

第 3 章课后部分习题参考解答

1.

$$(1) \vdash \neg(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\textcircled{1} (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{定理 1}$$

$$\textcircled{2} A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \quad \textcircled{1} \text{定理 6}$$

$$\textcircled{3} (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \textcircled{2} A_2 r_{mp}$$

////////////////////////////////////

$$(2) \neg A \vdash A \rightarrow B$$

$$\textcircled{1} \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad A1$$

$$\textcircled{2} \neg A \quad \text{前提}$$

$$\textcircled{3} \neg B \rightarrow \neg A \quad \textcircled{1} \textcircled{2} r_{mp}$$

$$\textcircled{4} (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad A3$$

$$\textcircled{5} (A \rightarrow B) \quad \textcircled{3} \textcircled{4} r_{mp}$$

////////////////////////////////////

$$(4) \vdash [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\}$$

$$\textcircled{1} (B \rightarrow C) \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)] \quad \text{定理 5}$$

$$\textcircled{2} A \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad \textcircled{1} \text{加前件}$$

$$\textcircled{3} [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{A \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad \textcircled{2} A_2 r_{mp}$$

$$\textcircled{4} \{A \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad A_2$$

$$\textcircled{5} [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad \textcircled{3} \textcircled{4} \text{传递}$$

////////////////////////////////////

$$(5) \vdash [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{(C \rightarrow D) \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$$

$$1) (B \rightarrow C) \rightarrow [(C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D)] \quad \text{定理 7}$$

$$2) [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$$

同理上题的证明

$$3) [A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$$

2) 前件交换

4)

$$(C \rightarrow D) \rightarrow \{[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}\} \quad 3) \text{加前件}$$

$$5) (C \rightarrow D) \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\} \quad 4) A_2 + A_1 + r_{mp}$$

$$6) [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{(C \rightarrow D) \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\} \quad 5) \text{前件交换}$$

//注:上述 2)-6)的证明体现了把 $\varepsilon 1 \rightarrow (P \rightarrow \varepsilon 2)$ 变为 $\varepsilon 1 \rightarrow (P' \rightarrow \varepsilon 2)$ 的过程, 其中 $P' \rightarrow P$ 。利用前件交换将 P 交换出来, 加前件 P' 。//

////////////////////////////////////

$$(7) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$1) [B \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [B \rightarrow (B \rightarrow A)]\} \text{传递}$$

$$2) [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [B \rightarrow (B \rightarrow A)] \quad 1) +A1+rmp$$

$$3) (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \quad \text{定理}$$

$$4) B \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow A] \quad 3) \text{前件交换}$$

$$5) [B \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A) \quad 4) +A2+rmp$$

$$6) [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A) \quad 2) 5) + \text{传递}$$

//注:上述 2), 5), 6)的证明体现了把 $\varepsilon 1 \rightarrow P$ 变为 $\varepsilon 1 \rightarrow P'$ 的过程, 利用了 $P \rightarrow P'$ 和传递的定理。//

////////////////////////////////////

$$(9) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$$

$$1) [\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow (\neg A \rightarrow A)\} \quad \text{定理}$$

$$2) \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{定理}$$

$$3) [(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \quad 1) 2) \text{ rmp}$$

$$4) (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A \quad \text{定理}$$

$$5) [(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A \quad 3) 4) \text{ 传递}$$

//同（7）题的处理思想。另，这里也可以运用定理 3.1.14 来证明形如 $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ 的结论。//

////////////////////////////////////

$$(10) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$$

1) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow \{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\}$ 传递

2) $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$ 9 题已证

3) $(C \rightarrow A) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A\}$ 2) 加前件

4) $\{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\} \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$ 3) +A2+imp

5) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$ 1) 4) 传递

//注:上述 1)-5) 证明体现了把 $\varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow P)$ 变为 $\varepsilon_1 \rightarrow (\varepsilon_2 \rightarrow P')$ 的过程, 即利用 $P \rightarrow P'$, 然后加前件 ε_2 用 A2 打开, 再利用传递即可。//

////////////////////////////////////

$$(11) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$$

1) $\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)$ 已证定理

2) $A \rightarrow [\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)]$ 1) 加前件

3) $\neg C \rightarrow [A \rightarrow (C \rightarrow B)]$ 2) 前件交换

4) $[A \rightarrow (C \rightarrow B)] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$ A₂

