《数理逻辑》教案

许道云

(2011.8)

教　材：《面向计算机科学的数理逻辑》(第二版)

　　　　(陆钟万著)

出版社：科学出版社

版　本：2006年6月第8次印刷

绪言（课程介绍）

什么是逻辑？命题（判断）对象、以及对象间的（推理）关系。

数理逻辑：用数学的方法研究逻辑。

数理逻辑研究分支：模型论、集合论、递归论、证明论。

数理逻辑研究什么？

逻辑推理：当前提为真时，保证结论为真。

逻辑研究这样的可推理关系。即，前提和结论之间的推理关系是否正确。演绎推理---演绎逻辑。

它不同于归纳逻辑。归纳逻辑是从前提出发，使用归纳推理，得到的结论与自身协调，或与前提协调。

数理逻辑属于演绎逻辑范围。只研究推理及可推理关系，不关心前提与结论中各个命题的真假。

例1. 前提：所有大于2不被自身整除的自然数为素数。

7不被自身整除。

结论：7不是素数。

例2. 前提：所有中学生打网球。

王君不打网球。

结论：王君不是中学生。

命题有内容和形式：内容决定命题的真或假。决定前提和结论之间的可推导关系，是命题逻辑形式。如：

前提：集合S中的所有元素具有R性质。

a不具有R性质。

结论：a不是S中元素。

命题的陈述需要语言。

元语言：描述对象的所用的最基本语言。

如：自然语言（汉语）。

对象语言：描述“对象所用元语言”的语言。

如：形式语言（符号语言）。

自然语言中语言上的相似并不保证逻辑形式上的相同。

例1：X认识Y。（前提）

Y是足球队长。（前提）

X认识足球队长。（结论）

例2：X认识A班某学生。（前提）

A班某学生是足球队长。（前提）

X认识足球队长。（结论）

近代数理逻辑思想：

Leibniz力图建立一种精确的、普适的科学语言作为形式语言。直到1879年，Frege才建立了这样的语言。近代数理逻辑介绍的就是这种形式语言。所以，数理逻辑史从1879年算起。

在数理逻辑中要构造一种符号语言来代替自然语言，这种人工构造的符号语言称为形式语言。

对象的描述和对象间的推理关系全部用形式语言表示。

数理逻辑研究的主要内容：

（1）引入一个形式语言，以表示非结构化对象。并且要求表示公式的语言是递归生成的。

（2）引入一套形式化推理规则， 基于这些规则进行符号化演算。引入形式证明的一般形式。

（$\Sigma|-A$）

（3）引入一套解释系统---语义(映射)函数，赋予形式符号在给定环境下的具体含义。

（4）基于语义模型，引入逻辑推理概念。（$\Sigma|=A$）

（5）研究形式推理与逻辑推理之间的关系。

（可靠性和完备性）。

形式推理系统的可靠性：$\Sigma|-A\Rightarrow\Sigma|=A$。

形式推理系统的完备性：$\Sigma|=A\Rightarrow\Sigma|-A$。

一般，逻辑中的语言和推理是某类智能推理的抽象，语言解决表示问题(即，数据结构问题)。从某种意义上讲，应该是先有具体实例，想找一种一般描述，这就产生了形式语言和形式推理。实例数据对形式符号给出一种解释(或赋值)。两者之间的映射关系形成一个解释系统。

实例数据与形式符号有解释(或赋值)和被解释(或赋值)之分。

如：a:=0. 可以理解为：将数字 0 赋给符号 a.

也可理解为：a 被解释为 0.

其中，a 是抽象的，而 0 是具体的。

为什么会有各种逻辑？

由逻辑研究内容，我们可以观察下表：

语法	语义
形式语言 (表达方式和能力)	解释系统 语义(映谢)函数
形式推理：$\Sigma \vdash A$	逻辑推理：$\Sigma \models A$
可靠性：$\Sigma \vdash A \Rightarrow \Sigma \models A$	
完备性：$\Sigma \vdash A \Leftarrow \Sigma \models A$	

在表中，形式语言、解释系统、推理规则是可变的。

(1) 当形式语言的表达能力不够用时，新的语言就会出现。

(2) 不同规则系统的引入，直接关系到形式推理的能力说、有效性、以及单调性等。

(3) 不同的解释系统，给出不同的语义模型。

思考题：

1、逻辑研究的主要内容。

2、为什么会有各种逻辑？

第一章　预备知识

集合：某些对象全体。

集合表述方式：

　内涵：元素具有的性质P。

　外延：所含元素的全体。

自然数集合N上的二元关系 <（作为集合）：

（内涵）m<n: 存在不为0的自然数x,使得m+x=n。

（外延）{（0，1),（0，2),······}

二元关系的性质：自反，对称，等价，······。

集合等势： $S \sim T \Leftrightarrow |S|=|T|$

可数无限集：与自然数集等势的集合。

可数集：有限集或可数无限集。$|S| \le |N|$

定理：（1）可数集的子集仍然可数。

　　（2）有限个可数集的并仍为可数集。

　　（3）可数个可数集的并仍为可数集。

自然数集合N的归纳定义：

（1） $0 \in N$.

（2）如果 $n \in N$，则（后继） $n' \in N$ 。

（3）N只含通过（1）（2）有限次使用得到的数。

等价定义：自然数集合N是满足如下条件的最小集合S

（1）$0 \in S$ 。

（2）如果 $n \in S$，则（后继） $n' \in S$ 。

设R是一个性质，$R(x)$表示x具有性质R。

定理1（数学归纳法）如果

（1）$R(0)$。

（2）对于任意的 $n \in N$，如果 $R(n)$ 则 $R(n')$。

则对于任意的 $n \in N$ 有 $R(n)$。

　设h,g为两个N上的已知函数。递归定义N上一个函数f如下：

（1） $f(0)=g(0)$.

