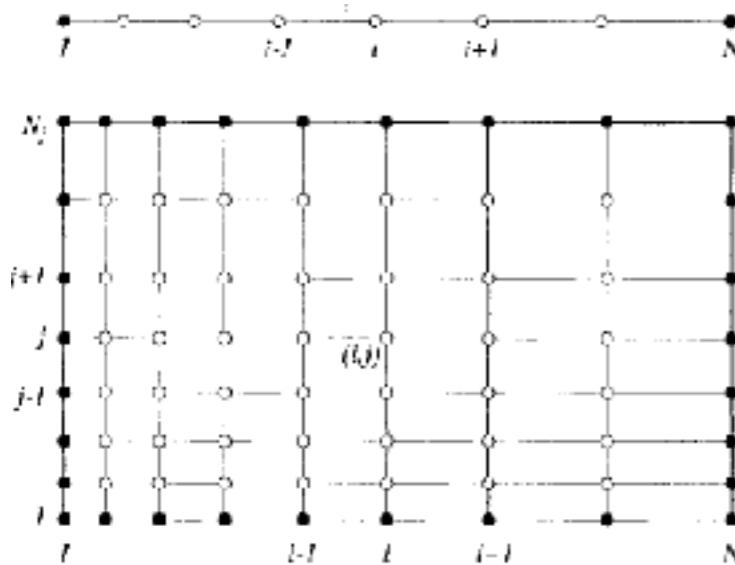
$$f_k = f_i + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_k - x_j)^m}{m!} f_j^{(m)}$$



$$\Delta x = \frac{X}{N}$$

# Diferencias finitas

**Concepto : Las derivadas parciales de una ecuación diferencial se aproximan por Combinaciones lineales de funciones evaluadas en puntos de mallas**



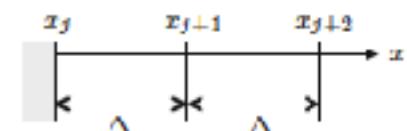
$$\Omega = (0, X)$$

**La expansión de Taylor**

$$f_i \simeq f(x_i)$$

$$f_k = f_i + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x_k - x_j)^m}{m!} f_j^{(m)}$$

$$i = 0, 1, \dots, N$$



**Puntos de la malla**

$$x_i = i\Delta x$$

**Ancho de la malla**

$$\Delta x = \frac{X}{N}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

**Definición de derivada**

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

# Diferencias finitas

**Concepto : Las derivadas parciales de una ecuación diferencial se aproximan por Combinaciones lineales de funciones evaluadas en puntos de mallas**

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$

# Diferencias finitas

**Concepto : Las derivadas parciales de una ecuación diferencial se aproximan por Combinaciones lineales de funciones evaluadas en puntos de mallas**

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \dots$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \dots$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \dots$$

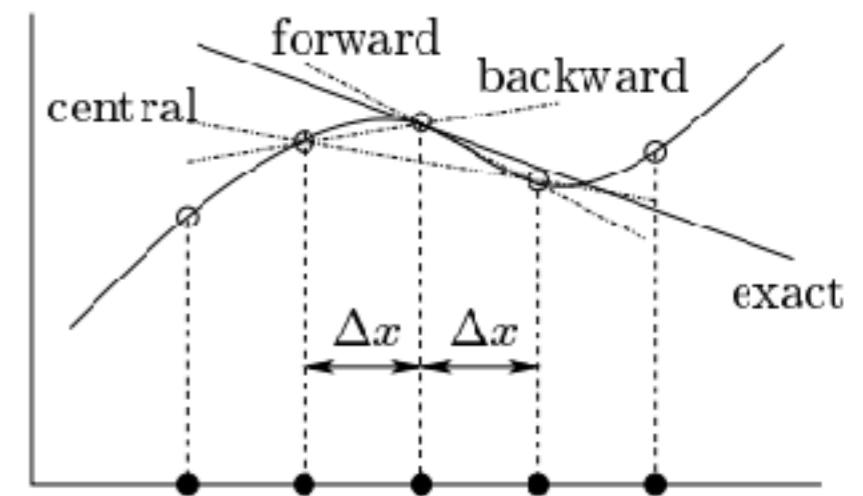
# Diferencias finitas

Concepto : Las derivadas parciales de una ecuación diferencial se aproximan por Combinaciones lineales de funciones evaluadas en puntos de mallas

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \dots$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \dots$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \dots$$



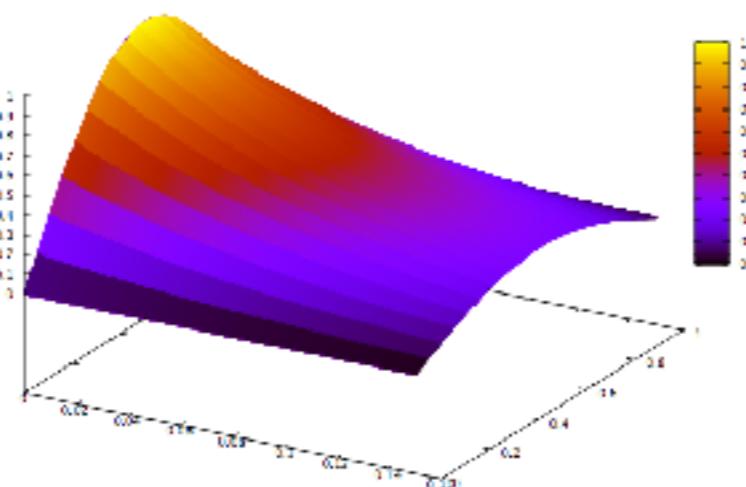
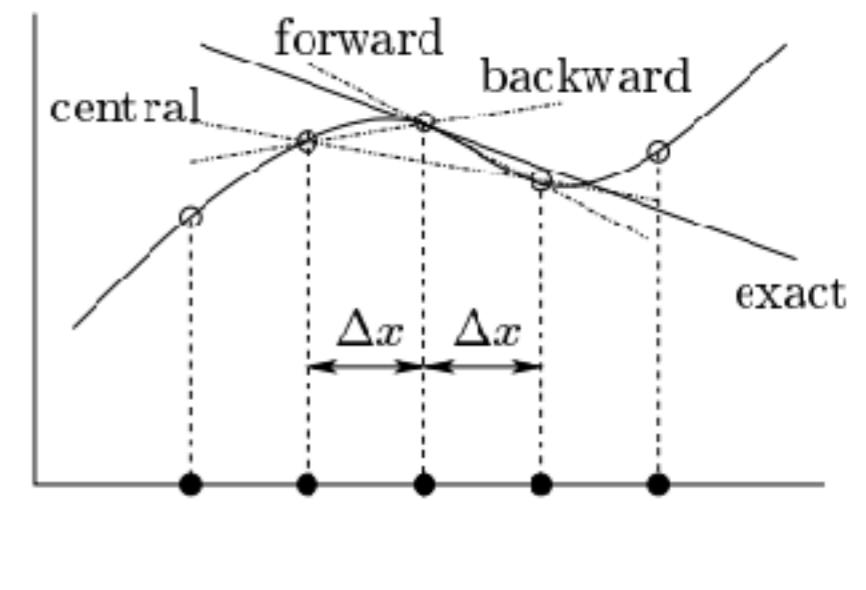
# Diferencias finitas

Concepto : Las derivadas parciales de una ecuación diferencial se aproximan por Combinaciones lineales de funciones evaluadas en puntos de mallas

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \dots$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \dots$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i + \dots$$



# Diferencias finitas

Ecuación de Ondas 1D

# Diferencias finitas

Ecuación de Ondas 1D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

# Diferencias finitas

Ecuación de Ondas 1D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(L, t) = 0$$
$$u(0, t) = 0$$

Condiciones  
de frontera

# Diferencias finitas

## Ecuación de Ondas 1D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} u(L, t) &= 0 \\ u(0, t) &= 0 \end{aligned}$$

**Condiciones  
de frontera**

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_o \\ u_t(x, 0) &= u_{to} \end{aligned}$$

**Condiciones  
iniciales**

# Diferencias finitas

Ecuación de Ondas 1D

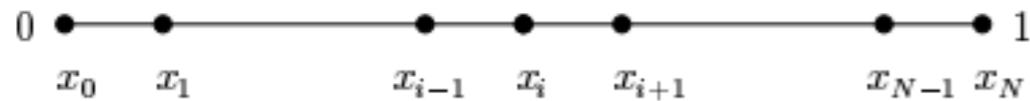
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} u(L, t) &= 0 \\ u(0, t) &= 0 \end{aligned}$$

Condiciones  
de frontera

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_o \\ u_t(x, 0) &= u_{to} \end{aligned}$$

Condiciones  
iniciales



Malla Unidimensional

# Diferencias finitas

## Ecuación de Ondas 1D

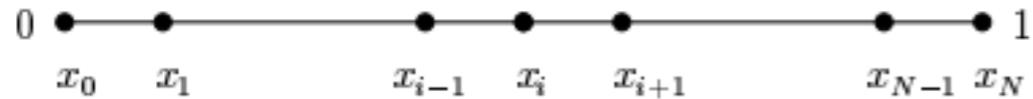
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} u(L, t) &= 0 \\ u(0, t) &= 0 \end{aligned}$$

**Condiciones  
de frontera**

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_o \\ u_t(x, 0) &= u_{to} \end{aligned}$$

**Condiciones  
iniciales**



**Malla Unidimensional**

## Ecuación discreta

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2} = c^2 \left( \frac{u_{i+1}^k - 2u_I^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} \right) \rightarrow u_i^{k+1} = 2u_i^k - u_i^k - u_i^{k-1} + \left( \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)$$

# Diferencias finitas

## Ecuación de Ondas 1D

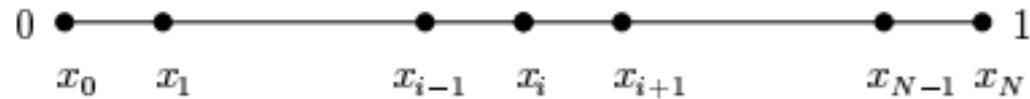
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} u(L, t) &= 0 \\ u(0, t) &= 0 \end{aligned}$$

Condiciones  
de frontera

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_o \\ u_t(x, 0) &= u_{to} \end{aligned}$$

Condiciones  
iniciales



## Malla Unidimensional

## Ecuación discreta

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2} = c^2 \left( \frac{u_{i+1}^k - 2u_I^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} \right) \rightarrow u_i^{k+1} = 2u_i^k - u_i^k - u_i^{k-1} + \left( \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)$$

$$\underbrace{u_i^{k+1}}_{\text{tiempo } k+1} = \underbrace{r^2 u_{i+1}^k + 2(1-r^2)u_i^k + r^2 u_{i-1}^k}_{\text{tiempo } k} - \underbrace{u_n^{k-1}}_{\text{tiempo } k-1}$$

$$r = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

Numero de Courant  
(Estabilidad del sistema)

