1/8 已知二维离散型分布律，求???

已知二维随机变量 X，Y 的分布律如下表

X \ Y	1	2	3
0	0.2	0.1	0.1
1	0.3	0.2	0.1

求：(1) $P(X=0)$，$P(Y=2)$

(2) $P(X<1，Y\leq 2)$

(3) $P(X+Y=2)$

(4) X，Y 的分布律

(5) $Z=X+Y$ 的分布律

(4)

X	0	1
P	0.4	0.6

Y	1	2	3
P	0.5	0.3	0.2

(5) $P(Z=1)=P(X=0,Y=1)=0.2$

$P(Z=2)=P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=1)=0.1+0.3=0.4$

$P(Z=3)=P(X=0,Y=3)+P(X=1,Y=2)=0.1+0.2=0.3$

$P(Z=4)=P(X=1,Y=3)=0.1$

Z	1	2	3	4
P	0.2	0.4	0.3	0.1

2/8 已知二维离散型分布律，判断独立性

已知二维随机变量 X、Y 的分布律如下

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

X、Y 是相互独立的，求 α、β 的值

如果任意 x_i，y_i 均满足 $P(X=x_i, Y=y_i)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_i)$

那么 X、Y 相互独立

否则 X、Y 不相互独立

$$P(X=1, Y=2)=P(X=1)\cdot P(Y=2)$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{9}+\alpha\right) \Rightarrow \alpha=\frac{2}{9}$$

$$P(X=1, Y=3)=P(X=1)\cdot P(Y=3)$$

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{18}+\beta\right) \Rightarrow \beta=\frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=1$$

3/8 已知 F(x,y) 求 f(x,y)

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

已知二维随机变量的联合分布函数 $F(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2 & 0<x<1,\ 0<y<1\\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2 & x\ge 1,\ 0<y<1\\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x & 0<x<1,\ y\ge 1\\ 1 & x\ge 1,\ y\ge 1\\ 0 & 其他\end{cases}$ 求 f(x,y)

① 当 $0<x<1\ \ 0<y<1$ 时，$f(x,y)=\frac{\partial^2\left(\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2\right)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2\right)}{\partial x}\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)}{\partial y}=x+y$

② 当 $x\ge 1\ \ 0<y<1$ 时，$f(x,y)=\frac{\partial^2\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2\right)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2\right)}{\partial x}\right]}{\partial y}=\frac{\partial 0}{\partial y}=0$

③ 当 $0<x<1\ \ y>1$ 时，$f(x,y)=\frac{\partial^2\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)}{\partial x}\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\partial y}=0$

④ 当 $x\ge 1\ \ y\ge 1$ 时，$f(x,y)=\frac{\partial^2(1)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{\partial(1)}{\partial x}\right]}{\partial y}=\frac{\partial(0)}{\partial y}=0$

⑤ 当 x、y 属于其他情况时，$f(x,y)=\frac{\partial^2(0)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{\partial(0)}{\partial x}\right]}{\partial y}=\frac{\partial(0)}{\partial y}=0$

综上所述

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

4/8 已知 f(x,y) 求 F(x,y)

已知二维随机变量的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y，x^2\le y\le 1\\ 0，其他\end{cases}$ 求 F(x,y)

第一步：找出 f(x,y) 不等于零时 x 的范围和 y 的范围

x 的范围：$x^2\le y \Rightarrow -\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}$

y 的范围：$x^2\le y\le 1$

第二步：计算 $\int_{g_1(y)}^{x}du\int_{h_1(u)}^{y}f(u,v)dv$ 结果记为 ①

($g_1(y)$ 为 x 的左边界
$h_1(u)$ 为将 y 的下边界中的 x 替换为 u 后的式子
$f(u,v)$ 为将 $f(x,y)$ 中的 x 替换为 u、y 替换为 v 后的式子)

$g_1(y)=-\sqrt{y}$　　$h_1(u)=u^2$　　$f(u,v)=\frac{21}{4}u^2v$

$①=\int_{-\sqrt{y}}^{x}du\int_{u^2}^{y}\frac{21}{4}u^2vdv=\frac{7}{8}x^3y^2-\frac{3}{8}x^7+\frac{1}{2}y^{\frac{7}{2}}$

