



§ 2.2 范式

[本节主要内容]

- 1) 范式基本概念;
- 2) 合取/析取范式的求解;
- 3) 主合取/析取范式的求解;



§ 2.2.1 基本概念

1. 文字：简单命题变元及其否定称为文字

例 $P, \neg Q$ 均为文字

2. 合取式：文字的合取成为合取式

例 $P \wedge \neg Q, \neg P \wedge \neg Q$ 均为合取式

3. 析取式：文字的析取成为析取式

例 $P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q$ 均为析取式

4. 合取范式：设命题公式 A 的形式为：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \quad (n \geq 1)$$

其中 $A_i \ (i = 1, \cdots, n)$ 为析取式

例 $(\neg P \vee Q) \wedge (R \vee S)$

$\neg P \vee R \vee S$ 均为合取范式

5. 析取范式：设命题公式 A 的形式为：

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n \quad (n \geq 1)$$

其中 $A_i \ (i = 1, \cdots, n)$ 为合取式

例 $(\neg P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$

$\neg P \wedge R \wedge S$ 均为析取取范式



§ 2.2.2 范式求解

1. 求解过程:

1) 消去 \rightarrow 及 \leftrightarrow :

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$\begin{aligned}(A \leftrightarrow B) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \\ &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)\end{aligned}$$

2) 运用摩根定律：

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

分配律：

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

双重否定定律： $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

3) 化简： $A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A$

例 求公式 $(P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$
的合取范式 and 析取范式。

$$(P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee \neg Q) \wedge ((\neg P \vee \neg Q) \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

为合取范式

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R))$$

$$\vee (\neg Q \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R))$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg P) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \\ \vee (\neg Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \wedge R)$$

为析取范式

$$\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$$

$$\vee \neg Q \vee (\neg Q \wedge R) \quad \text{为析取范式}$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \quad \text{为析取范式}$$



定理1 (范式定理):

任一命题公式 A 都存在与之等价的合取范式和析取范式.



§ 2.2.3 主范式

1. 合取项：在命题公式 A 的合取范式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n (n \geq 1)$$

中，对析取式 $A_i (i = 1, \cdots, n)$
称为合取项。

例 在合取范式 $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$ 中
 $(\neg P \vee \neg Q)$, $(\neg P \vee \neg Q \vee R)$ 为合取项

2. 析取项：在命题公式 A 的析取范式

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n \ (n \geq 1)$$

中，对合取式 $A_i \ (i = 1, \cdots, n)$ 称为析取项。

例 在析取范式

$(\neg P \wedge \neg P) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$ 中

$(\neg P \wedge \neg P), (\neg P \wedge \neg Q), (\neg P \wedge R)$

均为析取项。

3. 主合取范式： 设命题公式 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$
的合取范式为： $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m (m \geq 1)$

若每一个合取项 $A_i (i = 1, \dots, m)$
的形式为： $A_i = Q_1 \vee Q_2 \vee \dots \vee Q_n$

其中 $Q_i = P_i$ 或 $\neg P_i$

今后称主合取范式中的合取项为极大项，
通常用 M_i 表示。

例 $A(P, Q) = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee Q)$

为 A 主合取范式。



4. 极大项 M_i 有如下性质：

- 1) 对于命题公式 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 共有个 2^n 极大项；
- 2) 每个极大项 M_i 有 2^n 种真值指派，其中为F的真值指派唯一；
- 3) 任意两个不相同的极大项的真值取值不能同为F；
- 4) 所有 2^n 个极大项之 \wedge 为F即 $\bigwedge_{i=1}^{2^n} M_i = F$

5. 主析取范式： 设命题公式 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$
的析取范式为： $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_m (m \geq 1)$

若每一个析取项 $A_i (i = 1, \dots, m)$
的形式为： $A_i = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots \wedge Q_n$

其中 $Q_i = P_i$ 或 $\neg P_i$

今后称主析取范式中的析取项为极小项，
通常用 m_i 表示。

例 $A(P, Q, R) = (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

为 A 主析取范式。



6. 极小项 m_i 有如下性质：

- 1) 对于命题公式 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 共有个 2^n 极小项；
- 2) 每个极小项 m_i 有 2^n 种真值指派，其中为T的真值指派唯一；
- 3) 任意两个不相同的极小项的真值取值不能同为T；
- 4) 所有 2^n 个极小项之 \vee 为T即
$$\bigvee_{i=1}^{2^n} m_i = T$$

