

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Modelli di traffico per la formazione della congestione su una rete stradale

Relatore:  
Prof. Armando Bazzani

Presentata da:  
Gregorio Berselli

Anno Accademico 2021/2022



*Le tangenziali sono soluzioni che permettono a certuni di sfrecciare molto rapidamente da un punto A a un punto B, nel mentre certi altri sfrecciano molto rapidamente dal punto B al punto A.*

*La gente che abita nel punto C, a metà strada tra A e B, spesso si chiede cosa ci sia di così importante nel punto A da indurre tanta gente a correrici spostandosi da B, e cosa ci sia di così importante nel punto B, da indurre tanta gente a correrici spostandosi da A.*

*Così, la gente del punto C finisce per augurarsi che tutti quei corridori si decidano una buona volta a scegliere una dannata dimora definitiva.*

*Douglas Adams - Guida galattica per gli autostoppisti*



# Abstract

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Fisica del traffico</b>	<b>7</b>
<b>2 Modelli di traffico</b>	<b>10</b>
2.1 Osservabili macroscopici . . . . .	10
2.1.1 Densità . . . . .	10
2.1.2 Flusso . . . . .	10
2.1.3 Velocità media . . . . .	11
2.2 Diagrammi Fondamentali Macroscopici . . . . .	11
2.3 Networks . . . . .	12
2.3.1 Random Walk su network . . . . .	13
<b>3 Costruzione del modello</b>	<b>14</b>
3.1 Algoritmo di evoluzione . . . . .	15
3.2 Parametri di controllo . . . . .	17
<b>4 Risultati</b>	<b>19</b>
4.1 Reticolo omogeneo . . . . .	19
4.1.1 Carico costante . . . . .	20
4.1.2 Carico piccato . . . . .	21
4.1.3 Carico periodico . . . . .	24
4.2 Rete stradale di Rimini (?) . . . . .	25
4.3 Discussione . . . . .	25
<b>A Esempi di matrici Laplaciane</b>	<b>27</b>
<b>B Implementazione</b>	<b>29</b>
B.1 Classi . . . . .	29
B.1.1 VehicleType . . . . .	29
B.1.2 Vehicle . . . . .	29
B.1.3 Street . . . . .	30

B.1.4	Graph . . . . .	30
B.2	Esecuzione . . . . .	31
B.3	Performance . . . . .	31

# Elenco delle figure

2.1	DFM di Greenshield . . . . .	11
3.1	Temperatura statistica . . . . .	16
3.2	Velocità nel modello . . . . .	17
4.1	Densità media per un reticolo omogeneo con carico costante . . . . .	20
4.2	Distribuzione strade non congestionate per un reticolo omogeneo. . . . .	21
4.3	Diagramma flusso/densità medi per un reticolo omogeneo sottoposto ad un carico costante. . . . .	21
4.4	Densità media per un reticolo omogeneo sovraccaricato . . . . .	22
4.5	Distribuzione strade non congestionate per un reticolo omogeneo. . . . .	22
4.6	DFM per una congestione . . . . .	23
4.7	Isteresi per un reticolo omogeneo sovraccaricato . . . . .	23
4.8	Variazione periodica della densità in un reticolo omogeneo . . . . .	24
4.9	Isteresi per un reticolo omogeneo caricato periodicamente . . . . .	25
A.1	Grafo di un network connesso . . . . .	27
A.2	Grafo di un network sconnesso . . . . .	28



# Introduzione

Le congestioni nel traffico sono ad oggi uno dei maggiori problemi per lo sviluppo delle città. Nel solo stato della Florida, ad esempio, è stato stimato che dal 2003 al 2007 queste abbiano causato perdite dai 4.5 ai 7 miliardi di dollari annui [1]. Oltre a danni economici, le congestioni nel traffico causano anche problemi sociali, come l'aumento del livello di stress negli automobilisti [2] e ambientali, in quanto le emissioni da esse causate sono altamente inquinanti e si ripercuotono sulla salute dei cittadini [3].

Nell'ultimo decennio, con l'obiettivo di attenuare questa problematica, nelle grandi città hanno cominciato a proliferare diverse compagnie di ride-hailing, come Uber. Nonostante il beneficio economico portato da esse e dalla competitività del mercato la presenza in gran numero di questi fornitori di servizi va a peggiorare la qualità della mobilità urbana. Questo effetto diventa abbastanza rilevante in zone nelle quali vi è poca domanda o la velocità stradale media è sufficientemente bassa. Ogni operatore aggiunto di questo settore causa, ad esempio, un aumento del numero totale di veicoli su strada del 2.5% a Manhattan e del 37% a San Francisco [4]. Inoltre, la presenza di molteplici compagnie di ride-hailing aggiunge ogni anno 9.17 miliardi di km di strade nelle aree metropolitane di Boston, Chicago, Los Angeles, Miami, New York, Philadelphia, San Francisco, Seattle e Washington DC [5].

Sempre negli ultimi anni, grazie alla consapevolezza creatasi riguardo l'ambiente e gli impatti su di esso delle attività umane, sono stati effettuati molteplici studi volti a dimostrare la correlazione tra inquinamento dell'aria nelle città e traffico in esse presenti. È stato stimato, ad esempio, che nella città di Modena circa il 60% delle emissioni di  $\text{NO}_x$  sono dovute al traffico stradale [6]. I danni ambientali possono anche ripercuotersi sull'economia: nel 2005, i costi economici dovuti al particolato presente nell'aria sono stimati a 112 miliardi di dollari americani [7].

Un ruolo fondamentale nella gestione delle congestioni nelle città lo gioca la logistica delle stesse. Si consideri ora la rete stradale di una città generica di superficie approssimabile a quella di una circonferenza di raggio  $R$ . È lecito ipotizzare che il numero  $M$  di nodi (incroci) della rete cresca proporzionalmente alla superficie della città, quindi al quadrato del raggio  $M \propto R^2$ . Si definisca ora la variabile costo  $C$  della rete, la quale dipenderà sia dal numero di nodi che dalla lunghezza di scala della stessa, ossia  $C \propto MR^2$ . Unendo le due relazioni precedenti si ottiene  $C \propto M^{\frac{3}{2}}$  ed è possibile constatare che per

una città ideale come quella considerata il costo della logistica stradale cresca all'aumentare del numero di nodi. La nascita e lo sviluppo delle metropoli, avvenuta nell'ultimo secolo, ha quindi cause da ricercarsi non nel miglioramento della logistica quanto a cambiamenti nella mobilità, come l'introduzione di mezzi pubblici quali autobus, tram e metropolitane.

Per studiare questo fenomeno si sono evoluti negli anni diversi modelli, basati sia su approcci di tipo microscopico che macroscopico. Quale sia l'approccio migliore dipende, tuttavia, dal tipo di fenomeno di traffico che si sta studiando. Un punto di svolta sulla questione si ebbe nel 1959, quando da un modello microscopico basato sul *car-following* emerse una relazione macroscopica equivalente ad una transizione di fase [8]. Grazie a studi successivi si è poi arrivati ad una formulazione lagrangiana dei modelli di *car-following*, dipendente dai vincoli dinamici imposti agli agenti.

Scopo di questo lavoro è fornire un modello elementare di dinamica microscopica su network che riesca comunque a riprodurre i fenomeni macroscopici caratteristici dei flussi di traffico. In particolare, lo studio verte sull'analisi dei tre osservabili macroscopici principali, quali velocità, densità e flusso, sia in situazioni di equilibrio (traffico libero e congestioni), sia in transizioni di fase (ciclo di isteresi nel traffico).

# Capitolo 1

## Fisica del traffico

Nonostante il traffico possa apparire un'argomento nettamente distaccato dalla fisica, vi è un forte legame nascosto. È possibile, infatti, considerare ogni veicolo come una *particella elementare* vincolata a muoversi su una traiettoria unidimensionale. Questa particella deve ovviamente obbedire ad alcune regole: deve, ad esempio, spostarsi tra due punti  $A$  e  $B$  senza collidere con altre particelle.

Un modello di sistema complesso così definito è in grado di spiegare fisicamente fenomeni come le congestioni?