# **Volúmenes finitos**

# Volumenes finitos

**Este método está basado en cálculos de integrales de las ecuaciones de sistema**

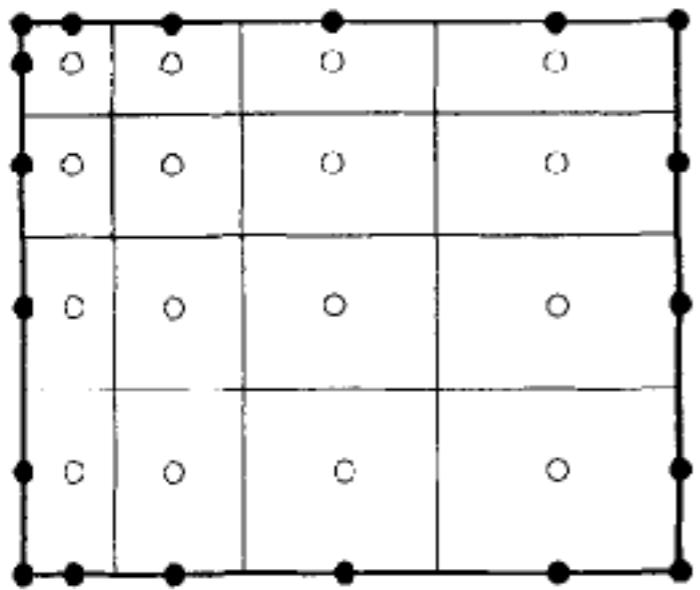
**La conservación de las cantidades se tiene a través de volúmenes de control**

$d\Omega \rightarrow \Delta\Omega$  **Malla computacional**

**Considera ecuación de conservación**

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot F(u) = 0, \text{ en } \Omega$$

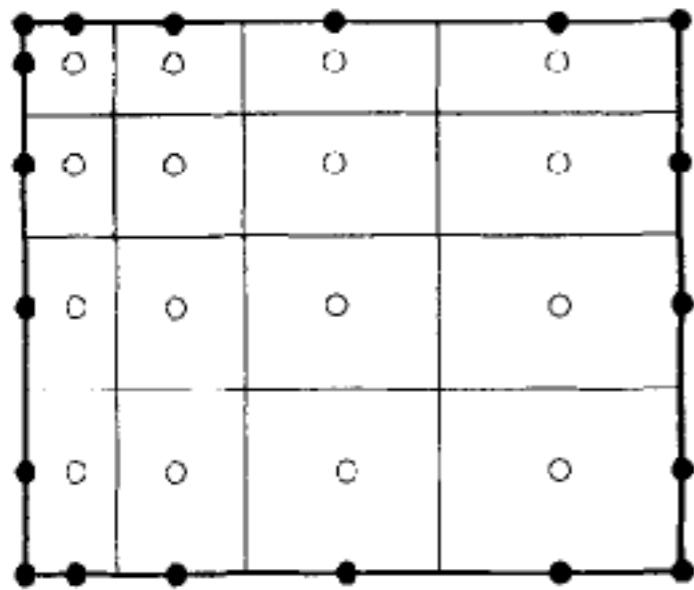
# Volumenes finitos



Usa la forma integral para evaluar en las fronteras  
del volumen de control la integral

No definimos nodos computacionales!

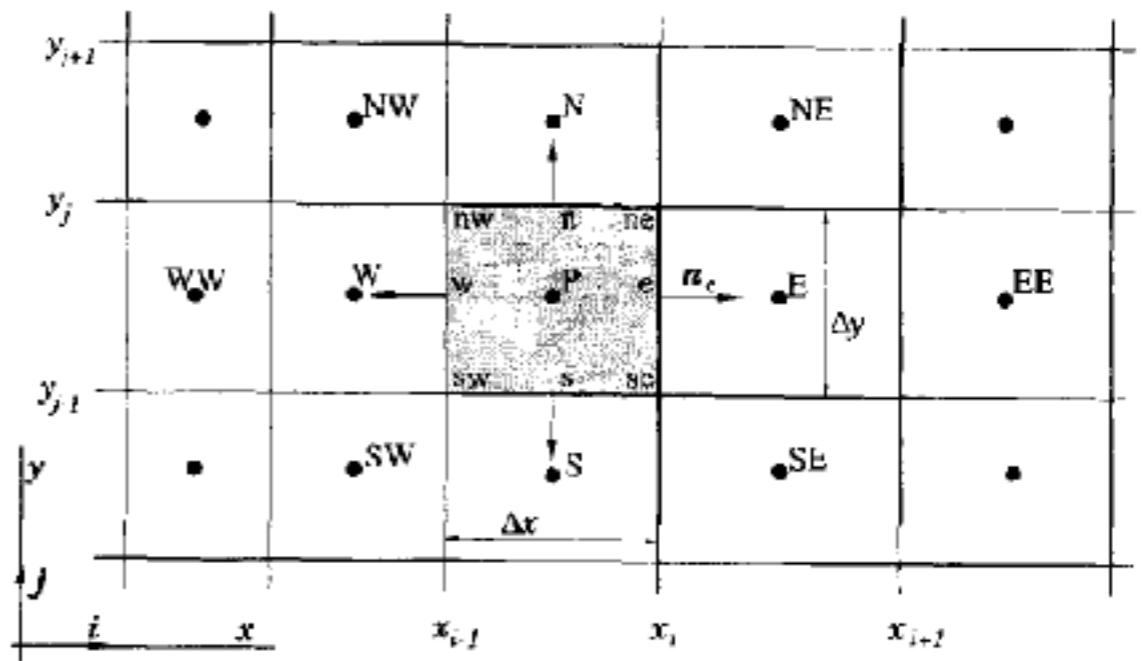
# Volumenes finitos



Usa la forma integral para evaluar en las fronteras del volumen de control la integral

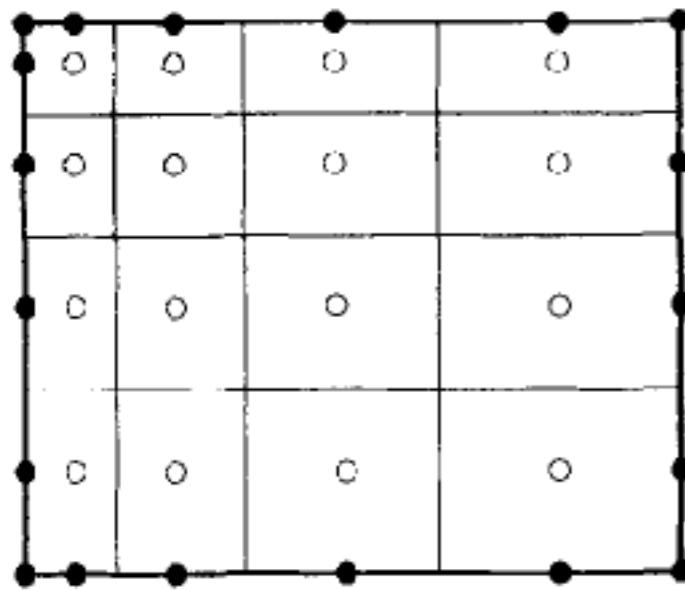
No definimos nodos computacionales!

El flujo a través de las fronteras se aproxima como



Definimos puntos en el centroide de la malla  
Y evaluamos los valores de las fronteras

# Volumenes finitos



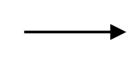
Usa la forma integral para evaluar en las fronteras del volumen de control la integral

No definimos nodos computacionales!

El flujo a través de las fronteras se aproxima como

$$u_m = \frac{1}{|K_m|} \int_{K_m} u d\Omega$$

4 fronteras

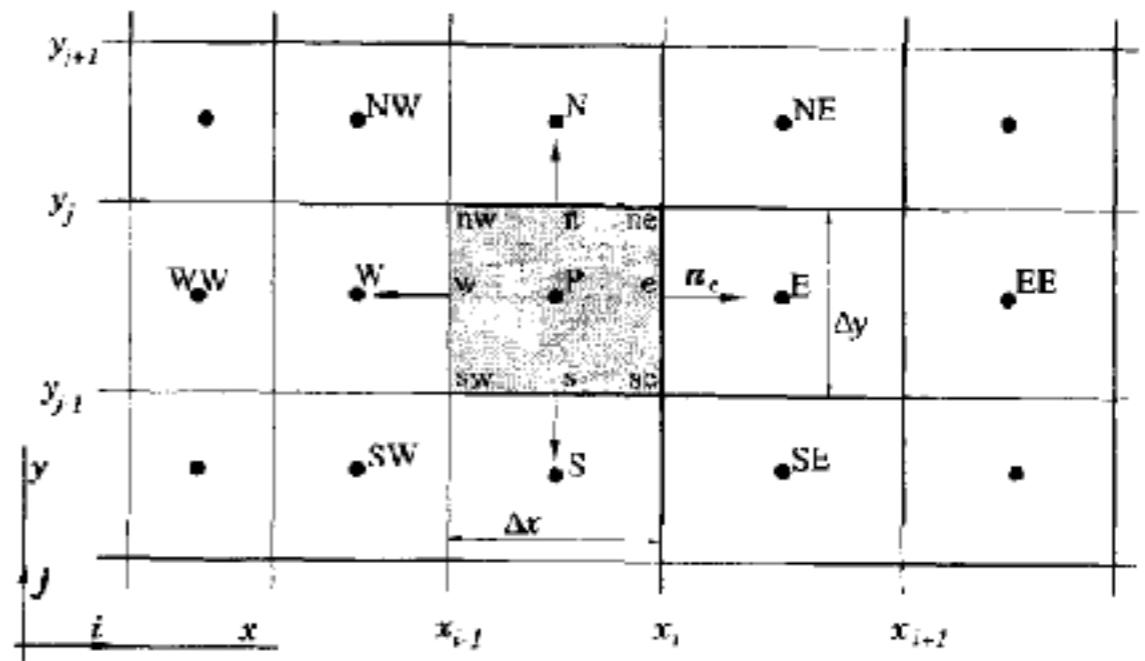


2D

6 fronteras



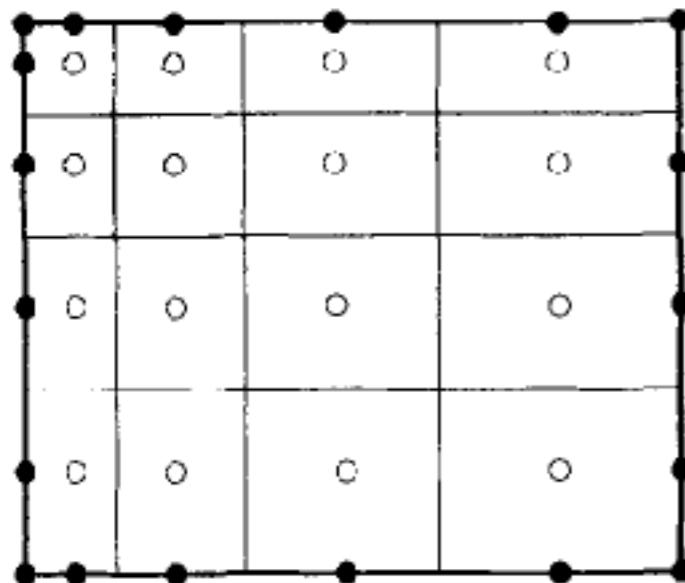
3D



Definimos puntos en el centroide de la malla  
Y evaluamos los valores de las fronteras

