# 第 5 章部分课后习题作业参考

## P137

3.

（1） $\vdash (A \to \exists vB) \to \exists v(A \to B)$

只需证 $A \to \neg\forall v\neg B \vdash \neg\forall v\neg(A \to B)$，反证法证之。

1) $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \forall v\neg(A \to B)$ 前提

2) $\forall v\neg(A \to B) \to \neg(A \to B)$ 定理

3) $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \neg(A \to B)$ 1)2) $r_{mp}$

4) $\neg A \to (A \to B)$ 定理

5) $\neg(A \to B) \to A$ 4)逆否

6) $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash A$ 3)5) $r_{mp}$

7) $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash A \to \neg\forall v\neg B$ 前提

8) $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \neg\forall v\neg B$ 6)7) $r_{mp}$

9) $B \to (A \to B)$ 公理

10) $\neg(A \to B) \to \neg B$ 9)逆否

11) $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \neg B$ 3)10) $r_{mp}$

12) $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \forall v\neg B$ 11) 全称推广（$v$ 在 $A$ 中无自由出现）

13) $A \to \neg\forall v\neg B \vdash \neg\forall v\neg(A \to B)$，8)12)及反证法定理

/////////////////////////

(2) $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$

证明：根据前件交换只需证 $\vdash A \to (\exists v(A \to B) \to \exists vB)$

只需证 $\vdash A \to (\neg\forall v\neg(A \to B) \to \neg\forall v\neg B)$

1） $(A\to B)\to(A\to B)$ 定理

2） $A\to((A\to B)\to B)$ 1）前件交换

3） $((A\to B)\to B)\to(\neg B\to\neg(A\to B))$ 定理

4） $A\to(\neg B\to\neg(A\to B)$ 2）3）传递

5） $\forall v(A\to(\neg B\to\neg(A\to B))$ 4）全称推广//注意使用条件

6） $\forall vA\to\forall v(\neg B\to\neg(A\to B))$ 5）+公理+$r_{mp}$

7） $A\to\forall vA$ 公理（$v$ 在 $A$ 无自由出现）

8） $A\to\forall v(\neg B\to\neg(A\to B))$ 7）6）传递

9） $\forall v(\neg B\to\neg(A\to B))\to(\forall v\neg B\to\forall v\neg(A\to B))$ 公理

10） $A\to(\forall v\neg B\to\forall v\neg(A\to B))$ 8）9）传递

11） $(\forall v\neg B\to\forall v\neg(A\to B))\to(\neg\forall v\neg(A\to B)\to\neg\forall v\neg B)$ 定理

12） $A\to(\neg\forall v\neg(A\to B)\to\neg\forall v\neg B)$ 10）11）传递

即 $A\to(\exists v(A\to B)\to\exists vB)$

//////////////////////////////////

(3) $\vdash(\forall vB\to A)\to\exists v(B\to A)$ 1

证明：只需证 $\vdash(\neg A\to\exists v\neg B)\to\exists v(\neg A\to\neg B)$ //替换原理，等价变换

而由上述题 3.（1）知此结论成立。当然也可以直接用（1）中的方法来证明。//

//////////////////////////////////////////

(4) $\vdash\exists v(B\to A)\to(\forall vB\to A)$

证明：只需证 $\vdash\exists v(\neg A\to\neg B)\to(\neg A\to\exists v\neg B)$ //同上

则根据上题 3.（2）可知成立。//

//////////////////////////////////////////

//上述各证明题大家也可以尝试我们习题上介绍的其他方法。//

（5）若$\vdash A \to B$，则$\vdash \forall v A \to \forall v B$

证明：

1） $A \to B$ 假设的定理

2） $\forall u(A \to B)$，1）全称推广

3） $\forall u(A \to B) \to (\forall u A \to \forall u B)$ 公理

4） $\forall u A \to \forall u B$ 2）3） $r_{mp}$

//////////////////////

(6) $A \to B \models \forall u A \to \forall u B$ 未必成立，从而 $A \to B \vdash \forall u A \to \forall u B$ 不真。

证明：举例说明该逻辑蕴涵不一定成立：

令个体域 $D = N$

$A: u < u + 1$，

$B: u < 100$

则对 $u = 10$ 的指派下，公式 $A \to B$ 为真，

但此时公式 $\forall u A \to \forall u B$ 为假，故 $A \to B \models \forall u A \to \forall u B$ 不成立。

当然也就有 $A \to B \vdash \forall u A \to \forall u B$ 不成立，否则根据 FC 合理性知有：

$A \to B \models \forall u A \to \forall u B$ 成立，矛盾。

//////////////////////////////////////////////////

4.