Negli ultimi 70 anni, diversi scienziati hanno sviluppato modelli e teorie sui flussi di traffico per comprenderne i fenomeni non lineari [9]. I primi modelli sono stati sviluppati da Reuschel (1950) e Pipes (1953), entrambi microscopici e rappresentanti il movimento di macchine in moto le une vicine alle altre su una strada a singola corsia. Caratteristica in comune è l'assunzione che la velocità di un veicolo dipenda linearmente sia dalla distanza dal veicolo precedente che dalla distanza dal successivo. Nonostante l'ipotesi sembrasse ragionevole, la mancanza di conferme sperimentali sancì il fallimento del modello. Pochi anni dopo, nel 1955, Lighthill, un famoso teorico della meccanica dei fluidi, e Whitham proposero un modello macroscopico per i flussi di traffico, in analogia con il comportamento dei fluidi. Le ipotesi alla base di questo modello sono la conservazione del numero di veicoli totali, ben giustificata, e l'esistenza di un'equazione di stato in grado di descrivere una relazione tra flusso di traffico (veh/h) e densità (veh/km). La seconda ipotesi, pur apparentemente ingiustificata, trovò presto conferme sperimentali. Inoltre, il modello riuscì a spiegare fenomeni come le *shock waves*, generate dal cambiamento del sistema verso uno stato con differenti densità e flusso. Nel 1958 vennero pubblicati i risultati della prima applicazione di un modello di *car-following*. Tale modello (e le rifiniture successive) si basa unicamente su concetti fisici: ogni veicolo viene descritto da una particella in un moto unidimensionale che accelerando varia la propria velocità in base alla velocità della particella che la precede. I risultati dello studio evidenziarono una forte correlazione tra l'accelerazione dei veicoli e la velocità dei precedenti, permettendo inoltre di stimare il tempo di reazione medio a 1 s (basandosi unicamente sulle

accelerazioni). È stato successivamente dimostrato che, in un modello di *car-following*, assumendo che ogni veicolo tenda a minimizzare l'integrale del quadrato della deviazione dal suo percorso ideale è possibile ottenere una formulazione lagrangiana del modello. Nel 1967, Reuben Smeed fece osservare che in determinate circostanze, un veicolo potesse giungere ad una determinata destinazione in un tempo inferiore partendo più tardi: questo fenomeno è noto come paradosso di Smeed. Un veicolo che si immette in una strada, infatti, ne aumenta la densità riducendone di conseguenza il flusso e la velocità media. Smeed fece notare come, immettendosi in una determinata strada in un istante di tempo successivo, la densità potesse essere diminuita nel frattempo: il veicolo potrebbe così mantenere una velocità superiore e percorrere il tratto in un tempo ridotto, compensando il ritardo in entrata. La risoluzione sta nel fatto che l'immissione di un veicolo sulla strada non causa *istantaneamente* una variazione di densità, ma questo si capì ad anni di distanza. Un'ulteriore approccio venne introdotto nel 1971 con la creazione di un modello di traffico stile Boltzmann, basato su proprietà statisticamente distribuite nel sistema.

Altro problema inerente al traffico riguarda l'assegnazione del percorso ad ogni veicolo presente sulla rete. Idealmente, ogni veicolo dovrebbe minimizzare il tempo di percorrenza calcolato dalla sorgente alla destinazione. I primi contributi in questo ambito furono ad opera di Wardrop che nel 1952 propose due differenti principi su cui basare l'assegnazione del percorso. Il primo principio prevedeva il medesimo tempo di percorrenza su ogni strada connettente sorgente e destinazione fissate e un tempo maggiore sulle strade inutilizzate. Il secondo principio prevedeva, invece di minimizzare il tempo medio di percorrenza considerando tutto il network. successivamente furono poi effettuati studi includendo ulteriori accortezze come effetti non lineari, perturbazioni e instabilità, fino ad arrivare ad una teoria sull'assegnazione dinamica del traffico, in cui la generazione del traffico è una vera e propria funzione del tempo. Gli algoritmi legati a questa teoria possono, tuttavia, condurre a paradossi come quello di Smeed e sono tuttora oggetto di studi. Così come difetti e impurità sono importanti per le transizioni di fase nei sistemi fisici, i *bottleneck* (ingorghi) lo sono per i sistemi di traffico. Le congestioni si verificano, infatti, prevalentemente laddove vi sono ingorghi. Le cause di questi ultimi sono molteplici e spesso legate alla struttura stessa della strada: alcuni esempi possono essere una improvvisa riduzione delle corsie, cantieri stradali, curve, ecc. Si è osservato che la capacità di un sistema congestionato, ossia di un sistema nell'istante dopo un ingorgo, è inferiore alla capacità del sistema stesso in condizioni di traffico libero: è il fenomeno chiamato *capacity drop*. Durante una congestione, si viene a creare il fenomeno di *stop-and-go*, una sequenza di ingorghi differenti in movimento, ciascuno limitato spazialmente dal precedente e dal successivo. All'interno di ogni ingorgo la velocità media tende ad essere molto bassa (spesso anche nulla, da qui il nome *stop-and-go*) e la densità è molto alta. Nelle congestioni sono stati osservati anche altri fenomeni, tra i quali rientrano anche cicli di isteresi.

I modelli di traffico trovarono presto diverse applicazioni nella realtà, non tutte con

risultato positivo. A New York fu limitato il traffico nel Lincoln Tunnel con un apposito computer, per evitare la creazione di congestioni al suo interno. Tuttavia, il progetto fallì in quanto causa delle congestioni era in realtà la struttura stessa del tunnel che, costringendo i veicoli a fermarsi e ripartire in alcuni punti, mise in evidenza un ciclo di isteresi dovuto alle differenti capacità di accelerazione di veicoli pesanti e leggeri. Anche Londra vennero utilizzati modelli di traffico per creare un piano di riurbanizzazione, poi abbandonato a causa dei costi elevati per la ricostruzione del sistema stradale.

# Capitolo 2

## Modelli di traffico

### 2.1 Osservabili macroscopici

Prima di iniziare a modellizzare il problema è necessario domandarsi quali siano gli osservabili macroscopici principali e come siano legati tra di loro [10]. La descrizione di un sistema a livello macroscopico risulta critica ai fini della descrizione della dinamica.

#### 2.1.1 Densità

La densità è una variabile tipicamente fisica adottata nella teoria del traffico. La densità  $\rho$  rappresenta il numero di veicoli per unità di lunghezza della strada. Sia ora  $\Delta x$  la lunghezza di una strada in cui sono presenti  $n$  veicoli, allora ad un tempo generico  $t$  si ha che

$$\rho(n, t, \Delta x) = \frac{n(t)}{\Delta x}$$

La densità si esprime in veicoli al kilometro (veh/km). Tipicamente per ogni corsia di una strada si ha una  $\rho_{max} \sim 10^2$  veh/km. Si osservi ora come moltiplicando e dividendo per un infinitesimo temporale  $dt$  il denominatore divenga l'area dell'intervallo di misura  $S$ . In particolare

$$\rho(t, \Delta x, S) = \frac{n(t)dt}{\Delta x dt} = \frac{\text{tempo totale trascorso in } S}{S} \quad (2.1)$$

#### 2.1.2 Flusso

Il flusso  $\Phi$  rappresenta il numero  $m$  di veicoli che attraversano un certa località  $x$  in un intervallo di tempo  $\Delta t$

$$\Phi(m, x, \Delta t) = \frac{m}{\Delta t} \quad (2.2)$$

Il flusso è espresso in veicoli all'ora (veh/h). Considerando ora un intorno infinitesimo  $dx$  di  $x$  è possibile ricavare la dipendenza più generale

$$\Phi(x, \Delta t, S) = \frac{m dx}{\Delta t dx} = \frac{\text{distanza totale percorsa dai veicoli in } S}{S} \quad (2.3)$$

### 2.1.3 Velocità media

La velocità media è definita come il rapporto tra il flusso e la densità: si nota immediatamente come questa non dipenda dall'area dell'intervallo di misura. Unendo le Eq. (2.3) e (2.1):

$$\bar{v}(x, t, S) = \frac{\Phi(x, \Delta t, S)}{\rho(t, \Delta x, S)} \quad (2.4)$$

La relazione fondamentale della teoria dei flussi di traffico è riassumibile nella:

$$\Phi = \rho \bar{v} \quad (2.5)$$

## 2.2 Diagrammi Fondamentali Macroscopici

A causa della relazione fondamentale del traffico riportata in Eq. (2.5) risulta chiaro come su tre osservabili analizzati si abbiano solamente due variabili indipendenti.