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot F(u) = 0, \text{ en } \Omega$$

# Volumenes finitos



Usa la forma integral para evaluar en las fronteras del volumen de control la integral

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot F(u) = 0, \text{ en } \Omega$$



$$\int_{K_m} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} d\Omega + \int_{K_m} \nabla \cdot F(\vec{u}) d\Omega = 0$$

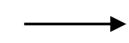


$$\downarrow$$

$$u_m = \frac{1}{|K_m|} \int_{K_m} u d\Omega$$

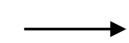
$$\frac{du_m}{dt} = -\frac{1}{|K_m|} \int_{K_m} \nabla \cdot F(\vec{u}) d\Omega$$

4 fronteras



2D

6 fronteras



3D

Necesitamos propagar la solución  $u_m$  en el tiempo

# Volumenes finitos

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot F(u) = 0, \text{ en } \Omega \quad \rightarrow \quad \int_{K_m} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} d\Omega + \int_{K_m} \nabla \cdot F(\vec{u}) d\Omega = 0$$

$$\frac{du_m}{dt} = -\frac{1}{|K_m|} \int_{K_m} \nabla \cdot F(\vec{u}) d\Omega \qquad u_m = \frac{1}{|K_m|} \int_{K_m} u d\Omega$$

Necesitamos propagar la solución  $u_m$  en el tiempo



Discretización



$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\Delta t}{|K_m|} \int_{K_m} \nabla \cdot F(\vec{u}) d\Omega$$

# Volumenes finitos

## Inestabilidad Kelvin Helmholtz

Fenómeno que ocurre cuando se tienen dos fluidos de diferentes densidades moviéndose a varias velocidades , presenta inestabilidad y ocurre una transición A un fluido turbulento

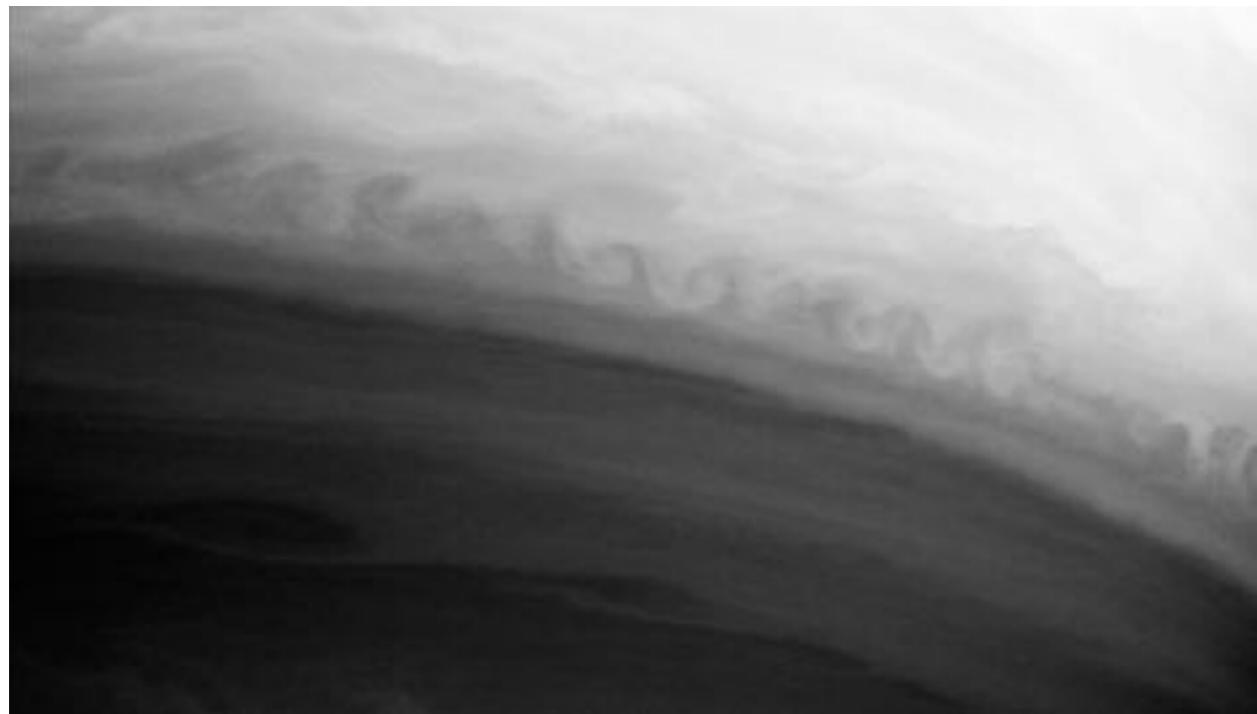
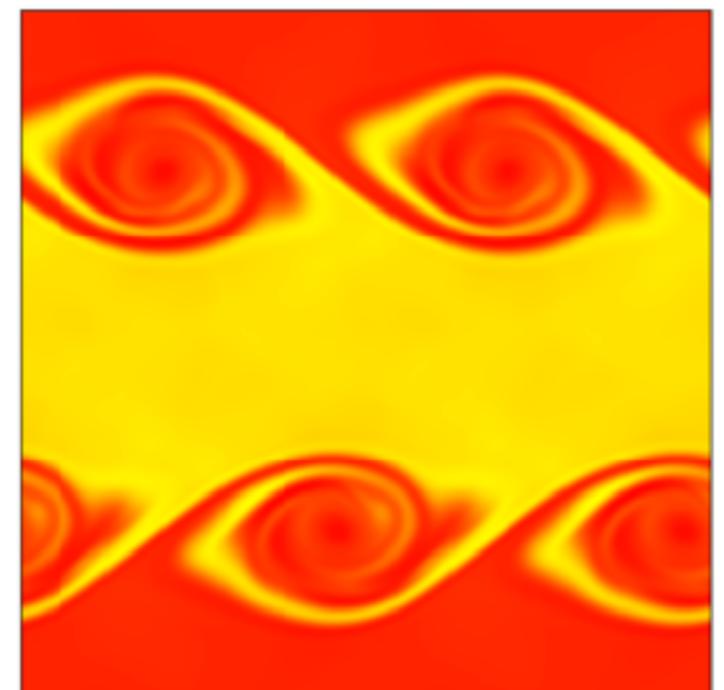


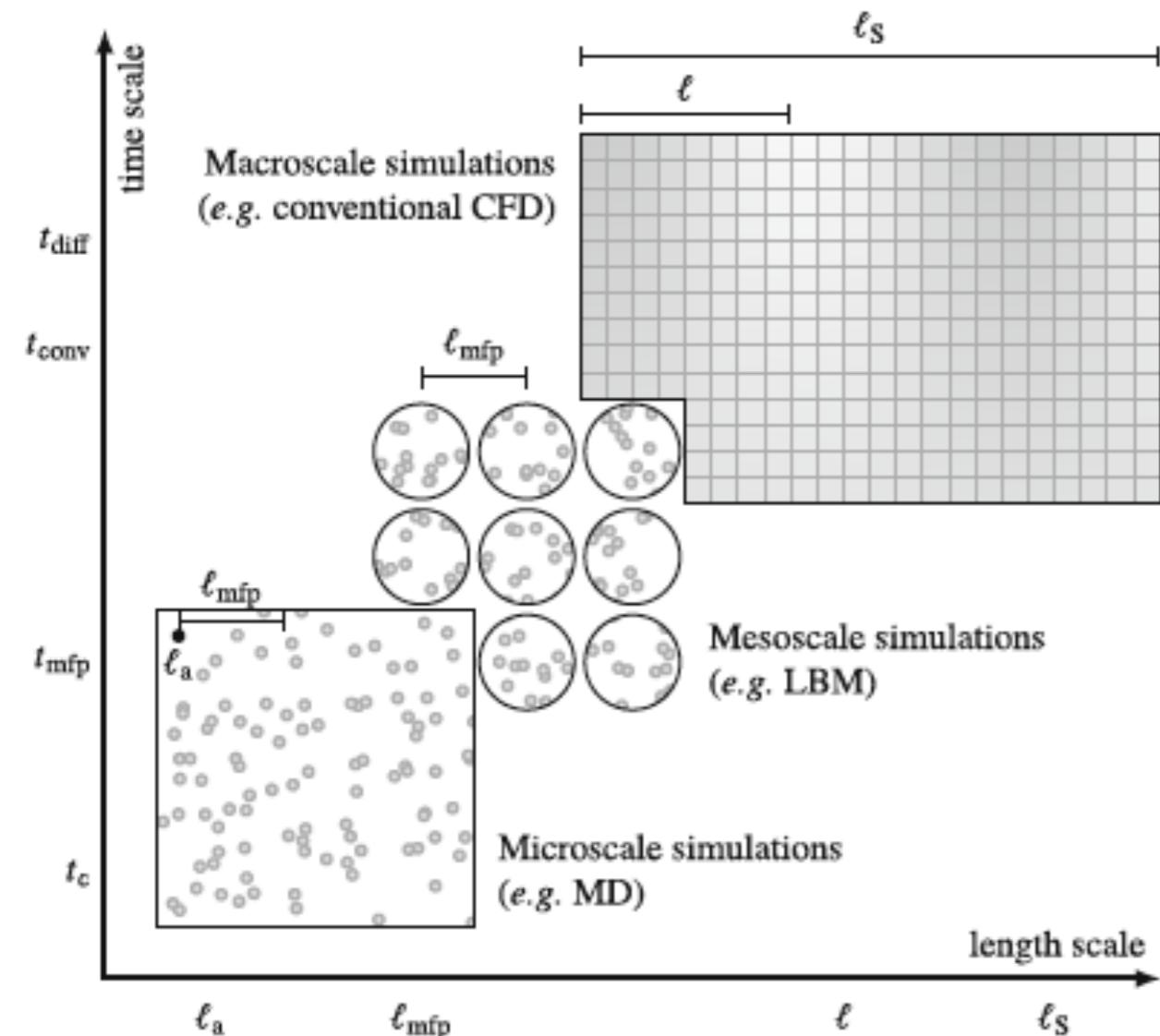
Imagen sonda Cassini (infrarojo 889 nm). Escala de la Imagen es 69 km por píxel