(1) $\forall x(A \to B) \dashv\vdash A \to \forall x B$，且 x 在 A 中无自由出现。

证明：先证 $\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall x B$

只需证： $\forall x(A \to B), A \vdash \forall x B$

1) $\forall x(A \to B), A \vdash \forall x(A \to B)$ 前提

2） $\forall x(A \to B) \to (A \to B)$ 定理

3） $\forall x(A \to B), A \vdash A \to B$ 1)2） $r_{mp}$

4） $\forall x(A \to B), A \vdash A$ 前提

5） $\forall x(A \to B), A \vdash B$ 3)4） $r_{mp}$

6） $\forall x(A \to B), A \vdash \forall v B$， 5)全称推广

7） $\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$

再证 $A \to \forall xB \vdash \forall x(A \to B)$

1) $\forall xB \to B$　　定理

2) $A \to (\forall xB \to B)$　1)加前件

3) $(A \to \forall xB) \to (A \to B)$　2)+公理

4) $A \to \forall xB \vdash A \to B$　3)演绎定理

5) $A \to \forall xB \vdash \forall x(A \to B)$，全称推广

////////////////////

(2) $\forall x(A \to B) \dashv\vdash \exists xA \to B$，且 x 在 B 中无自由出现。

证明：只需证 $\forall x(\neg B \to \neg A) \dashv\vdash \neg B \to \forall x\neg A$，由于 $x$ 在 $\neg B$ 中无自由出现，故直接由 4.（1）题的结论即可。

/////////////////////////

(3) $\forall x(A \wedge B) \dashv\vdash \forall xA \wedge \forall xB$

只需证：$\forall x\neg(A \to \neg B) \dashv\vdash \neg(\forall xA \to \neg\forall xB)$

先证 $\forall x\neg(A \to \neg B) \vdash \neg(\forall xA \to \neg\forall xB)$　//反证法

1) $\forall x\neg(A \to \neg B)$，$\forall xA \to \neg\forall xB \vdash \forall x\neg(A \to \neg B)$　前提

2) $\forall x\neg(A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg B)$　定理

3) $\forall x\neg(A \to \neg B)$，$\forall xA \to \neg\forall xB \vdash \neg(A \to \neg B)$

4) $\neg A \to (A \to \neg B)$　定理

$\neg B \to (A \to \neg B)$　公理

5) $\neg(A \to \neg B) \to A$

$\neg(A \to \neg B) \to B$　4)+逆否

6) $\forall x\neg(A \to \neg B)$，$\forall xA \to \neg\forall xB \vdash A$

$\forall x\neg(A \to \neg B)$，$\forall xA \to \neg\forall xB \vdash \neg B$　3)5) $r_{mp}$

7） $\forall x\neg(A\to\neg B)$， $\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\forall xA$

$\forall x\neg(A\to\neg B)$， $\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\forall x\neg B$ 6)全称推广

8) $\forall x\neg(A\to\neg B)$， $\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\forall xA\to\neg\forall xB$ 前提

9） $\forall x\neg(A\to\neg B)$， $\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\neg\forall xB$ 7）8） $r_{mp}$

10) $\forall x\neg(A\to\neg B)\vdash\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)$ 7)9)反证法

再证 $\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)\vdash\forall x\neg(A\to\neg B)$

1） $\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)\vdash\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)$ 前提

2） $\neg\forall xA\to(\forall xA\to\neg\forall xB)$

$\neg\forall xB\to(\forall xA\to\neg\forall xB)$

3） $\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)\to\forall xA$

$\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)\to\forall xB$ 2)+逆否

4） $\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)\vdash\forall xA$

$\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)\vdash\forall xB$ 否 1)3） $r_{mp}$

5） $\forall xA\to A$
$\forall xB\to B$

6) $\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)\vdash A$

$\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)\vdash B$

7） $A\to(B\to\neg(A\to\neg B))$ 定理

//次结论证明较简单参见教材 3.1.18。//

8） $\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)\vdash\neg(A\to\neg B)$ 6）7） $r_{mp}$

