Matemātiska loģika Md8 - Md15

```
8.md

a.

[L1, L2, L5, L6-L8, MP]: A∨(B∨C)⇔(A∨B)∨C

A∨(B∨C)→(A∨B)∨C
1) A∨( B∨C)                     - pieņemam
Ar T2.3.1 sadalām Av(BvC) zaros
A                    BvC
AvB                  Sadalām BvC zaros
(AvB)vC              B             C
                     AvB           (AvB)vC
                    (AvB)vC
2) (A∨B)∨C                      - Visos zaros esam ieguvuši to pāsu izteiksmi
T2.3.1
3) A∨(B∨C)→(A∨B)∨C               - DT1

(A∨B)∨C->A∨(B∨C)
1) (A∨B)∨C                   - pieņemam
Ar T2.3.1 sadalām (AvB)vC zaros
A∨B                       C
Sadalām AvB zaros        BvC
A           B            Av(BvC)
Av(BvC)     BvC
            A(BvC)
2) A∨(B∨C)                  - Visos zaros esam ieguvuši to pāsu izteiksmi T2.3.1
3) (A∨B)∨C->A∨(B∨C)         - DT1

b.

[L1, L2, L6-L8, MP]: ( A → B)→ (A∨C → B∨C)
1) A→B                      - pieņemam
2) AvB                      - pieņemam
Ar T2.3.1 sadalām AvC zaros
3)A                         3')C
4)B                         4')BvC
5)BvC
Visos zaros esam ieguvuši to pašu izteiksmi varam apvienot ar T2.3.1
6) A∨C→B∨C                  - DT1
7) (A→B)→(A∨C→B∨C)          - DT1

-------------------------------------------------------------------------------
9.md

a.

[L1-L9, MP]: ¬( A∨ B)⇔¬ A∧¬ B
```

```
¬( A∨ B)→¬ A∧¬ B
1) ¬( A∨ B)                   - pieņemam priekš DT1
Sadalam gadījumos A un B
2) A - pieņemam priekš T2.4.1   2') B - pieņemam priekš T2.4.1
3) A∨B - T2.3.1 no 2)           3') A∨B - T2.3.1 no 2')
4) Iegūta pretruna, tātad ¬A    4') Iegūta pretruna, tātad ¬B
5) ¬( A∨ B)→¬ A∧¬ B           - Apvienojam abas puses un tad DT1

¬A∧¬B->¬(A∨B)
1) ¬A∧¬B                     - pieņemam priekš DT1
2) A∨B                       - pieņemam priekš T2.4.1
Sazarojam A∨B
3) A                                                3')B
4) ¬A - T2.2.1 no 1)                                4')¬B - T2.2.1 no 1)
5) Iegūta pretruna, tātad ¬(A∨B) no 2) un T2.4.1    5') Iegūta pretruna, tātad
¬(A∨B) no 2) un T2.4.1
Abos zaros iegūts ¬(A∨B)
6) ¬A∧¬B->¬(A∨B)            - DT1

b.
