



## § 2.3 联结词的扩充与归约

---

由于一个  $n$  元逻辑联结词就是一个从  $\{T, F\}^n$  到  $\{T, F\}$  的映射，因此相应的真值函数表就有  $2^{2^n}$  种。下面以  $n = 1$  和  $n = 2$  为例来说明。

## 1. 联结词的扩充

1)  $n = 1$ 就有4个不同的从  $\{T, F\}$ 到  $\{T, F\}$

的映射:

$P$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$T$	$F$	$F$	$T$	$T$
$F$	$F$	$T$	$F$	$T$

对应的真值函数为:

$f_1(P) = F$  , 为常联结词

$f_2(P) = \neg P$  , 为否定词  $\neg$

$f_3(P) = P$  , 为恒等联结词

$f_4(P) = T$  , 为常联结词

2)  $n = 2$  有16个不同的从  $\{T, F\}^2$  到  $\{T, F\}$  的映射, 即有16个不同的二元联结词, 相应的真值函数表就有16个. 下面仅列出几个:

$P$	$Q$	$f_2$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{14}$	$f_{15}$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$T$	$T$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$T$	$T$	$F$	$F$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$	$T$	$T$	$F$	$F$	$F$	$T$
$T$	$T$	$T$	$F$	$T$	$F$	$T$	$T$	$F$

$f_9$ 即为或非词  $\downarrow$  :

$$f_9(P, Q) = \neg(P \vee Q) = P \downarrow Q$$

$f_{15}$ 即为与非词  $\uparrow$  :

$$f_{15}(P, Q) = \neg(P \wedge Q) = P \uparrow Q$$

$f_7$ 即为异或词  $\nabla$  :

$$f_7(P, Q) = \neg(P \leftrightarrow Q) = P \nabla Q$$

## 2. 联结词的归约

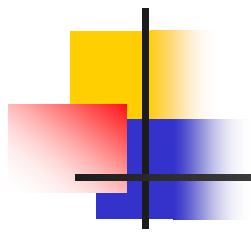
1) 可表示：设  $h$  为一  $n$  元联结词，

$A$  为由  $m$  个联结词  $g_1, g_2, \dots, g_m$  构成的命题公式，若有  $h(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow A$  则称联结词  $h$  可由联结词  $g_1, g_2, \dots, g_m$  来表示。

例  $P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$

$$P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$$

$$P \nabla Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$$



3. 联结词的完备集：设  $C$  为联结词的集合  
若对任一命题公式都可由  $C$  中的联结词  
表示出来的公式与之等值，则称  $C$  是联结词  
的完备集，或称  $C$  是完备的联结词集合

**定理1**  $\{\neg, \wedge, \vee\}$  是完备的联结词集合.

类似的联结词完备集还有:

$\{\neg, \wedge\}$ ,  $\{\neg, \vee\}$ ,  $\{\neg, \rightarrow\}$ ,  $\{\uparrow\}$ ,  $\{\downarrow\}$

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \rightarrow Q$$

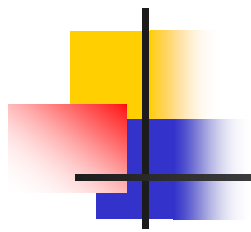
$$\neg P \Leftrightarrow \neg(P \wedge P) \Leftrightarrow P \uparrow P$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg(P \uparrow Q) \\ \Leftrightarrow (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$$

$$\neg P \Leftrightarrow \neg(P \vee P) \Leftrightarrow P \downarrow P$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q)) \Leftrightarrow \neg(P \downarrow Q) \\ \Leftrightarrow (P \downarrow Q) \downarrow (P \downarrow Q)$$





**例** 用 $\{\uparrow\}$ 表示公式 $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg C$

$$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg C \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg C$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg C \Leftrightarrow \neg[(\neg A \vee \neg B) \wedge C]$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \uparrow C$$

$$\Leftrightarrow (\neg(A \wedge B)) \uparrow C \Leftrightarrow (A \uparrow B) \uparrow C$$