9） $\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)\vdash\forall x\neg(A\to\neg B)$ 8）全称推广

//注：习题课上给出不调用 3.1.18 的解决方案：

//一是证 $\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)\vdash\neg(A\to\neg B)$ 的时候用反证法。

// $\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)$, $(A\to\neg B)\vdash$ 互反，此结论由上述第 6）7）步即可看出。

//二是转化为证 $\vdash \neg(\forall xA \to \neg\forall xB) \to \ \neg(A \to \neg B)$，逆否变形即可。

/////////////////////////////////////////////////////////////
(4)

由(3)题结论有：$\forall x(\neg A \wedge \neg B) \dashv\vdash \forall x\neg A \wedge \forall x\neg B$

从而 $\neg\forall x(\neg A \wedge \neg B) \dashv\vdash \neg(\forall x\neg A \wedge \forall x\neg B)$

即 $\exists x\neg(\neg A \wedge \neg B) \dashv\vdash \neg\forall x\neg A \vee \neg\forall x\neg B)$ //替换原理

即 $\exists x(A \vee B) \dashv\vdash \exists xA \vee \exists xB$

///////////////////////////////
(5)

证明：$P(Oscar) \veebar G(Oscar)$

$= (P(Oscar) \vee G(Oscar)) \wedge (\neg P(Oscar) \vee \neg G(Oscar))$

记 $\tau = \{P(Sam), G(Clyde), L(Clyde, Oscar),$

$P(Oscar) \vee G(Oscar), \neg P(Oscar) \vee \neg G(Oscar), L(Oscar, Sam)$

//因为 $A \wedge B \to A$，$A \wedge B \to B$（已证定理），这里为了方便就直接拆开用了//

需证 $\tau \vdash \exists x\exists y(G(x) \wedge P(y) \wedge L(x, y))$，考虑反证法：

记 $\tau' = \tau \bigcup \{\forall x\forall y(\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee \neg L(x, y))\}$

$= \tau \bigcup \{\forall x\forall y(L(x, y) \to (G(x) \to \neg P(y)))\}$

$= \tau; \forall x\forall y(L(x, y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$

1) $\tau' \vdash \forall x\forall y(L(x, y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$

2) $\tau' \vdash L(Clyde, Oscar) \to (G(Clyde) \to \neg P(Oscar)))$ 1）+全称消去的公理+$r_{mp}$

3) $\tau' \vdash L(Clyde, Oscar)$

4) $\tau' \vdash G(Clyde) \to \neg P(Oscar)$

5) $\tau' \vdash G(Clyde)$

6) $\tau' \vdash \neg P(Oscar)$

7) $\tau' \vdash L(Oscar, Sam) \to (G(Oscar) \to \neg P(Sam)))$ 1）+全称消去的公理+$r_{mp}$

8) $\tau' \vdash L(Oscar, Sam)$

9) $\tau' \vdash G(Oscar) \to \neg P(Sam)$

10) $\tau' \vdash P(Sam) \to \neg G(Oscar)$

11) $\tau' \vdash P(Sam)$

12) $\tau' \vdash \neg G(Oscar)$

13) $\tau' \vdash P(Oscar) \vee G(Oscar)$

14) $\tau' \vdash \neg G(Oscar) \to P(Oscar)$

15) $\tau' \vdash P(Oscar)$

16) $\tau \vdash \neg \forall x \forall y (L(x,y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$，6)15)反证法

即 $\tau \vdash \exists x \exists y (G(x) \wedge P(y) \wedge L(x,y))$

////////////

(6)

证明：$E(x) \veebar O(x) = (E(x) \vee O(x)) \wedge (\neg E(x) \vee \neg O(x))$

记 $\tau = \{\forall x (N(x) \to (E(x) \vee O(x)) \wedge (\neg E(x) \vee \neg O(x)))$，

$\forall x (N(x) \to (E(x) \leftrightarrow G(x)))$， $\neg \forall x (N(x) \to G(x))\}$

需证 $\tau \vdash \exists x (N(x) \wedge O(x))$，采用反证法

1) $\tau; \forall x (\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \forall x (\neg N(x) \vee \neg O(x))$

