

### 第3章课后部分习题参考解答

1.

$$(1) \vdash \neg(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\textcircled{1} (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{定理 1}$$

$$\textcircled{2} A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \quad \textcircled{1} + \text{定理 6}$$

$$\textcircled{3} (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \textcircled{2} + A2 + r_{mp}$$

//或直接用 A2:  $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B))$ , 然后前件交换即可//

////////////////////////////////////

$$(2) \neg A \vdash A \rightarrow B$$

$$\textcircled{1} (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad A3$$

$$\textcircled{2} \neg A \rightarrow [(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)] \quad \textcircled{1} + \text{定理 2}$$

$$\textcircled{3} [\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)] \rightarrow [\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)] \quad \textcircled{2} + A2 + r_{mp}$$

$$\textcircled{4} \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad A1$$

$$\textcircled{5} \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \textcircled{3} \textcircled{4} r_{mp} // \text{也可以由已证定理直接来调用} //$$

$$\textcircled{6} \neg A \quad \text{前提}$$

$$\textcircled{7} (A \rightarrow B) \quad \textcircled{5} \textcircled{6} r_{mp}$$

////////////////////////////////////

$$(3) A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow C$$

$$\textcircled{1} (\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \quad A3$$

$$\textcircled{2} \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \quad \text{前提}$$

$$\textcircled{3} A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad \textcircled{1} \textcircled{2} r_{mp}$$

$$\textcircled{4} (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \quad \textcircled{3} + A2 + r_{mp}$$

$$\textcircled{5} A \rightarrow B \quad \text{前提}$$

$$\textcircled{6} A \rightarrow C \quad \textcircled{4} \textcircled{5} r_{mp}$$

////////////////////////////////////

$$(4) \vdash [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\}$$

$$\textcircled{1} (B \rightarrow C) \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)] \quad \text{定理 5}$$

$$\textcircled{2} A \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad \textcircled{1} \text{加前件}$$

$$\textcircled{3} [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{A \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad \textcircled{2} + A_2 + r_{mp}$$

$$\textcircled{4} \{A \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad A_2$$

$$\textcircled{5} [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad \textcircled{3} \textcircled{4} \text{定理 7 (即传递)}$$

////////////////////////////////////

$$(5) \vdash [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{(C \rightarrow D) \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$$

$$1) (B \rightarrow C) \rightarrow [(C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D)] \quad \text{定理 7}$$

$$2) [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$$

同理上题的证明

$$3) [A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$$

2) 前件交换

4)

$$(C \rightarrow D) \rightarrow \{[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}\} \quad 3) \text{加前件}$$

$$5) (C \rightarrow D) \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\} \quad 4) + A_2 + A_1 + r_{mp}$$

$$6) [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{(C \rightarrow D) \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\} \quad 5) \text{前件交换}$$

////////////////////////////////////

$$(6) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (B \rightarrow C)$$

$$1) [B \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (B \rightarrow C)\} \quad \text{传递}$$

$$2) B \rightarrow (A \rightarrow B) \quad A_1$$

$$3) [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (B \rightarrow C) \quad 1) \quad 2) \quad r_{mp}$$

////////////////////////////////////

$$(7) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A)$$

方案一:运用传递的方法

$$1) [B \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [B \rightarrow (B \rightarrow A)]\} \quad \text{定理 7}$$

2)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [B \rightarrow (B \rightarrow A)]$  1) +A1+rmP

3)  $[B \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A)$  习题 1. (1) 已证结论

6)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A)$  2) 3) +定理 7

方案二:考虑调用定理 14 来证。

1)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 3

2)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$  1) +定理 13+rmP

3)  $B \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A]$  2) +定理 2

4)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$  3) +定理 6

5)  $(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A)$  定理 1

6)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A)$  4) 5) +定理 14+rmP

////////////////////////////////////

(8)  $\vdash A \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)]$

1)  $(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)]$  定理 7

2)  $A \rightarrow \{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)]\}$  1) 定理 2

3)  $[A \rightarrow (C \rightarrow A)] \rightarrow \{A \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)]\}$  2) +A2+rmP

