第2章 命题演算形式系统

[本章内容]

1) 命题、联接词、命题公式、真值表、永真式、永假式、可满足式；
2) 范式、主范式；
3) 联接词的完备集、对偶式；
4) 命题演算形式系统的组成、基本定理及性质定理。

§ 2.1 命题演算的基本概念

1. 命题：能唯一确定真假值的陈述句。

一个命题的真或假称为命题的真假值，也简称为命题的真值，通常用**T(**或**1)**和**F(**或**0)**分别表示命题的真值为真和假

例 判定下列语句哪些是命题：

1) 北京是中国的首都。
2) 火星上有生命存在。
3) $X+Y=2$

$2+2=5$

2. 命题变元：用以表示命题的标识符号。

例 P：北京是中国的首都。

3. 原子命题(简单命题)：

不能分解为更简单的陈述句的命题。

例 雪是白的。

4. 复合命题：

由联结词及简单命题构成的命题。

例 如果学校明天放假, 那么我就去看电影

5. 逻辑联结词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

1)联结词可以将命题联结起来构成复杂的命题**.**

2)一个逻辑联结词其实就是一个映射**:**

$$\{T,F\}^n \longrightarrow \{T,F\}$$

通常我们也称为真值函数，它们的具体映射值(真值函数值)可以通过真值表来表示。

1) 否定词：$\neg$，为一元联结词。

$\neg P$：读作“非 P”表示对原命题的否定

真值表：

P	$\neg P$
T	F
F	T

例 设 P表示命题：

所有在北京工作的人都是北京人。

则 $\neg P$ 表示：
并非所有在北京工作的人都是北京人。

即“存在在北京工作的人但不是北京人”，
而不是表示命题：
所有在北京工作的人都不是北京人。

2) 合取词: $\wedge$, 为二元联结词，即逻辑与

$P \wedge Q$:读作“ P 与 Q ”

表示 P , Q 的合取 。

真值表:

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3) 析取词: $\vee$, 为二元联结词，即逻辑或

$P \vee Q$:读作“ P 或 Q ”

表示 P ,Q 的析取 。

真值表:

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

注：在使用析取词（逻辑或）$\vee$表达复合命题时，需要注意与我们通常所说的“异或”区分开来，比如复合命题“今天我去图书馆或者去踢足球”，它表达的是一种不可兼或，二者只能取一，即我们所说的“异或”，而不是逻辑“或”。

4) 蕴涵词：$\longrightarrow$ 为二元联结词，

即通常所说的推断符号

$P \to Q$：读作"P蕴涵 Q"

表示如果 P，那么 Q

真值表：

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

注:复合命题 $P \to Q$表达的逻辑关系是:

P 是 Q 的充分条件.

或 Q 是 P 的必要条件.

在逻辑推理中经常用到逻辑蕴涵词,
由于自然语言的复杂性,表示的术语
除了"如果 P 那么 Q"外,
还有常见的表述如:
"只要 P,就 Q"
"只有 Q,才 P"等

例 设有命题：

只有你不是大一新生，才能在寝室用电脑.

P：你是大一新生.

Q：你在寝室用电脑.

则原命题可形式化为：

$$P \to \neg Q \quad \text{或} \quad Q \to \neg P$$

5) 双条件词: $\leftrightarrow$,为二元联结词,

即通常所说的等价符号

$P \leftrightarrow Q$:读作“P等价于 Q ”

表示如果 P 当且仅当 Q

真值表:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例：P：ΔABC 是等腰三角形。

Q：ΔABC 有两个角相等。

$P \leftrightarrow Q$：ΔABC 是等腰三角形

当且仅当 ΔABC 中有两个角相等

6. 命题公式(合式公式)

1) 原子命题是命题公式;

2) 若 A, B 是命题公式，则

$$\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$$

均是命题公式;

3) 有限次使用1)–3)复合所得的结果均是命题公式。

例 $\neg P \wedge Q$, $\neg(P \vee Q)$,

$$P \vee Q \rightarrow R \wedge S$$

7. 指派(赋值)

设公式中 A 的原子变元符号为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$
记为$A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ ，
则对 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的任意一种取值称为指派
即为:

$$P_i = \begin{cases} T \\ F \end{cases} ，\quad i = 1, \cdots, n$$

指派常用符号 ∂(或I) 来表示。

若对公式 A 的一个给定的指派 ∂ ，使得 A 的真值为真，则记为$\partial(A)=T$ 表示公式 A 在指派 ∂的作用下其真值为真，反之则记为 $\partial(A)=F$

8. 重言式(永真式)

若公式 A 对任一真值指派其真值均为真，则称为永真式。

例 $P \vee \neg P$

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

9. 永假式(矛盾式)

若公式A对任一真值指派其真值均为假，则称为永假式。

例 $P \wedge \neg P$

10. 可满足式

若公式A存在一个真值指派使其真值为真，则称为可满足式。

例 $A \to (B \to C)$

$P \vee Q$

11. 常用的重言式：

1) $P \vee \neg P$

2) $A \to (B \to A)$

3) $A \to (A \vee B),\ B \to (A \vee B)$

4) $A \wedge B \to A,\ A \wedge B \to B$

5) $A \wedge (A \to B) \to B$

6) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$

7) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

8) $\neg(\neg A) \leftrightarrow A$

9) $A \vee A \leftrightarrow A$

$A \wedge A \leftrightarrow A$

10) $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

11) $A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$

$A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

12) $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

13) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

14) $A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$

$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$

15) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

16) $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to C)$

17) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$

18) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

19) $A \vee T \leftrightarrow T$ $\quad$ $A \wedge F \leftrightarrow F$

$A \vee F \leftrightarrow A$ $\quad$ $A \wedge T \leftrightarrow A$

12. 逻辑蕴涵(重言蕴涵)

对公式 A, B，如果所有弄真 A 的指派亦必弄真公式 B，则称 A 逻辑蕴涵 B 或称 B 是 A 的逻辑推论，记为 $A \Rightarrow B$

若所有弄真公式集 $\Gamma = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 中的每个公式的指派，亦必弄真公式 B 则称 Γ 逻辑蕴涵 B，或称 B 是 Γ 的逻辑推论

例 $\neg A \Rightarrow A \to B$

$$A \to (B \to C), B \Rightarrow A \to C$$

定理 $A \Rightarrow B$ 当且仅当 $A \to B$ 为重言式。

13. 逻辑等价

公式 A, B 逻辑等价当且仅当

$$A \Rightarrow B \text{且} B \Rightarrow A$$

记为 $A \Leftrightarrow B$

例 $(\neg A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow A)$

定理 $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为重言式。

14. 常用的的逻辑等价式

1) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

2) $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

3) $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

4) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$

5) $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

6) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

7) $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow R$

15. 代入原理

定理 设 A 为含命题变元 P 的**重言式**，则将 A 中的 P 的所有出现均代换为命题公式 B 所得的公式仍为重言式。

例 $A = P \to (Q \to P)$ 为重言式。

作带入 $P/(R \vee S)$ 得:

$A' = (R \vee S) \to (Q \to (R \vee S))$仍为永真式

16. 替换原理

定理 设C为命题公式A中的子命题公式若$C \Leftrightarrow D$，则将C用D替换(未必对所有的子公式C均作替换)后得公式B满足$A \Leftrightarrow B$

例 $(P \to Q) \wedge ((R \to (P \to Q)) \vee (\neg S \wedge (P \to Q)))$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge ((R \to (P \to Q)) \vee (\neg S \wedge (\neg P \vee Q)))$$

(因为$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$)