

14. Gredzeni un lauki (pēdējais mājas darbs)

Gunārs Ābeltiņš

2022-06-01

1. Uzdevums

Izmantojot tikai 10 lauka aksiomas un jau iepriekš pierādītās teorēmas, pierādiet T19, T20.

Teorēma:

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ab}{cd}; \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

Pierādījums:

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = abc^{-1}d^{-1} = (ac)(b^{-1}d^{-1}) = (ac)(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd} = \frac{ab}{cd}$$

$$\frac{ac}{bc} = acc^{-1}b^{-1} = (ab^{-1})(cc^{-1}) = ab^{-1} = \frac{a}{b}$$

Teorēma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ tad un tikai tad, ja } b \text{ un } d \text{ nav } 0, \text{ un } ad = bc.$$

Pierādījums:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ab^{-1} = cd^{-1} \Rightarrow ab^{-1}db = cd^{-1}db \Rightarrow ad = bc$$

2. Uzdevums

Izmantojot tikai 10 lauka aksiomas un jau iepriekš pierādītās teorēmas, pierādiet T21.

Teorēma:

$$\frac{a}{c} + \frac{a}{c} = \frac{a+b}{c}; \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Pierādījums:

$$\frac{a}{c} + \frac{a}{c} = ac^{-1} + ac^{-1} = (a+a)c^{-1} = \frac{a+b}{c}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= ab^{-1} + cd^{-1} = ab^{-1}(dd^{-1}) + cd^{-1}(bb^{-1}) = \\ &= (ad)(bd)^{-1} + bc(bd)^{-1} = (ad+bc)(bd)^{-1} = \frac{ad+bc}{bd} \end{aligned}$$

3. Uzdevums

a) Uzbūvējiet summu un reizinājumu tabulu gredzenam \mathbb{Z}_6 .

Summu tabula:

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Reizinājuma tabula;

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

b) Atrodiet \mathbb{Z}_6 visus nulles dalītājus un visus inversos elementus.
Parādiet visus aprēķina soļus.

Vērtības tika nolasītas no tabulas.

Nulles dalītāji: (2, 3) un (3, 4)

Inversie elementi: (1, 1) un (5, 5)