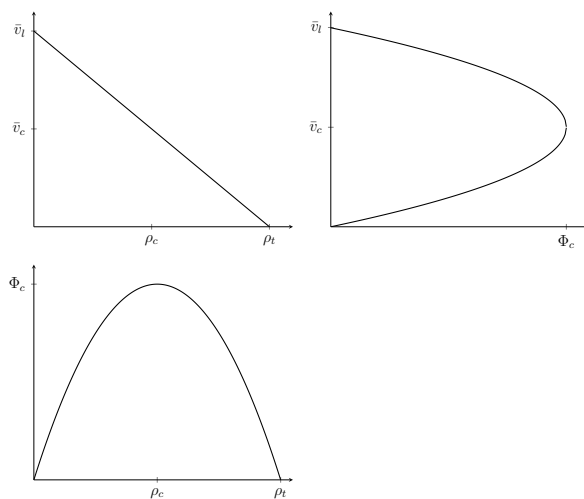


Figura 2.1: *Diagrammi Fondamentali Macroscopici di Greenshield.*

In una situazione stazionaria (rete in equilibrio) è possibile descrivere il sistema graficamente con tre diagrammi, detti Diagrammi Fondamentali Macroscopici (DFM):  $\bar{v}$ - $\Phi$ ,  $\Phi$ - $\rho$  e  $\bar{v}$ - $\rho$ . La prima formulazione di questi, riportata come esempio in Fig. 2.1, è stata

effettuata da Greenshield sulla base di alcune misurazioni da lui eseguite. Assumendo lineare la relazione tra  $\rho$  e  $\bar{v}$  le relazioni negli altri due diagrammi risultano paraboliche. In particolare, si ottengono un massimo di flusso sia a  $\rho_c = \frac{\rho_t}{2}$  sia per  $\bar{v}_c = \frac{\bar{v}_l}{2}$ , con  $\rho_j$  e  $\bar{v}_l$  capacità e velocità massime, rispettivamente. Studiando i diagrammi fondamentali è possibile suddividere le condizioni di traffico in tre regimi:

- *Completamente Libero*

Quando i veicoli non sono condizionati dal traffico ed è per loro possibile viaggiare alla velocità massima  $\bar{v}_l$ , ossia la velocità *libera*. La velocità libera dipende solo dalla geometria e dalle restrizioni applicate ad una strada. Si osservi come per questo valore di velocità si abbiano un flusso e una densità prossimi allo 0.

- *Saturo*

Nelle strade sature il flusso e la velocità tendono a 0 e i veicoli si accodano ad una densità massima  $\rho_t$  (densità di *traffico*).

- *in Capacità*

La capacità della strada eguaglia il flusso massimo  $\Phi_c$ , il quale ha associate una densità  $\rho_c$  e una velocità  $\bar{v}_c$ . Si ha sempre  $\bar{v}_c < \bar{v}_l$ .

## 2.3 Networks

In generale, per costruire un qualsiasi modello fisico è necessaria una base matematica di partenza. Nell'ambito degli studi di traffico è largamente utilizzata la teoria dei network per rappresentare le reti stradali e lavorare su di esse.

Formalmente, un network è descritto da una matrice di adiacenza  $\mathcal{A}_{ij} = \{0, 1\}$  in cui la cella  $(i, j)$  assume il valore 1 se il nodo  $i$  è connesso al nodo  $j$ , 0 altrimenti. Nel caso di network stradali è convenzione considerare matrici di adiacenza simmetriche, tali che  $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji}$ . Affiancata alla matrice di adiacenza si usa definire spesso la matrice dei pesi  $\mathcal{W}_{ij}$ , la quale definisce il peso di ciascun collegamento tra nodi. In particolare, la matrice  $\mathcal{W}_{ij}$  possiede le seguenti proprietà:

- $\mathcal{A}_{ij} = 0 \implies \mathcal{W}_{ij} = 0$ ;
- $\mathcal{A}_{ij} = 1 \implies \mathcal{W}_{ij} \neq 0$ .

Dalla matrice di adiacenza è possibile definire il grado del nodo  $i$ -esimo come

$$d_i = \sum_j \mathcal{A}_{ij}$$



che indica il numero dei link per ogni nodo.

Una volta note le matrici di adiacenza e il vettore dei gradi la matrice Laplaciana del network è definita come

$$\mathcal{L}_{ij} = d_i \delta_{ij} - \mathcal{A}_{ij} \quad (2.6)$$

ed ha le seguenti proprietà:

- è semi-definita positiva;
- $\mathcal{L}_{ij} > 0 \iff i = j$ ;
- $\sum_j \mathcal{L}_{ij} = \sum_i \mathcal{L}_{ij} = 0$ , quindi esiste un autovalore nullo  $\lambda_0$  con corrispondente autovettore  $\vec{v}_0 = (1, \dots, 1)$ ;
- $\sum_i \mathcal{L}_{ii} = 2m$ , dove  $m$  è il numero totale dei link.

La presenza di più autovalori nulli all'interno della matrice Laplaciana evidenzia una disconnessione del network (un approfondimento è presente in Appendice A). In particolare, dati un numero  $x$  di autovalori nulli il network è separabile in altrettanti subnetwork non connessi tra loro.

### 2.3.1 Random Walk su network

Si assuma ora che la rete abbia in totale  $M$  nodi e che ognuno di essi possa scambiare particelle coi suoi vicini. Sia  $\pi_{ij}$  la matrice stocastica che definisce la probabilità che una particella effettui il viaggio tra nodi  $j \rightarrow i$ . Questa possiede le seguenti proprietà:

- $\mathcal{A}_{ij} = 0 \implies \pi_{ij} = 0$ ;
- $\sum_j \pi_{ij} = 1$ .

Assumendo inoltre di avere  $N$  particelle nella rete, è possibile definire la funzione  $\delta_\alpha(i, t)$  che vale 1 se la particella  $\alpha$  si trova nel nodo  $i$  al tempo  $t$ , 0 altrimenti.

Ogni particella segue quindi la dinamica

$$\delta_\alpha(i, t + \Delta t) = \sum_j \xi_{ij}^\alpha \delta_\alpha(j, t)$$

dove  $\xi_{ij}^\alpha$  è una matrice random che prende valori della base standard  $\hat{e}_i \in \mathbb{R}^M$  con probabilità  $\pi_{ij}$ . Il numero di particelle nel nodo  $i$  al tempo  $t$  è dato da

$$n_i(t) = \sum_\alpha \delta_\alpha(i, t)$$

ed è possibile dimostrare [11] che la seguente equazione è un integrale del moto

$$\sum_i n_i(t) = N \quad (2.7)$$

## Capitolo 3

### Costruzione del modello

Si consideri ora un network generato dalla matrice di adiacenza simmetrica  $\mathcal{A}_{ij}$  i cui nodi rappresentano gli incroci di una rete stradale. Alla matrice di adiacenza è associata una matrice dei pesi  $\mathcal{S}_{ij} \geq 0$  che, associando un diverso peso ad ogni link, definisce la lunghezza delle strade. Su questo network si definiscano ora le classi di agenti  $C_1, \dots, C_k$ , ognuna delle quali caratterizzata da un nodo sorgente  $s$  e destinazione  $d$  e denotate come  $C_\alpha(s, d)$ . Ogni individuo dovrà, nel corso della simulazione, muovere tra i nodi  $s \rightarrow d$  in modo da seguire la geodetica, ossia il percorso più breve. Il costo di un percorso, tuttavia, non viene calcolato sulla base della lunghezza: data la mobilità dei veicoli, risulta più accurato considerando il tempo di percorrenza. A tale fine si definisca ora un'altra matrice dei pesi  $\mathcal{V}_{ij} \geq 0$  rappresentante la velocità massima alla quale un agente può andare su una determinata strada. L'elemento di matrice

$$\mathcal{T}_{ij} = \begin{cases} \frac{\mathcal{S}_{ij}}{\mathcal{V}_{ij}} & \mathcal{V}_{ij} \neq 0 \\ 0 & \mathcal{V}_{ij} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

rappresenta dunque il costo temporale associato al link  $i \rightarrow j$ .

