# 1/6 求离散型的期望 E(X)　$E(X)=\sum x_i p_i$

已知一个工厂一周获利10万元的概率为 0.2，获利 5 万元的概率为 0.3，亏损 2 万元的概率为 0.5，该工厂一周内利润的期望是多少?

| X | 10 | 5 | −2 |
|---|---|---|---|
| P | 0.2 | 0.3 | 0.5 |

$E(X)=\sum x_i p_i=10\times 0.2+5\times 0.3+(-2)\times 0.5=2.5$（万元）

# 2/6 求连续型的期望 E(X)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx$$

设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 4x^3, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$，则E(X) = $\underline{\frac{4}{5}}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0\,dx+\int_{0}^{1}x\cdot 4x^3\,dx+\int_{1}^{+\infty}x\cdot 0\,dx$$

$$=\quad 0\quad+\quad\frac{4}{5}\quad+\quad 0$$

$$=\frac{4}{5}$$

3/6 已知 $Y=g(x)$，求 $E(Y)$

离散型 $E(Y)=\sum g(x_i)p_i$

连续型 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx$

已知随机变量 X 的分布列为

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

求 $Y=2X-1$ 的期望

$$E(Y)=\sum g(x_i)p_i$$

$$=\sum(2x_i-1)p_i$$

$$=(2\times 0-1)\times 0.1+(2\times 1-1)\times 0.2+(2\times 2-1)\times 0.3+(2\times 3-1)\times 0.4$$

$$=3$$

## 3/6 已知 $Y = g(x)$，求 $E(Y)$

离散型 $E(Y) = \sum g(x_i)p_i$

连续型 $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx$

设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 4x^3, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$，$Y = X^2$，求 $E(Y)$

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0\,dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot 4x^3\,dx + \int_{1}^{+\infty} x^2 \cdot 0\,dx \\
&= \quad 0 \quad + \quad \frac{2}{3} \quad + \quad 0 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

# 4/6 求方差 D(X)

$D(X)=\sum[x_i-E(X)]^2\cdot p_i$ → 离散型

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ → 连续型/离散型

已知随机变量 X 的分布列为

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

求 D(X)

方法一：$E(X)=\sum x_ip_i=0\times0.1+1\times0.2+2\times0.3+3\times0.4=2$

$D(X)=\sum[x_i-E(X)]^2\cdot p_i$

$=(0-2)^2\cdot0.1+(1-2)^2\cdot0.2+(2-2)^2\cdot0.3+(3-2)^2\cdot0.4=1$

方法二：

| $X^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

$E(X^2)=0\times0.1+1\times0.2+4\times0.3+9\times0.4=5$

$E(X)=\sum x_ip_i=0\times0.1+1\times0.2+2\times0.3+3\times0.4=2$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=5-2^2=1$

# 5/6 根据 E(X)、D(X) 的性质进行复杂运算

<table>
<tr><th></th><th>E</th><th>D</th></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td>$E(C)=C$</td><td>$D(C)=0$</td></tr>
<tr><td>$E(CX)=CE(X)$</td><td>$D(CX)=C^2D(X)$</td></tr>
<tr><td>$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$</td><td rowspan="2">$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$ （X、Y 相互独立时）</td></tr>
<tr><td>$E(XY)=E(X)E(Y)$（X、Y相互独立时）</td></tr>
<tr><td colspan="2">$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$</td></tr>
</table>

已知

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

，求 $E(2X^2-5)$、$D(\sqrt{7}X-5)$

$$E(X)=\sum x_i p_i = 0\times 0.1+1\times 0.2+2\times 0.3+3\times 0.4=2$$

$$D(X)=(0-2)^2\cdot 0.1+(1-2)^2\cdot 0.2+(2-2)^2\cdot 0.3+(3-2)^2\cdot 0.4=1$$

$$E(2X^2-5)=E(2X^2)-E(5)=2E(X^2)-5=2\times[E^2(X)+D(X)]-5=2\times(2^2+1)-5=5$$

$$D(\sqrt{7}X-5)=D(\sqrt{7}X)+D(5)=7D(X)+0=7\times 1+0=7$$

# 6/6 E(X)、D(X) 与各种分布的综合题

| X 服从的分布 | E(X) | D(X) | P |
|---|---|---|---|
| 二项分布 B(n, p) | $np$ | $np(1-p)$ | $P(X=d)=C_n^d p^d (1-p)^{n-d}$ |
| 泊松分布 P(λ) | $\lambda$ | $\lambda$ | $P(X=d)=\frac{\lambda^d}{d!}e^{-\lambda}$ |
| 均匀分布 U[a, b] | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $P(c\le X\le d)=\frac{d-c}{b-a}$ |
| 指数分布 E(λ) | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $P(c\le X\le d)=\frac{1}{e^{c\lambda}}-\frac{1}{e^{d\lambda}}$ |
| 正态分布 N(μ, σ²) | $\mu$ | $\sigma^2$ | $P(c\le X\le d)=\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$ |

| | E | D |
|---|---|---|
| 性质 | $E(C)=C$ | $D(C)=0$ |
| | $E(CX)=CE(X)$ | $D(CX)=C^2D(X)$ |
| | $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$ | $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$ (X、Y 相互独立时) |
| | $E(XY)=E(X)E(Y)$ (X、Y相互独立时) | |
| | $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ | |

随机变量 X 服从二项分布，且 $E(X)=6$，$D(X)=3$，则 $P(X=1)=$ $\underline{3\times 2^{-10}}$

$$\begin{cases} E(X)=6=np \\ D(X)=3=np(1-p) \end{cases} \Rightarrow n=12 \quad p=0.5$$

$$P(X=d)=C_n^d p^d (1-p)^{n-d}$$

$$P(X=1)=C_{12}^1 (0.5)^1 (1-0.5)^{12-1}=3\times 2^{-10}$$

# 6/6 E(X)、D(X) 与各种分布的综合题

| X 服从的分布 | E(X) | D(X) | P |
|---|---|---|---|
| 二项分布 B(n,p) | $np$ | $np(1-p)$ | $P(X=d)=C_n^d p^d(1-p)^{n-d}$ |
| 泊松分布 P(λ) | $\lambda$ | $\lambda$ | $P(X=d)=\frac{\lambda^d}{d!}e^{-\lambda}$ |
| 均匀分布 U[a,b] | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $P(c\le X\le d)=\frac{d-c}{b-a}$ |
| 指数分布 E(λ) | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $P(c\le X\le d)=\frac{1}{e^{c\lambda}}-\frac{1}{e^{d\lambda}}$ |
| 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $P(c\le X\le d)=\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$ |

| | E | D |
|---|---|---|
| 性质 | $E(C)=C$ | $D(C)=0$ |
| | $E(CX)=CE(X)$ | $D(CX)=C^2D(X)$ |
| | $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$ | $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$（X、Y 相互独立时） |
| | $E(XY)=E(X)E(Y)$（X、Y相互独立时） | |
| | $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ | |

已知 X 服从 $\lambda=1$ 的泊松分布，则 $P[X=E(X^2)]=$ $\underline{\frac{1}{2e}}$

$E(X)=1 \qquad D(X)=1$

$E(X^2)=E^2(X)+D(X)=1^2+1=2$

$P[X=E(X^2)]=P(X=\boxed{2})=\frac{1^2}{2!}e^{-1}=\frac{1}{2e}$

$P(X=\boxed{d})=\frac{\boxed{\lambda}^{\boxed{d}}}{\boxed{d}!}e^{-\boxed{\lambda}}$