第三步：将 $x=g_2(y)$、$y=h_2(x)$ 分别代入 ① 中
结果依次记为 ②、③

($g_2(y)$ 为 x 的右边界
$h_2(x)$ 为 y 的上边界)

$g_2(y)=\sqrt{y}$

将 $x=\sqrt{y}$ 代入 ① 中

则得 $②=\frac{7}{8}(\sqrt{y})^3y^2-\frac{3}{8}(\sqrt{y})^7+\frac{1}{2}y^{\frac{7}{2}}$

$②=y^{\frac{7}{2}}$

$h_2(x)=1$

将 y=1 代入 ① 中

则得 $③=\frac{7}{8}x^3\cdot 1^2-\frac{3}{8}x^7+\frac{1}{2}\cdot 1^{\frac{7}{2}}$

$③=\frac{7}{8}x^3-\frac{3}{8}x^7+\frac{1}{2}$

4/8 已知 f(x,y) 求 F(x,y)

已知二维随机变量的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$ 求 F(x,y)

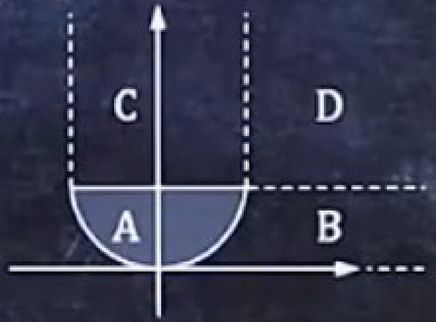
$①=\frac{7}{8}x^3y^2-\frac{3}{8}x^7+\frac{1}{2}y^{\frac{7}{2}}$　　$②=y^{\frac{7}{2}}$　　$③=\frac{7}{8}x^3-\frac{3}{8}x^7+\frac{1}{2}$

第四步：画出 f(x,y) 不等于零的区域，记为区域 A

A 右侧的区域记为 B

A 上侧的区域记为 C

A 右上方的区域记为 D



A 区域：$x^2\le y\le 1$

B 区域：$x>\sqrt{y}$，$0\le y\le 1$

C 区域：$-1\le x\le 1$，$y>1$

D 区域：$x>1$，$y>1$

则 $F(x,y)=\begin{cases}① & A区域\\ ② & B区域\\ ③ & C区域\\ 1 & D区域\\ 0 & 其他\end{cases}$

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{7}{8}x^3y^2-\frac{3}{8}x^7+\frac{1}{2}y^{\frac{7}{2}} & x^2\le y\le 1\\ y^{\frac{7}{2}} & x>\sqrt{y}，0\le y\le 1\\ \frac{7}{8}x^3-\frac{3}{8}x^7+\frac{1}{2} & -1\le x\le 1，y>1\\ 1 & x>1，y>1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

4/8 已知 $f(x,y)$ 求 $F(x,y)$

已知二维随机变量的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases} x+y，0<x<1，0<y<1 \\ 0，其他 \end{cases}$ 求 $F(x,y)$

第一步：找出 $f(x,y)$ 不等于零时 x 的范围和 y 的范围

x 的范围：$0<x<1$

y 的范围：$0<y<\boxed{1}$

第二步：计算 $\int_{g_1(y)}^{x} du \int_{h_1(u)}^{y} f(u,v)dv$ 结果记为 ①

$\left(\begin{array}{l} g_1(y) \text{ 为 } x \text{ 的左边界} \\ h_1(u) \text{ 为将 } y \text{ 的下边界中的 } x \text{ 替换为 } u \text{ 后的式子} \\ f(u,v) \text{ 为将 } f(x,y) \text{ 中的 } x \text{ 替换为 } u\text{、}y \text{ 替换为 } v \text{ 后的式子} \end{array}\right)$

$g_1(y)=0$　　$h_1(u)=0$　　$f(u,v)=u+v$

$①=\int_0^x du \int_0^y (u+v)dv=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2$

