

# Éléments d'Analyses Numériques

## Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS)

---

Grégoire BOIRON

Matthieu LE BOUCHER

Année universitaire 2016-2017

### Résumé

Ce rapport commence par une analyse de la topologie des splines uniformes en produit tensoriel grâce aux splines fermées. On propose ensuite une étude du modèle de surface NURBS. Ces deux parties sont indépendantes, et des exemples sont fournis pour étayer les diverses explications. Des exemples plus approfondis seront montrés lors de la soutenance orale de ce projet, le mercredi 19 avril 2017.

## Table des matières

<b>1. Partie I : splines uniformes en produit tensoriel</b>	<b>1</b>
<b>2. Partie II : les NURBS</b>	<b>1</b>
2.1. Motivations et idée générale . . . . .	1
2.2. Définition . . . . .	2
2.2.a. Courbe NURBS . . . . .	2
2.2.b. Forme générale d'une surface NURBS . . . . .	2
2.2.c. À propos des « poids » $\omega_i$ . . . . .	2
2.3. Avantages et limitations du modèle . . . . .	2
2.4. Algorithme . . . . .	3
2.5. Perspectives . . . . .	3
<b>3. Annexes</b>	<b>5</b>

## 1. Partie I : splines uniformes en produit tensoriel

Après quelques rapides essais, on s'aperçoit que les splines uniformes en produit tensoriel s'adaptent mal à une topologie inadaptée. Les figures (3) et (4) illustrent des exemples de telles topologies. On remarque que des trous apparaissent lorsque la surface est refermée.

Il ressort en fait que la topologie d'une surface en produit tensoriel est celle du tore.

DOO et SABIN ont utilisé l'expression d'une surface B-spline bi-quadratique uniforme pour créer leur schéma de subdivision, qui produit une surface limite  $C^1$  partout et ce pour une topologie quelconque. Cela correspond aux splines uniformes en produit tensoriel de degré 2.

On peut montrer que le schéma de subdivision de CATMULL-CLARK a pour limite une surface qui est  $C^2$  partout sauf en certains points extraordinaires où elle est  $C^1$ . Cela correspond aux splines uniformes en produit tensoriel de degré 3.

## 2. Partie II : les NURBS

### 2.1. Motivations et idée générale

L'une des principales limitations du modèle B-spline est qu'elles ne permettent pas d'approcher des fonctions rationnelles. Ce problème survient surtout lorsque l'on cherche à recréer des formes circulaires, car les fonctions cos et sin sont des exemples de fonctions non rationnelles.

Les NURBS sont essentiellement des B-splines en coordonnées homogènes ; les lettres « **BS** » signifient *B-spline*. À la manière des nombres complexes pour les solutions non réelles, ajouter une dimension supplémentaire permet de s'affranchir de certains problèmes. En l'occurrence, on parvient ainsi à représenter des fonctions rationnelles, ce qui est symbolisé par la lettre « **R** » de l'acronyme.

Concrètement, comme le montrent les figures (1) et (2a), l'idée derrière ce concept est de manipuler un objet en dimension  $n + 1$  de telle sorte que sa projection en dimension  $n$  soit l'objet souhaité. Comme on le montre figure (2b), on parvient ainsi par exemple à générer un cercle. En conséquence, il est aisé de se convaincre qu'il n'existe pas qu'une seule manière d'aboutir à un objet voulu.

## 2.2. Définition

### 2.2.a. Courbe NURBS

En tant que B-splines non uniformes, une courbe NURBS se définit à l'aide d'un degré  $d$ , de  $n$  points de contrôle  $P_i$  et d'un vecteur nodal  $v$ . La nouveauté réside en la définition d'un vecteur supplémentaire de poids — ce terme est expliqué plus en détails en section (2.2.c.) —  $\omega$  dont les coordonnées représentent en fait la coordonnée homogène des points de contrôle, de sorte qu'en 2D on ait  $P_i = (x_i, y_i, \omega_i)$ .

Le calcul des courbes NURBS de base  $N_i$  se réalise simplement à l'aide de la formule récursive de COX-DE BOOR :

$$\begin{cases} N_j^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_j \leq t < t_{j+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ N_j^d(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+d} - t_j} N_j^{d-1}(t) + \frac{t_{j+d+1} - t}{t_{j+d+1} - t_{j+1}} N_{j+1}^{d-1}(t) \end{cases} \quad (1)$$

À un instant  $t \in [0, 1]$  donné, et en posant le facteur de normalisation  $D(t) = \sum_{i=1}^d \omega_i \cdot N_i^n(t)$  — qui est égal à 1 lorsque  $\forall i, \omega_i = 1$ , ce qui ramène au cas des B-splines classiques non « projetées » —, la courbe se définit alors simplement par

$$C(t) = \frac{1}{D(t)} \sum_{i=1}^d \omega_i \cdot P_i \cdot N_i^d(t). \quad (2)$$