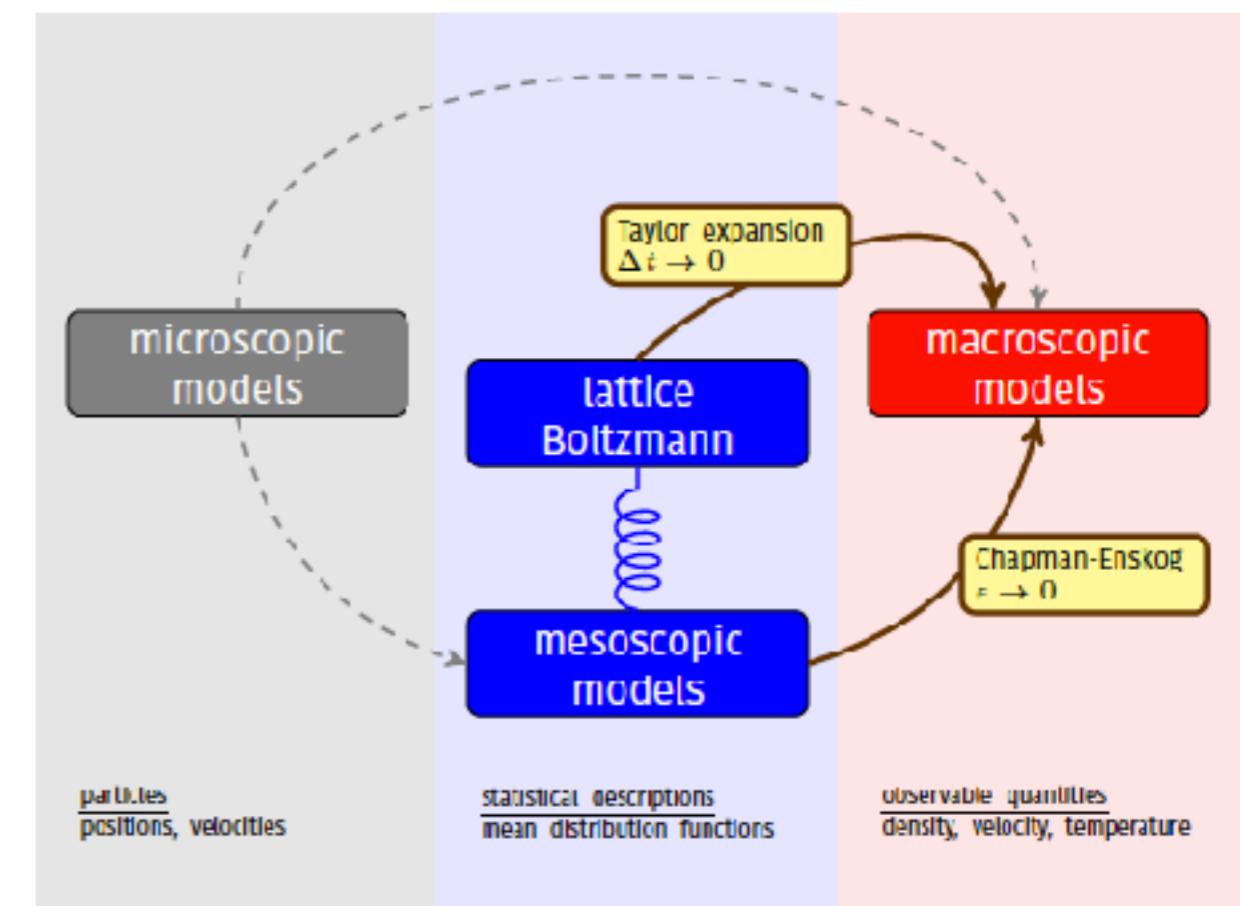
Simulación por volúmenes finitos

# Lattice Boltzmann

# Lattice Boltzmann



**Escala donde se trabaja**



# Lattice Boltzmann

**Se considera alguna malla computacional**



# Lattice Boltzmann

Se considera alguna malla computacional

En cada lugar se consideran velocidades discretas

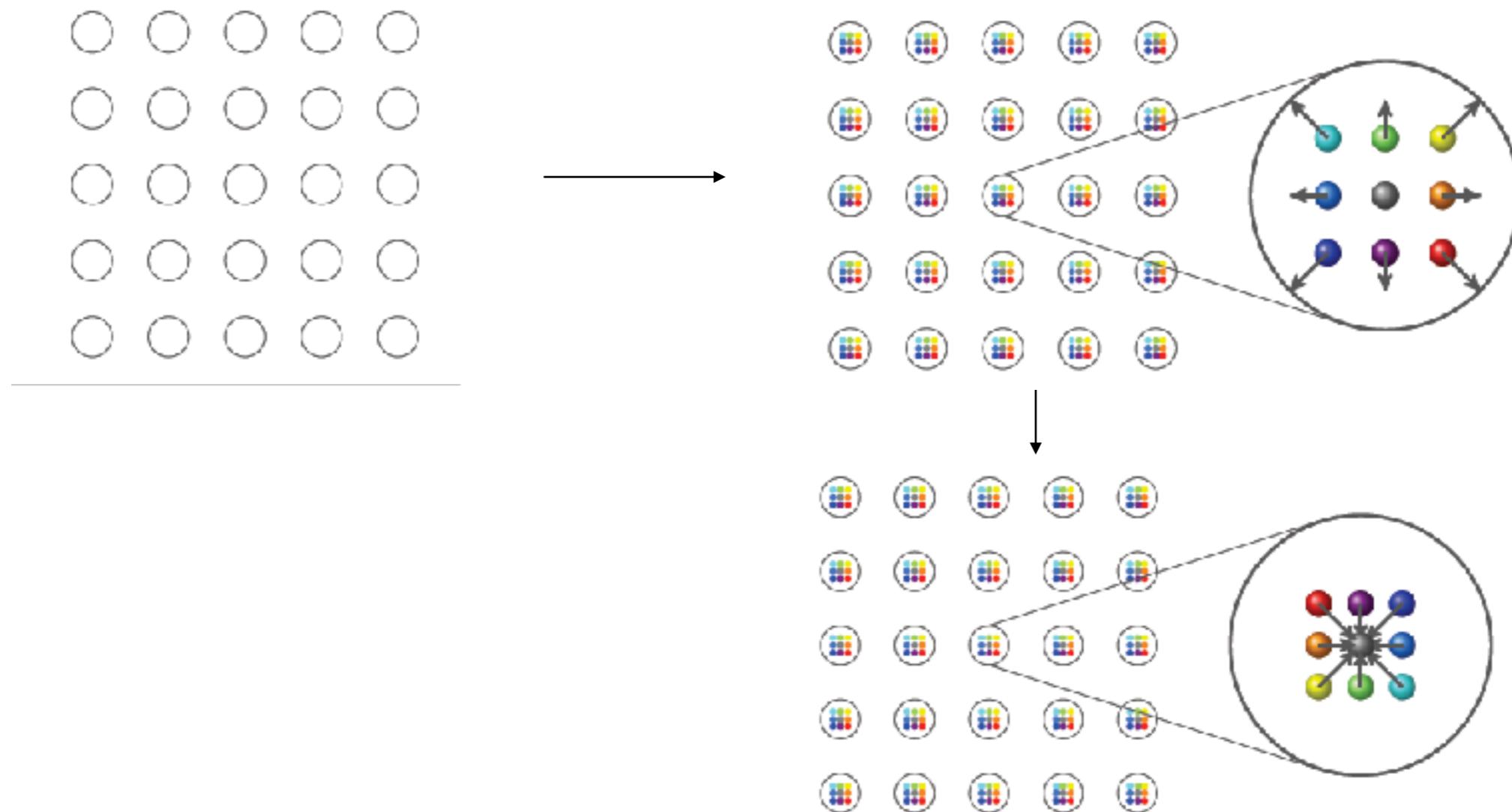


# Lattice Boltzmann

Se considera alguna malla computacional

En cada lugar se consideran velocidades discretas

Fase de transporte de las variables



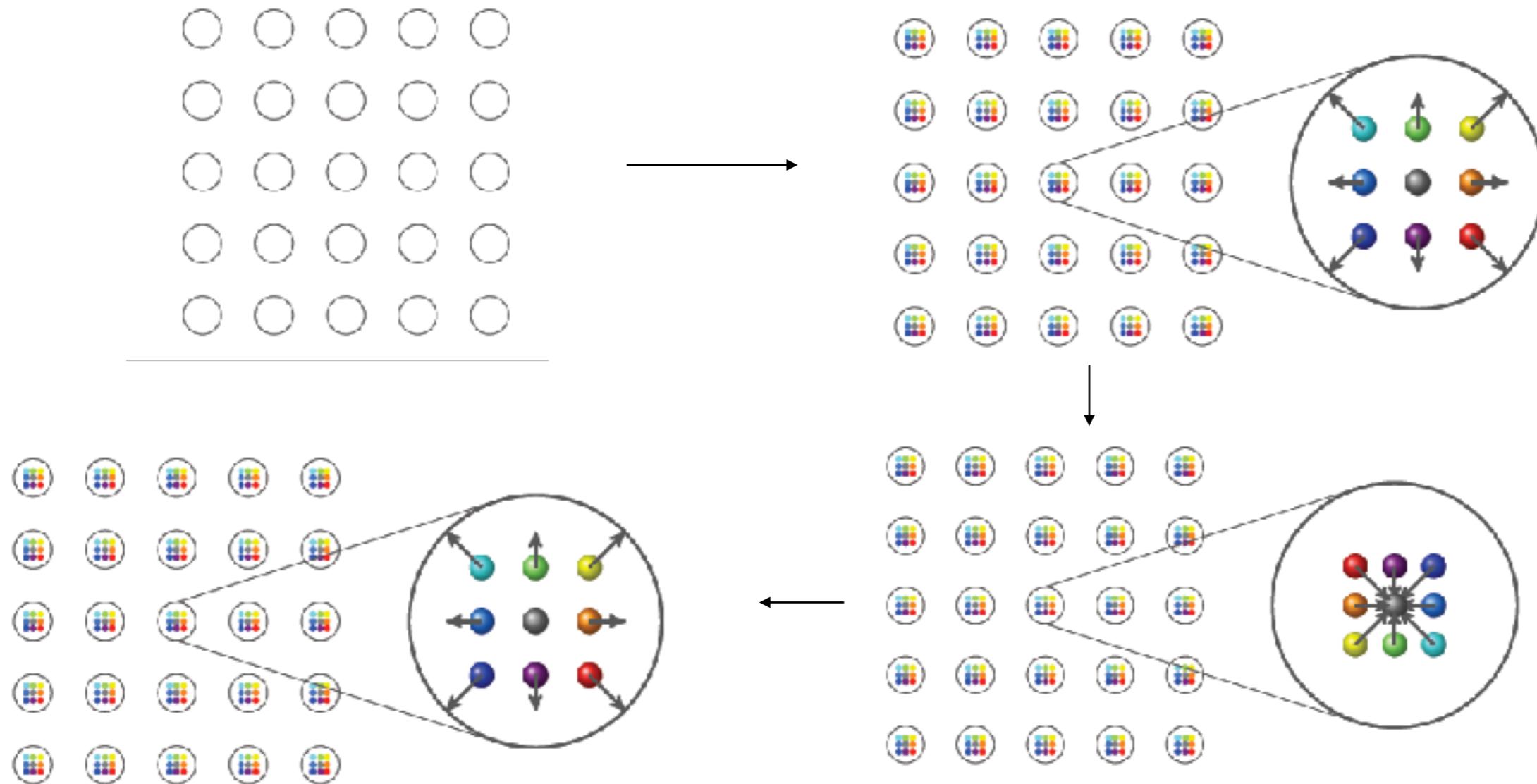
# Lattice Boltzmann

**Se considera alguna malla computacional**

**En cada lugar se consideran velocidades discretas**

**Fase de transporte de las variables**

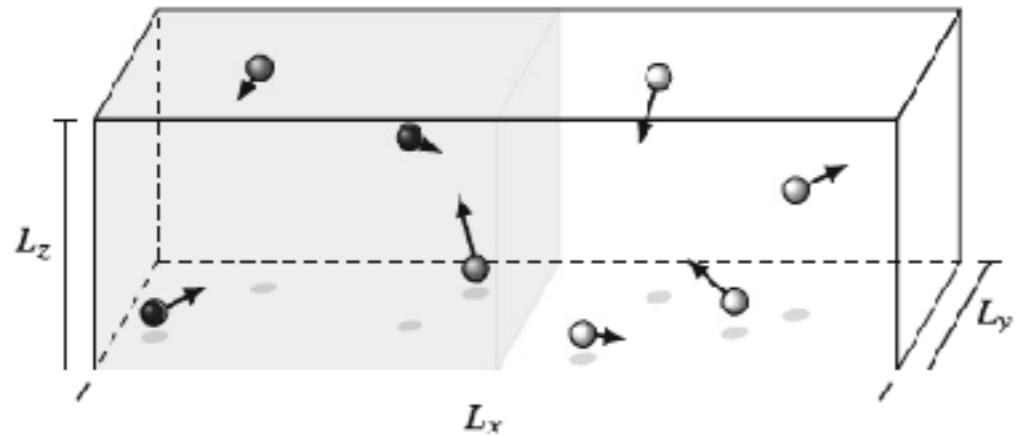
**De nuevo!**



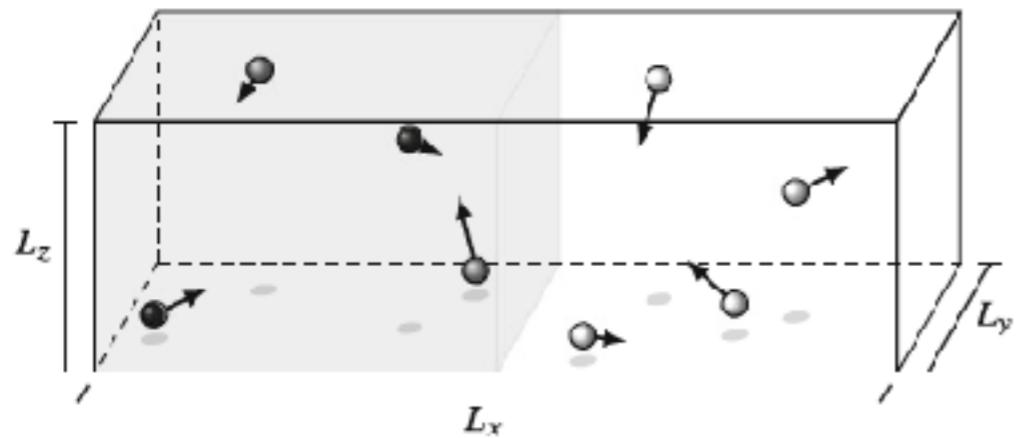
# Ahora el formalismo



# Lattice Boltzmann



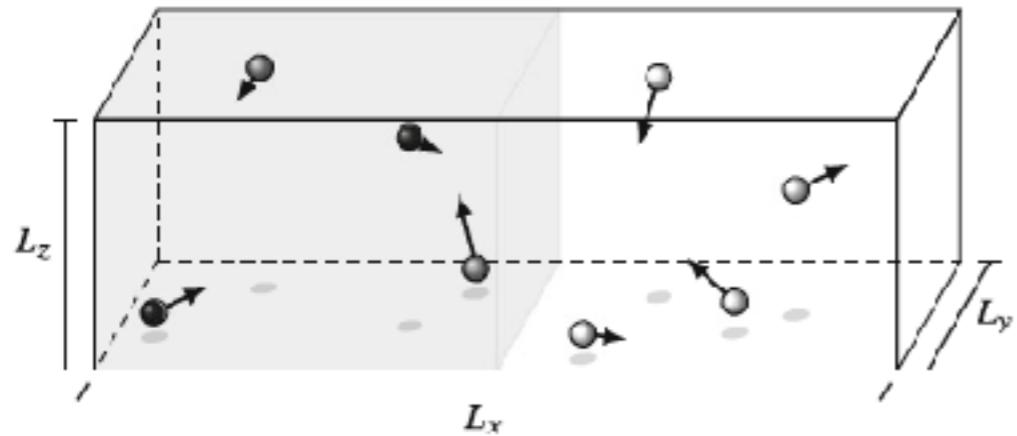
# Lattice Boltzmann



$$f = f(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{f_\alpha}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha} = 0$$

# Lattice Boltzmann

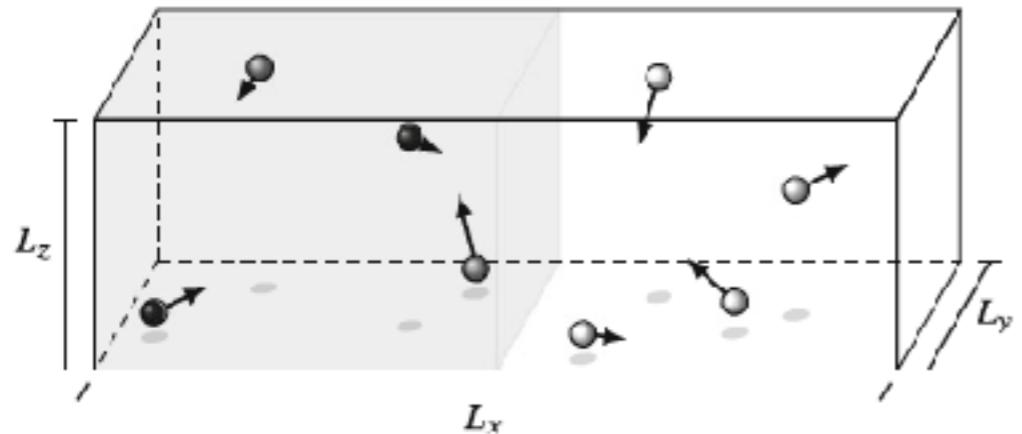


$$f = f(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{f_\alpha}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha} = 0$$

La ecuación de Boltzmann en el continuo representa la evolución  
De la función de distribución de partículas , es decir, la densidad  