第三步：将 $x=g_2(y)$、$y=h_2(x)$ 分别代入 ① 中

结果依次记为 ②、③

$\left(\begin{array}{l} g_2(y) \text{ 为 } x \text{ 的右边界} \\ h_2(x) \text{ 为 } y \text{ 的上边界} \end{array}\right)$

$g_2(y)=1$

将 $x=1$ 代入 ① 中

则得 $②=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot y+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot y^2$

$②=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2$

$h_2(x)=1$

将 $y=1$ 代入 ① 中

则得 $③=\frac{1}{2}x^2\cdot 1+\frac{1}{2}x\cdot 1^2$

$③=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

4/8 已知 f(x,y) 求 F(x,y)

已知二维随机变量的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$ 求 F(x,y)

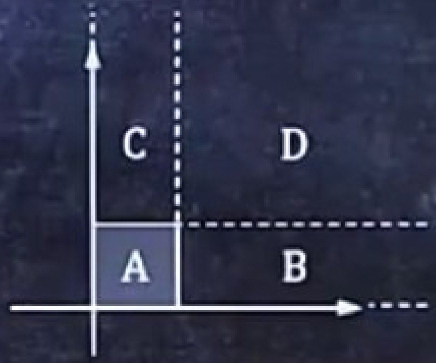
$①=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2$　　$②=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2$　　$③=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

第四步：画出 f(x,y) 不等于零的区域，记为区域 A

A 右侧的区域记为 B

A 上侧的区域记为 C

A 右上方的区域记为 D



A 区域：$0<x<1,\ 0<y<1$

B 区域：$x\geq 1,\ 0<y<1$

C 区域：$0<x<1,\ y\geq 1$

D 区域：$x\geq 1,\ y\geq 1$

则 $F(x,y)=\begin{cases} ① & A区域 \\ ② & B区域 \\ ③ & C区域 \\ 1 & D区域 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$$F(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2 & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2 & x\geq 1,\ 0<y<1 \\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x & 0<x<1,\ y\geq 1 \\ 1 & x\geq 1,\ y\geq 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

5/8 已知 F(x,y) 求 P

$P(X\le x_0, Y\le y_0)=F(x_0, y_0)$

已知二维随机变量的联合分布函数 $F(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2 & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2 & x\ge 1,\ 0<y<1 \\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x & 0<x<1,\ y\ge 1 \\ 1 & x\ge 1,\ y\ge 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

求 $P(X\le\frac{1}{2}, Y>\frac{1}{2})$

$\because P(X\le\frac{1}{2})=P(X\le\frac{1}{2}, Y>\frac{1}{2})+P(X\le\frac{1}{2}, Y\le\frac{1}{2})$

$\therefore P(X\le\frac{1}{2}, Y>\frac{1}{2})=P(X\le\frac{1}{2})-P(X\le\frac{1}{2}, Y\le\frac{1}{2})$

$=P(X\le\frac{1}{2}, Y\le+\infty)-P(X\le\frac{1}{2}, Y\le\frac{1}{2})$

$=F(\frac{1}{2}, +\infty)-F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$=\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

$=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

6/8 已知 $f(x,y)$ 求 P

已知二维随机变量的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}6xy,\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\\ 0,\ 其他\end{cases}$ 求 $P(X\ge Y)$

第一步：找出 $f(x,y)$ 不等于零时 x 的范围和 y 的范围

x 的范围：$0\le x\le 1$

y 的范围：$x^2\le y\le 1$

第二步：找出要求概率的范围，添到上一步的范围里

(要保证至少有一个未知数的上下限都是纯数字)

$P(X\ge Y)\Rightarrow P(Y\le X)$

x 的范围：$\underset{a}{0}\le x\le \underset{b}{1}$

y 的范围：$\begin{cases}x^2\le y\le 1\\ y\le x\end{cases}\Rightarrow \underset{c}{x^2}\le y\le \underset{d}{x}$

第三步：如果 x 的上下限都是纯数字

则 $P=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$

如果 y 的上下限都是纯数字

则 $P=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$

$P(X\ge Y)=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} 6xy\,dy$

$=\frac{1}{4}$

6/8 已知 f(x,y) 求 P

已知二维随机变量的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases} \boxed{1}, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$ 求 $P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{3})$