### 2.2.b. Forme générale d'une surface NURBS

Une surface NURBS est obtenue par produit tensoriel de deux courbes NURBS de degré  $d_u$  et  $d_v$ , et en utilisant une grille de points de contrôle  $P_{i,j}$  qu'on lit d'abord par ligne puis par colonne (ou inversement sans changer le résultat). Ceci mène, en définissant  $D(u, v) = \sum_{i=0}^{d_u} \sum_{j=0}^{d_v} \omega_{i,j} \cdot N_i^{d_u}(u) \cdot N_j^{d_v}(v)$ , à l'équation

$$S(u, v) = \frac{1}{D(u, v)} \sum_{i=0}^{d_u} \sum_{j=0}^{d_v} \omega_{i,j} \cdot P_{i,j} \cdot N_i^{d_u}(u) \cdot N_j^{d_v}(v). \quad (3)$$

### 2.2.c. À propos des « poids » $\omega_i$

L'appellation « poids » fait référence au fait qu'en augmentant  $\omega_i$ , on augmente l'attraction de la courbe vers le point de contrôle  $P_i$ . L'explication de ce comportement réside dans la compréhension des coordonnées homogènes, qui facilitent les calculs dans l'espace projectif qui permet lui-même de s'affranchir des proportionnalités d'un espace vectoriel au profit des directions. Sur la figure (1), augmenter la coordonnée homogène d'un point, disons  $P_1$ , le fait « monter », et sa projection  $p_1$  aura tendance à se rapprocher de la courbe sans que les autres points projetés ne bougent par ailleurs, d'où le phénomène d'attraction.

## 2.3. Avantages et limitations du modèle

Évidemment, la faible complexité des algorithmes de calcul des NURBS et leur capacité pour évaluer avec précision des formes même complexes tout en nécessitant relativement peu de données en font un outil de choix pour l'industrie et les logiciels de CAO.

Un autre grand avantage du modèle est que les fonctions rationnelles de base sont invariantes par transformation affine ou perspective. Par conséquent, il suffit de ne modifier que les points de contrôle pour modifier l'ensemble de la courbe.

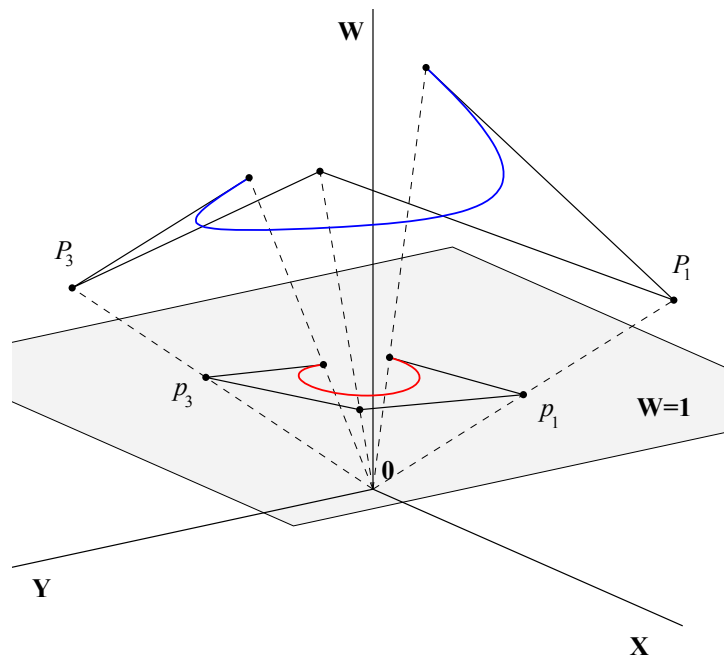


FIGURE 1 – Courbe de Bézier rationnelle. La courbe polynomiale en bleu évolue en coordonnées homogènes. Sa projection sur le plan  $\omega = 1$  est en rouge.