[L1-L10, MP]: A├ B ↔ B∨¬A
A├ B → B∨¬A
1) A                        - dotā hipotēze
2) B                        - pieņemam priekš DT1
3) B∨¬A                      - T2.3.1 no (2)
4) B → B∨¬A                  - DT1
A├ B∨¬A → B
1) A                        - dotā hipotēze
2) B∨¬A                     - pieņemam priekš DT1
Sadalam zaros ar T2.4.1
3) B                        3') ¬A
                            4') ¬A→(A→B) - L10
                            5') A→B - MP no 3') un 4')
                            6') B - MP no 1) un 5')
7) B                        - T2.4.1 no 3) un 6'), jo abos zaros iegūts B
8) B∨¬A → B                  - DT1

[L1-L10, MP]:B∨( A∧¬ A) ↔ B
B∨( A∧¬ A) → B
1) B∨( A∧¬ A)                 - pieņemam priekš DT1
Sadalam zaros ar T2.3.1
2) B                         2') A∧¬A
                             3') A - T2.2.1 no 2')
                             4') ¬A - T2.2.1 no 2')
                             5') ¬A→(A→B) - L10
                              6') A→B - MP no 3') un 5')
                              7') B - MP no 1) un 6')
8) B                         - T2.3.1 no 2) un 7'), jo abos zaros iegūts B
9) B∨( A∧¬ A) → B          - DT1
B → B∨( A∧¬ A)
1) B                         - pieņemam priekš DT1
2) B∨( A∧¬ A)                 - T2.3.1 no (1)
3) B → B∨( A∧¬ A)            - DT1
```

```
[L1-L10, MP]:(( A∧¬ A)∧B)∨C ↔C
(( A∧¬ A)∧B)∨C → C
1) (( A∧¬ A)∧B)∨C          - pieņemam priekš DT1
Sadalam zaros ar T2.3.1
2) C                       2') ( A∧¬ A)∧B
                           3') A∧¬A - T2.2.1 no 2')
                           4') A - T2.2.1 no 3')
                           5') ¬A - T2.2.1 no 3')
                           6') ¬A→(A→C) - L10
                           7') A→C - MP no 5') un 6')
                           8') C - MP no 4') un 7')
9) C                       - T2.3.1 no (2) un (8'), jo abos zaros iegūts C
10) (( A∧¬ A)∧B)∨C → C     - DT1
C → (( A∧¬ A)∧B)∨C
1) C                       - pieņemam priekš DT1
2) (( A∧¬ A)∧B)∨C          - T2.3.1 no (1)
3) C → (( A∧¬ A)∧B)∨C      - DT1

-------------------------------------------------------------------------------
10.md

a)

[L1-L10, MP]:A∨¬ A →(¬ ¬ A → A)
(1) A∨¬ A                  - pieņemam priekš DT1
(2) ¬ ¬ A                  - pieņemam priekš DT1
Sadalam zaros ar T2.3.1
(3) A                      (3') ¬A
                           (4') ¬A→(¬ ¬ A → A) - L10
                           (5') ¬ ¬ A → A - MP no (3') un (4')
                           (6') A - MP no (2) un (5')
(7) A                     - T2.3.1 no (3) un (6'), jo abos zaros iegūts A
(8) A∨¬ A →(¬ ¬ A → A)     - DT1 2x

[L1-L10, MP]:¬¬(¬¬A→A)
(1) ¬(¬¬A→A)              - pieņemam priekš T2.4.1
(2) A→(¬¬A→A)             - L1
(3) ¬(¬¬A→A)→¬A           - Kontrapozīcija no (2)
(4) ¬A                    - MP no (1) un (3)
(5) ¬A→(¬¬A→A)            - L10
(6) ¬(¬¬A→A)→¬¬A          - Kontrapozīcija no (5)
(7) ¬¬A                   - MP no (1) un (6)
Iegūta pretruna (4) un (7), tātad balstoties uz T2.4.1 un (1) ¬¬(¬¬A→A)

b)

[L1-L8, MP]: A∨C ├ ( A→ B)→ B∨C
(1) A∨C                    - dotā hipotēze