第一步：找出 f(x,y) 不等于零时 x 的范围和 y 的范围

x 的范围：$0<x<1$

y 的范围：$0<y<1$

第二步：找出要求概率的范围，添到上一步的范围里

(要保证至少有一个未知数的上下限都是纯数字)

x 的范围：$\begin{cases} 0<x<1 \\ x\le\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \underset{a}{0}<x\le\underset{b}{\frac{1}{2}}$

y 的范围：$\begin{cases} 0<y<1 \\ y\le\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \underset{c}{0}<y\le\underset{d}{\frac{1}{3}}$

第三步：如果 x 的上下限都是纯数字

则 $P=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$

如果 y 的上下限都是纯数字

则 $P=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$

$P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{3})=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{\frac{1}{3}}1\,dy$

$=\frac{1}{6}$

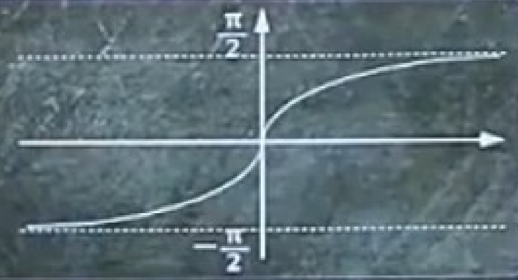
7/8 求 F(x,y) 或 f(x,y) 中含有的未知数

$F(+\infty,+\infty)=1$ $F(-\infty,-\infty)=0$

$F(x,-\infty)=0$

$F(-\infty,y)=0$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$



设二维随机变量的联合分布函数为 $F(x,y)=a(b+\arctan x)(c+\arctan 2y)$

求 a、b、c

$$\begin{cases} F(+\infty,+\infty)=1 \Rightarrow a[b+\arctan(+\infty)][c+\arctan 2(+\infty)]=a(b+\frac{\pi}{2})(c+\frac{\pi}{2})=1 \\ F(-\infty,-\infty)=0 \Rightarrow a[b+\arctan(-\infty)][c+\arctan 2(-\infty)]=a(b-\frac{\pi}{2})(c-\frac{\pi}{2})=0 \\ F(x,-\infty)=0 \Rightarrow a[b+\arctan x][c+\arctan 2(-\infty)]=a(b+\arctan x)(c-\frac{\pi}{2})=0 \\ F(-\infty,y)=0 \Rightarrow a[b+\arctan(-\infty)][c+\arctan 2y]=a(b-\frac{\pi}{2})(c+\arctan 2y)=0 \end{cases}$$

7/8 求 F(x,y) 或 f(x,y) 中含有的未知数

$F(+\infty,+\infty)=1$　　$F(-\infty,-\infty)=0$

$F(x,-\infty)=0$

$F(-\infty,y)=0$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1$

设二维随机变量的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

求 k

由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1$ 可得

$\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{1} kxy\,dxdy=1$

$\Rightarrow k=6$

8/8 求均匀分布的 f(x,y) 与 P

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}，当 (x,y)\in D（A 为区域 D 的面积）\\ 0，其他\end{cases}$$

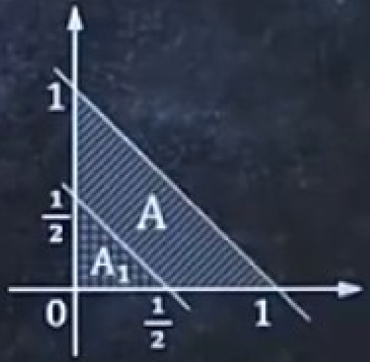
$$P[(x,y)\in D_1]=\frac{A_1}{A}（A_1 为区域 D_1 与 D 重合部分的面积）$$

设二维随机变量 (x,y) 在区域 $D=\{(x,y)|x\geq 0，y\geq 0，x+y\leq 1\}$ 上服从均匀分布

求密度函数 $f(x,y)$、$P(X+Y\leq\frac{1}{2})$

$$A=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

$$A_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$



$$f(x,y)=\begin{cases}2，当 (x,y)\in D\\ 0，其他\end{cases}$$

$$P(X+Y\leq\frac{1}{2})=\frac{A_1}{A}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$