Discretizzando il tempo con un passo  $\Delta t$ , si è ora interessati a calcolare il costo di un percorso. Considerando un path generico a  $k$  step  $A^c = \{a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_c\}$ , con  $a_0 = s$  e  $a_c = d$ , il costo del percorso è esprimibile come

$$G = c\Delta t \quad (3.2)$$

dove  $c \in \mathbb{N}$ . Nel limite di individui non interagenti tra di loro è quindi possibile calcolare costo della geodetica, chiamata *best path*, come

$$G_{\text{best}} = c_{\text{best}}\Delta t = \min_{A^c} \left\{ \sum_{i=1}^{c-1} \mathcal{T}_{i,i+1} \right\} \quad (3.3)$$

Questo limite risulta molto stringente, in quanto nella realtà ogni veicolo presente sulla strada è evidentemente influenzato dalla presenza degli altri. Tuttavia, lo scopo del modello è l'analisi macroscopica delle congestioni, quindi dettagli microscopici come questo

si sono potuti trascurare. Si assuma ora che gli agenti muovano sulla rete seguendo un moto stile random walk. Per ogni classe di individui  $C_\alpha$  è quindi necessario definire una matrice stocastica (di transizione)  $\pi_{ij}^\alpha$  con le proprietà descritte nella sezione precedente. Nella realtà una strada ha una capacità finita, intesa come numero massimo di veicoli presenti su di essa in un generico istante di tempo  $t$ . Tale vincolo viene implementato nel modello tramite l'introduzione di una densità massima  $\rho_{max}$  caratteristica di ogni strada: questa dipenderà, naturalmente, sia dalla lunghezza della strada che dalla lunghezza dei veicoli circolanti su di essa. Assumendo la lunghezza media dei veicoli sia un valore fissato  $\bar{l}_v$  e la lunghezza di una strada generica sia  $l_s$ , la densità massima è calcolabile come

$$\rho_{max} = \frac{\bar{l}_v}{l_s} \quad (3.4)$$

Si osservi come il valore di  $l_s$  sia sempre noto, essendo un elemento della matrice  $\mathcal{S}$ .

### 3.1 Algoritmo di evoluzione

È ora necessario definire come i veicoli muovano effettivamente sul network. La probabilità di transizione di ogni classe  $\pi_{ij}^\alpha$  viene assegnata nel modo seguente:

- fissato il nodo di partenza  $i$  si inizia a scorrere sul passo successivo nel nodo  $j$ ;
- se il nodo  $j$  si trova sul percorso  $G_{best}$ , definito dall'Eq. (3.3), allora viene assegnato un peso  $\pi_{ij} = 1$ ;
- altrimenti, se il link esiste ( $\mathcal{A}_{ij} \neq 0$ ) viene assegnato un peso  $\pi_{ij} = \tanh \beta T$ , dove  $\beta$  è un parametro di controllo del modello e  $T$  rappresenta una temperatura statistica;
- una volta controllati tutti i possibili  $j$  il vettore riga  $i$ -esimo viene poi normalizzato in modo tale da avere  $\sum_j \pi_{ij} = 1$ .

Si osservi che grazie all'introduzione della temperatura statistica  $T$ , graficata in Fig. 3.1, è possibile permettere agli agenti di “sbagliare” percorso e uscire dalla geodetica, introducendo così delle fluttuazioni. Inoltre, per  $T \rightarrow \infty$  l'evoluzione del sistema diventa equivalente ad un random walk su network in quanto ogni scelta di percorso ha la medesima probabilità.

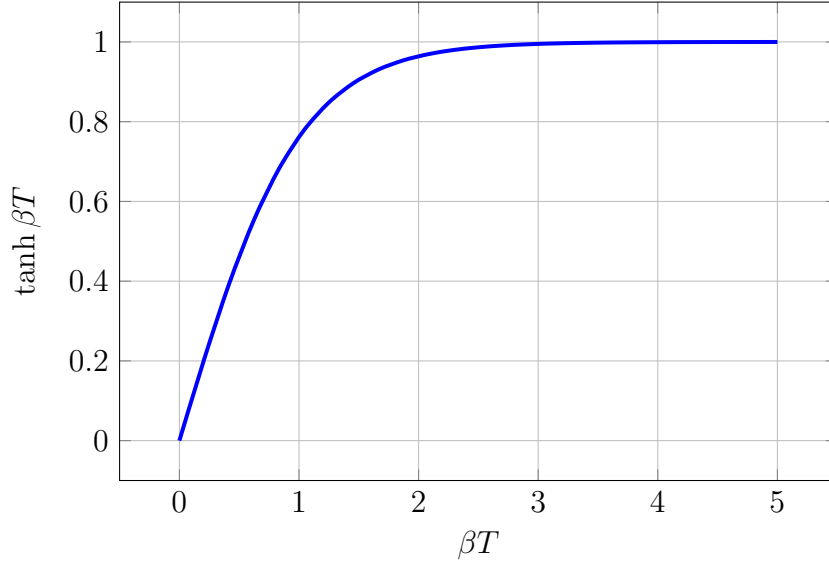


Figura 3.1: *Probabilità di errore in funzione della temperatura statistica.*

Considerando ora un individuo generico appartenente alla classe  $C_\alpha$  si procede nel modo seguente:

- si controlla se sia in grado di muoversi, quindi se  $c = 0$ . In caso negativo si sconta uno step temporale  $c = c - 1$  e si prosegue con gli altri veicoli;
- in caso affermativo, il passo successivo sarà deciso stocasticamente dalla matrice  $\pi_{ij}^\alpha$ ;
- se la strada di arrivo è piena si perde uno step temporale, altrimenti l'individuo si immette sulla strada che connette i nodi  $i \rightarrow j$  regolando la sua velocità secondo la legge

$$v(t) = v_{max} \left( 1 - k \frac{\rho(t)}{\rho_{max}} \right) \quad (3.5)$$

dove  $\rho(t)$  rappresenta la densità di veicoli presenti sulla strada al tempo  $t$  e  $k$  è un parametro di controllo del modello;

- in base alla velocità acquisita all'individuo viene poi assegnata una nuova penalità temporale  $c = \frac{L}{v(t)\Delta t}$ , con  $L$  lunghezza della strada in cui si trova.

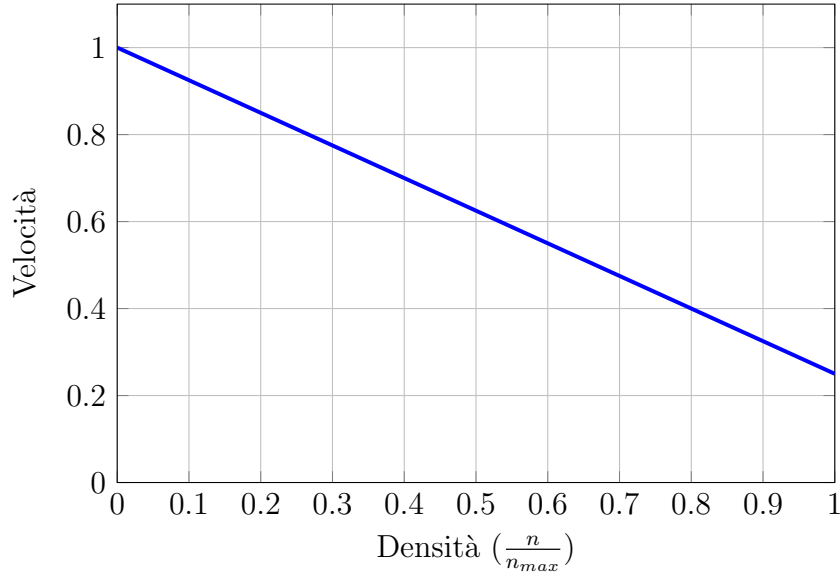


Figura 3.2: *Ipotesi dell'andamento della velocità in funzione della densità per  $k = 0.75$ .*

Si noti come l'Eq. (3.3), graficata in Fig. 3.2, tenda all'ipotesi di Greenshield per  $k = 1$  (cfr. Eq. (2.1)).

## 3.2 Parametri di controllo

Durante la costruzione del modello sono emersi alcuni parametri da cui esso dipende che vengono esplicitamente richiesti in input. Questi sono:

- *Lunghezza media dei veicoli*, rappresentata dal parametro  $\bar{l}_v$  presente in Eq. (3.4). Si nota immediatamente come la densità massima sulle strade dipenda da esso e, di conseguenza, anche flusso e densità (cfr. Eq. (2.1));
- Coefficiente  $k$  della temperatura statistica, rappresenta il grado di crescita delle fluttuazioni statistiche presenti nel sistema;
- *Velocità minima su una strada*, rappresenta la velocità corrispondente alla densità massima, come espresso in Eq. (3.5). Da questa dipenderà naturalmente l'evoluzione temporale del sistema stesso;
- *Flusso di veicoli immessi*, ossia il numero di veicoli immessi nella rete per unità di tempo;
- *Tempo di esecuzione*, il quale deve essere impostato in base al tipo di fenomeno che si vuole osservare.