4)  $A \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow B)]$  3) +A1+rmP

////////////////////////////////////

(9)  $\vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$

1)  $[\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow (\neg A \rightarrow A)\}$  定理 7

2)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 3

3)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$  1) 2) rmP

4)  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  定理 8

5)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$  3) 4) 定理 7

//也可以调用定理 14 来证: 只需证  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$  及  $A \rightarrow A$  即可, 显然//

$$(10) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$$

方案一：直接由传递定理

$$1) [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow \{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\} \text{ 定理 7}$$

$$2) [(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A \quad (9) \text{ 题已证}$$

$$3) (C \rightarrow A) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A\} \quad 2) \text{ 定理 2}$$

$$4) \{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\} \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A] \quad 3) +A2+rmP$$

$$5) [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A] \quad 1) 4) \text{ 定理 7}$$

方案二：

$$1) (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (\neg A \rightarrow C)\} \text{ 定理 7}$$

$$2) \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \text{ 定理 3}$$

$$3) [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (\neg A \rightarrow C) \quad 1) 2) \text{ rmP}$$

$$4) (C \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg C) \text{ 定理}$$

$$5) \neg A \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow \neg C] \quad 4) + \text{定理 6}$$

$$6) [(C \rightarrow A) \rightarrow \neg C] \rightarrow [C \rightarrow \neg(C \rightarrow A)] \text{ 定理}$$

$$7) \neg A \rightarrow [C \rightarrow \neg(C \rightarrow A)] \quad 5) 6) + \text{定理 7}$$

$$8) (\neg A \rightarrow C) \rightarrow [\neg A \rightarrow \neg(C \rightarrow A)] \quad 7) +A2+rmP$$

$$9) [\neg A \rightarrow \neg(C \rightarrow A)] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A] \quad A3$$

$$10) (\neg A \rightarrow C) \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A] \quad 8) 9) + \text{定理 7}$$

//此结论也可以直接由传递来做//

$$11) [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A] \quad 3) 10) + \text{定理 7}$$

////////////////////////////////////

$$(11) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$$

方案一：运用证明定理 14 的证明方法。

//这里 11, 12, 13 题的证明均可采用证明定理 14 的方法，注意是采用而不是调用该定理，即证明的原理方法和定理 14 的证明方法是一样，大家可做一般性了解吧。//

- 1)  $\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)$  定理 3
- 2)  $A \rightarrow [\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)]$  1) 定理 2
- 3)  $\neg C \rightarrow [A \rightarrow (C \rightarrow B)]$  2) 定理 6
- 4)  $[A \rightarrow (C \rightarrow B)] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$   $A_2$
- 5)  $\neg C \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$  3) 4) 定理 7
- 6)  $[(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$  定理 12
- 7)  $\neg C \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$  5) 6) 定理 7
- 8)  $[\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$  7)  $A_2 + r_{mp}$   
//由此可以看出与证明定理 14 的方法相同//
- 9)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$  定理 12
- 10)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$  9) 8) 定理 7
- 11)  $[\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$   $A_3$
- 12)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$  10) 11) 定理 7

方案二：直接调用定理 14 来证。

- 1)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow C\}$  定理 14
- 2)  $\{(A \rightarrow C) \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow C\}$   
 $\rightarrow \{[\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]\}$  定理 6
- 3)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow \{[\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]\}$  1) 2) + 定理 7
- 4)  $[\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]\}$  3) + 定理 6
- 5)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 3
- 6)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$  5) + 定理 13 + rmp
- 7)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$  4) 6) rmp

方案三：根据定理 14 只需证明  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$

及  $C \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$  (显然)。

证  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$ :

- 1)  $\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)$  定理
- 2)  $A \rightarrow (\neg C \rightarrow (C \rightarrow B))$  1) + 定理 2
- 3)  $\neg C \rightarrow (A \rightarrow (C \rightarrow B))$  2) + 定理 6
- 4)  $(A \rightarrow (C \rightarrow B)) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$  A2
- 5)  $\neg C \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$  3) 4) + 定理 7
- 6)  $(A \rightarrow C) \rightarrow [\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)]$  5) + 定理 6
- 7)  $[\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C]$  定理
- 8)  $(A \rightarrow C) \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow C]$  6) 7) + 定理 7
- 9)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$  8) + 定理 6