5) $\neg C \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$ 3) 4) 传递

6) $[(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$ 定理

7) $\neg C \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$ 5) 6) 传递

8) $[\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$ 7) A₂ + r_{mp}

9) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$ 定理

10) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$ 9) 8) 传递

11) $[\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$ 定理

12) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$ 10) 11) 传递

//本题展示了此类 $(X \rightarrow P) \rightarrow (Y \rightarrow P)$ 即两个尾件均同为 P 的另一种证明方法,

即通过逆否变形转换为证 $(\neg P \rightarrow \neg X) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Y)$, 即由尾件相同转换为前件相同来处理, 证明思想同书上定理 3.1.14 的证明思想。下面的 (12) (13) 题采用了相同的处理方法。//

////////////////////////////////////

(12) $\vdash \{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$

1) $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow C]$ 定理

2) $\{\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow \{\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)\}$ 定理

3) $\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)$ 1) 2) r_{mp}

4) $\neg D \rightarrow \{\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)\}$ 3) 加前件

5) $\{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow [\neg D \rightarrow (A \rightarrow B)]$ 4) $A_2 + r_{mp}$

6) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 定理

7) $\neg D \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$ 6) 加前件

8) $[\neg D \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$ 7) $A_2 + r_{mp}$

9) $\{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow [\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$ 5) 8) 传递

10) $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow \{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\}$ 定理

11) $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow \{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\}$ 10) 9) 传递

12) $\{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\} \rightarrow [(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]$ A_2

13) $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg B)] \rightarrow$

$\{[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]\}$ 传递

14) $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg B)]$ 定理

15) $[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]$ 13) 14) r_{mp}

16) $[(\neg D \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow D)]$ A_3

17) $(B \rightarrow D) \rightarrow [(\neg D \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow D)]$ 16) 加前件

18) $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$ 17) $A_2 + r_{mp}$

19) $[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$ 15) 18) 传递

20) $\{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\} \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$ 12) 19) 传递

21) $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$ 11) 20) 传递

////////////////////////////////////

(13) $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C\}$

1) $[\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow (\neg A \rightarrow B)\}$ 定理

2) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理

3) $[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ 1) 2) r_{mp}

4) $\neg A \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B\}$ 3) 前件交换

5) $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B\} \rightarrow \{\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]\}$ 定理

6) $\neg A \rightarrow \{\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]\}$ 4) 5) 传递

7) $\neg C \rightarrow \{\neg A \rightarrow [\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$ 6) 加前件

8) $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow \{\neg C \rightarrow [\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$ 7) $A_2 + r_{mp}$

9) $\{\neg C \rightarrow [\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\} \rightarrow$

$\{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$ A_2

10) $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$ 8) 9) 传递

11) $[\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]] \rightarrow [[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]$ A_3

12) $(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow \{[\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]] \rightarrow$

$[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C\}$ 11) 加前件

13) $\{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\} \rightarrow$

$\{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$ 12) $A_2 + r_{mp}$

14) $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C\}$ 10) 13) 传递

15) $(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$ 定理

16) $(A \rightarrow C) \rightarrow \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C\}$ 14) 15) 传递

17) $(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C\}$ 16) 前件交换

18) $(B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$ 定理

19) $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C\}$ 17) 18) 传递

20) $(A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C\}$ 19) 前件交换

////////////////////////////////////

(14) $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow A] \rightarrow C\}$

1) $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow A] \rightarrow C\}$

由上题的已证结论

2) $(A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow A] \rightarrow C\}$ 1) 前件交换

////////////////////////////////////

//上述各题的证明方法都不唯一，大家也可以用习题课上讲述的其他处理方案做一下。//

2.