Naturalmente la simulazione dipende dalle caratteristiche geometriche del sistema, come la rete stessa (inserita come matrice di adiacenza) e le classi di veicoli.

- *Lunghezza media dei veicoli*

# Capitolo 4

## Risultati

Nella sezione precedente si è costruito il modello ed è emerso come questo si basi su alcuni parametri di controllo. Variando questi parametri è di fatto possibile ottenere risultati estremamente diversi tra di loro, permettendo lo svolgimento di più studi. In particolare, verranno effettuate tre tipologie di studi dove il caricamento della rete viene effettuato omogeneamente (inserendo contemporaneamente lo stesso numero di veicoli su tutte le strade):

- *Carico costante*: il reticolo viene sottoposto ad un carico costante per un certo lasso di tempo;
- *Carico piccato*: il reticolo viene sovraccaricato nei primi istanti, durante i quali nessun veicolo può uscire, in modo tale da creare una congestione. Successivamente i veicoli vengono lasciati liberi di uscire dalla rete per permetterne lo svuotamento e studiarne gli effetti;
- *Carico periodico*: il reticolo viene caricato nel tempo con una funzione sinusoidale, volta a rappresentare le diverse fasi di carico a cui una normale rete stradale è soggetta nell'arco di una giornata;

### 4.1 Reticolo omogeneo

Si consideri ora un network composto da 120 nodi disposti in un reticolo 10x12. Su questo, si definiscano 16 differenti classi di veicoli, le cui sorgenti sono i nodi 1, 4, 7, 10 e le cui destinazioni sono i nodi 109, 112, 115, 118. Risulta evidente dalla FIGURA CHE MANCA come i veicoli scorrano da un lato all'altro del reticolo. Ogni strada abbia lunghezza e velocità massima fissate a 500 m e 50 km/h, rispettivamente. Si ponga ora la lunghezza media di un veicolo pari a 8 m, la velocità minima su una strada pari a  $v_{min} = \frac{3}{4}v_{max}$  e una probabilità di errore dell'8%.

### 4.1.1 Carico costante

Si vuole, come prima cosa, sottoporre il sistema ad un carico costante. In questo modo si dovrebbe evitare la formazione di congestioni, lasciando al sistema la capacità di trasporto. Il sistema viene quindi sottoposto ad un carico costante di 250 ogni 60 s, fino a un tempo di 3.33 h, per un tempo totale di 4.15 h, lasciandoli liberi di uscire dalla rete una volta giunti a destinazione. Ci si aspetta così una crescita iniziale della densità media, la quale si mantiene costante fintantoché nuovi veicoli vengono immessi nel sistema. L'obiettivo è, infatti, avere tanti veicoli che escono quanti ne entrano.

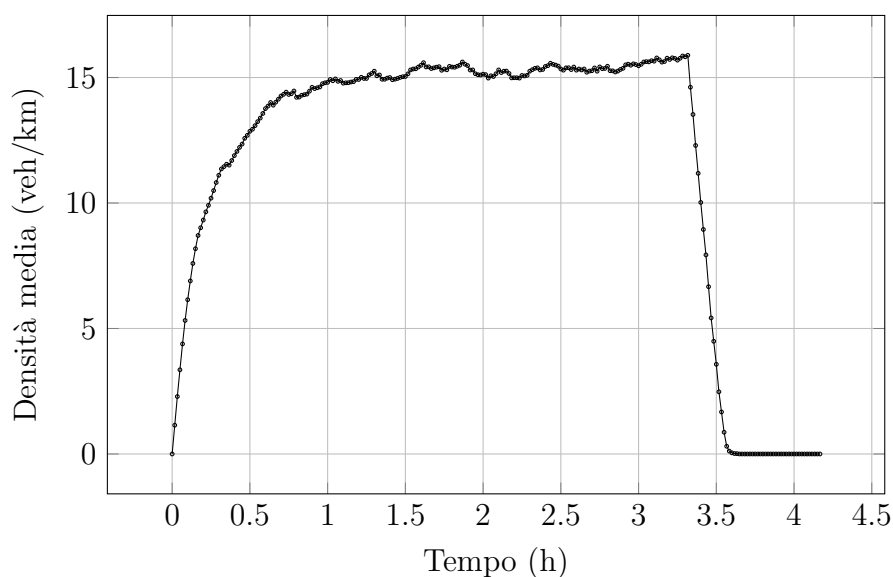


Figura 4.1: *Densità media per un reticolo omogeneo con carico costante.*

In Fig. 4.1 si può notare l'innalzamento iniziale, fino a circa 1.5 h, poi un regime pressoché costante fino a 3.33 h, seguito da una rapida discesa. Nell'arco temporale in cui la densità è stabile, ossia da 1.5 h a 3.3 h, ci si aspetta un regime di traffico completamente libero. L'ipotesi è verificata in Fig. 4.2 dove, graficando il numero di strade in funzione della densità a 2 h, si può notare come la quasi totalità di esse abbia densità minima.



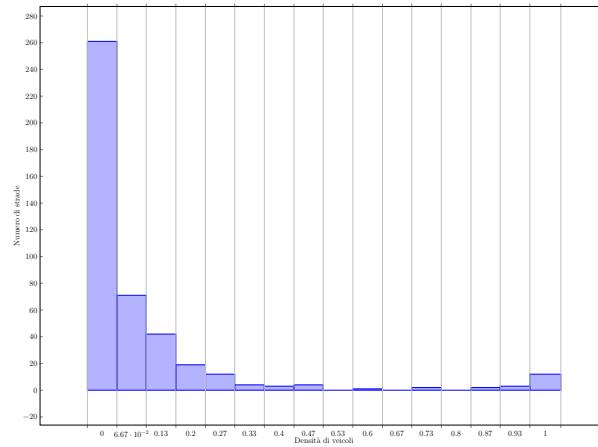


Figura 4.2: *Distribuzione strade non congestionate per un reticolo omogeneo.*

Non formandosi nessuna congestione ci si aspetta che il sistema si svuoti allo stesso modo in cui si è riempito. In Fig. 4.3 è graficata la dipendenza tra i valori medi del flusso e della densità. In particolare, si nota come il grafico sia effettivamente una retta, il che implica che la curva di scarico sia sovrapposta a quella di carico.

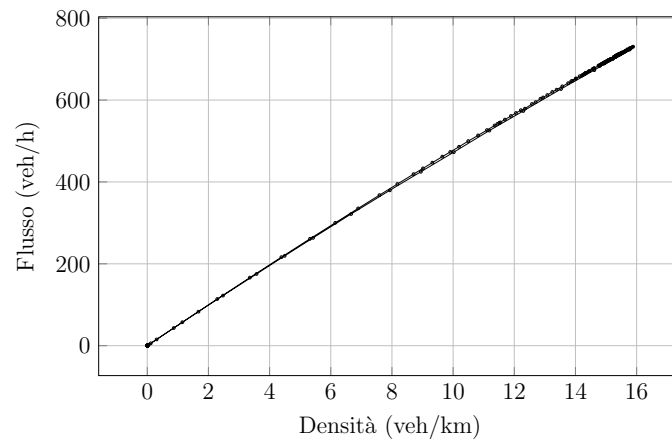


Figura 4.3: *Diagramma flusso/densità medi per un reticolo omogeneo sottoposto ad un carico costante.*

#### 4.1.2 Carico piccato

Si inserisca ora nel sistema un totale di 25000 veicoli, suddivisi in 2500 veicoli ogni 50 s, consentendone la fuoriuscita dal reticolo. Si osserva così in Fig. 4.4 un picco iniziale della densità media: questo rappresenta il sovraccarico del sistema.

