1. matematiskas loģikas majadarbs

Gunārs Ābeltiņš

2024-03-08

1 Formālās teorijas

a apakšuzdevums

1. Valoda: b, c, d
2. Aksiomas: b, c
3. Izveduma likumi: $x \vdash dxd$, $x \vdash xbcb$
4. Teorēmas

$$b \vdash \underline{d}b\underline{d} \vdash dbd\underline{bcb} \vdash \underline{d}dbdbcb\underline{d} \vdash \underline{d}ddbdbcbd\underline{d}$$

$$c \vdash \underline{d}c\underline{d} \vdash dcd\underline{bcb} \vdash \underline{d}dcdcb\underline{d} \vdash \underline{d}ddcdbcbd\underline{d}$$

b apakšuzdevums

Nepierādami apgalvojumi

d: Vārds satur tikai vienu simbolu un tas nav aksionma

bcd: Vārdu nevar izvest izmantojot izveduma likumus

Algoritms

1. Ja vārda ir tikai viens simbols:
   (a) Ja simbols ir aksioma, tad apgalvojums ir pierādāms
   (b) Ja nav aksioma, tad apgalvojums nav pierādāms
2. Ja vārds beidzās ar "bcb", tad to daļu noņem un atgriežas pie pirmā soļa.
3. Ja vārds sākas un beidzās ar "d", tad šīs daļas noņem un atgriežas pie pirmā soļa.
4. Ja ir nokļuvis līdz šim solim, tad vārds nav pierādāms.

2 Predikātu valodas

Predikātu valodā C ir šādi 5 predikāti: S(x) un V(x) (x ir sieviete/vīrietis), T(x, y), M(x, y) (x ir y-a (bioloģiskais) tēvs/māte), P(x,y) (x ir precējies ar y), kā arī predikāts x=y.

1. apakšuzdevums

1. x ir vectēvs:

$$\exists y \exists z(\neg(x = y) \land T(x, y) \land (T(y, z) \lor M(y, z)))$$

2. x un y ir brāļi:

$$V(x) \land V(y) \land \exists z(T(z, x) \land T(z, y) \lor M(z, x) \land M(z, y))$$

3. x-am visi bērni ir dēli:

$$\forall y((T(x, y) \lor M(x, y)) \rightarrow V(y))$$

4. x ir divu meitu tēvs:

$$V(x) \land \exists y \exists z(\neg(y = z) \land S(y) \land S(z) \land T(x, y) \land T(x, z))$$

2. apakšuzdevums

1. x-a māte un tēvs ir precējušies:

$$\forall y \forall z(\neg(y = z) \land (M(x, y) \land T(x, z)) \rightarrow P(y, z))$$

2. Precēties var tikai dažādi dzimumi:

$$\forall x \forall y((P(x, y) \land V(x)) \rightarrow S(y))$$

3. x ir y-a māsīca:

$$\begin{aligned}
&S(x) \land \exists z \exists v \exists w \\
&\neg(z = v \lor z = w \lor v = w) \\
&\land ((M(z, v) \lor T(z, v)) \land (M(z, w) \lor T(z, w)) \\
&\land (M(v, x) \lor T(v, x)) \land (M(w, y) \lor T(w, y)))
\end{aligned}$$

3. Predikātu valodas

1. apakšuzdevums

Pierakstiet pirmās pakāpes aritmētikas valodā šādus apgalvojumus:

a) x ir pirmskaitlis:

$$P(x) = \neg(\exists y \exists z(x = y \cdot z \wedge \neg(y = x \vee z = x)))$$

b) Katrs skaitlis, kas lielāks par 1, dalās ar kādu pirmskaitli:

$$\forall x((x > 1) \rightarrow \exists y \exists z(P(x) \wedge x = y \cdot z))$$

c) x un y dalās ar vieniem un tiem pašiem pirmskaitļiem:

$$\begin{aligned}&\forall z(P(x) \rightarrow (\exists u(x = z \cdot u) \rightarrow \\ &\exists v(y = z \cdot v) \wedge (\exists v(y = z \cdot v) \rightarrow \exists u(x = z \cdot u))))\end{aligned}$$

2. apakšuzdevums

Predikātu valodā S ir šādi 5 predikāti: Pasn(x) (x ir pasniedzējs), Stud(x) (x ir students), Kurss(x) (x ir studiju kurss), pasniedz(x, y) (x pasniedz y), studē(x, y) (x studē y), ka arī predikāts x=y.

1. Kursi nav ne studenti, ne pasniedzēji:

$$\forall x(Kurss(x) \rightarrow \neg(Stud(x) \vee Pasn(x)))$$

2. Kursu x pasniedz viens un tikai viens pasniedzējs:

$$\forall y \forall z(Pasn(y) \wedge Pasn(z) \rightarrow (pasniedz(y, x) \wedge pasniedz(z, x) \rightarrow y = z))$$

3. Pasniedzējs x māca studentu y:

$$Pasn(x) \wedge Stud(y) \wedge \exists z(pasniedz(x, z) \wedge stude(y, z))$$

4. x un y ir studenti, kuri studē vismaz vienu kopīgu kursu:

$$Stud(x) \wedge Stud(y) \wedge \exists z(stude(x, z) \wedge stude(y, z))$$

4. Pašam sava predikātu valoda.

1. apakšuzdevums

1. Vērtību apgabals: aktieris, režisors, filma, skatītājs
2. Objektu konstantes: nav
3. Funkciju konstantes: nav
4. Predikātu konstantes:
   - $aktieris(x)$: x ir aktieris
   - $rezisors(x)$: x ir režisors
   - $filma(x)$: x ir filma
   - $skatitajs(x)$: x ir skatītājs
   - $L(x, y)$: x ir lomā y
   - $R(x, y)$: x režisē y
   - $S(x, y)$: x ir noskatijies y
5. Termi: objektu mainīgie
6. Atomāras formulas: termi un predikātu konstantes