（2） $f(n')=h(f(n))$.

定理2（递归原理）对于给定的函数g和h，能唯一定义N上一个函数f满足上述递归条件。

一般集合S的归纳定义：

(1) 指定一个集合M。（基元，生成元）

(2) 指定k个函数 $g_1, g_2,\ldots\ldots, g_k$ 为生成函数.分别为 $n_1, n_2,\ldots\ldots, n_k$ 元函数。

归纳生成集合S：$\mathrm{S}:=<M,\{g_1, g_2,\ldots\ldots, g_k\}>$。

归纳定义. 集合S是满足如下条件的最小集合T：

（1）$M\subseteq T$ 。

（2）对于每个 $1\le i\le k$，

如果 $x_1,\ldots\ldots x_{n_i}\in T$，则 $g_i(x_1,\ldots\ldots x_{n_i})\in T$ 。

设 $h, h_1,\ldots\ldots, h_k$ 为k+1个已知基函数：

$$h: M\to S$$
$$h_i: S^{n_i}\to S\ \ (i=1,2,\ldots,k).$$

递归原理定义S上的一个函数f：

$$f(x):=h(x)\ (x\in M)$$
$$f(g_i(x_1,\ldots\ldots x_{n_i})):=h_i(f(x_1),\ldots\ldots, f(x_{n_i}))\ \ (i=1,2,\ldots,k)$$

定理3（递归原理）对于给定的函数 $h, h_1,\ldots\ldots, h_k$，能唯一定义S上一个函数f满足上述递归条件。

归纳集生成系统： $S:=<M,\{g_1, g_2,\ldots\ldots, g_k\}>$。

递归函数生成系统： $\mathrm{S}:=<S,\{h,h_1, h_2,\ldots\ldots, h_k\}>$。

$$\mathrm{S}:=<M,\{g_1, g_2,\ldots\ldots, g_k\};\{h,h_1, h_2,\ldots\ldots, h_k\}>$$

例：自然数（算术）系统

$$\mathrm{N}:=<\{0\},\{s\};\{c_0, +,*\}>.\ \ x'=s(x)=x+1,\ c_0(x)=0$$

第二章　经典命题逻辑

命题定义：具有明确真假值的（对象）陈述。

简单命题：最小命题。（最简单，不可分解，原子，……）

复杂命题：借助联结词组合后命题小命题。

组合方式：

（1）一元：否定、不、非。

（2）二元：

或；且；如果…,则…；除非；当…,才有…；

仅当…,才有…。等等。

描述缺陷：自然语言。（非通用标准语言）

形式语言：命题语言L^P。（通用）

字母表：0，1，p,q,r,……。

运算符：$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$。

真---1；假---0。

命题公式的生成：（归纳定义命题公式集$Form(L^P)$）

（1）（归纳基）：$Atom(L^P)=\{p,q,r,......\}\subseteq Form(L^P)$。

（原子命题公式集）

（2）（归纳定义）：如果$A,B\in Form(L^P)$，则

$\neg A, (A*B)\in Form(L^P)$。其中，$*\in\{\vee,\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow\}$。

（3）$Form(L^P)$只含通过有限次使用（1）（2）得到的符号串。

结构归纳法：将$Form(L^P)$类比自然数集N。

设P为一个性质，$P(x)$对表示x具有性质P。

类似于数学归纳法，引入关于$Form(L^P)$上的某个性质（结论）P 是否成立（真）的结构归纳法。

（1）（归纳基） P关于原子命题公式成立。（归纳基）

（2）（归纳步） 对$A,B\in Form(L^P)$，假定P关于命题公式A、B成立。验证：P关于命题公

式 $\neg A, (A*B)$ 成立。其中， $*\in\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 。

语义解释： 命题公式的解释(赋值)。

对原子命题公式的解释：（形式上是一个映射）

$v: Atom(L^P) \rightarrow \{0,1\}$ 。称为一个赋值。

理解为： p 在 v 下被解释为 $p^v \in \{0,1\}$。 $p^v = v(p)$

0 表示“假”。1 表示“真”。

基于这样的解释系统，命题逻辑只研究具有明确真、假区分的对象。这就是命题限制到具有明确真、假意义的陈述语句的根本原因。

对联结词运算符号的解释：

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

对命题公式的解释： 对于一个公式 A，在一个赋值 v 下总可以计算出它的真值： $A^v \in \{0,1\}$ 。

（归纳计算）

(1) $p^v \in \{0,1\}$.

(2) $(\neg p)^v = \begin{cases} 1 & if\ \ p^v = 0 \\ 0 & if\ \ p^v = 1 \end{cases}$.