(1)

只需证: $B \rightarrow A \vdash \neg A \rightarrow \neg B$

只需证: $B \rightarrow A \vdash \neg\neg B \rightarrow \neg\neg A$

只需证: $B \rightarrow A, \neg\neg B \vdash \neg\neg A$

1) $\neg\neg B \rightarrow B$ 定理

//这里也可以不调用该定理，可以把书上的 $\neg\neg B \vdash B$ 演绎代码代入即可。

2) $\neg\neg B$ 前提

3) B 1) 2) r_{mp}

4) $B \rightarrow A$ 前提

5) A 3) 4) r_{mp}

6) $A \rightarrow \neg\neg A$ 定理

//同上也可以不调用，只需先证 $\neg\neg A \vdash \neg A$ ，显然上述已证。

7) $\neg\neg A$ 6) 7) r_{mp}

(2)

只需证: $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$, 显然。

(3)

只需证: $(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$

① $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理

② $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ 前提

③ $\neg A \rightarrow A$ ①②传递

④ $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 定理

⑤ A

(4)

只需证: $\neg(A \rightarrow B), B \vdash A$

① $B \rightarrow (A \rightarrow B)$

② B

③ $A \rightarrow B$

④ $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 定理

⑤ $\neg(A \rightarrow B)$ 前提

⑥ A

////////////////////////////////////

3.

(1)

1) $\neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$ 定理

2) $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$ 1) 加前件

3) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow (B \rightarrow A))$ 2) +A2

4) $(\neg A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$ A2

5) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$ 3) 4) 传递

6) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 定理

7) $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$ 6) 加前件

8) $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 7) +A2

9) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 5) 8) 传递

////////////////////////////////////

4.

(1)

① $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 假设定理

② $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ ①前件交换

③ B 假设定理

④ $(A \rightarrow C)$ ②③ r_{mp}

(2)

① $\Gamma; \neg A \vdash B$ 已知

② $\Gamma; \neg A \vdash \neg B$ 已知

③ $\neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$ 定理

④ $\Gamma; \neg A \vdash A$ ①②③ r_{mp}

⑤ $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow A$ ④演绎定理

⑥ $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 定理

⑦ $\Gamma \vdash A$ ⑤⑥ r_{mp}

////////////////////////////////////

6.

(1)

① $\neg A \rightarrow A, \neg A \vdash \neg A$ 公理

② $\neg A \rightarrow A, \neg A \vdash \neg A \rightarrow A$ 公理

③ $\neg A \rightarrow A, \neg A \vdash A$ ①② \rightarrow 消去

④ $\neg A \rightarrow A, A \vdash A$ 公理

⑤ $\neg A \rightarrow A \vdash A$ ③④假设消除

////////////////////////////////////

(3)

先证 $((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

① $((A \vee B) \rightarrow C), A \vdash A$ 公理

② $((A \vee B) \rightarrow C), A \vdash A \vee B$ ① \vee 引入

③ $((A \vee B) \rightarrow C), A \vdash A \vee B \rightarrow C$ 公理

④ $((A \vee B) \rightarrow C), A \vdash C$ ②③ \rightarrow 消去

⑤ $((A \vee B) \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$ ④ \rightarrow 引入

⑥ $((A \vee B) \rightarrow C) \vdash B \rightarrow C$ 同理可得

⑦ $((A \vee B) \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$ ⑤⑥ \wedge 引入

再证 $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$

只需证: $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B \vdash C$

① $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B; A \vdash A$ 公理

② $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B; A \vdash A \rightarrow C$ 公理+ \wedge 消除

③ $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B; A \vdash C$ ①② \rightarrow 消去

④ $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B; B \vdash C$ 同理可得

⑤ $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B \vdash A \vee B$ 公理

⑥ $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B \vdash C$ ③④⑤ \vee 消除

////////////////////////////////////

(5)

先证 $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \wedge \neg B$

1) $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ PC 已证定理

2) $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash \neg A$ 公理

3) $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash A \rightarrow B$ 1) 2) \rightarrow 消除

4) $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash \neg(A \rightarrow B)$ 公理

- 5) $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg\neg A$ 3) 4) \neg 引入
- 6) $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$ 5) $\neg\neg$ 消除
- 7) $\neg(A \rightarrow B), B \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ ND 中已证定理
- 8) $\neg(A \rightarrow B), B \vdash B$ 公理
- 9) $\neg(A \rightarrow B), B \vdash A \rightarrow B$ 7) 8) \rightarrow 消除
- 10) $\neg(A \rightarrow B), B \vdash \neg(A \rightarrow B)$ 公理
- 11) $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg B$ 9) 10) \neg 引入
- 12) $\neg(A \rightarrow B) \vdash A \wedge \neg B$ 6) 11) \wedge 引入
- 13) $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \wedge \neg B$ 12) \rightarrow 引入