De partículas con velocidad  $\xi$  en la posición  $x$  a un tiempo  $t$

# Lattice Boltzmann



$$f = f(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{f_\alpha}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha} = 0$$

La ecuación de Boltzmann en el continuo representa la evolución  
De la función de distribución de partículas , es decir, la densidad  
De partículas con velocidad  $\xi$  en la posición  $x$  a un tiempo  $t$



$$f^{eq}(\rho, u, T, \xi) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{d/2}} e^{-(\xi-u)^2/(2T)}$$



# Lattice Boltzmann

## Leyes de conservación

$$\rho(x, t) = \int f(x, \xi, t) d^3 \xi \quad \text{Masa}$$

$$\rho(x, t) u(x, t) = \int \xi f(x, \xi, t) d^3 \xi \quad \text{Memento}$$

$$\rho(x, t) E(x, t) = \frac{1}{2} \int | \xi |^2 f(x, \xi, t) d^3 \xi \quad \text{Energía}$$



$$f^{eq}(\rho, u, T, \xi) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{d/2}} e^{-(\xi-u)^2/(2T)}$$



# Lattice Boltzmann

**¿Forma discreta de la función de equilibrio?**

# Lattice Boltzmann

**¿Forma discreta de la función de equilibrio?**

**Polinomios de Hermite**



# Lattice Boltzmann

¿Forma discreta de la función de equilibrio?



Polinomios de Hermite

Función generadora

$$\omega(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-x^2/2}$$

Definición

$$H^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1}{\omega(x)} \nabla^{(n)} \omega(x)$$

# Lattice Boltzmann

¿Forma discreta de la función de equilibrio?