(2) A→B                   - pieņemam priekš DT1
Sazarosim ar T2.3.1
(3) A                      (3') C
(4) B - MP no (2) un (3)   (4') B∨C - T2.3.1 no (3')
(5) B∨C - T2.3.1 no (4)
(6) BvC                    - T2.3.1 no (5) un (4'), jo abos zaros iegūts BvC
```

```
(7) ( A→ B)→ B∨C          - DT1

--------------------------------------------------------------------------------
11.md

A    B    A → B    A ∧ B    A ∨ B    ¬B
0    0      2        0        0       2
0    1      2        0        1       2
0    2      2        0        2       1
1    0      0        0        1       2
1    1      2        1        1       2
1    2      2        1        2       1
2    0      0        0        2       2
2    1      1        1        2       2
2    2      2        2        2       1

¬¬B    ¬¬B → B
1        0
1        2
2        2
1        0
1        2
2        2
1        0
1        2
2        2
nedabiski, ka nav vienmēr pilnībā patiess

¬A  ¬A ∨ B   (A → B) → (¬A ∨ B)
2      2            2
2      2            2
2      2            2
2      2            2
2      2            2
2      2            2
1      1            2
1      1            2
1      2            2
izskatās dabiski

--------------------------------------------------------------------------------
12.md

1)
a)
[L1, L2, L5, L12, L14, MP, Gen]: ∀x∀yB(x,y) ↔ ∀y∀xB(x,y)
∀x∀yB(x,y) → ∀y∀xB(x,y)
(1) ∀x∀yB(x,y) - pieņemam priekš DT2
(2) ∀yB(x,y) - T12 no (1)
(3) B(x,y) - T12 no (2)
(4) ∀xB(x,y) - Gen no (3)
(5) ∀y∀xB(x,y) - Gen no (4)
DT2: ∀x∀yB(x,y) → ∀y∀xB(x,y)
Gen tiek izmantots pareizi, jo x un y ir saistīti ar kvantoru
```

```
∀y∀xB(x,y) → ∀x∀yB(x,y)
(1) ∀y∀xB(x,y) - pieņemam priekš DT2
(2) ∀xB(x,y) - T12 no (1)
(3) B(x,y) - T12 no (2)
(4) ∀yB(x,y) - Gen no (3)
(5) ∀x∀yB(x,y) - Gen no (4)
DT2: ∀y∀xB(x,y) → ∀x∀yB(x,y)
Gen tiek izmantots pareizi, jo x un y ir saistīti ar kvantoru

b)
[L1, L2, L5, L13, L15, MP, Gen]: ∃x∃yB(x,y) ↔ ∃y∃xB(x,y)
∃x∃yB(x,y) → ∃y∃xB(x,y)
(1) B(x,y) → ∃xB(x,y) - L13
(2) ∃xB(x,y) → ∃y∃xB(x,y) - L13
(3) B(x,y) → ∃y∃xB(x,y) - Implikācijas transitivitāte
(4) ∃yB(x,y) → ∃y∃xB(x,y) - T15
(5) ∃x∃yB(x,y) → ∃y∃xB(x,y) - T15

∃y∃xB(x,y) → ∃x∃yB(x,y)
(1) B(x,y) → ∃yB(x,y) - L13
(2) ∃yB(x,y) → ∃x∃yB(x,y) - L13
(3) B(x,y) → ∃x∃yB(x,y) - Implikācijas transitivitāte
(4) ∃xB(x,y) → ∃x∃yB(x,y) - T15
(5) ∃y∃xB(x,y) → ∃x∃yB(x,y) - T15

2)
[L1-L11, MP]: ¬((A→B)→(CvD)) ↔ (¬AvB)∧¬C∧¬D
¬((A→B)→(CvD))
(1) A→B ↔ ¬AvB - T2.6.4
(2) ¬((¬AvB)→(CvD)) ↔ ¬(¬(¬AvB)v(CvD)) - T2.4.9
(3) ¬(¬(¬AvB)v(CvD)) ↔ ¬¬(¬(AvB)v¬(CvD)) - T2.4.9
(4) ¬¬(¬(AvB)v¬(CvD)) ↔ ¬¬(¬(AvB)v¬Cv¬D) - T2.4.9
(5) ¬¬(¬(AvB)v¬Cv¬D) ↔ ¬(AvB)v¬Cv¬D - T2.6.1
Esam ar ekvivalentiem parveidojumiem izveduši vienādību

-------------------------------------------------------------------------------
13.md

1) Uzdevums 4.1.1. bet lai patiesas ir šādas formulas (to formulu vietā, kas ir grāmatas
uzdevumā): “some people are both male and female”, “there are sex-less people”, “a person may marry herself”, “a person may be mother of herself”, "visi tēvi ir bezdzimuma personas", "eksistē persona, kam ir divas mātes".