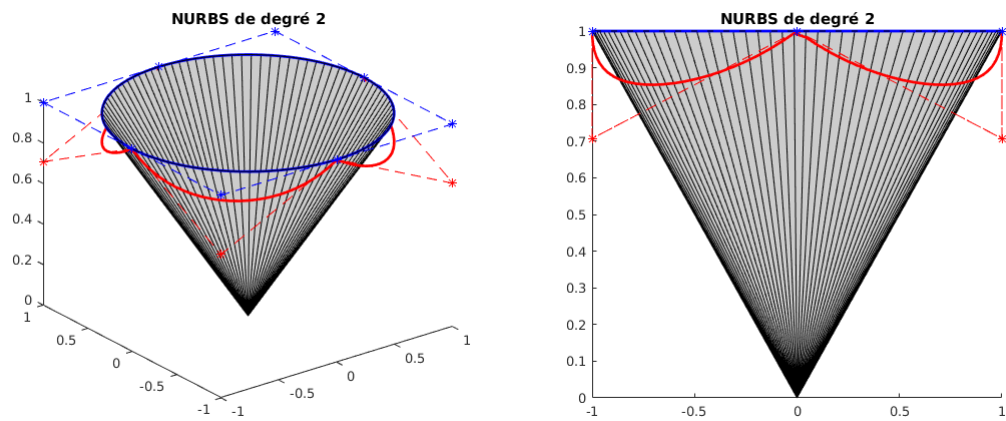
Le défaut majeur des NURBS est qu'elles ne fournissent pas toujours de bonne paramétrisation. Dans le cas du cercle, le point à l'instant  $t$  n'est pas toujours situé en  $(\cos t, \sin t)$ . En pratique, cela a tendance à générer des craquelures lorsqu'on modifie une surface NURBS.

## 2.4. Algorithme

Au regard des définitions précédentes, notre algorithme est relativement simple. On se contente de calculer les fonctions de base  $N_i^n(t)$  récursivement en suivant directement l'équation de définition (1). On évalue ensuite la courbe (resp. surface) sur l'intervalle temporel  $[0, a]$  où  $a$  est le dernier élément du vecteur nodal, en appliquant la formule (2) (resp. (3)).

## 2.5. Perspectives

Comme on le montre sur les figures (9) et (10), notre implémentation permet de créer des formes réalistes comme on pourrait l'exiger dans l'application industrielle. Toutefois, nous avons remarqué que sur un ordinateur avec une faible puissance de calcul, notre implémentation n'est pas très rapide. Il pourrait donc être intéressant de rechercher des pistes d'amélioration au niveau de la complexité des algorithmes.



(a) En bleu, le polygone de contrôle et la nurbs projetée.  
En rouge, le polygone de contrôle en coordonnées homogènes et la nurbs en coordonnées homogènes.

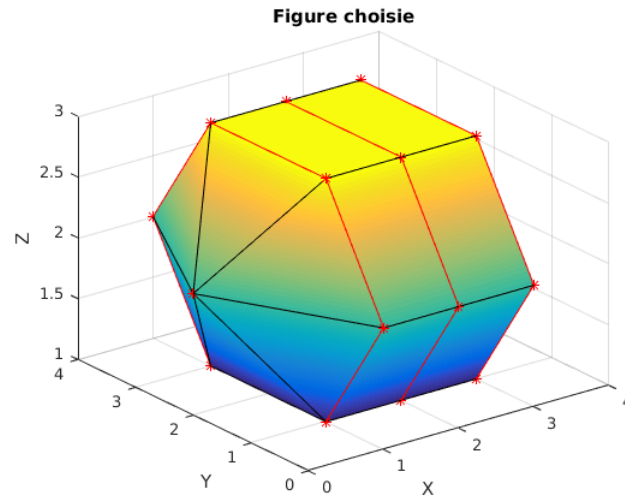
(b) Le cône vue du dessus. L'intersection de celui-ci avec le plan  $\omega = 1$  donne bien une courbe conique qu'est le cercle.  
En choisissant les poids, les paraboles sont parallèles aux faces du cône.

FIGURE 2 – Une possibilité pour représenter un cercle à l'aide de NURBS.

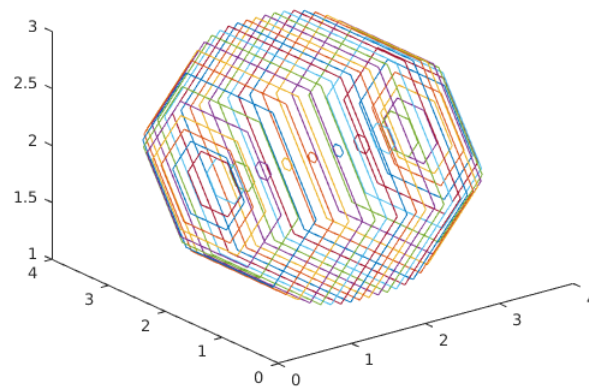
Les points de contrôle utilisés sont :

$x$	$y$	$z$	$\omega$
1	0	0	1
1	1	0	$\sqrt{2}/2$
0	1	0	1
-1	1	0	$\sqrt{2}/2$
-1	0	0	1
-1	-1	0	$\sqrt{2}/2$
0	-1	0	1
1	-1	0	$\sqrt{2}/2$
1	0	0	1