再证: $\vdash (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

- 1) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash A \wedge \neg B$ 公理
- 2) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash A$ 1) \wedge 消除
- 3) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$ 公理
- 4) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash B$ 2) 3) \rightarrow 消除
- 5) $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \vdash \neg B$ 1) \wedge 消除
- 6) $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$ 4) 5) \neg 引入
- 7) $\vdash (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$ 6) \rightarrow 引入

////////////////////////////////////

- (6)
- 1) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), A \vdash A$ 公理
- 2) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), A \vdash A \vee C$ 1) \vee 引入
- 3) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; C \vdash C$ 公理
- 4) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; C \vdash A \vee C$ 3) \vee 引入

- 5) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \mid \neg B$ 公理
- 6) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \mid \neg \neg B$ 公理
- 7) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \mid A \vee C$ 5) 6) \neg 消除
- 8) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \mid (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)$ 公理
- 9) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \mid \neg B \vee C$ 8) \wedge 消除
- 10) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \mid A \vee C$ 4) 7) 9) \vee 消除
- 11) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \mid A \vee B$ 8) \wedge 消除
- 12) $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \mid A \vee C$ 2) 10) 11) \vee 消除
- 13) $\mid \neg(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \rightarrow (A \vee C)$

////////////////////////////////////
7)

先证: $\mid \neg(A \wedge B) \rightarrow A \wedge (\neg A \vee B)$

- ① $A \wedge B \mid A$ 公理+ \wedge 消除
- ② $A \wedge B \mid B$ 公理+ \wedge 消除
- ③ $A \wedge B \mid \neg A \vee B$ ② \vee 引入
- ④ $A \wedge B \mid A \wedge (\neg A \vee B)$ ①③ \wedge 引入

再证: $\mid \neg A \wedge (\neg A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$

- ① $A \wedge (\neg A \vee B) \mid A$ 公理+ \wedge 消除
- ② $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \mid A$ 公理+ \wedge 消除
- ③ $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \mid \neg A$ 公理
- ④ $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \mid B$ ②③ \neg 消除
- ⑤ $A \wedge (\neg A \vee B); B \mid B$
- ⑥ $A \wedge (\neg A \vee B) \mid \neg A \vee B$ 公理+ \wedge 消除

⑦ $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash B$ ④⑤⑥ \vee 消除

⑧ $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A \wedge B$ ①⑦ \wedge 引入

////////////////////////////////////

(8)

先证 $\vdash B \rightarrow ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A)$

只需证: $B, A \leftrightarrow B \vdash A$ 及 $B, A \vdash A \leftrightarrow B$

1) $B, A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$ 公理及 \leftrightarrow 消除

2) $B, A \leftrightarrow B \vdash B$ 公理

3) $B, A \leftrightarrow B \vdash A$ 1) 2) \rightarrow 消除

4) $B, A \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 已证定理

5) $B, A \vdash B$ 公理

6) $B, A \vdash A \rightarrow B$ 4) 5) \rightarrow 消除

7) $B, A \vdash B \rightarrow A$ 同理 6)

8) $B, A \vdash A \leftrightarrow B$ 6) 7) \leftrightarrow 引入

再证 $\vdash ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \rightarrow B$

1) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A$ 公理

2) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \rightarrow (A \leftrightarrow B)$ 公理及 \leftrightarrow 消除

3) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \leftrightarrow B$ 1) 2) \rightarrow 消除

4) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash A \rightarrow B$ 3) \leftrightarrow 消除

5) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \vdash B$ 1) 4) \rightarrow 消除

6) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理

7) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash \neg A$ 公理

8) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \vdash A \rightarrow B$ 6) 7) \rightarrow 消除

- 9) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$ 定理
- 10) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg B$ 公理
- 11) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid B \rightarrow A$ 9) 10) \rightarrow 消除
- 12) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid A \leftrightarrow B$ 8) 11) \leftrightarrow 引入
- 13) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid (A \leftrightarrow B) \rightarrow A$ 公理及 \leftrightarrow 消除
- 14) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid A$ 12) 13) \rightarrow 消除
- 15) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg A$ 公理
- 16) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \mid \neg \neg B$ 14) 15) \neg 引入
- 17) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \mid B$ $\neg \neg$ 消除
- 18) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A \mid B$ 5) 17) 假设消除
- 19) $\mid \neg((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \rightarrow B$ 18) \rightarrow 引入