(3) $(A \vee B)^v = \begin{cases} 0 & if\ \ A^v = B^v = 0 \\ 1 & o.w. \end{cases}$.

$$(4)\ (A \wedge B)^v = \begin{cases} 1 & if\ A^v = B^v = 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}.$$

$$(5)\ (A \to B)^v = \begin{cases} 0 & if\ A^v = 1\ and\ B^v = 0 \\ 1 & o.w. \end{cases}.$$

$$(6)\ (A \leftrightarrow B)^v = \begin{cases} 1 & if\ A^v = B^v \\ 0 & o.w. \end{cases}.$$

命题公式 A 的真值表：在所有可能的赋值 v 下，将取值结果列入表中。

如： (┐p∧q)→┐r 的真值表

p q r	┐p	┐r	┐p∧q	(┐p∧q)→┐r
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	0	0	1
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	0	1	0
1 0 0	0	1	0	1
1 0 1	0	0	0	1
1 1 0	0	1	0	1
1 1 1	0	0	0	1

可满足性：公式 A 是可满足，如果至少存在一个赋值 v 使 A 取真。

如果公式 A 含有 n 个变元，验证公式 A 的可满足性需要对 2^n 个赋值逐一验证。直观上需要指数验证时间。

可满足性判定问题（SAT 问题）：

实例：一个命题公式 A。

询问：是否存在一个赋值 v 使 A 取真（满足 A）？

验证算法存在！

重言式：A 每一个赋值下取值均为真。

矛盾式：A 每一个赋值下取值均为假。

SAT 问题的在计算机科学中的地位：

SAT 问题是计算机科学中的核心问题。曾被著名美籍华人数理逻辑学家王浩称为“当代数理逻辑和理论计算机的第一问题”。

计算机科学家们一直都在寻求各种快速策略和方法改进求解 SAT 问题。现已证明：工程技术、军事、人工智能、并发控制、交通运输等领域中的诸多重要问题（如程控电话的自动交换，大型数据库的维护，大规模集成电路的自动布线，软件自动开发，机器人动作规划等）都涉及到 SAT 问题。

SAT 问题是 NP 完全问题。从理论上说，SAT 问题不能在多项式时间内解决，直观上它超出了现代计算机的能力。所以，SAT 问题是计算机科学技术发展中的“瓶颈”问题。

从理论上讲，可满足性判定问题是 NP 完全的，然而在实际应用中，并非每一个 CNF 公式的可满足性问题的判定都需要指数时间。根据统计分析，对于 3-CNF 公式而言，出现在公式中的子句数与变元数之比是一个重要的参数，当公式的这个参数在 4.25 附近时，公式的可满足性的判定的确难。但是，当公式的这个参数远离 4.25 时，公式的可满足性的判定有可能在多项式时间内就可以完成。

约束满足性问题（CSP 问题）： $q-CSP_W$

n 个变元：$u_1,\ldots\ldots,u_n$ 。

m 个 q 元函数：$\varphi_i(u_{i_1},\ldots\ldots,u_{i_q}):W^q \to \{0,1\}$ 。

可满足性：$(\exists v=(a_1,\ldots\ldots,a_n)\in W^n)(\forall i)[\varphi_i^v(a_{i_1},\ldots\ldots,a_{i_q})=1]$。

（CSP 问题）： $q-CSP_W$

实例：一个约束 $\varphi=\{\varphi_1,\ldots\ldots,\varphi_m\}$ 。

询问：是否存在一个赋值 $(a_1,\ldots\ldots,a_n)\in W^n$ 使得 $(\forall i)[\varphi_i^v(a_{i_1},\ldots\ldots,a_{i_q})=1]$?

（回到命题公式讨论）

重言式一定是可满足式，但反之不真。因而，若公式 A 是可满足式，且它至少存在一个成假赋值，则称 A 为非重言式的可满足式。

(1) 若真值表最后一列全为 1，则公式为重言式。

(2) 若真值表最后一列全为 0，则公式为矛盾式。

(3) 若真值表最后一列中至少有一个 1，则公式为可满足式。

（逻辑）语义等价：若 A,B 构成的等价式 $A \leftrightarrow B$ 为重言式，则称 A 与 B 是等值的，或语义等价。记作 $A \Leftrightarrow B$。

用真值表判断公式的等值（在所有赋值下验证）

例：$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

p q	┐p	┐q	p∨q	┐(p∨q)	┐p∧┐q	┐(p∨q)↔(┐p∧┐q)
0 0	1	1	0	1	1	1
0 1	1	0	1	0	0	1
1 0	0	1	1	0	0	1
1 1	0	0	1	0	0	1

（逻辑）语义蕴含：若公式 $A \rightarrow B$ 为重言式，则称 A 蕴含 B。记作 $A \Rightarrow B$。表示：若 A 为真命题，则 B 为真命题。

逻辑的主要任务是研究逻辑推理。

命题公式的规范表示：

合取范式： CNF 公式。

析取范式： DNF 公式。

文字：变元或变元的否定统称为文字。$x, \neg x$

子句：文字的析取称为子句。$C = L_1 \vee L_2 \vee \ldots\ldots \vee L_n$。

子句 C 中所含文字的个数 n 称为子句长度。

CNF 公式：子句的合取称为 CNF 公式。$F = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots\ldots \wedge C_m$。

公式 F 的(大小)规模定义为。$|F| = |C_1| + |C_2 + \ldots\ldots + |C_m|$。

k-CNF 公式: 公式 F 中每个子句的长度 $\leq k$。

Horn 子句：出现在 $C = L_1 \vee L_2 \vee \ldots\ldots \vee L_n$ 中的正文字个数至多为 1。

DNF 公式：

(1) 项：文字的合取称为项。$C = L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots\ldots \wedge L_n$。

(2) DNF 公式：项的析取称为 DNF 公式。

定理. 设 F 为一个命题公式，则存在公式 F1 和 F2， 使得 $F \Leftrightarrow F_1$， $F \Leftrightarrow F_2$. 其中， F_1 为 CNF 公式， F_2 为 DNF 公式。