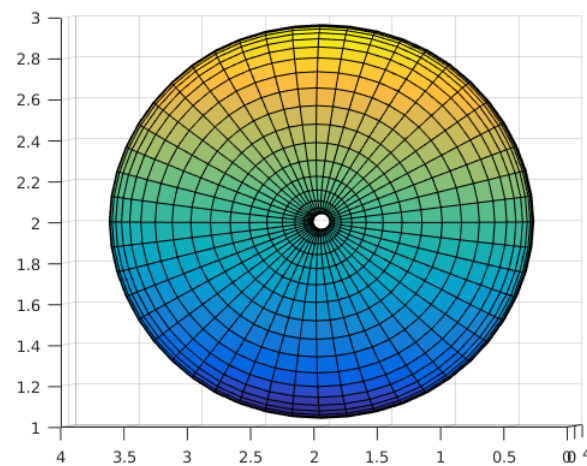
### 3. Annexes



(a) Figure d'origine. Les polygones de contrôle sont en rouge.

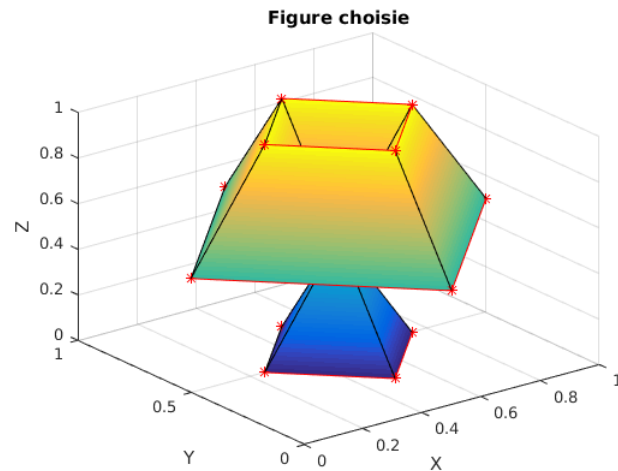


(b) Figure après itérations selon les lignes.

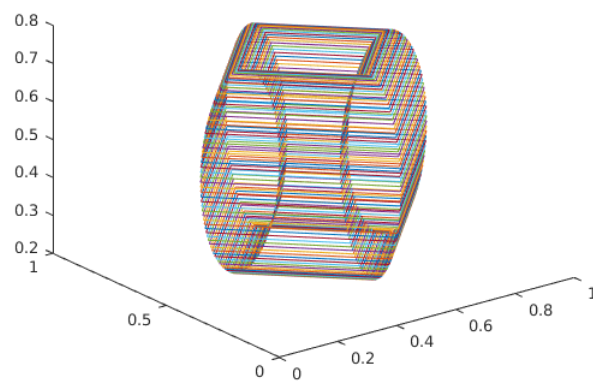


(c) Un trou est apparu au centre de la figure une fois la surface fermée.

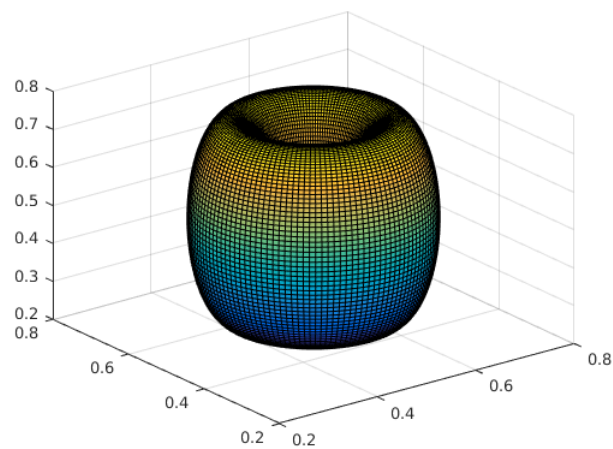
FIGURE 3 – Effets indésirables de l'approximation par splines pour une topologie inadaptée.



(a) Figure d'origine. Les polygones de contrôle sont en rouge.