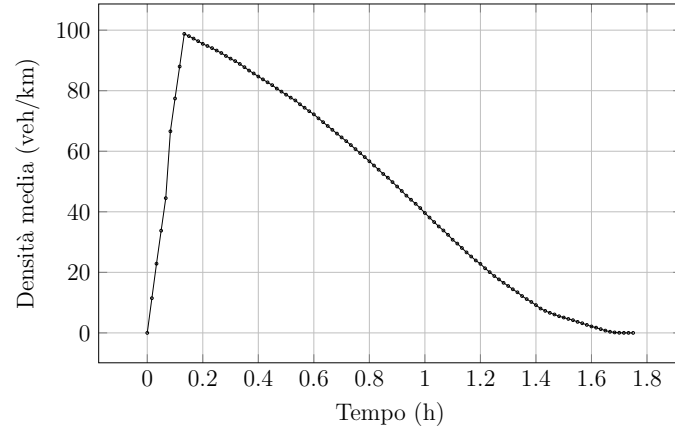


Figura 4.4: *Densità media per un reticolo omogeneo sovraccaricato.*

Una volta caricato il sistema ci si aspetta che la distribuzione di veicoli nelle strade non resti omogenea nel tempo: gli agenti presenti sul sistema tenderanno ad occupare le strade costituenti i loro *best path* e a lasciare vuote quelle più lontane da essi.

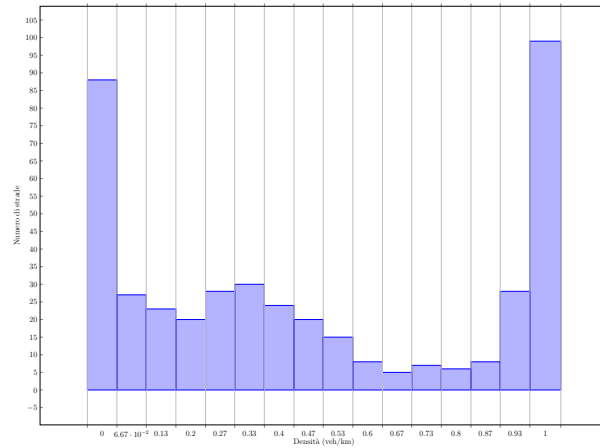


Figura 4.5: *Distribuzione strade congestionate per un reticolo omogeneo.*

In Fig. 4.5 è visibile il diagramma caratteristico della congestione, in cui sono presenti, come atteso, un gran numero di strade vuote e altrettante saturate. In questo istante di tempo, pari a 1.75 h da inizio simulazione, ci si aspetta dunque che i diagrammi fondamentali siano confrontabili con quelli in Fig. 2.1: questa ipotesi è confermata dalla Fig. 4.6.

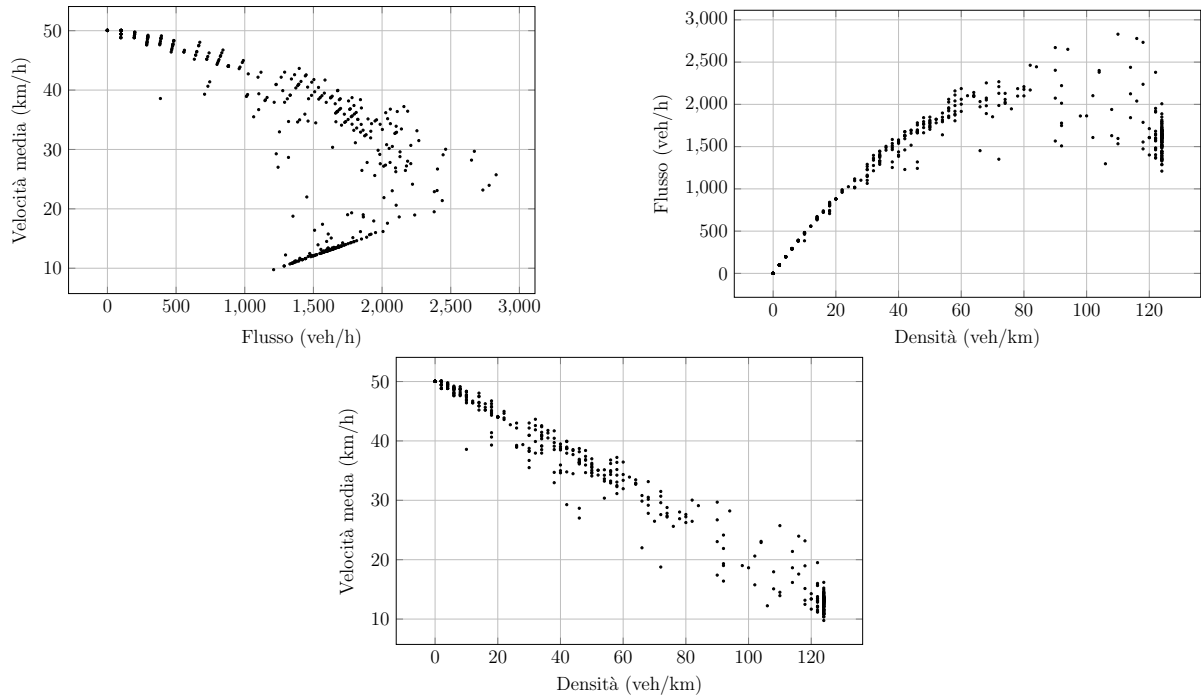


Figura 4.6: *Diagrammi fondamentali macroscopici di una congestione in un reticolo omogeneo.*

Secondo la teoria dei flussi di traffico, un sistema congestionato tende a risolvere la congestione in modo differente da come questa si è formata: questo fenomeno causa la formazione di un ciclo di isteresi, visibile in Fig. 4.7.

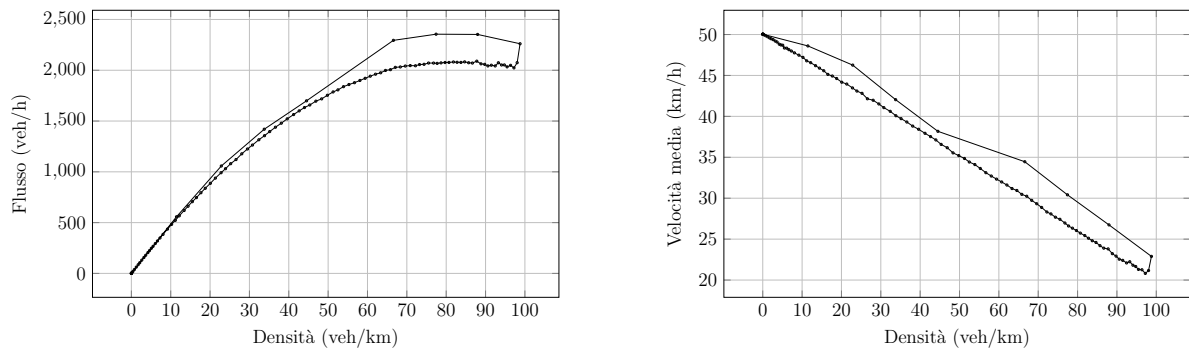


Figura 4.7: *Ciclo di isteresi per un reticolo omogeneo sovraccaricato.*

Si può notare come sia il flusso che la densità crescano fino a un punto critico nel quale si ha un calo drastico del flusso dovuto all'eccessiva presenza di veicoli sulle strade. Il sistema risulta qui congestionato e perde la capacità di trasporto. Permettendo ai

veicoli di uscire senza rientrare, si inizia a scaricare il sistema: lo scarico, che avviene gradualmente, prevede un ritorno alla stabilità lungo una traiettoria differente rispetto alla fase di carico. Tale differenza è visibile sia sul piano  $\Phi/\rho$ , sia sul piano  $\bar{v}/\rho$ .

### 4.1.3 Carico periodico

Si vuole ora sottoporre il sistema ad un carico realistico, quindi variabile nell'arco di una giornata. Per semplicità si decide di trascurare il carico notturno, in quanto nella maggior parte dei casi lascia il sistema in uno stato di traffico completamente libero. Durante il giorno, invece, dalle acquisizioni reali (MANCA REF) si notano diversi picchi: il primo al mattino verso le ore 9:00, il secondo all'ora di pranzo, verso le 13:00 e il terzo al rientro serale, alle 17:00. Gli orari dei picchi sono stati leggermente approssimati in modo tale da semplificare la funzione in ingresso, la quale deve avere un picco ogni 4 ore. Assumendo come orario di inizio simulazione le 5:45 del mattino, si immettano veicoli uniformemente nel sistema secondo la seguente funzione:

$$\Delta n(t) = A \left| \sin \left( \frac{2\pi}{T} t \right) \right| \quad (4.1)$$

con  $A = 2200$  veh e  $T = 32400$  s. In questo caso, non vi è accumulo di veicoli: in ogni istante i veicoli che giungono a destinazione vengono eliminati. Ci si aspetta in questo modo che, avendo la funzione tre picchi, il sistema compia tre cicli di caricamento e scaricamento.