范式的唯一性——主范式

p,q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
┐p∧┐q	0 0	m_0	p∨q	0 0	M_0
┐p∧q	0 1	m_1	p∨┐q	0 1	M_1
p∧┐q	1 0	m_2	┐p∨q	1 0	M_2
p∧q	1 1	m_3	┐p∨┐q	1 1	M_3

p,q,r 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
┐p∧┐q∧┐r	0 0 0	m_0	p∨q∨r	0 0 0	M_0
┐p∧┐q∧r	0 0 1	m_1	p∨q∨┐r	0 0 1	M_1
┐p∧q∧┐r	0 1 0	m_2	p∨┐q∨r	0 1 0	M_2
┐p∧q∧r	0 1 1	m_3	p∨┐q∨┐r	0 1 1	M_3
p∧┐q∧┐r	1 0 0	m_4	┐p∨q∨r	1 0 0	M_4
p∧┐q∧r	1 0 1	m_5	┐p∨q∨┐r	1 0 1	M_5
p∧q∧┐r	1 1 0	m_6	┐p∨┐q∨r	1 1 0	M_6
p∧q∧r	1 1 1	m_7	┐p∨┐q∨┐r	1 1 1	M_7

联结词的完备集: 能表示任意布尔函数的联结词集合。

设 S 是一个联结词集合，如果任何 n(n≥1)元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词构成的公式表示，则称 S 是联结词完备集。

定理. S={┐,∧,∨}是联结词完备集。

例：{¬, ∨, ∧}, {¬, ∨}, {¬, ∧} 。

所有 2 元真值函数

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

逻辑推理： $\Sigma \models A$

设 $A \in Form(L^P)$，$\Sigma \subseteq Form(L^P)$。若对于任一赋值 v，如果 $\Sigma^v = 1$，则 $A^v = 1$，称由 Σ 逻辑可推 A。记为：$\Sigma \models A$。

若 $A \models B$ 且 $B \models A$，称 A 与 B 逻辑等价。记为：$A \models\!\!\!\!\!\!= B$。

注意：若 Σ 不可满足，则对任意的 A，均有 $\Sigma \models A$。

证明方法： 证 $\Sigma \models A$。

证明： 假定任意赋值 v，使得 $\Sigma^v = 1$，验证 $A^v = 1$。

反证法： 假定 $\Sigma \not\models A$，由存在一个赋值 v，使得 $\Sigma^v = 1$，但 $A^v = 0$。然后导出矛盾。

定理 1. (1) $A_1, \ldots\ldots, A_n \models A \Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_n) \models A$

(2) $A_1, \ldots\ldots, A_n \models A \Leftrightarrow \models (A_1 \to (A_2 \to (\ldots\ldots(A_n \to A)\ldots\ldots)$

定理 2. （等值替换定理）

设 F 为一个命题公式，A 是出现在 F 中的一个子公式，$A \models\!\!\!\!\!\!= B$。F' 是将 B 替换 F 中的部份 A 得到的公式，则 $F \models\!\!\!\!\!\!= F'$。

语义证明方法

一、王浩算法

原理：将 $A_1,\ldots\ldots,A_n \models B$ 的证明转换为证明 $(A_1\wedge\ldots\ldots\wedge A_n)\to B$ 为重言式。

子句格式：

$$(a\vee b\vee c\vee\neg d\vee\neg e)\quad (a\vee b\vee c)\vee\neg(d\wedge e)\quad (d\wedge e)\to(a\vee b\vee c)$$

串格式：$d,e\to_s a,b,c$

重言子句的串格式：$d,a\to_s a,b,c$，对应 $a\vee b\vee c\vee\neg d\vee\neg a$

公理格式：$A,\alpha\Rightarrow A,\beta$。

前项规则：

$\neg\Rightarrow$: 若 $\alpha,\neg A\Rightarrow\beta$，则 $\alpha\Rightarrow A,\beta$
$\wedge\Rightarrow$: 若 $\alpha,A\wedge B\Rightarrow\beta$，则 $\alpha,A,B\Rightarrow\beta$
$\vee\Rightarrow$: 若 $\alpha,A\vee B\Rightarrow\beta$，则 $\alpha,A\Rightarrow\beta$ 或 $\alpha,B\Rightarrow\beta$
$\to\Rightarrow$: 若 $\alpha,A\to B\Rightarrow\beta$，则 $\alpha\Rightarrow A,\beta$ 或 $\alpha,B\Rightarrow\beta$
$\leftrightarrow\Rightarrow$: 若 $\alpha,A\leftrightarrow B\Rightarrow\beta$，则 $\alpha,A,B\Rightarrow\beta$ 或 $\alpha\Rightarrow A,B,\beta$

后项规则：

$\Rightarrow\neg$: 若 $\alpha\Rightarrow\beta,\neg A$，则 $A,\alpha\Rightarrow\beta$
$\Rightarrow\wedge$: 若 $\alpha\Rightarrow\beta,A\wedge B$，则 $\alpha\Rightarrow\beta,A$ 或 $\alpha\Rightarrow\beta,B$
$\Rightarrow\vee$: 若 $\alpha\Rightarrow\beta,A\vee B$，则 $\alpha\Rightarrow\beta,A,B$
$\Rightarrow\to$: 若 $\alpha\Rightarrow\beta,A\to B$，则 $\alpha,A\Rightarrow B,\beta$
$\Rightarrow\leftrightarrow$: 若 $\alpha\Rightarrow\beta,A\leftrightarrow B$，则 $\alpha,A\Rightarrow B,\beta$ 或 $B,\alpha\Rightarrow A,\beta$

