

14. Gredzeni un lauki (pēdējais mājas darbs)

Gunārs Ābeltiņš

2022-06-01

1. Uzdevums

Izmantojot tikai 10 lauka aksiomas un jau iepriekš pierādītās teorēmas, pierādiet T19, T20.

Teorēma:

$$\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

Pierādījums:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \frac{c}{d} &= ab^{-1}cd^{-1} = (ac)(b^{-1}d^{-1}) = (ac)(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd} \\ \frac{ac}{bc} &= ac(bc)^{-1} = acb^{-1}c^{-1} = (ab^{-1})(cc^{-1}) = ab^{-1} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Teorēma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ tad un tikai tad, ja } b \text{ un } d \text{ nav } 0, \text{ un } ad = bc.$$

Pierādījums:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ab^{-1} = cd^{-1} \Rightarrow ab^{-1}db = cd^{-1}db \Rightarrow ad = bc$$

2. Uzdevums

Izmantojot tikai 10 lauka aksiomas un jau iepriekš pierādītās teorēmas, pierādiet T21.

Teorēma:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Pierādījums:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= ac^{-1} + bc^{-1} = (a+b)c^{-1} = \frac{a+b}{c} \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= ab^{-1} + cd^{-1} = ab^{-1}(dd^{-1}) + cd^{-1}(bb^{-1}) = \\ &= (ad)(bd)^{-1} + bc(bd)^{-1} = (ad+bc)(bd)^{-1} = \frac{ad+bc}{bd} \end{aligned}$$

3. Uzdevums

a) Uzbūvējiet summu un reizinājumu tabulu gredzenam \mathbb{Z}_6 .

Summu tabula:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Reizinājuma tabula;

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

b) Atrodiet \mathbb{Z}_6 visus nulles dalītājus un visus inversos elementus. Parādiet visus aprēķina soļus.

Nulles dalītāji (Vērtības 0 no reizinājuma tabulas):

$$2 * 3 \equiv 0 \pmod{6}$$

$$3 * 2 \equiv 0 \pmod{6}$$

$$3 * 4 \equiv 0 \pmod{6}$$

$$4 * 3 \equiv 0 \pmod{6}$$

Inversie elementi (Vērtības 1 no reizinājuma tabulas):

$$1 * 1 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$5 * 5 \equiv 1 \pmod{6}$$