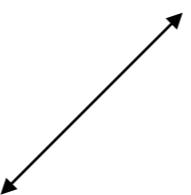
Polinomios de Hermite

Función generadora

$$\omega(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-x^2/2}$$

Definición

$$H^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1}{\omega(x)} \nabla^{(n)} \omega(x)$$



$$\nabla_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n)} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_n}}$$

Tensor de rango n , depende de la  
Dimensión del sistema

# Lattice Boltzmann

**La forma funcional es parecida**

$$f^{eq}(\rho, u, T, \xi) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{d/2}} e^{-(\xi - u)^2 / (2T)}$$

$$\omega(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-x^2 / 2}$$

# Lattice Boltzmann

**La forma funcional es parecida**

$$f^{eq}(\rho, u, T, \xi) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{d/2}} e^{-(\xi-u)^2/(2T)}$$

$$\omega(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-x^2/2}$$



$$f^{eq}(\rho, u, T, \xi) = \frac{\rho}{T^{d/2}} \omega\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{T}}\right)$$

**Se expande la función de equilibrio en la base de los Polinomios de Hermite**

# Lattice Boltzmann

**La forma funcional es parecida**

$$f^{eq}(\rho, u, T, \xi) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{d/2}} e^{-(\xi-u)^2/(2T)}$$

$$\omega(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-x^2/2}$$



$$f^{eq}(\rho, u, T, \xi) = \frac{\rho}{T^{d/2}} \omega\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{T}}\right)$$

**Se expande la función de equilibrio en la base de los Polinomios de Hermite**

**Calculemos!**

$$a^{(n),eq} = \frac{\rho}{T^{d/2}} \int \omega\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{T}}\right) H^{(n)}(\xi) d^d \xi$$

# Lattice Boltzmann

$$a^{(n),eq} = \frac{\rho}{T^{d/2}} \int \omega\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{T}}\right) H^{(n)}(\xi) d^d\xi$$

# Lattice Boltzmann

$$a^{(n),eq} = \frac{\rho}{T^{d/2}} \int \omega\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{T}}\right) H^{(n)}(\xi) d^d\xi$$

$$a^{0,eq} = \rho$$

**Densidad**

# Lattice Boltzmann

$$a^{(n),eq} = \frac{\rho}{T^{d/2}} \int \omega\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{T}}\right) H^{(n)}(\xi) d^d\xi$$

$$a^{0,eq} = \rho$$

**Densidad**

$$a_{\alpha}^{1,eq} = \rho u_{\alpha}$$

**Momento**

# Lattice Boltzmann

$$a^{(n),eq} = \frac{\rho}{T^{d/2}} \int \omega\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{T}}\right) H^{(n)}(\xi) d^d\xi$$

$$a^{0,eq} = \rho$$

Densidad

$$a_{\alpha}^{1,eq} = \rho u_{\alpha}$$

Momento

$$a_{\alpha\beta}^{2,eq} = \rho(u_{\alpha}u_{\beta} + (T-1)\delta_{\alpha\beta})$$

Energía

Los coeficientes se  
relacionan  
con los momentos !!

# Lattice Boltzmann

$$a^{(n),eq} = \frac{\rho}{T^{d/2}} \int \omega\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{T}}\right) H^{(n)}(\xi) d^d \xi$$

$$a^{0,eq} = \rho$$

Densidad

$$a_{\alpha}^{1,eq} = \rho u_{\alpha}$$

Momento

$$a_{\alpha\beta}^{2,eq} = \rho(u_{\alpha}u_{\beta} + (T - 1)\delta_{\alpha\beta})$$

Energía

Los coeficientes se relacionan con los momentos !!

$$f^{eq} \approx \omega(\xi) \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} a^{n,eq} \cdot H^{(n)}(\xi)$$

Para reproducir la física del sistema, es decir, las Leyes de conservación no se necesita considerar Todos los ordenes, suficiente a segundo orden.

Con los tres primeros ordenes se recuperan las ecuaciones de la hidrodinámica

# Lattice Boltzmann

**Cuadratura de Gauss - Hermite**

$$a^{(n),eq} = \frac{\rho}{T^{d/2}} \int \omega\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{T}}\right) H^{(n)}(\xi) d^d\xi = \sum_{i=1}^n w_i H^{(n)}(\xi_i)$$

# Lattice Boltzmann

## Cuadratura de Gauss - Hermite

$$a^{(n),eq} = \frac{\rho}{T^{d/2}} \int \omega\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{T}}\right) H^{(n)}(\xi) d^d\xi = \sum_{i=1}^n w_i H^{(n)}(\xi_i)$$

## Función de equilibrio

$$f^{eq} \approx \omega(\xi) \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} a^{n,eq} \cdot H^{(n)}(\xi)$$

Se debe elegir un sistema adecuado de w para  
Manejar numéricamente la ecuación

# Lattice Boltzmann

## Cuadratura de Gauss - Hermite

$$a^{(n),eq} = \frac{\rho}{T^{d/2}} \int \omega\left(\frac{\xi - u}{\sqrt{T}}\right) H^{(n)}(\xi) d^d\xi = \sum_{i=1}^n w_i H^{(n)}(\xi_i)$$

## Función de equilibrio

$$f^{eq} \approx \omega(\xi) \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} a^{n,eq} \cdot H^{(n)}(\xi)$$

Se debe elegir un sistema adecuado de  $w$  para  
Manejar numéricamente la ecuación



$$f^{eq}(\rho, u, T, \xi) = w_i \rho \left[ 1 + \xi_{i\alpha} u_\alpha + \frac{1}{2} (u_\alpha u_\beta + (T-1)\delta_{\alpha\beta}) (\xi_{i\alpha} \xi_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \right]$$

# Lattice Boltzmann

$$f^{eq}(\rho, u, T, \xi) = w_i \rho \left[ 1 + \xi_{i\alpha} u_\alpha + \frac{1}{2} (u_\alpha u_\beta + (T - 1) \delta_{\alpha\beta}) (\xi_{i\alpha} \xi_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \right]$$

**Se pueden elegir diferentes esquemas para que evolucione la ecuación**

# Lattice Boltzmann

$$f^{eq}(\rho, u, T, \xi) = w_i \rho \left[ 1 + \xi_{i\alpha} u_\alpha + \frac{1}{2} (u_\alpha u_\beta + (T - 1) \delta_{\alpha\beta}) (\xi_{i\alpha} \xi_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \right]$$

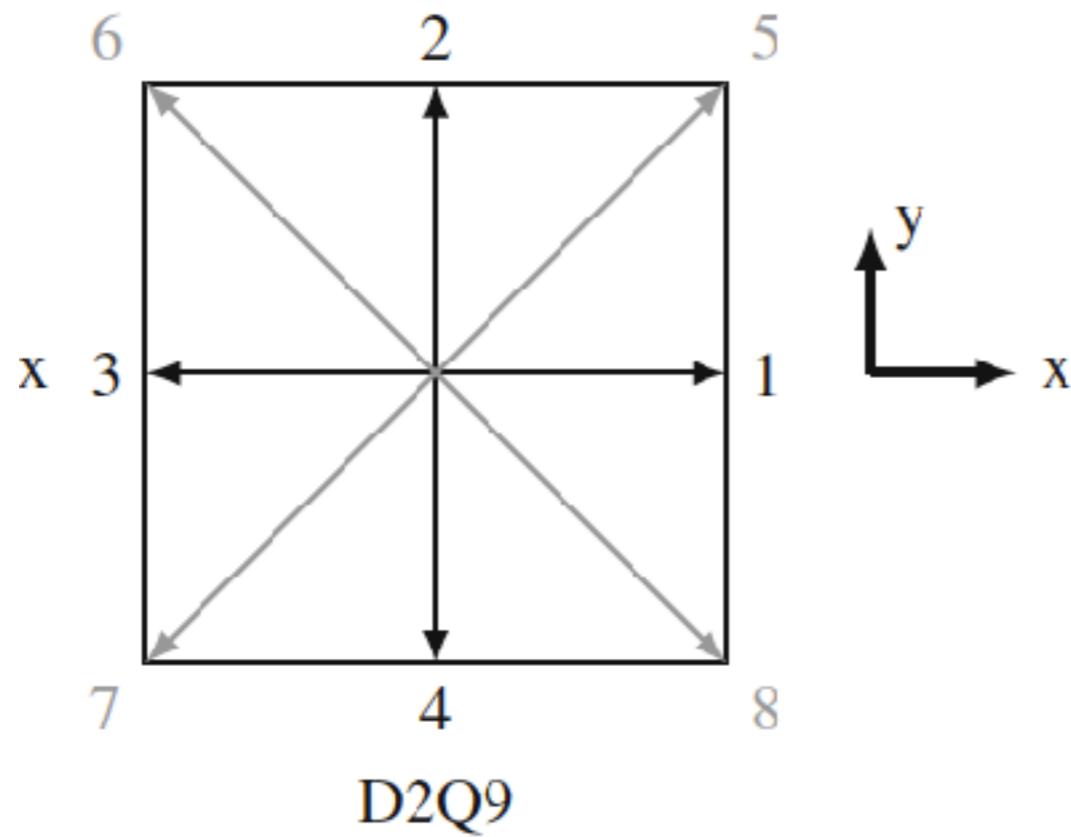
**Se pueden elegir diferentes esquemas para que evolucione la ecuación**



# Lattice Boltzmann

$$f^{eq}(\rho, u, T, \xi) = w_i \rho \left[ 1 + \xi_{i\alpha} u_\alpha + \frac{1}{2} (u_\alpha u_\beta + (T - 1) \delta_{\alpha\beta}) (\xi_{i\alpha} \xi_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \right]$$