证明形式：

以一个起始串为树根，按规则消去联结词。当串为公理形式时，不再往下做。如果证明树的每个叶结点均为公理形式，则原公式为重言式（或矛盾式）。

证 F 为重言式： 起始串为 $\Rightarrow F$

要证： $A_1,\ldots\ldots,A_n \models B$。

即证： $F := (A_1 \wedge \ldots\ldots \wedge A_n) \to B$ 为重言式。

证明起始串取为： $A_1,\ldots\ldots,A_n \Rightarrow B$。

例： 证明 $A \to (B \to C), A \to B \models A \to C$

（1） $A \to (B \to C), A \to B \Rightarrow A \to C$

（2）（1-1） $A \to (B \to C), A \to B, A \Rightarrow C$

（3）（2-1） $A \to (B \to C), A \Rightarrow C, A$ （公理）

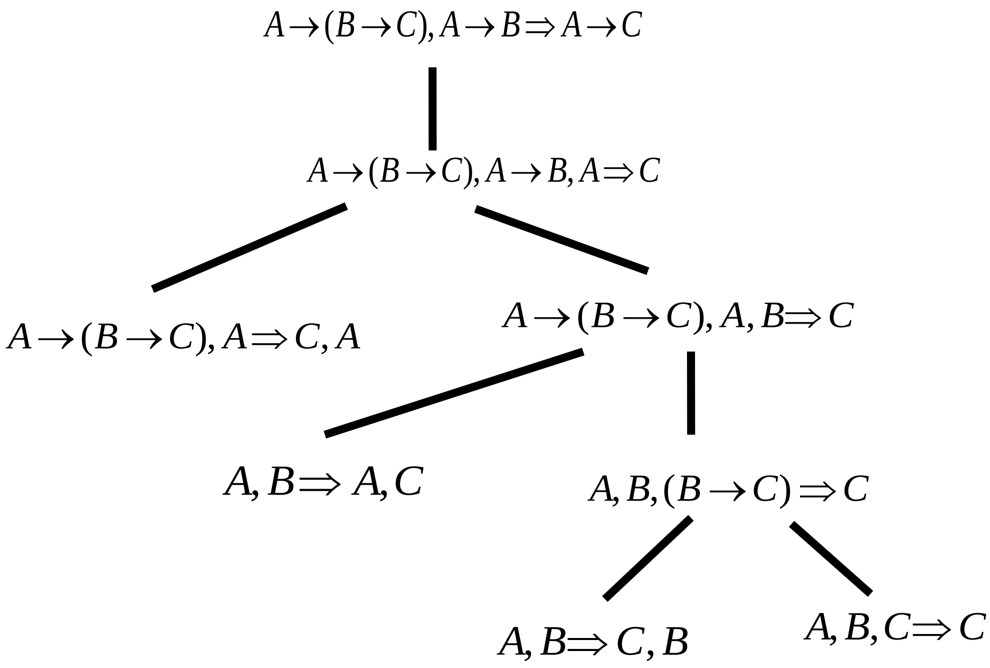
（4）（2-2） $A \to (B \to C), A, B \Rightarrow C$ （待分解）

（5）（4-1） $A, B \Rightarrow C, A$ （公理）

（6）（4-2） $A, B, (B \to C) \Rightarrow C$（待分解）

（7）（6-1） $A, B \Rightarrow C, B$（公理）

（8）（6-2） $A, B, C \Rightarrow C$（公理）



二、表方法

原理： 将 $A_1, \ldots\ldots, A_n \models B$ 的证明转换为证明 $[(A_1 \wedge \ldots\ldots \wedge A_n) \to B]$ 为重言式。