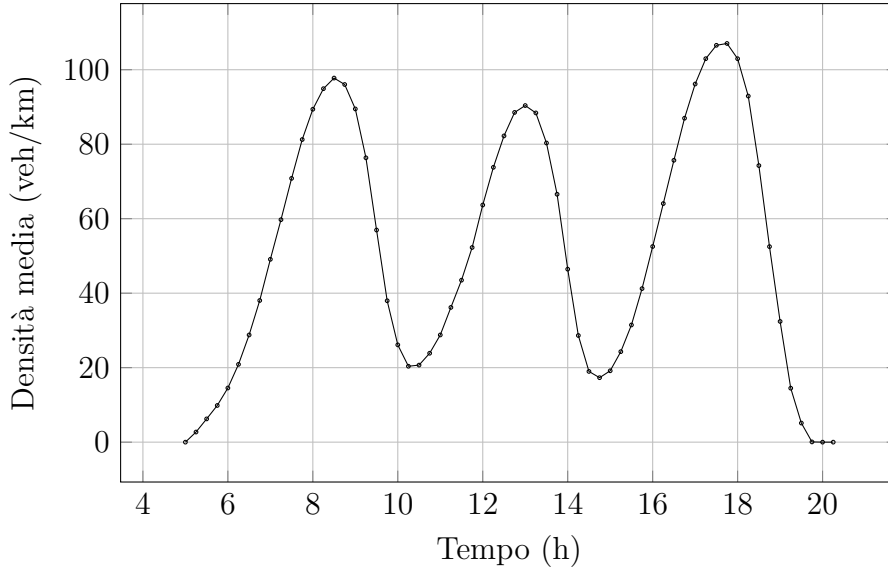


Figura 4.8: *Variazione della densità media delle strade della rete nel tempo. Si possono notare tre picchi: il primo alle 8:45, il secondo alle 13:00 e il terzo alle 17:45.*

I tre picchi sono ben visibili in Fig. 4.8. A ogni picco corrisponde una fase di carico/scarico, quindi, come osservato precedentemente in Fig. 4.7, ci si aspetta la presenza di tre cicli di isteresi.

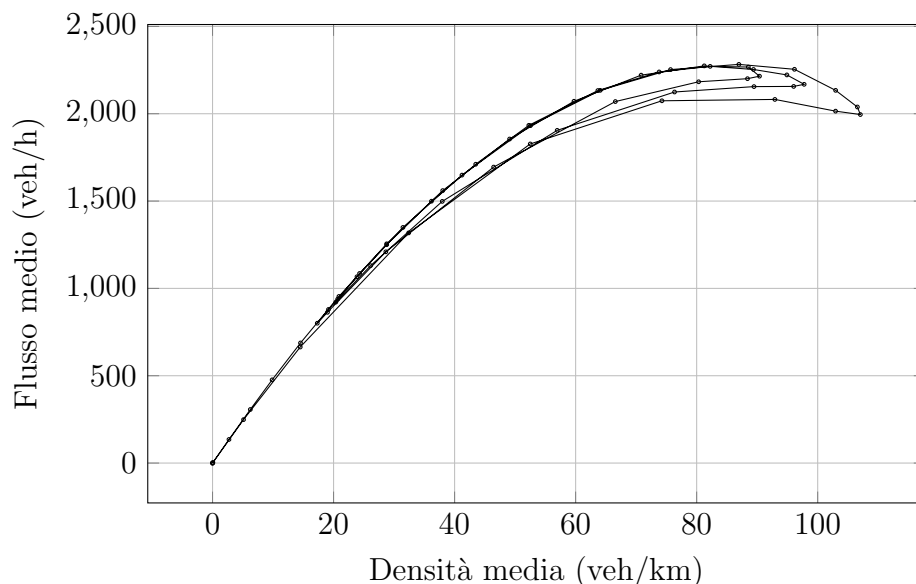


Figura 4.9: *Cicli di isteresi sul piano  $\Phi/\rho$  per un reticolo omogeneo caricato periodicamente.*

Come si può notare in Fig. 4.9 sono effettivamente presenti tre diversi cicli di isteresi. Si osserva, inoltre, che il secondo ciclo ha ampiezza inferiore, essendo il picco di densità meno pronunciato.

## 4.2 Rete stradale di Rimini (?)

## 4.3 Discussione

L'analisi dei diagrammi fondamentali macroscopici condotta in diverse situazioni ha evidenziato una forte dipendenza tra i valori medi di flusso, velocità e densità. Inoltre, è emerso un legame evidente tra la formazione di congestioni e la presenza di cicli di isteresi nei diagrammi dei valori medi di flusso e densità.

L'analisi del reticolo omogeneo ha evidenziato comportamenti altamente dipendenti dalla tipologia di carico a cui esso è stato sottoposto. In particolare, nel caso di un carico costante, si è evitata completamente la creazione di congestioni, mantenendo il sistema in un costante stato di traffico completamente libero. La mancata formazione di

congestion non ha, inoltre, permesso la formazione di cicli di isteresi, fatto osservabile negli altri due casi riportati. Una volta sottoposto ad un carico piccato, infatti, il sistema si è congestionato, riducendo la propria capacità di trasporto. La riduzione della capacità di trasporto è associabile al rapido calo del flusso medio osservabile in Fig. 4.7. Nella stessa figura si può notare la presenza di un ciclo di isteresi dovuto alla congestione stessa, che va a chiudersi una volta permesso al sistema di svuotarsi. Analogamente al caso precedente, nel caso di un carico periodico si osservano, in Fig. 4.9, tre cicli di isteresi differenti, ognuno corrispondente ad un diverso picco della densità media (cfr Fig. 4.8).

Nonostante il modello riproduca egregiamente numerose caratteristiche delle congestioni di traffico risulta sostanzialmente incompleto. Manca, ad esempio, la possibilità di ricalcolare i *best path* in base alle condizioni istantanee di traffico, oltre all'implementazione di alcune caratteristiche tipiche degli OVM (*Optimal Velocity Model*) come la dipendenza della velocità e della distanza di un veicolo in base al precedente. Ulteriori studi potrebbero essere svolte per verificare come queste revisioni impattino sui DFM, anche prese singolarmente.

# Appendice A

## Esempi di matrici Laplaciane

Si vuole qui dare un esempio di come una matrice Laplaciana venga realmente costruita e una breve analisi degli autovalori. Si consideri come primo esempio il network completamente connesso rappresentato in Fig. A.1.

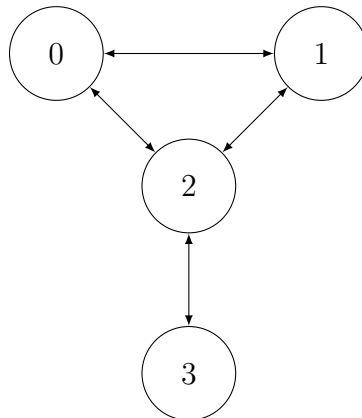


Figura A.1: *Esempio network connesso.*

Questo è descritto dalla matrice di adiacenza:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

La matrice Laplaciana costruita dalla definizione risulta

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

la quale possiede autovalori 0, 1, 3, 4. In particolare, si nota la presenza dell'autovalore nullo, come previsto teoricamente.

Si esegua ora la stessa analisi per un network sconnesso, come quello in Fig. A.2.

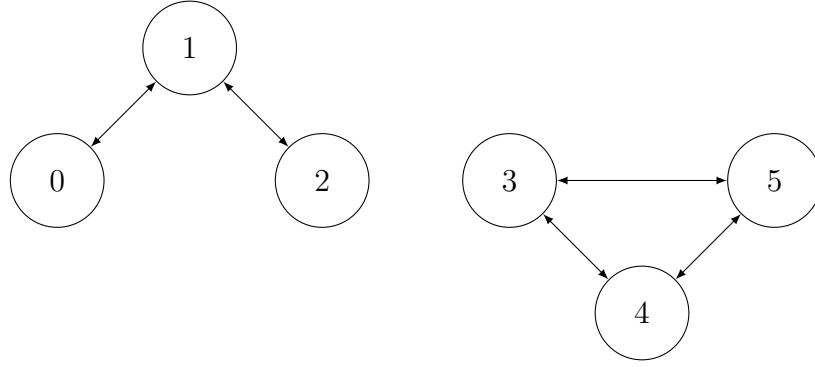


Figura A.2: *Esempio network sconnesso.*

La matrice di adiacenza è

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

La matrice Laplaciana in questo caso diviene

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

ed ha autovalori 0, 0, 1, 2, 3, 3. Anche in questo caso vi sono due autovalori nulli, essendo il network sconnesso, come previsto dalla teoria



# Appendice B

## Implementazione

Il modello descritto in precedenza è stato implementato tramite un software scritto in C++.