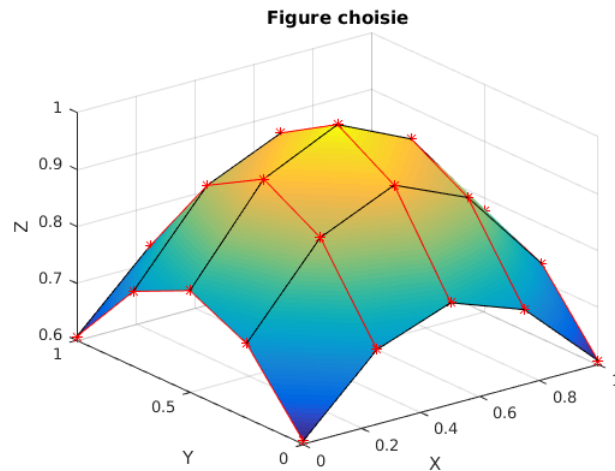


(b) Figure après itérations selon les lignes, avec  $n = 3$  et 3 subdivisions.

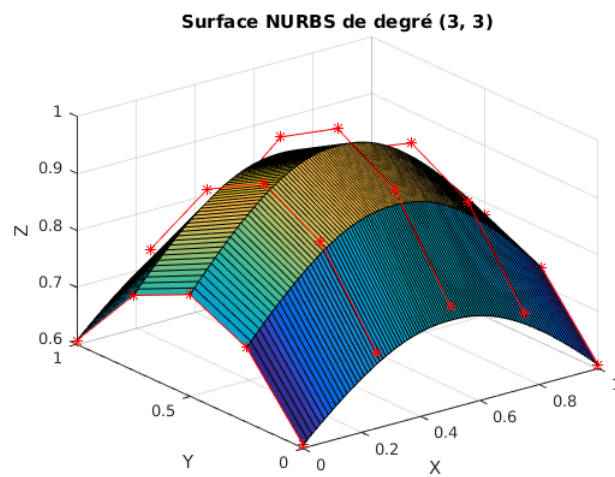


(c) Un trou est apparu au centre de la figure une fois la surface fermée.

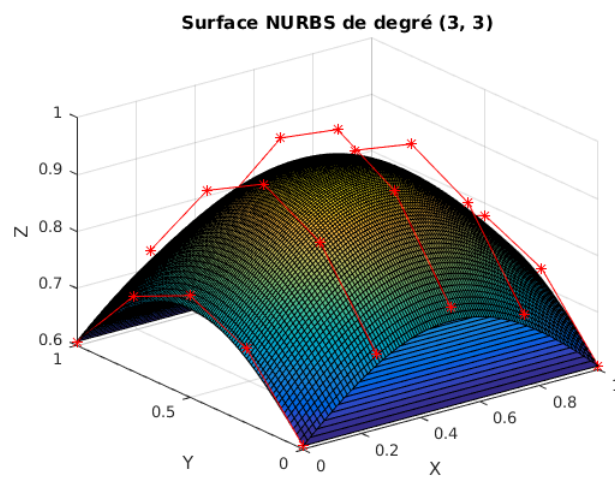
FIGURE 4 – Effets indésirables de l'approximation par splines pour une topologie inadaptée.



(a) Figure d'origine. Les polygones de contrôle sont en rouge.



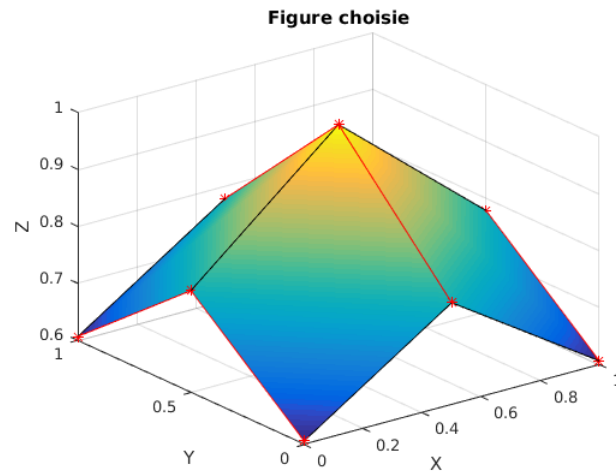
(b) Figure après itérations selon les lignes, avec  $n = 3$  et 3 subdivisions.



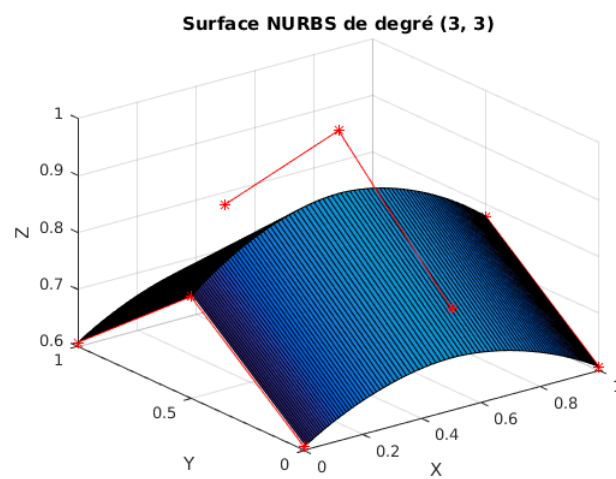
(c) Figures après itérations selon les colonnes.