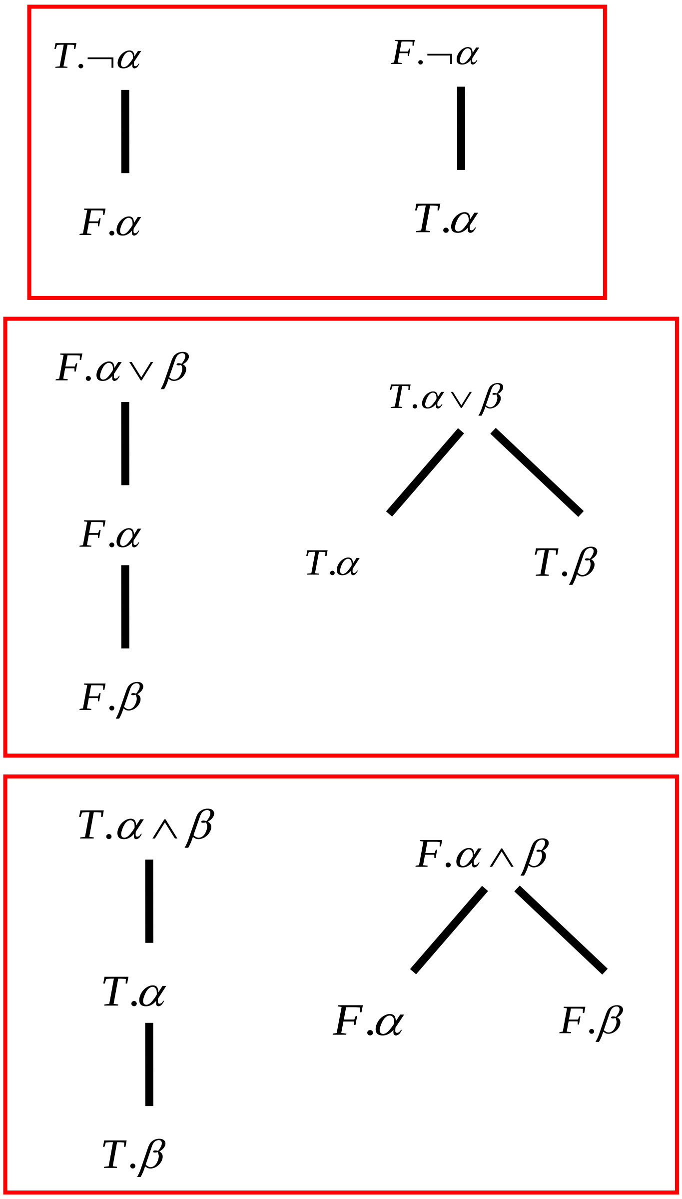
标记公式： $F.\alpha$（指：公式 α 取假）

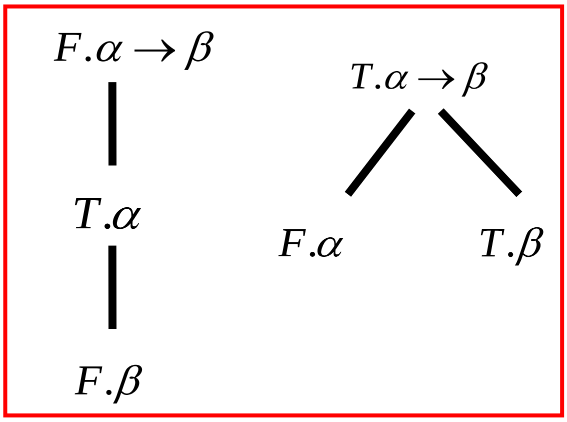
$T.\alpha$（指：公式 α 取真）

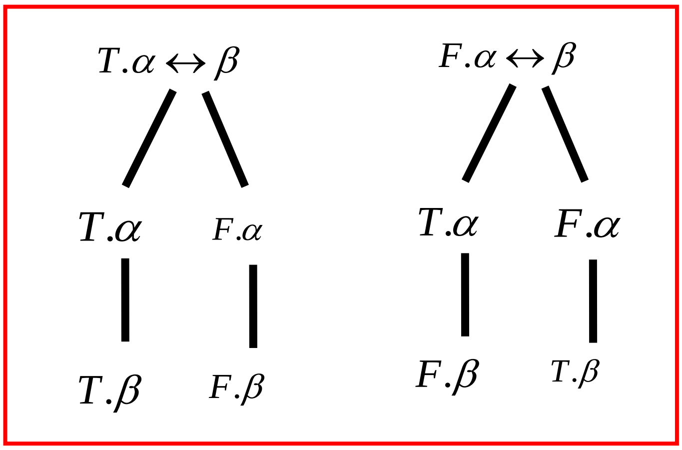
根结点： $F.[(A_1 \wedge \ldots\ldots \wedge A_n) \to B]$

指：假定公式 $[(A_1 \wedge \ldots\ldots \wedge A_n) \to B]$ 取假。

分解规则：（逐步取消联结词。如果已出现矛盾路径，则不再分解）


T.¬α
F.α
F.¬α
T.α
F.α∨β
F.α
F.β
T.α∨β
T.α
T.β
T.α∧β
T.α
T.β
F.α∧β
F.α
F.β





矛盾路径：从根到叶结点的路径上出现矛盾对 T.A，F.A。

终结树：每一叶结点路径上或出现矛盾，或不可再分解。

矛盾树：每条路径均为矛盾路径。

$$F.[((A \to (B \to C)) \wedge (A \to B)) \to (A \to C)]$$

$$T.[(A \to (B \to C)) \wedge (A \to B)]$$

待递归分解

$$F.(A \to C)$$

$$T.A$$

$$F.C$$

形式推理与证明

推理规则系统:

(Ref)： $A|-A$.

(单调)：若 $\Sigma|-A$，$\Sigma\subseteq\Sigma'$，则 $\Sigma'|-A$。

(﹁－)：若 $\Sigma,\neg A|-B$，$\Sigma,\neg A|-\neg B$，则 $\Sigma|-A$。

(→－)：若 $\Sigma|-A\to B,\Sigma|-A$,，则 $\Sigma|-B$。

(→＋)：若 $\Sigma,A|-B$，则 $\Sigma|-A\to B$。

(∧－)：若 $\Sigma|-A\wedge B$，则 $\Sigma|-A,\Sigma|-B$。

(∧＋)：若 $\Sigma|-A,\Sigma|-B$，则 $\Sigma|-A\wedge B$。

(∨－)：若 $\Sigma,A|-C,\ \Sigma,B|-C,$ 则 $\Sigma,A\vee B|-C$。

(∨＋)：若 $\Sigma|-A$，则 $\Sigma|-A\vee B,\ \Sigma|-B\vee A$ 。

(↔－)：若 $\Sigma|-A\leftrightarrow B,\ \Sigma|-A$,则 $\Sigma|-B$。

若 $\Sigma|-A\leftrightarrow B,\ \Sigma|-B$,则 $\Sigma|-A$。

(↔＋)：若 $\Sigma,A|-B,\ \Sigma,B|-A$ ，则 $\Sigma|-A\leftrightarrow B$ 。

补：(12) (∈) ： 若 $A\in\Sigma$ ，则 $\Sigma|-A$。(可由 Ref 和单调性证明)

形式化推理：$\Sigma|-A$

设 $A\in Form(L^P)$，$\Sigma\subseteq Form(L^P)$。称 A 可由Σ形式化可推理。如果存在一个序列：$\Sigma_1|-A_1,\Sigma_2|-A_2,........,\Sigma_n|-A_n$ 满足如下条件：

(1) $\Sigma_1|-A_1$ (使用 (∈) 或(Ref)引入)；

(2) $\Sigma=\Sigma_n$，$A=A_n$ ；

(3) 对每一个 $1<k\le n$，$\Sigma_k|-A_k$ 由下列情形之一引入：

(3.1) 使用 (∈)，

(3.2) 使用(Ref)，

(3.3) 使用其它规则.