2) $\tau; \forall x (\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \neg N(x) \vee \neg O(x)$ 1）+全称消去的公理+$r_{mp}$

3) $\tau; \forall x (\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash N(x) \to \neg O(x)$

4) $\tau; \forall x (\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash N(x)$

5) $\tau; \forall x (\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \neg O(x)$

6) $\tau; \forall x (\neg N(x) \vee \neg O(x)); N(x) \vdash \forall x (N(x) \to E(x) \veebar O(x))$

7) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash(N(x)\to E(x)\veebar O(x)$

8) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash E(x)\veebar O(x)$　4）7） $r_{mp}$

9) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash\neg O(x)\to E(x)$

10) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash E(x)$

11) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash\forall x(N(x)\to(G(x)\leftrightarrow E(x)))$

12) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash G(x)\leftrightarrow E(x)$

13) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash E(x)\to G(x)$

14) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash G(x)$

15) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\vdash N(x)\to G(x)$

16) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\vdash\forall x(N(x)\to G(x))$

17) $\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\vdash\neg\forall x(N(x)\to G(x))$

18) $\tau\vdash\neg\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))$

即 $\tau\vdash\exists x(N(x)\wedge O(x))$

//////////////////////////////

(7)

证：根据全称推广，只需证：

$\exists x[P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))]$, $\forall x\forall y[P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))]\vdash D(y)\to\neg Q(y)$

//根据 $(A\wedge B\to C)\dashv\vdash(A\to(B\to C))$ 及替换原理，这里对第 2 个前提条件做个等价变换，当然也可以在证明里做等价变换//

下面记此处的前提为 $\tau$.

1） $\tau\vdash\exists x[P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))]$, 前提

2） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash\forall x\forall y[P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))]$

3） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))$,

由 2)+定理+rmp

4） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash P(x)$ （利用已证定理 $A\wedge B\vdash A$）

5） $\tau, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y)) \vdash Q(y)\to\neg L(x,y)$，3）、4）rmp

6） $\tau, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y)) \vdash L(x,y)\to\neg Q(y)$

7） $\tau, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y)) \vdash \forall y(D(y)\to L(x,y))$，同理 4）

8） $\tau, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y)) \vdash D(y)\to L(x,y)$，同理 3）

9） $\tau, P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y)) \vdash D(y)\to\neg Q(y)$，6）、8）传递

10） $\tau \vdash D(y)\to\neg Q(y)$，由 1）、9)及存在消除定理

11） $\tau \vdash \forall y(D(y)\to\neg Q(y))$，全称推广

//////////////////////////////////////
5.

(1) $\mathrm{P}_1^{(1)}(v_1) \not\models_T \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)$

证明：即给出解释和指派使得该逻辑蕴涵不成立。

令 $D=R$， $\mathrm{P}_1^{(1)}(v_1)$： $v_1<5$

在指派 $s(v_1)=3$ 下公式 $\mathrm{P}_1^{(1)}(v_1)$ 为真，但是公式 $\forall \mathrm{v}_1\mathrm{P}_1^{(1)}(v_1)$ 为假。

//////////////////////////////////////

(2) $\not\models_T P_1^{(1)}(v_1)\to\forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)$

证明：直接由 1）即可得。

//////////////////////////////////////

(3) $\models_{\mathrm{T}} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1)\to\forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))$

证明： $\models_{\mathrm{T}} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1)\to\forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))$

iff 对任意的结构 $U$ 和指派 $s$，有 $\models_{\mathrm{U}} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1)\to\forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))[s]$ 成立

iff $\exists d'\in D,$ 使得 $\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$ 或 $\models_U \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)[s]$ //后面的这个约束变元 $v_1$ 跟前面的 $v_1$ 没关系，完全可以改名为其他变元符号。//

1）若 $\exists d'\in D,$ 使得 $\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$ 成立，那么原命题得证。

2） 若不存在 $d'\in D,$ 使得 $\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$ 成立， 即对 $\forall d\in D,$ 均有 $\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d)]$ 成立，

即有：$\models_U \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)[s]$成立

综合 1）、2）知$\models_U \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \to \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))[s]$成立。

////////////////////

(4)直接给出一个为真的解释和指派即可。

//////////////////////////////////////////////////////

6.

