1/7 求边缘分布函数

$F_X(x)=F(x,+\infty)$ $F_Y(y)=F(+\infty,y)$

设随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 2y\right)$，

求边缘分布函数 $F_X(x)$、$F_Y(y)$。

$$F_X(x)=F(x,+\infty)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left[\frac{\pi}{2}+\arctan 2(+\infty)\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{\pi}{2}+\arctan(+\infty)\right]\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 2y\right)$$

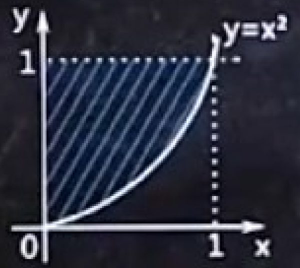
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 2y$$

2/7 求边缘密度函数

设二维随机变量的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}6xy, & 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

求边缘密度函数 $f_X(x)$、$f_Y(y)$。

第一步：将 f(x,y) 非零的区域画在坐标系上



第二步：表示出 左边界 $x=g_1(y)$、右边界 $x=g_2(y)$、上边界 $y=h_1(x)$、下边界 $y=h_2(x)$

左边界 $x=0$　　右边界 $x=\sqrt{y}$　　上边界 $y=1$　　下边界 $y=x^2$

第三步：$f_X(x)=\int_{h_2(x)}^{h_1(x)} f(x,y)\,dy$、$f_Y(y)=\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx$

$f_X(x)=\int_{x^2}^{1} 6xy\,dy=3x-3x^5$　　$f_X(x)=\begin{cases}3x-3x^5, & 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{0}^{\sqrt{y}} 6xy\,dx=3y^2$　　$f_Y(y)=\begin{cases}3y^2, & 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$

3/7 判断连续型二维变量的独立性

$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$（X、Y 相互独立）

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$（X、Y 相互独立）

$F(x,y)\neq F_X(x)\cdot F_Y(y)$（X、Y 相互不独立）

$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$（X、Y 相互不独立）

设二维随机变量的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} 6xy, & 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

判断f(x,y)的独立性

$$f_X(x)=\begin{cases} 3x-3x^5, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} 3y^2, & 0\le y\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=(3x-3x^5)\cdot 3y^2=9xy^2-9x^5y^2\neq f(x,y)$$

∴ X、Y 相互不独立

4/7 已知 $f(x,y)$，$Z=X+Y$，求 $f_Z(z)$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$

设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, \ 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

求 $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$。

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$

$f(x,z-x)=\begin{cases}2-z, & 0<x<1, \ z-1<x<z\\ 0, & 其他\end{cases}$

当 $z\le 0$ 时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx=0$

当 $0<z\le 1$ 时，$f_Z(z)=\int_0^z (2-z)\,dx=z(2-z)$

当 $1<z\le 2$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{1} (2-z)\,dx=(2-z)^2$

当 $z>2$ 时，$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx=0$

$$f_Z(z)=\begin{cases}z(2-z), & 0<z\le 1\\ (2-z)^2, & 1<z\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

5/7 已知 $f(x,y)$，$Z=\frac{X}{Y}$，求 $f_Z(z)$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(yz,y)\cdot|y|\,dy$

设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{10^6}{x^2y^2}，x>1000 \text{ 且 } y>1000\\ 0，其他\end{cases}$，

求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的密度函数 $f_Z(z)$。

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(yz,y)\cdot|y|\,dy$ $\quad f(yz,y)=\begin{cases}\frac{10^6}{y^4z^2}，yz>1000 \text{ 且 } y>1000\\ 0，其他\end{cases}$

当 $z\le0$ 时，$\begin{cases}yz>1000\\ y>1000\end{cases}$ 无解 $\Rightarrow f(yz,y)=0 \Rightarrow f_Z(z)=0$

当 $0<z\le1$ 时，$\begin{cases}yz>1000\\ y>1000\end{cases} \Rightarrow y>\frac{1000}{z} \Rightarrow f(yz,y)=\begin{cases}\frac{10^6}{y^4z^2}，y>\frac{1000}{z}\\ 0，其他\end{cases} \Rightarrow f_Z(z)=\int_{\frac{1000}{z}}^{+\infty}\frac{10^6}{y^4z^2}\cdot y\,dy=\frac{1}{2}$

当 $z>1$ 时，$\begin{cases}yz>1000\\ y>1000\end{cases} \Rightarrow y>1000 \Rightarrow f(yz,y)=\begin{cases}\frac{10^6}{y^4z^2}，y>1000\\ 0，其他\end{cases} \Rightarrow f_Z(z)=\int_{1000}^{+\infty}\frac{10^6}{y^4z^2}\cdot y\,dy=\frac{1}{2z^2}$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0，z\le0\\ \frac{1}{2}，0<z\le1\\ \frac{1}{2z^2}，z>1\end{cases}$$

6/7 已知 f(x,y)，且 X,Y 相互独立，Z=max(X,Y)，求 $F_Z(z)$

$F_Z(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$

设随机变量 X，Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 x^3+2x，求 Z=max(X,Y) 的分布函数。

$F_X(x)=x^3+2x$

$\therefore F_X(z)=z^3+2z$

$\because$ X、Y 同分布

$\therefore F_Y(y)=y^3+2y$

$\therefore F_Y(z)=z^3+2z$

$\therefore F_Z(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)=(z^3+2z)\cdot(z^3+2z)$

7/7 已知 f(x,y)，且 X,Y 相互独立，Z=min(X,Y)，求 $F_Z(z)$

$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]$

设随机变量 X，Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 x^3+2x，求 Z=min{X,Y} 的分布函数。

$F_X(x)=x^3+2x$

$\therefore F_X(z)=z^3+2z$

$\because$ X、Y 同分布

$\therefore F_Y(y)=y^3+2y$

$\therefore F_Y(z)=z^3+2z$

$\therefore F_Z(z)=1-[1-(z^3+2z)]\cdot[1-(z^3+2z)]$