被使用的规则带有的假设条件已经在

$\Sigma_1 \mid - A_1, \Sigma_2 \mid - A_2, \ldots\ldots, \Sigma_{k-1} \mid - A_{k-1}$ 中出现。

n 称为证明长度。

定理 1 （有限化）设 $\Sigma \mid - A$，则存在 Σ 的一个有限子集 Σ^0，使得：$\Sigma^0 \mid - A$。

证明： 对证明长度 n 进行归纳。在归纳过程中，对每一条规则进行讨论。

如：$(\to -)$：如果 $\Sigma \mid -A, \Sigma \mid -A \to B$，则 $\Sigma \mid -B$。

对 $\Sigma \mid -A, \Sigma \mid -A \to B$ 分别使用归纳假设。

存在有限子集 $\Sigma_1^0 \subseteq \Sigma,\ \Sigma_2^0 \subseteq \Sigma$：$\Sigma_1^0 \mid -A \to B,\ \Sigma_2^0 \mid -A$。

由单调规则：$\Sigma_1^0,\ \Sigma_2^0\ \mid -A \to B,\ \Sigma_1^0,\ \Sigma_2^0 \mid -A$。

由规则 $(\to -)$：$\Sigma_1^0,\ \Sigma_2^0\ \mid -B,\ \Sigma_1^0 \bigcup \Sigma_2^0\ \mid -B$。

从而存在有限集：$\Sigma_1^0 \bigcup \Sigma_2^0 \subseteq \Sigma,\ \ \Sigma_1^0 \bigcup \Sigma_2^0\ \mid -B$。

其它规则类似讨论。 ■

定理 2 （可传性）设 $\Sigma \mid - \Sigma', \Sigma' \mid -A$，则 $\Sigma \mid - A$。

证明： (1) 对 $\Sigma' \mid -A$ 使用有限化定理，得到一个有限子集：

$$\{A_1,\ A_2, \ldots\ldots, A_n\} \subseteq \Sigma',\ A_1,\ A_2, \ldots\ldots, A_n \mid -A。$$

每一个 $1 < k \le n$，有 $\Sigma \mid - A_k$。

对 $A_1,\ A_2, \ldots\ldots, A_n \mid -A$ 重复应用 $(\to +)$ 得到：

$$\mid -(A_1 \to (A_2 \to (\ldots\ldots(A_n \to A)\ldots\ldots)。$$

(4) $\Sigma \mid -(A_1 \to (A_2 \to (\ldots\ldots(A_n \to A)\ldots\ldots)$。

(5) 重复应用 $(\to -)$ 得到：$\Sigma \mid - A$。■

例. $\neg A \to B \mid - \neg B \to A$。

证明：(1) $\neg A \to B, \neg B, \neg A \mid - \neg A$ $(\in)$

(2) $\neg A \to B, \neg B, \neg A \mid - \neg B$ $(\in)$

(3) $\neg A \to B, \neg B, \neg A \mid - \neg A \to B$ $(\in)$

(4) $\neg A \to B, \neg B, \neg A \vdash B$ $\quad (\to_{-}, (1)(3))$

(5) $\neg A \to B, \neg B \vdash A$ $\quad (\neg_{-}, (2)(4))$

(6) $\neg A \to B \vdash \neg B \to A$ $\quad (\to_{+}, (5))$

一些常用定律：

幂等律： $A \mid - \mid - \neg\neg A$ 。

$\neg\neg A \mid - A$ $\qquad\qquad$ $A \mid - \neg\neg A$

(1) $\neg\neg A, \neg A \mid - \neg A \quad (\in)$ $\qquad$ (1) $A, \neg A \mid - A \quad (\in)$

(2) $\neg\neg A, \neg A \mid - \neg\neg A \quad (\in)$ $\qquad$ (2) $A, \neg A \mid - \neg A \quad (\in)$

(3) $\neg\neg A \mid - A \quad (\neg -, (1)(2))$ $\qquad$ (3) $A \mid - \neg\neg A \quad (\neg -, (1)(2))$

可传律： 如果 $\Sigma \mid - \Sigma', \Sigma' \mid - A$。则 $\Sigma \mid - A$。

(1) $\Sigma' \mid - A$ (已知)

(2) $B_1, \ldots\ldots, B_k \mid - A \quad (B_1, \ldots\ldots, B_k \in \Sigma)$

(3) $\Sigma \mid - B_1, \ldots\ldots, B_k$

(4) $B_1, \ldots\ldots, B_{k-1} \mid - B_k \to A \quad (\to +, 2)$

(5) $\mid - B_1 \to (B_2 \to \ldots\ldots(B_k \to A)\ldots..) \quad (\to +, *)$

(5) $\Sigma \mid - B_1 \to (B_2 \to \ldots\ldots(B_k \to A)\ldots..)$

(6) $\Sigma, B_1 \mid - B_2 \to \ldots\ldots(B_k \to A)\ldots..) \quad (\to -, 5)$