同 5.（4），分别给出为真的解释和指派即可。

/////////////////////////////////////////////////////

7.

（1） $\tau;\mathrm{A}\models_{\mathrm{T}} \mathrm{B}$ 当且仅当 $\tau\models_{\mathrm{T}} \mathrm{A} \to \mathrm{B}$

证明：$\Leftarrow$：若 $\tau\models_{\mathrm{T}} \mathrm{A} \to \mathrm{B}$，则需证 $\tau;\mathrm{A}\models_{\mathrm{T}} \mathrm{B}$。

只需证对任意的使得$\tau$中的公式$A_i$及公式$A$为真的$U,S$必有$\models_U B[S]$。

而由 $\tau\models_{\mathrm{T}} \mathrm{A} \to \mathrm{B}$，则必有$\models_U (A \to B)[S]$，即$\not\models_U A[S]$或$\models_U B[S]$，而$U,S$使得$A$为真，故必有$\models_U B[S]$。

$\Rightarrow$：若 $\tau;\mathrm{A}\models_{\mathrm{T}} \mathrm{B}$，则需证 $\tau\models_{\mathrm{T}} \mathrm{A} \to \mathrm{B}$。

只需证对任意的使得$\tau$中的公式$A_i$为真的$U,S$必有$\models_U (A \to B)[S]$。

①若$\not\models_U A[S]$，则显然有$\models_U (A \to B)[S]$成立。

②若$\models_U A[S]$，则由 $\tau;\mathrm{A}\models_{\mathrm{T}} \mathrm{B}$ 及在$U,S$的作用下$\tau$中的公式$A_i$为真，从而有$\models_U B[S]$，所以$\models_U (A \to B)[S]$。

//////////////////////////////

(2)$\models_{\mathrm{T}} \mathrm{A}$当且仅当$\models_{\mathrm{T}} \forall \mathrm{vA}$（$v$为任一变元）

证明：不妨设变元$v$在$A$中自由出现。

$\Leftarrow$：若$\models_{\mathrm{T}} \forall \mathrm{vA}$，需证$\models_{\mathrm{T}} \mathrm{A}$。

即需证对任意的$U,S$有$\models_{\mathrm{U}} \mathrm{A}[S(v|d)]$，$\forall d \in D$

由$\models_{\mathrm{T}} \forall \mathrm{vA}$知对任意的$U,S$有$\models_{\mathrm{U}} \forall \mathrm{vA}[S]$，即对$\forall d \in D$有：

$\models_{\mathrm{U}} \mathrm{A}[S(v|d)]$

$\Rightarrow$：若$\models_{\mathrm{T}} \mathrm{A}$，需证$\models_{\mathrm{T}} \forall \mathrm{vA}$。

由$\models_{\mathrm{T}}$ A知对任意的$U,S$及对$\forall d \in D$有$\models_{\mathrm{U}}$ $\mathrm{A}[S(v \mid d)]$（假设变元$v$在$A$中自由出现），即$\models_{\mathrm{U}}$ $\forall \mathrm{vA}[S]$，所以$\models_{\mathrm{T}}$ $\forall \mathrm{vA}$。

//////////////////////////////

（3）$\forall \mathrm{v}(\mathrm{A} \to \mathrm{B}), \forall \mathrm{vA} \models_{\mathrm{T}} \forall \mathrm{vB}$

证明：只需证对任意的$U,S$若$\models_U \forall \mathrm{v}(\mathrm{A} \to \mathrm{B})[S]$且$\models_U \forall \mathrm{vA}[S]$，则必有$\models_U \forall \mathrm{vB}[S]$。

由$\models_U \forall \mathrm{v}(\mathrm{A} \to \mathrm{B})[S]$知：对任意$d \in D$，有$\models_U$ $(\mathrm{A} \to \mathrm{B})[S(v \mid d)]$，即有$\not\models_U \mathrm{A}[S(v \mid d)]$ 或 $\models_U \mathrm{B}[S(v \mid d)]$，又由$\models_U \forall \mathrm{vA}[S]$知：对任意$d \in D$，有$\models_U \mathrm{A}[S(v \mid d)]$，综上$\models_U \mathrm{B}[S(v \mid d)]$，即$\models_U \forall \mathrm{vB}[S]$。