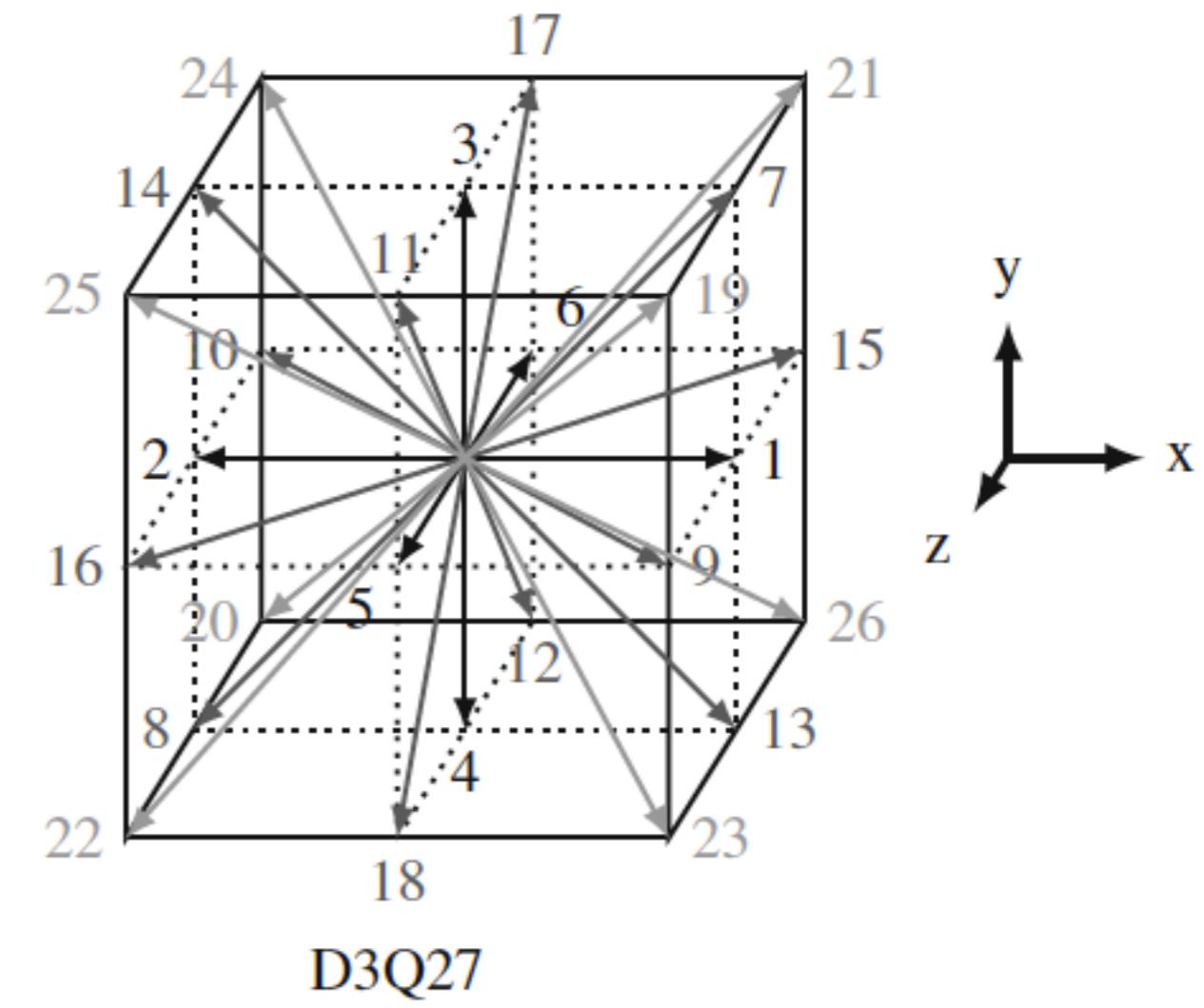
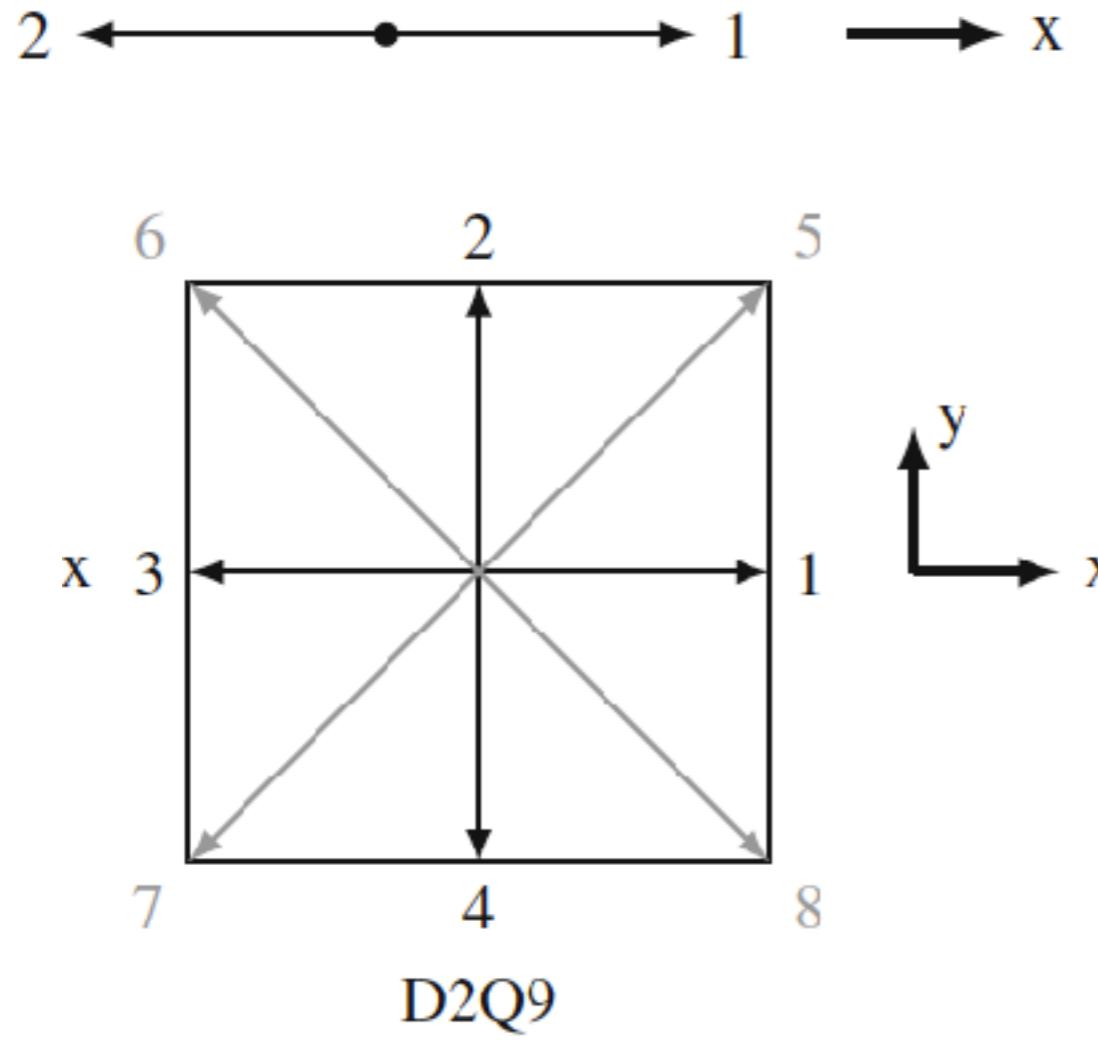
**Se pueden elegir diferentes esquemas para que evolucione la ecuación**



# Lattice Boltzmann

$$f^{eq}(\rho, u, T, \xi) = w_i \rho \left[ 1 + \xi_{i\alpha} u_\alpha + \frac{1}{2} (u_\alpha u_\beta + (T - 1) \delta_{\alpha\beta}) (\xi_{i\alpha} \xi_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \right]$$

Se pueden elegir diferentes esquemas para que evolucione la ecuación



# Lattice Boltzmann

## Discretización de ecuación Boltzmann

# Lattice Boltzmann

## Discretización de ecuación Boltzmann

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t))$$

# Lattice Boltzmann

## Discretización de ecuación Boltzmann

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t))$$

Representa la distribución después de la colisión  
Desde el paso anterior

# Lattice Boltzmann

## Discretización de ecuación Boltzmann

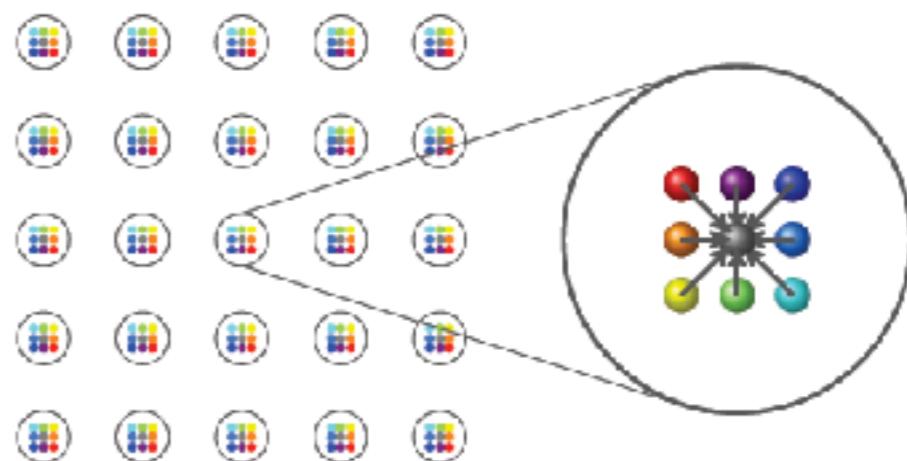
$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t))$$

Representa la distribución después de la colisión  
Desde el paso anterior

$$f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t))$$

Representa la distribución  
después de la colisión  
desde el paso anterior

$$f_i(x, t) \left( 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \right) + f_i^{eq}(x, t) \frac{\Delta t}{\tau}$$