x    Male(x)    Female(y)
br     !1          !1      ir cilvēki ar abiem dzimumiem
jo     !0          !0      ir bezdzimuma cilvēki; visi tēvi ir bezdzimuma personas (1)
pa      1           0
pe      0           1

x    y    Father(x,y)    Mother(x,y)    Married(x,y)    x=y
br   br        0              0              !1          1    person vār precēt
```

```
sevi
br   jo        0             !1               0          0    eksitē persona,
kurai ir divas mātes (1)
br   pa        0              0               0          0
br   pe        0              0               0          0
jo   br        0              0               0          0
jo   jo        0              0               0          1
jo   pa       !1              0               0          0    visi tēvi ir
bezdzimuma personas (2)
jo   pe        0              0               0          0
pa   br        0              0               0          0
pa   jo        0             !1               0          0    eksitē persona,
kurai ir divas mātes (2)
pa   pa        0              0               0          1
pa   pe        0              0               0          0
pe   br        0              0               0          0
pe   jo        0              0               0          0
pe   pa        0              0               0          0
pe   pe        0              0               0          1

2) r, s ir predikātu konstantes. Vai šī formula ir LVD: ∀x(r(x)→s(x))→(∃x
r(x)→∃xs(x))? Atbildi pamatojiet.

Formula nav LVD, jo vienīgais veids kā tā varētu but nepatiesa ir ja
∀x(r(x)→s(x)) un ∃x(r(x)) ir patiess, bet ∃x(s(x)) ir nepatiess.
Bet šāda situācija nav iespējama, jo ja ir kāds x, kurš ir r(x), tad ir arī s(x),
lai izpildītos ∀x(r(x)→s(x)).
Tāpēc arī ∃x(s(x)) būs patiess.

3) q, r, s ir predikātu konstantes. Pierādiet, ka šīs formulas IR izpildāmas, bet
NAV LVD:

a) ∀x∃y q(x, y) → ∃y∀x q(x, y);
Formula izpildās:
D = {a}
q(x, y) = {(a, a)}
Formula neizpildās:
D = {a, b}
q(x, y) = {(a, a), (b, b)}

b) (∃x r(x)→∃x s(x))→ ∀x(r(x)→s(x))
Formula izpildās:
D = {a}
r(x) = {a}
s(x) = {a}
Formula neizpildās:
D = {a, b}
r(x) = {a}
s(x) = {b}

-------------------------------------------------------------------------------
14.md

1) Izmantojot klasiskās izteikumu loģikas pilnības teorēmu, noskaidrojiet, kuras
```

```
no šīm
formulām ir izvedamas no [L1-L11, MP]:

a) (A→B)→((¬A→B)→B);
A   B   A → B   ¬A    ¬A→B    (¬A→B)→B   (A→B)→((¬A→B)→B)
0   0     1      1      0           1         1
0   1     1      1      1           1         1
1   0     0      0      1           0         1
1   1     1      0      1           1         1
Var izvēst, jo vienmēr patiess

b) AvBvC→B∧C
A   B   C   AvBvC   B∧C   AvBvC→B∧C
0   0   0     0      0         1
0   0   1     1      0         0
0   1   0     1      0         0
0   1   1     1      1         1
1   0   0     1      0         0
1   0   1     1      0         0
1   1   0     1      0         0
1   1   1     1      1         1
Nevar izvēst, jo nav vienmēr patiess

2) Izmantojot klasiskās predikātu loģikas pilnības teorēmu, noskaidrojiet, kuras
no šīm
formulām ir izvedamas no [L1-L15, MP, Gen]:

a) (∀x p(x)→∀x q(x))→(∀x p(x)→∀x r(x));
D = {a}
p(x) = {a}
q(x) = {a}
r(x) = {}
(1→1)→(1→0)
    1→0
     0
Nevar izvēst, jo nav vienmēr patiess

b) ∀x(p(x)→q(x))→(∀x p(x)→∀x q(x))
Ja formula ir aplama tad,
1) ∀x(p(x)→q(x)) ir patiesa
2) ∀x(p(x))→∀x(q(x)) ir aplama
3) ∀x(p(x)) ir patiesa
4) ∀x(q(x)) ir aplama
Tātād kādam objektam q(x) ir aplama (4), bet tā ka visiem objektiem p(x) ir
patiesa (3) rodas pretruna,
    jo ∀x(p(x)→q(x)) (1) nebūs patiess.
