# §2.2 范式

[本节主要内容]

1) 范式基本概念;
2) 合取/析取范式的求解;
3) 主合取/析取范式的求解;

## §2.2.1 基本概念

1. 文字：简单命题变元及其否定称为文字

例 $P, \neg Q$ 均为文字

2. 合取式：文字的合取成为合取式

例 $P \wedge \neg Q$， $\neg P \wedge \neg Q$ 均为合取式

3. 析取式：文字的析取成为析取式

例 $P \vee \neg Q$， $\neg P \vee \neg Q$ 均为析取式

4. 合取范式：设命题公式 $A$ 的形式为：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \,(n \geq 1)$$

其中 $A_i\,(i=1,\cdots,n)$ 为析取式

例 $(\neg P \vee Q) \wedge (R \vee S)$

$\neg P \vee R \vee S$ 均为合取范式

5. 析取范式：设命题公式 $A$ 的形式为：

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n \,(n \geq 1)$$

其中 $A_i\,(i=1,\cdots,n)$ 为合取式

例 $(\neg P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$

$\neg P \wedge R \wedge S$ 均为析取取范式

# §2.2.2 范式求解

## 1. 求解过程：

1)消去 $\rightarrow$ 及 $\leftrightarrow$ ：

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

$$\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

2) 运用摩根定律 ：

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

分配律：

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

双重否定定律：$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

3) 化简：$A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A$

例 求公式$(P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$的合取范式和析取范式。

$$(P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee \neg Q) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

为合取范式

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R))$$

$$\vee (\neg Q \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R))$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg P) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$$

$$\vee (\neg Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \wedge R)$$

为析取范式

$$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$$

$$\vee \neg Q \vee (\neg Q \wedge R)$$ 为析取范式

$$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$ 为析取范式

**定理1(范式定理)：**

任一命题公式 $A$ 都存在与之等价的合取范式和析取范式.

## §2.2.3 主范式

1. 合取项：在命题公式 $A$ 的合取范式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n (n \geq 1)$$

中，对析取式 $A_i (i = 1, \cdots, n)$ 称为合取项。

例 在合取范式$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$ 中

$(\neg P \vee \neg Q)$, $(\neg P \vee \neg Q \vee R)$ 为合取项

**2. 析取项：** 在命题公式 $A$ 的析取范式

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n (n \geq 1)$$

中，对合取式 $A_i (i = 1, \cdots, n)$ 称为析取项。

**例** 在析取范式

$$(\neg P \wedge \neg P) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$$ 中

$$(\neg P \wedge \neg P), (\neg P \wedge \neg Q), (\neg P \wedge R)$$

均为析取项。

**3. 主合取范式：** 设命题公式 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 的合取范式为：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m (m \geq 1)$

若每一个合取项 $A_i (i = 1, \cdots, m)$ 的形式为：$A_i = Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$

其中 $Q_i = P_i$ 或 $\neg P_i$

今后称主合取范式中的合取项为极大项，通常用 $M_i$ 表示。

**例** $A(P, Q) = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee Q)$

为 $A$ 主合取范式。

## 4. 极大项 $M_i$ 有如下性质：

1) 对于命题公式 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 共有个 $2^n$ 极大项；

2) 每个极大项 $M_i$ 有 $2^n$ 种真值指派，其中为F的真值指派唯一；

3) 任意两个不相同的极大项的真值取值不能同为F；

4) 所有 $2^n$ 个极大项之∧为F即 $\bigwedge_{i=1}^{2^n} M_i = F$

**5. 主析取范式：** 设命题公式 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 的析取范式为：$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_m (m \geq 1)$

若每一个析取项 $A_i (i = 1, \cdots, m)$ 的形式为：$A_i = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_n$

其中 $Q_i = P_i$ 或 $\neg P_i$

今后称主析取范式中的析取项为极小项，通常用 $m_i$ 表示。

例 $A(P,Q,R) = (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

为 $A$ 主析取范式。

# 6. 极小项 $m_i$ 有如下性质：

1) 对于命题公式 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 共有个 $2^n$ 极小项；

2) 每个极小项 $m_i$ 有 $2^n$ 种真值指派，其中为T的真值指派唯一；

3) 任意两个不相同的极小项的真值取值不能同为T ；

4) 所有 $2^n$ 个极小项之∨为T即 $\bigvee_{i=1}^{2^n} m_i = T$

## 7. 主合取/析取范式求解步骤

1) 求解命题公式 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 的合取/析取范式;