////////////////////////////////////

(12)  $\vdash \{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$

//采用证明定理 14 的证明方法//

- 1)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow C]$  定理 3
- 2)  $\{\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow \{\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)\}$  定理 13
- 3)  $\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)$  1) 2)  $r_{mp}$
- 4)  $\neg D \rightarrow \{\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)\}$  3) 定理 2
- 5)  $\{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow [\neg D \rightarrow (A \rightarrow B)]$  4)  $A_2 + r_{mp}$
- 6)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  已证定理
- 7)  $\neg D \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$  6) 定理 2
- 8)  $[\neg D \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$  7)  $A_2 + r_{mp}$
- 9)  $\{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow [\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$  5) 8 定理 7

- 10)  $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow \{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\}$  定理 12
- 11)  $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow \{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\}$  10) 9) 定理 7
- 12)  $\{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\} \rightarrow [(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]$   $A_2$
- 13)  $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg B)] \rightarrow$   
 $\{[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]\}$  定理 7
- 14)  $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg B)]$  定理 12
- 15)  $[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]$  13) 14)  $r_{mp}$
- 16)  $[(\neg D \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow D)]$   $A_3$
- 17)  $(B \rightarrow D) \rightarrow [(\neg D \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  16) 定理 2
- 18)  $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  17)  $A_2 + r_{mp}$
- 19)  $[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  15) 18) 定理 7
- 20)  $\{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\} \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  12) 19) 定理 7
- 21)  $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  11) 20) 定理 7
- //这里也可以仿照 (11) 题的方法来处理。//  
 //////////////////////////////////////
- (13)  $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C\}\}$
- //采用证明定理 14 的证明方法//
- 1)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow (\neg A \rightarrow B)\}$  定理 7
- 2)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理 3
- 3)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$  1) 2)  $r_{mp}$
- 4)  $\neg A \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B\}$  3) 定理 6
- 5)  $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B\} \rightarrow \{\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]\}$  定理 12
- 6)  $\neg A \rightarrow \{\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]\}$  4) 5) 定理 7
- 7)  $\neg C \rightarrow \{\neg A \rightarrow [\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$  6) 定理 2

$$8) (\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow \{\neg C \rightarrow [\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\} \quad 7) \quad A_2 + r_{mp}$$

$$9) \{\neg C \rightarrow [\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\} \rightarrow$$

$$\{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\} \quad A_2$$

$$10) (\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\} \quad 8) \quad 9) \quad \text{定理 7}$$

$$11) [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]] \rightarrow [[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C] \quad A_3$$

$$12) (\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow \{[\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]] \rightarrow$$

$$[[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\} \quad 11) \quad \text{定理 2}$$

$$13) \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\} \rightarrow$$

$$\{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\} \quad 12) \quad A_2 + r_{mp}$$

$$14) (\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\} \quad 10) \quad 13) \quad \text{定理 7}$$

$$15) (A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A) \quad \text{定理 12}$$

$$16) (A \rightarrow C) \rightarrow \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\} \quad 14) \quad 15) \quad \text{定理 7}$$

$$17) (\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\} \quad 16) \quad \text{定理 6}$$

$$18) (B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B) \quad \text{定理 12}$$

$$19) (B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\} \quad 17) \quad 18) \quad \text{定理 7}$$

$$20) (A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\} \quad 19) \quad \text{定理 6}$$

//这里同样可以仿照 (11) 题的方法来处理。//

////////////////////////////////////

$$(14) \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [[ (B \rightarrow A) \rightarrow A] \rightarrow C]\}$$

$$1) (B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [[ (B \rightarrow A) \rightarrow A] \rightarrow C]\}$$

由上题 (13) 的已证结论

$$2) (A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [[ (B \rightarrow A) \rightarrow A] \rightarrow C]\} \quad 1) + \quad \text{定理 6}$$