### B.1 Classi

Sfruttando la programmazione a oggetti su cui è basato il linguaggio C++ si è diviso il modello in varie classi.

#### B.1.1 VehicleType

La classe a livello inferiore è *VehicleType* che, come suggerisce il nome, definisce una tipologia di veicolo. In questo modello ogni veicolo è caratterizzato dai parametri di input nodo sorgente e nodo destinazione. Tuttavia, per muoversi sul network, ogni tipologia di veicolo necessita anche di una matrice di transizione contenente le probabilità di effettuare o meno un passo in una specifica direzione. Questa matrice viene solo dichiarata come parametro della classe e viene impostata dopo la definizione del network.

#### B.1.2 Vehicle

Dopo aver definito le tipologie di veicoli è necessario definire anche i veicoli stessi. La classe *Vehicle* rappresenta gli agenti che andranno a muoversi sul network stradale. Un vettore statico di *VehicleType* permette ad ogni veicolo di avere una tipologia definita, tramite un parametro indiciale che determina la posizione nel vettore. Ogni agente ha inoltre due coordinate che ne definiscono la posizione: nodo attuale e strada attuale. Per permetterne il movimento nel tempo sono presenti altri due parametri, non necessari in input, rappresentanti la velocità del veicolo, dettata dalla strada sulla quale si trova, e la penalità di tempo che questo deve scontare, dipendente sia dalla velocità del veicolo stesso sia alla densità di veicoli presente sulla strada in cui si trova.

### B.1.3 Street

Una volta definiti i veicoli è necessario definire le proprietà dei collegamenti tra i vari nodi (incroci) della rete. Ogni istanza della classe *Street* rappresenta un collegamento tra due nodi. I parametri da fornire come input per distinguere una strada in maniera univoca sono l'indice del nodo sorgente e l'indice del nodo destinazione. Si presti ora attenzione al fatto che ogni strada abbia una direzione: considerando due nodi generici  $i$  e  $j$ , la strada che connette  $i \rightarrow j$  sarà differente dalla strada che connette  $j \rightarrow i$ . Questa distinzione permette sia una gestione delle densità di veicoli più efficiente e coerente con la realtà, non avendo interferenza tra le corsie, sia l'inserimento di strade a senso unico nella rete.

Nella classe *Street* viene poi definito un parametro di controllo del modello, ossia la lunghezza media dei veicoli. Altri parametri della strada sono la sua lunghezza, il numero  $n$  di veicoli su di essa, la velocità massima consentita, il numero di corsie (direzionate come la strada stessa) e la capacità massima  $n_{max}$  di veicoli presenti contemporaneamente. Si noti come mentre un veicolo conosce esattamente la strada in cui si trova ciò non sia vero per la strada in quanto quest'ultima possiede informazione solamente sul numero totale di veicoli presenti su di essa. La velocità effettiva mantenibile su una strada, essendo un valore altamente dinamico, non viene considerata come parametro (quindi immagazzinato in memoria) ma viene calcolato tramite una funzione quando necessario. In particolare, l'andamento della velocità su una strada segue la funzione

$$v(n) = v_{max} \left( 1 - 0.75 \frac{n}{n_{max}} \right) \quad (B.1)$$

Come visibile in Fig. 3.2 anche una volta raggiunta la densità massima i veicoli non si fermano ma si immettono sulla strada, quando si libera sufficiente spazio, con una velocità minima pari al 25% della velocità massima.

### B.1.4 Graph

Ultima classe definita, che comprende tutte le precedenti, è la classe *Graph*, la quale costruisce effettivamente il network stradale. Parametro di input necessario per creare un'istanza è la matrice di adiacenza, che definisce le connessioni tra i nodi. Tramite essa viene poi generato un vettore di puntatori a *Street* che genera le connessioni tra i nodi come strade.

Il movimento degli agenti sul network è determinato dalla matrice di transizione assegnata alle varie tipologie di veicoli. Questa viene generata tramite l'utilizzo del famoso algoritmo Dijkstra [12] e si basa sulla ricerca del *best path*, il percorso a costo (lunghezza) inferiore, dalla posizione dell'agente alla destinazione definita dal suo *VehicleType*. Si è poi deciso di introdurre un parametro di temperatura statistica al network per poter

permettere ai veicoli di seguire un percorso differente rispetto al best path fornito dall'algoritmo Dijkstra. L'algoritmo di evoluzione, infatti, assegna peso 1 ai best path e un peso  $\pi$  variabile tra 0 e 1 ai percorsi più lunghi. Quest'ultimo peso varia in base alla temperatura del sistema secondo la funzione

$$\pi(T) = \tanh(kT) \quad (\text{B.2})$$

dove  $k$  è un parametro di controllo del modello. Si procede poi alla normalizzazione a 1 di ogni vettore riga della matrice in modo tale da poter ottenere la probabilità di transizione. Una volta ottenute le probabilità di transizione il sistema può evolvere tenendo presente che:

- se un agente prova a muovere su una strada piena questo movimento viene impedito e di fatto si perde uno step temporale;
- la velocità di ogni veicolo viene impostata all'ingresso in una strada e non più modificata fino all'ingresso nella strada successiva.

## B.2 Esecuzione

## B.3 Performance

Il programma è stato compilato utilizzando il compilatore gcc-9 su Ubuntu 20.04 nel Windows Subsystem for Linux. La compilazione è stata effettuata utilizzando le flag

```
-O3 -Wall -Wextra -fsanitize=address
```

in cui:

- *O3* indica il livello di ottimizzazione massima volto a ridurre il tempo di esecuzione del programma;
- *Wall* e *Wextra* consentono di correggere ogni tipo di warning che sorge in compilazione;
- *fsanitize=address* consente di ottenere un'ottima gestione della memoria.

# Bibliografia

- [1] R. Wang, *The economic cost of traffic congestion in Florida*, ago. 2010. DOI: 10.13140/RG.2.2.11217.43368.
- [2] D. A. Hennessy e D. L. Wiesensthal, "Traffic congestion, driver stress, and driver aggression," *Aggressive Behavior: Official Journal of the International Society for Research on Aggression*, vol. 25, n. 6, pp. 409–423, 1999.
- [3] K. Zhang e S. Batterman, "Air pollution and health risks due to vehicle traffic," *Science of the total Environment*, vol. 450, pp. 307–316, 2013.
- [4] D. Kondor, I. Bojic, G. Resta, F. Duarte, P. Santi e C. Ratti, "The cost of non-coordination in urban on-demand mobility," *Scientific Reports*, vol. 12, n. 1, p. 4669, mar. 2022, ISSN: 2045-2322. DOI: 10.1038/s41598-022-08427-2. indirizzo: <https://doi.org/10.1038/s41598-022-08427-2>.
- [5] B. Schaller, "The new automobility: Lyft, Uber and the future of American cities," 2018.
- [6] G. Veratti, S. Fabbi, G. Tinarelli, A. Bigi, S. Teggi, G. Brusasca e G. Ghermandi, " $\mu$ -MO assessing the contribution of NOX traffic emission to atmospheric pollution in modena by microscale dispersion modelling," in *18th International Conference on Harmonisation within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes, HARMO 2017*, Hungarian Meteorological Service, vol. 2017, 2017, pp. 606–610.
- [7] K. Matus, K.-M. Nam, N. E. Selin, L. N. Lamsal, J. M. Reilly e S. Paltsev, "Health damages from air pollution in China," *Global Environmental Change*, vol. 22, n. 1, pp. 55–66, 2012, ISSN: 0959-3780. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.gloenvcha.2011.08.006>. indirizzo: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959378011001233>.
- [8] D. C. Gazis, "The origins of traffic theory," *Operations Research*, vol. 50, n. 1, pp. 69–77, 2002.
- [9] K. BS, *The physics of traffic*, 2004.
- [10] S. L. Prof. L.H. Immers, "Traffic Flow Theory," 2002.

- [11] A. Bazzani, “Random walks on Graphs, Master Equation and Maximal Entropy Principle,” 2015.
- [12] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest e C. Stein, *Introduction to Algorithms, Second Edition*. gen. 2001, pp. 504–508, ISBN: 0-262-03293-7.