FIGURE 5 – Différentes étapes pour une figure donnée basique.

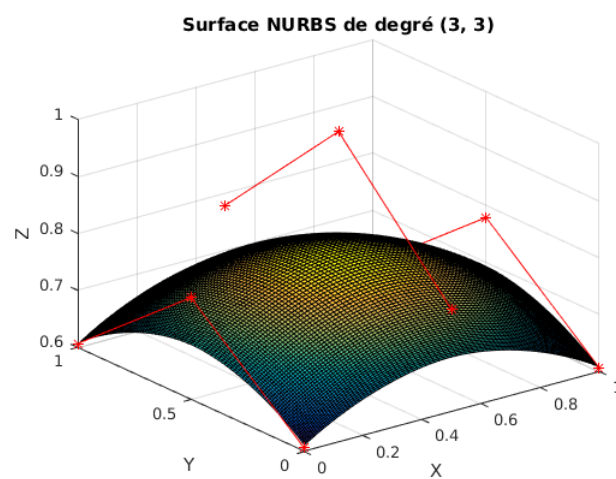




(a) Figure d'origine.

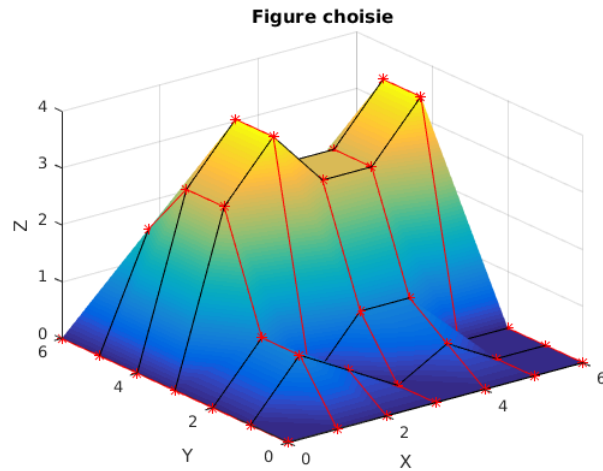


(b) Figure après itérations selon les lignes.

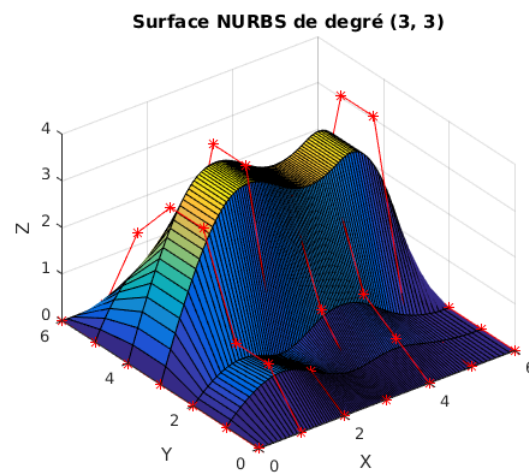


(c) Figures après itérations selon les colonnes.

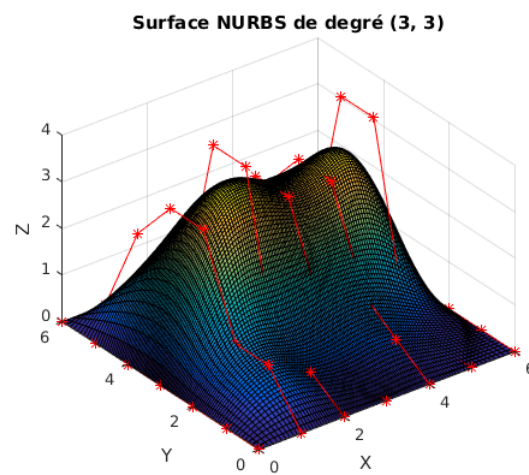
FIGURE 6 – Différentes étapes pour une figure donnée basique.



(a) Figure d'origine.

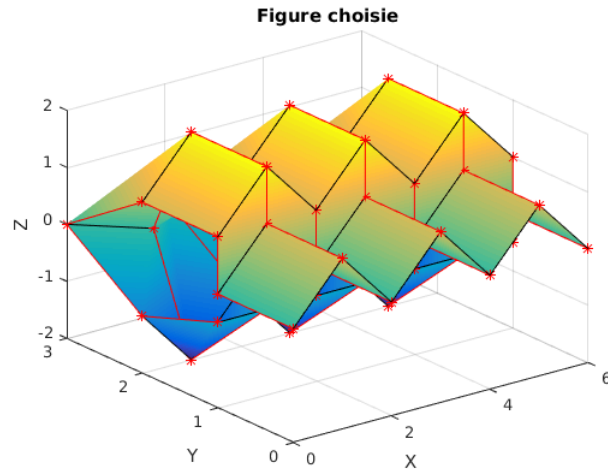


(b) Figure après itérations selon les lignes.