////////////////////////////////////



2. (1)

只需证:  $B \rightarrow A \vdash \neg A \rightarrow \neg B$

只需证:  $B \rightarrow A \vdash \neg\neg B \rightarrow \neg\neg A$  (由  $(\neg\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$  即 A3 可知)

只需证:  $B \rightarrow A, \neg\neg B \vdash \neg\neg A$

1)  $\neg\neg B$  前提

2)  $\neg\neg\neg\neg B \rightarrow \neg\neg B$  1) + 定理 2

3)  $(\neg\neg\neg\neg B \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg\neg B)$  A3

4)  $\neg B \rightarrow \neg\neg\neg B$  2) 3) rmp

5)  $(\neg B \rightarrow \neg\neg\neg B) \rightarrow (\neg\neg B \rightarrow B)$  A3

6)  $\neg\neg B \rightarrow B$  4) 5) rmp

7)  $B$  1) 6) rmp

//此处由  $\neg\neg B$  演绎  $B$  的过程也可直接调用定理 4:  $\neg\neg B \vdash B$

8)  $B \rightarrow A$  前提

9)  $A$  7) 8) rmp

10)  $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$  同理 1) 至 6) + 演绎定理 //  $\neg\neg\neg A \vdash \neg A$

11)  $(\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)$  A3

12)  $A \rightarrow \neg\neg A$  10) 11) rmp //也可以直接调用

13)  $\neg\neg A$  9) 12) rmp

////////////////////////////////////

(2)

只需证:  $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$ , 显然。

////////////////////////////////////

(3)

只需证:  $(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$

①  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理

②  $(A \rightarrow B) \rightarrow A$  前提

③  $\neg A \rightarrow A$  ①②传递

④  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  定理

⑤  $A$

////////////////////////////////////

(4)

只需证:  $\neg(A \rightarrow B), B \vdash A$

①  $B \rightarrow (A \rightarrow B)$

②  $B$

③  $A \rightarrow B$

④  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)$  定理

⑤  $\neg(A \rightarrow B)$  前提

⑥  $A$

////////////////////////////////////

3. (1)

①  $\neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$  定理 3

②  $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$  ①+定理 2

③  $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow (B \rightarrow A))$  ②+A2+ $r_{mp}$

④  $(\neg A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$  A2

⑤  $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$  ③④+定理 7

⑥  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  定理 8

⑦  $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$  ⑥+定理 2

⑧  $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$  ⑦+A2+ $r_{mp}$

⑨  $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$  ⑤⑧+定理 7

//即反证法的形式化定理描述//

(2)

①  $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$  A3'

②  $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$  ①+定理 6

③  $B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$  A1

④  $B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$  ③②+定理 7

⑤  $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$  ④+定理 6

//由于在 PC 中证明定理 6, 7 只用到了公理 A1, A2, 未使用 A3, 故定理 6, 7

仍可以在  $PC'$  中直接调用。//  
////////////////////////////////////

4.

(1)

①  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$  假设定理

②  $B \rightarrow (A \rightarrow C)$  ①+定理 6

③  $B$  假设定理

④  $(A \rightarrow C)$  ②③  $r_{mp}$

///或直接用  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$  来证明//

(2)

①  $\Gamma; \neg A \vdash B$  假设

②  $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow B$  ①演绎定理

③  $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow \neg B$  由  $\Gamma; \neg A \vdash \neg B$  同理②

④  $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$  上面已证定理

⑤  $\Gamma \vdash A$  ②③④  $r_{mp}$  //此题就是我们常用的反证法一般性证明过程。

////////////////////////////////////

5.

证明：若  $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$  为 PC 的定理，则根据 PC 的可靠性知

$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$  应为重言式，而指派  $\alpha(A)=T, \alpha(B)=T$  使得

$\alpha((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) = F$ ，矛盾。

////////////////////////////////////

//以上证明仅供大家参考，证法不唯一，大家可以多尝试一下其他的方案。

//另，第 3, 4, 5 大题的证明不作为课后习题作业要求，仅供感兴趣的同学参考。