7. 主合取/析取范式求解步骤

- 1) 求解命题公式 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 的合取/析取范式;
- 2) 除去合取/析取范式中所有永真/永假的项
如 $P \vee \neg P$, $P \wedge \neg P$
- 3) 合并相同的合取/析取项和相同的变元
如 $Q \vee Q = Q$, $Q \wedge Q = Q$
- 4) 补项: 对缺少变元的合取/析取项补齐
在合取项中添加永假式: $P_k \wedge \neg P_k$
在析取项中添加永真式: $P_k \vee \neg P_k$
然后用分配律展开, 再化简。

例 求 $P \wedge Q$ 的主合取范式。

$$\Leftrightarrow [P \vee (Q \wedge \neg Q)] \wedge [(P \wedge \neg P) \vee Q]$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$$

例 求 $P \rightarrow Q$ 的主析取范式。

$$\Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$\Leftrightarrow [\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)] \vee [(P \vee \neg P) \wedge Q]$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

例 求 $(P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$

的主合取/析取范式。

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \text{ 为析取范式}$$

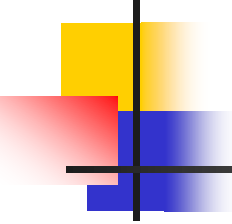
$$\Leftrightarrow [\neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg R)]$$

$$\vee [(P \vee \neg P) \wedge \neg Q \wedge (R \vee \neg R)]$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

$$\vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$$

$$\vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$



定理2 永真式无主合取范式；
永假式无主析取范式。

定理3 任一命题公式(非永真或非永假)
都存在唯一与之等价的主合取范式
和主析取范式

8. 主合取范式与主析取范式的关系:

若已知公式 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 的主合取范式为 $\bigwedge_i M_i$ ，则其主析取范式为 $\bigvee_i (\neg A)$

其中 $\neg A$ 为 A 的所有 2^n 个极大项中
除去主合取范式 $\bigwedge_i M_i$ 中的极大项后
剩下的极大项之 “ \bigvee ”

同理：

若已知公式 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 的主析取范式为 $\bigvee_i m_i$ ，则其主合取范式为 $\bigwedge (\neg A)$

其中 $\neg A$ 为 A 的所有 2^n 个极小项中

除去主析取范式 $\bigvee_i m_i$ 中的极小项后

剩下的极小项之 “ \bigvee ”

例 求 $(P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$

的主合取/析取范式。

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

为主合取范式，则主析取范式为：

$$\neg[(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \\ \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

$$\wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)]$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

$$\vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$$

$$\vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

9. 主范式与真值表的关系：

设命题公式 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$

(非永真、非永假)的真值表为：

$P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n$	A
前 k 个为真的指派	T
后 j 个为假的指派	F

其中 $k + j = 2^n$

根据公式 A 为真的指派可以得到 A 的主析取范式:

1) 令 $A = m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_k$

2) 对 $m_i (i = 1, 2, \cdots, k)$

令 $m_i = P_1' \wedge P_2' \wedge \cdots \wedge P_n'$ 其中,

$$P_l' = \begin{cases} P_l & \text{若 } P_l \text{ 在第 } i \text{ 行的真值赋值为 } T \\ \neg P_l & \text{若 } P_l \text{ 在第 } i \text{ 行的真值赋值为 } F \end{cases}$$
$$l = 1, 2, \cdots, n$$

同理根据公式 A 为假的指派可以得到 A 的主合取范式:

1) 令 $A = M_{k+1} \wedge M_{k+2} \wedge \cdots \wedge M_{k+j}$

2) 对 $M_i (i = k+1, k+2, \cdots, k+j)$

令 $m_i = P_1' \vee P_2' \vee \cdots \vee P_n'$ 其中,

$$P_l' = \begin{cases} P_l & \text{若 } P_l \text{ 在第 } i \text{ 行的真值赋值为 } F \\ \neg P_l & \text{若 } P_l \text{ 在第 } i \text{ 行的真值赋值为 } T \end{cases}$$
$$l = 1, 2, \cdots, n$$

例 求公式

$$A = P \leftrightarrow Q$$

的主合取范式
与主析取范式

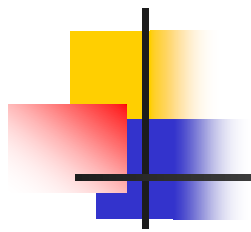
P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

则从为真的指派可得主析取范式:

$$A = P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

则从为假的指派可得主合取范式:

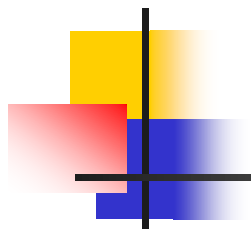
$$A = P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$



根据真值表与主范式的关系可的如下结论：

定理4 n 元命题公式的全体可划分为 2^{2^n}

个等价类，每一类中的公式相互逻辑等价，并等价于它们公共的主合取范式/主析取范式。



例

$$A = (P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

为主合取范式