2) 除去合取/析取范式中所有永真/永假的项

如 $P \vee \neg P$，$P \wedge \neg P$

3) 合并相同的合取/析取项和相同的变元

如 $Q \vee Q = Q$ , $Q \wedge Q = Q$

4) 补项：对缺少变元的合取/析取项补齐

在合取项中添加永假式: $P_k \wedge \neg P_k$

在析取项中添加永真式: $P_k \vee \neg P_k$

然后用分配律展开，再化简 。

例 求 $P \wedge Q$ 的主合取范式。

$$\Leftrightarrow [P \vee (Q \wedge \neg Q)] \wedge [(P \wedge \neg P) \vee Q]$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$$

例 求 $P \to Q$ 的主析取范式。

$$\Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$\Leftrightarrow [\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)] \vee [(P \vee \neg P) \wedge Q]$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

例 求$(P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$的主合取/析取范式。

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ 为析取范式

$$\Leftrightarrow [\neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg R)] \vee [(P \vee \neg P) \wedge \neg Q \wedge (R \vee \neg R)]$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

定理2 永真式无主合取范式；

永假式无主析取范式。

定理3 任一命题公式(非永真或非永假)都存在唯一与之等价的主合取范式和主析取范式

## 8. 主合取范式与主析取范式的关系:

若已知公式$A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$的主合取范式为$\bigwedge\limits_i M_i$，则其主析取范式为$\neg(\neg A)$

其中$\neg A$为$A$的所有$2^n$个极大项中

除去主合取范式 $\bigwedge\limits_i M_i$中的极大项后

剩下的极大项之“$\wedge$ ”

同理：

若已知公式$A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$的主析取范式为$\bigvee_i m_i$，则其主合取范式为$\neg(\neg A)$

其中$\neg A$为$A$的所有$2^n$个极小项中

除去主析取范式$\bigvee_i m_i$中的极小项后

剩下的极小项之“$\vee$”

例 求$(P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$的主合取/析取范式。

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

为主合取范式，则主析取范式为:

$$\neg[(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)$$
$$\wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$$
$$\wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)]$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$
$$\vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$$
$$\vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

## 9. 主范式与真值表的关系：

设命题公式 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$（非永真、非永假）的真值表为：

| $P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_n$ | $A$ |
|---|---|
| 前 $k$ 个为真的指派 | $T$ |
| 后 $j$ 个为假的指派 | $F$ |

其中 $k + j = 2^n$

根据公式 $A$ 为真的指派可以得到 $A$ 的主析取范式：

1) 令 $A = m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_k$

2) 对 $m_i\,(i = 1,2,\cdots,k)$

令 $m_i = P_1' \wedge P_2' \wedge \cdots \wedge P_n'$ 其中，

$$P_l' = \begin{cases} P_l & \text{若}P_l\text{在第}i\text{行的真值赋值为}T \\ \neg P_l & \text{若}P_l\text{在第}i\text{行的真值赋值为}F \end{cases}$$

$l = 1,2,\cdots,n$

同理根据公式 $A$ 为假的指派可以得到 $A$ 的主合取范式：

1）令 $A = M_{k+1} \wedge M_{k+2} \wedge \cdots \wedge M_{k+j}$

2）对 $M_i (i = k+1, k+2, \cdots, k+j)$

令 $m_i = P_1' \vee P_2' \vee \cdots \vee P_n'$ 其中，

$$P_l' = \begin{cases} P_l & \text{若} P_l \text{在第} i \text{行的真值赋值为} F \\ \neg P_l & \text{若} P_l \text{在第} i \text{行的真值赋值为} T \end{cases}$$

$$l = 1, 2, \cdots, n$$

**例** 求公式

$$A = P \leftrightarrow Q$$

的主合取范式与主析取范式

| $P$ | $Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $T$ |

则从为真的指派可得主析取范式：

$$A = P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

则从为假的指派可得主合取范式：

$$A = P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

根据真值表与主范式的关系可的如下结论：

**定理4** $n$元命题公式的全体可划分为$2^{2^n}$个等价类，每一类中的公式相互逻辑等价，并等价于它们公共的主合取范式/主析取范式。

例

$$A=(P\wedge Q)\rightarrow(\neg Q\wedge R)$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$$

$$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee\neg R)$$

为主合取范式