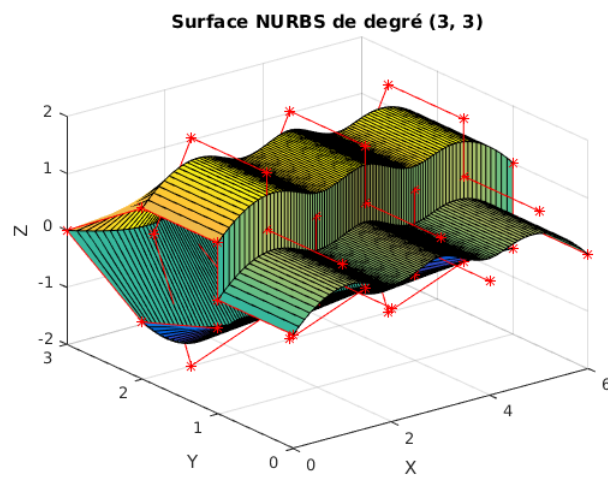


(c) Figures après itérations selon les colonnes.

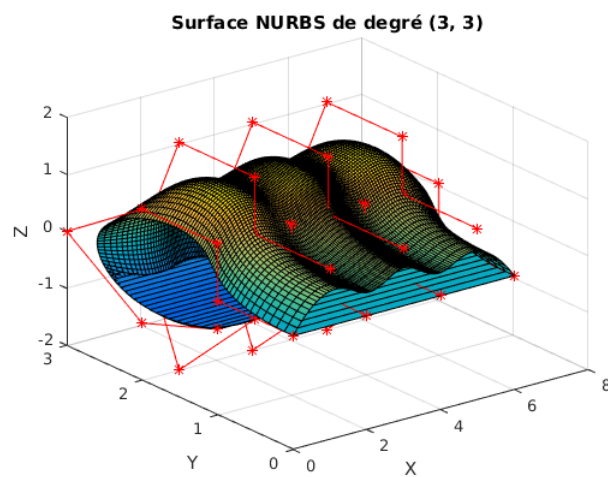
FIGURE 7 – Différentes étapes pour une figure donnée plus complexe.



(a) Figure d'origine.

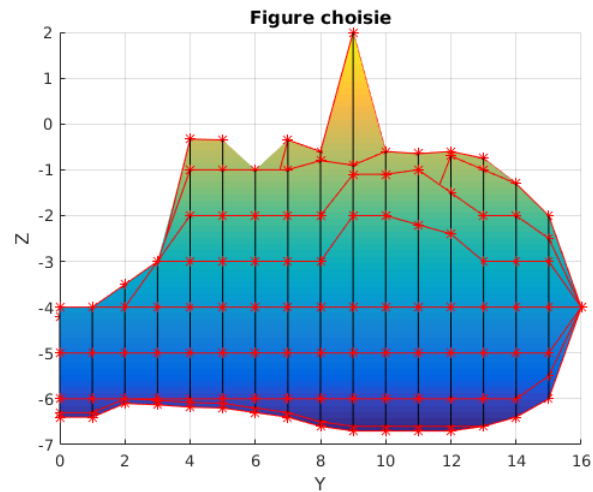


(b) Figure après itérations selon les lignes.

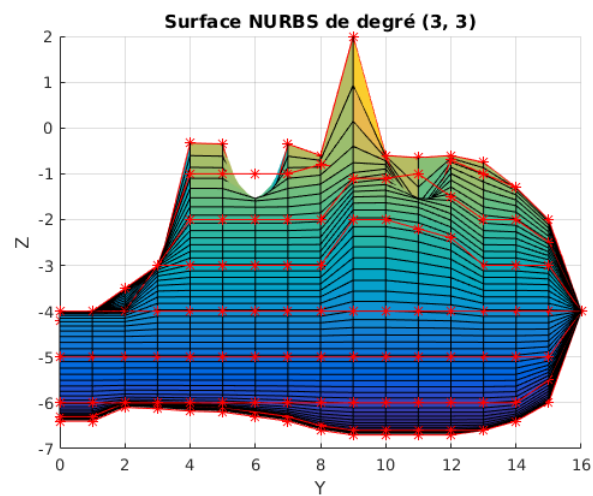


(c) Figures après itérations selon les colonnes.