# Lattice Boltzmann

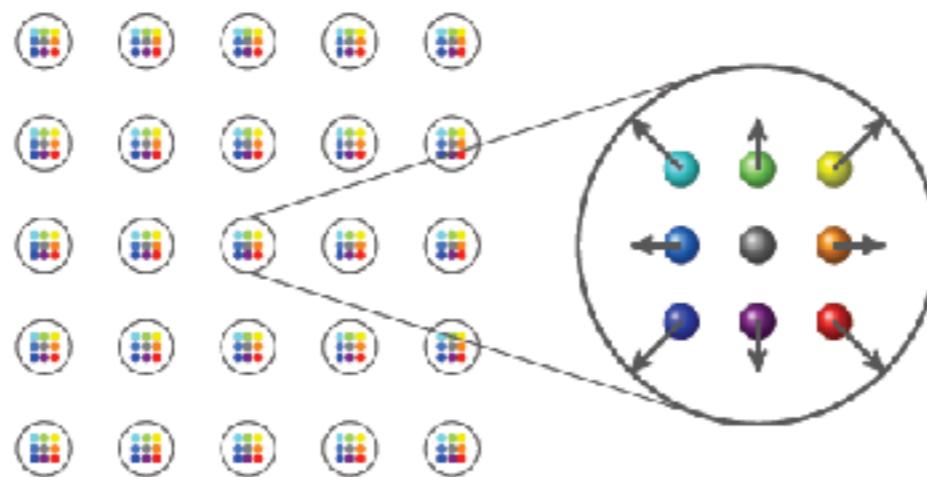
## Discretización de ecuación Boltzmann

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t))$$

Representa la distribución después de la colisión  
Desde el paso anterior

$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t)$

Propagación, comunicación  
de la información a celdas vecinas

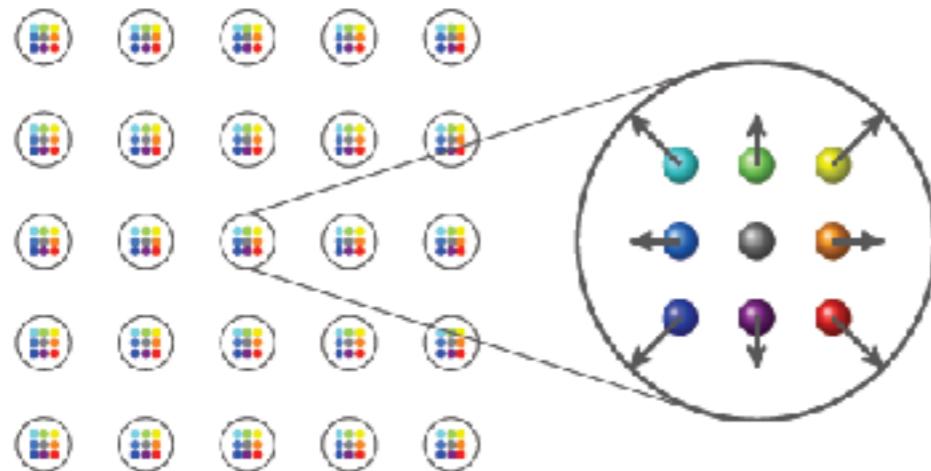


# Lattice Boltzmann

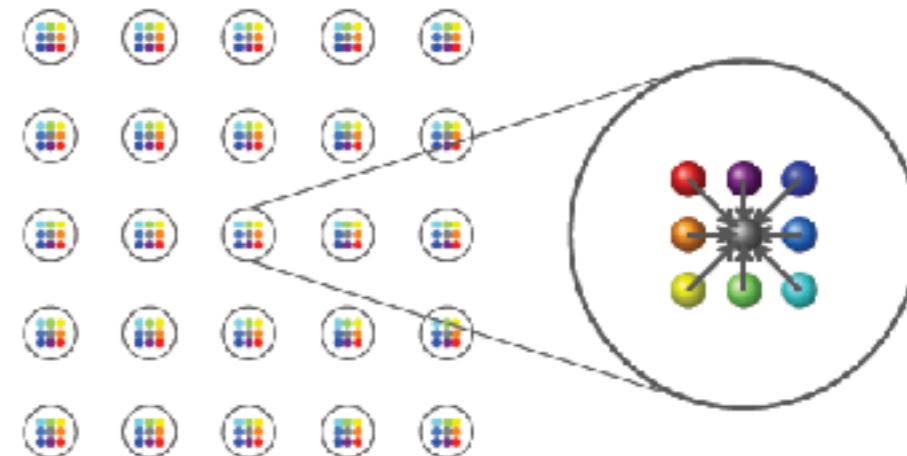
## Discretización de ecuación Boltzmann

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t))$$

Propagación, comunicación  
de la información a celdas vecinas



Representa la distribución  
después de la colisión  
desde el paso anterior



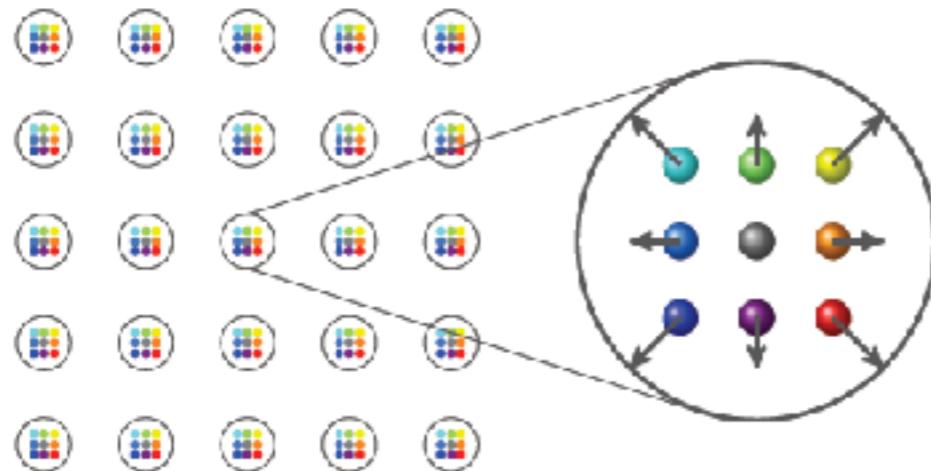
En cada paso, en cada celda

# Lattice Boltzmann

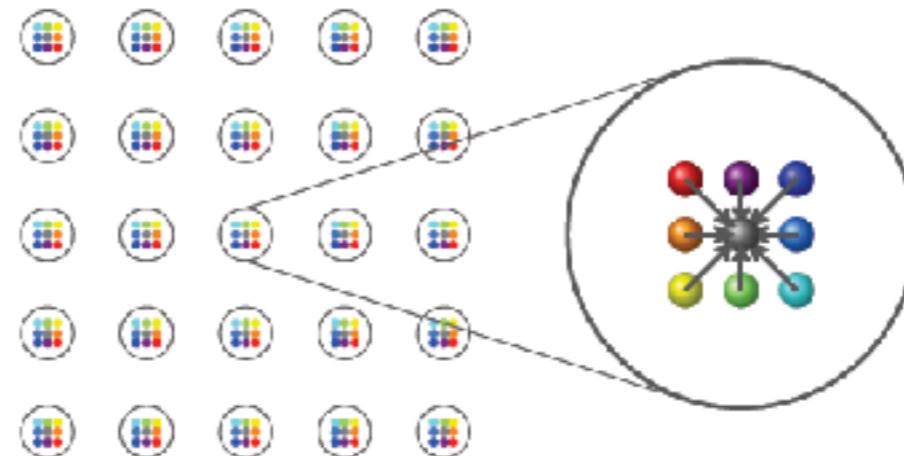
## Discretización de ecuación Boltzmann

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t))$$

Propagación, comunicación  
de la información a celdas vecinas



Representa la distribución  
después de la colisión  
desde el paso anterior



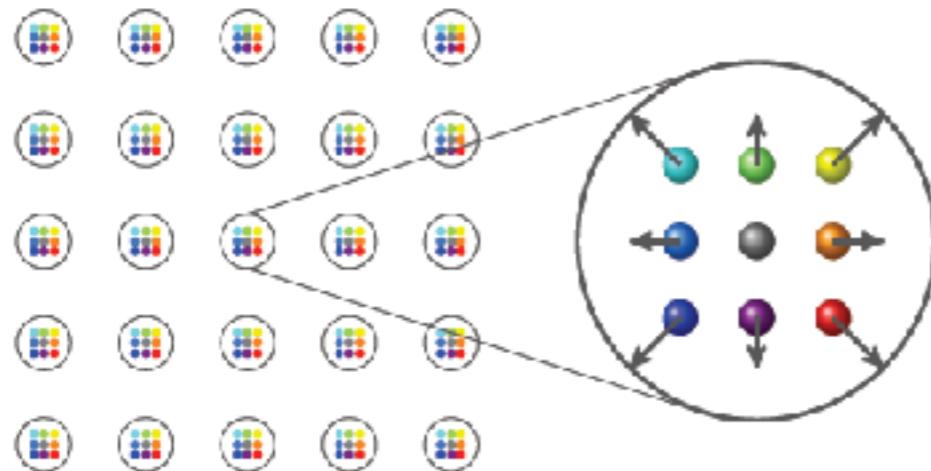
En cada paso, en cada celda

# Lattice Boltzmann

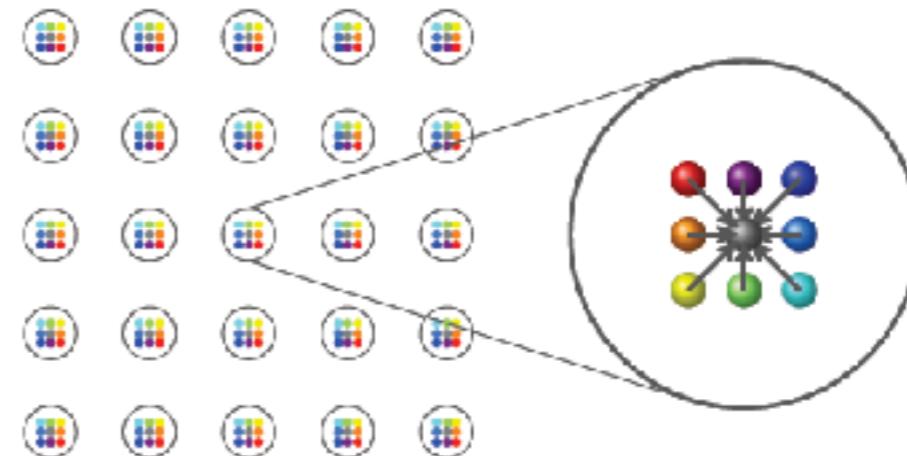
## Discretización de ecuación Boltzmann

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t))$$

Propagación, comunicación  
de la información a celdas vecinas



Representa la distribución  
después de la colisión  
desde el paso anterior

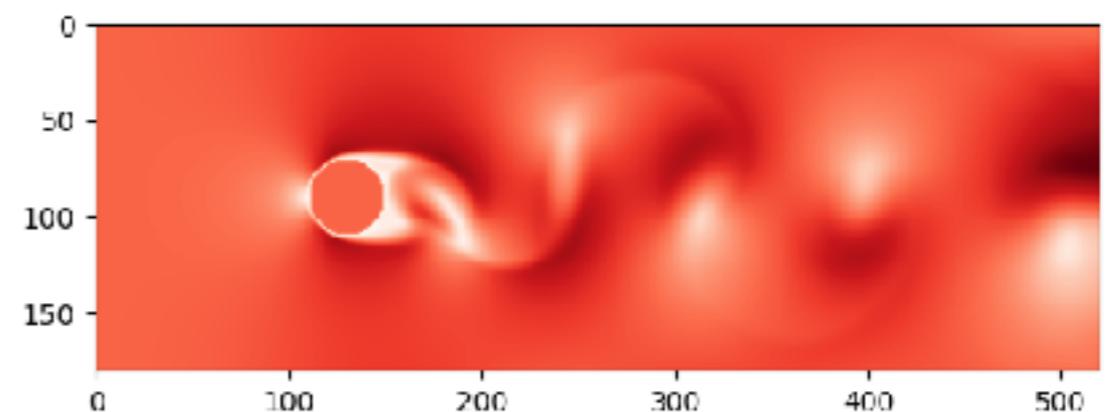


En cada paso, en cada celda

# Lattice Boltzmann

## Vórtices von Kármán

**Patrón de vórtices causados por la separación no estacionaria de la capa de fluido al pasar sobre cuerpos sumergidos**



# Lattice Boltzmann

## Vórtices von Kármán

Patrón de vórtices causados por la separación no estacionaria de la capa de fluido al pasar sobre cuerpos sumergidos

### Ecuaciones Navier Stokes