Tātād formula nav izvedama.

--------------------------------------------------------------------------------
15.md

1) Izmantojiet tablo algoritmu (ne savādāk!), lai noskaidrotu, vai klasiskajā
loģikā:
```

```
a) no hipotēzes P v R → Q v R var izvest formulu P → Q;
1. solis:
(P v R → Q v R) ∧ ¬(P → Q)
2. solis:
(¬(P v R) v (Q v R)) ∧ ¬(¬P v Q)
((¬P ∧ ¬R) v (Q v R)) ∧ (¬¬P ∧ ¬Q)
((¬P ∧ ¬R) v Q v R) ∧ P ∧ ¬Q
3. solis:
((¬P ∧ ¬R) v Q v R) ∧ P ∧ ¬Q
            |
     (¬P ∧ ¬R) v Q v R
            |
          P ∧ ¬Q
        /        \
    ¬P ∧ ¬R     Q v R
       |          |
       P          P
       |          |
      ¬Q         ¬Q
       |        /   \
      ¬P       Q     R
       |
      ¬R       2     3

       1

1. zarā ir pretrunā P un ¬P, tātad zars ir slēgts
2. zarā ir pretrunā Q un ¬Q, tātad zars ir slēgts
3. zarā nav pretrunas, tātad zars ir atvērts

Tā kā ir vismaz viens atvērts zars, tad no hipotēzes P v R → Q v R nevar izvest
formulu P → Q.

b) no hipotēzēm A→C; B→C var izvest formulu AvB→C. Aksiomu L8, DT1 un T231
lieciet mierā!
1. solis:
(A→C) ∧ (B→C) ∧ ¬(AvB→C)
2. solis:
(¬AvC) ∧ (¬BvC) ∧ ¬(¬(AvB) v C)
(¬AvC) ∧ (¬BvC) ∧ (¬¬(AvB) ∧ ¬C)
(¬AvC) ∧ (¬BvC) ∧ (AvB) ∧ ¬C
3. solis:
           (¬AvC) ∧ (¬BvC) ∧ (AvB) ∧ ¬C
                       |
                     ¬AvC
                       |
                (¬BvC) ∧ (AvB) ∧ ¬C
                /                  \
              ¬A                    C
               |                    |
             ¬BvC                 ¬BvC
               |                    |
         (AvB) ∧ ¬C            (AvB) ∧ ¬C
          /       \             /       \
```

```
          ¬B        C          ¬B         C
           |        |           |         |
          AvB      AvB         AvB       AvB
           |        |           |         |
          ¬C       ¬C          ¬C        ¬C
          / \      / \         / \       / \
         A   B    A   B       A   B     A   B

         1   2    3   4       5   6     7   8

1. zarā pretruna A un ¬A
2. zarā pretruna B un ¬B
3. zarā pretruna A un ¬A
4. zarā pretruna B un ¬B
5. zarā pretruna C un ¬C
6. zarā pretruna C un ¬C
7. zarā pretruna C un ¬C
8. zarā pretruna C un ¬C

Tā kā visi zari ir slēgti, tad no hipotēzēm A→C; B→C var izvest formulu AvB→C.
```