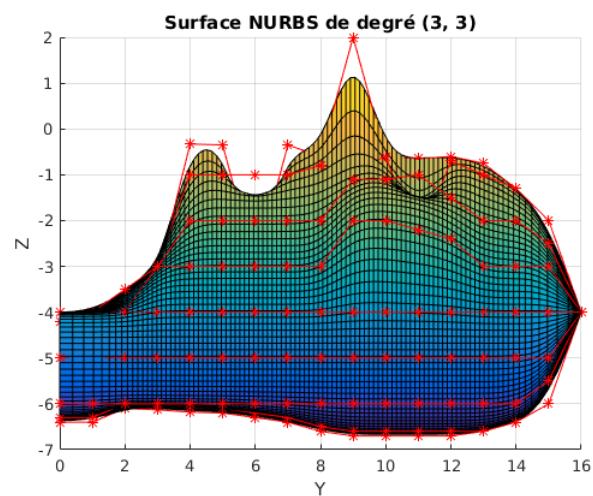
FIGURE 8 – Différentes étapes pour une figure donnée plus complexe.



(a) Figure d'origine.

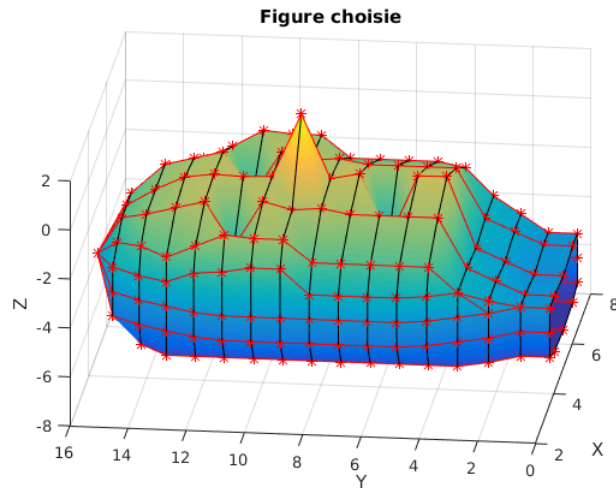


(b) Figure après itérations selon les lignes.

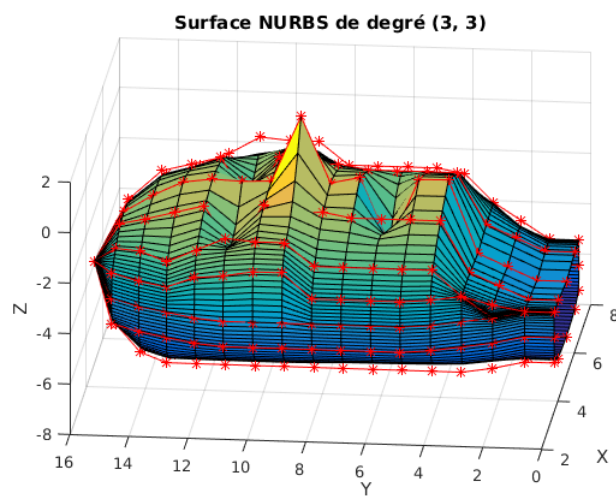


(c) Figures après itérations selon les colonnes.

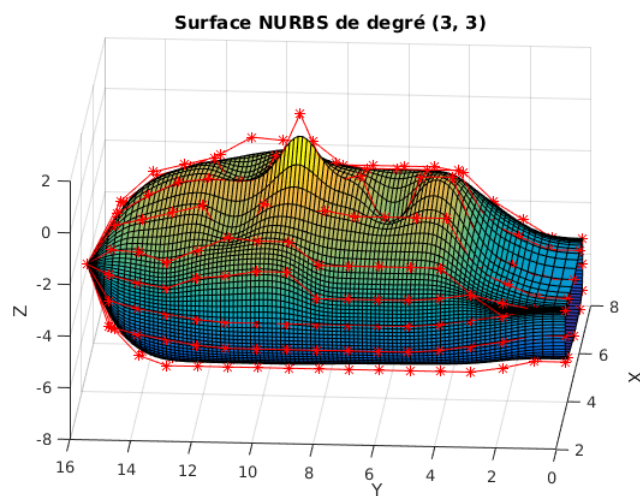
FIGURE 9 – Différentes étapes pour la modélisation d'un visage de profil.



(a) Figure d'origine.



(b) Figure après itérations selon les lignes.



(c) Figures après itérations selon les colonnes.

 FIGURE 10 – Différentes étapes pour la modélisation d'un visage de  $\frac{3}{4}$  face.