2. apakšuzdevums

1. Katram aktierim ir vismaz viena loma:

$$\forall x \exists y (aktieris(x) \rightarrow L(x, y))$$

2. Skatītajs x ir redzējis filmu ar aktieri y:

$$skatitajs(x) \wedge aktieris(y) \wedge \exists z (filma(z) \wedge L(y, z) \wedge S(x, z))$$

3. Skatītajs x nav redzējis nevienu filmu ar režisoru y:

$$skatitajs(x) \wedge rezisors(y) \wedge \forall z (filma(z) \wedge R(y, z) \rightarrow \neg S(x, z))$$

5. Aksiomas.

1.4.2 b

$$[L_3 - L_5, \mathrm{MP}] : A \wedge B \vdash B \wedge A \quad \text{(8 formulas)}$$
$$L_3 : B \wedge C \to B$$
$$L_4 : B \wedge C \to C$$
$$L_5 : B \to (C \to B \wedge C)$$

1. $A \wedge B$ (Dota hipotēze)
2. $A \wedge B \to A$ (L_3)
3. A (MP 1, 2)
4. $A \wedge B \to B$ (L_4)
5. B (MP 1, 4)
6. $B \to (A \to B \wedge A)$ (L_5)
7. $A \to B \wedge A$ (MP 5, 6)
8. $B \wedge A$ (MP 3, 7)

1.4.3 b

$$[L_3, L_4, L_9, \mathrm{MP}] : \neg(A \wedge \neg A)$$
$$L_3 : B \wedge C \to B$$
$$L_3 : B \wedge C \to C$$
$$L_9 : (B \to C) \to ((B \to \neg C) \to \neg B)$$

1. $A \wedge \neg A \to A$ (L_3)
2. $A \wedge \neg A \to \neg A$ (L_4)
3. $((A \wedge \neg A) \to A) \to (((A \wedge \neg A) \to \neg A) \to \neg(A \wedge \neg A))$ (L_9)
4. $((A \wedge \neg A) \to \neg A) \to \neg(A \wedge \neg A)$ (MP 1, 3)
5. $\neg(A \wedge \neg A)$ (MP 2, 4)

6. Formulu izvešana bez saīsinājumiem.

1.4.2 c

$$[L_6 - L_8, \mathrm{MP}] : A \vee B \to B \vee A \quad \text{(5 formulas)}$$
$$L_6 : B \to B \vee C$$
$$L_7 : C \to B \vee C$$
$$L_8 : (B \to D) \to ((C \to D) \to (B \vee C \to D))$$

1. $A \to B \vee A$ (L$_7$)
2. $(A \to B \vee A) \to ((B \to B \vee A) \to (A \vee B \to B \vee A))$ (L$_8$)
3. $(B \to B \vee A) \to (A \vee B \to B \vee A)$ (MP 1, 2)
4. $B \to B \vee A$ (L$_6$)
5. $A \vee B \to B \vee A$ (MP 3, 4)

1.4.2 d

$$[L_1, L_9, \mathrm{MP}] : B \wedge \neg B \vdash \neg C \quad \text{(9 formulas)}$$
$$L_1 : B \to (C \to B)$$
$$L_9 : (B \to C) \to ((B \to \neg C) \to \neg B)$$

1. B (Dota hipotēze)
2. $\neg B$ (Dota hipotēze)
3. $B \to (C \to B)$ (L$_1$)
4. $\neg B \to (C \to \neg B)$ (L$_1$)
5. $(C \to B)$ (MP 1, 3)
6. $(C \to \neg B)$ (MP 2, 4)
7. $(C \to B) \to ((C \to \neg B) \to \neg C)$ (L$_9$)
8. $(C \to \neg B) \to \neg C$ (MP 5, 7)
9. $\neg C$ (MP 6, 8)

2.1 1.4.2 f

$[L_1, L_8, L_{10}, \mathrm{MP}] : \neg A \vee B \to (A \to B)$ (5 formulas)
$L_1 : B \to (C \to B)$
$L_8 : (B \to D) \to ((C \to D) \to (B \vee C \to D))$
$L_{10} : \neg B \to (B \to C)$

1. $\neg A \to (A \to B)$ (L$_{10}$)
2. $B \to (A \to B)$ (L$_1$)
3. $(\neg A \to (A \to B)) \to ((B \to (A \to B)) \to (\neg A \vee B \to (A \to B)))$ (L$_8$)
4. $(B \to (A \to B)) \to (\neg A \vee B \to (A \to B))$ (MP 1, 3)
5. $\neg A \vee B \to (A \to B)$ (MP 2, 4)

2.2 1.4.2 g

$[L_8, L_{11}, \mathrm{MP}] : A \to B, \neg A \to B \vdash B$ (7 formulas)
$L_8 : (B \to D) \to ((C \to D) \to (B \vee C \to D))$
$L_{11} : B \vee \neg B$

1. $A \to B$ (Dotā hipotēze)
2. $\neg A \to B$ (Dotā hipotēze)
3. $A \vee \neg A$ (L$_{11}$)
4. $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to (A \vee \neg A \to B))$ (L$_8$)
5. $(\neg A \to B) \to (A \vee \neg A \to B)$ (MP 1, 4)
6. $A \vee \neg A \to B$ (MP 2, 5)
7. B (MP 3, 6)