(7) $\Sigma \mid - A \qquad (\to -, *)$

归谬律： 如果 $\Sigma, A \mid - B, \Sigma, A \mid - \neg B$ ，则 $\Sigma \mid - \neg A$ 。

(1) $\neg\neg A \mid - A$

(2) $\Sigma, \neg\neg A \mid - A$ (单调, (1))

(3) $\Sigma, A \mid - B$ (已知)

(4) $\Sigma, \neg\neg A \mid - B$ (可传, (2, 3))

(5) $\Sigma, \neg\neg A \mid - \neg B$ (类似(1--4))

(6) $\Sigma \mid - \neg A$

逆反律： 如果 $A \to B \mid - \neg B \to \neg A$ 。

(1) $A \to B, \neg B, A \mid - B$

(2) $A \to B, \neg B, A \mid - \neg B$

(3) $A \to B, \neg B \mid - \neg A$

(3) $A \to B \mid - \neg B \to \neg A \quad (\to +)$

交换律： $A \vee B \mid - \mid B \vee A, \; A \wedge B \mid - \mid B \wedge A$ 。

分配律：

$$A \vee (B \wedge C) \mid - \mid (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
$$A \wedge (B \vee C) \mid - \mid (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$ 。

练习：

排中律：$\phi \mid - \mid A \vee \neg A$。

De Morgen 律：

$$\neg(A \wedge B) \mid - \mid \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \mid - \mid \neg A \wedge \neg B$$ 。

不矛盾律：$\phi \mid - \mid \neg(A \wedge \neg A)$

第三章 经典一阶逻辑

命题语言的表达能力：最小对象为命题（具有明确真假判断的陈述）

如下推理在命题语言中无法表达：

例 1. 苏格拉底论断。

前提：**所有**的人要死。（范围界定，全称量化）

苏格拉底是人。

结论：苏格拉底要死。

例 2. 前提：**有人**在教室看书则灯亮。（范围界定，存在量化）

张三在教室看书。

结论：教室灯亮。

例 3. 前提：**相互认识**的人是朋友。（关系）

张三和李四相互认识。

结论：张三和李四是朋友。

论域：讨论对象构成的集合。

量词：论域中对象的范围界定。

“所有的对象……”、“有的对象……”。

谓词：论域中对象之间的关系。

一元关系：可以在论域中区别出一个子集。

如：x 是男同学。（可判断）

x 具有某性质特征。（可判断）

二元关系：论域中对象之间的相互关系。

如：张三和李四相互认识。（可判断）

一般描述：

设 D 为一个论域，$R \subseteq D^n$ 是 D 上的一个 n 元关系。

$R(x_1,......,x_n)$ 表示 $x_1,......,x_n$ 具有 R-关系。

等价表示：$(x_1,......,x_n) \in R$ （可判断，是命题形式）

例. 一元关系（代表性质）。$P(x)$：x 具有性质 P。

数据结构：

$< D, \{R_1, \ldots\ldots, R_n\}, \{O_1, \ldots\ldots, O_m\} >$

D: 数据集

$R_1, \ldots\ldots, R_n$: 数据集上的关系.

$O_1, \ldots\ldots, O_m$: 数据集上的操作(运算).

极限描述： $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

对于任意的$\varepsilon > 0$, 存在自然数$N > 0$,
当$n > N$时, $|x_n - a| < \varepsilon$

量词：对于任意的…..、存在…..,

谓词：一元：大于0；

二元：大于、小于；

函数：求绝对值。

函数极限描述： $\lim_{x\to a} f(x) = A$

对于任意的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$,
对任何x, 当$|x-a| < \delta$时, $|f(x)-A| < \varepsilon$

量词：对于任意的…..、存在…..,

谓词：二元：大于、小于；

函数：求绝对值，f(x)。

一阶语言 L 的构造

符号系统：

个体：常元：a,b,c,…;

自由变元：u,v,w,…;

约束变元：x,y,z,…;

函数符号：f, g, h,…;

关系符号：P,　Q，R,…;

联结词：$\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

量词：$\forall$, $\exists$。辅助符号：（，），[，]，{ ，}（用于区分）

例：自然数系统：$< N, 0,\ s,\ \{+, *\}, = >$

生成元：0

生成函数：后继函数 s(x)=x+1, 生成自然数集。

(Peano 公理)

运算：+，* 为两个二元运算。

关系：= 为一个二元关系。

项集合 $Term(L)$ 的归纳定义：（其中的元素称为项）

(1) 个体常元 $a \in Term(L)$

个体自由变元 $u \in Term(L)$

(2) 若 $t_1,......,t_n \in Term(L)$，f 是一个 n 元函数，则

$f(t_1,......,t_n) \in Term(L)$；

(3) 对任何 $t \in Term(L)$，可以经由 (1)、(2) 有限步递归生成。

项集合 $Term(L)$ 中的项元素被解释成论域中的元素。是基本数据的抽象。函数对应数据操作运算。

等价定义（项集合 $Term(L)$）：满足如下条件的最小集合 S 称为项集合。记为 $Term(L)$

(1) $a, u \in S$　（归纳基）

(2) 对任何 $t_1,\ldots\ldots,t_n \in S$，及任意的 n 元函数 f，有 $f(t_1,\ldots\ldots,t_n) \in S$。(归纳步)

原子谓词公式集 $Atom(L)$：

对任何 $t_1,\ldots,t_n \in Term$，及任意的 n 元关系 R，$R(t_1,\ldots\ldots,t_n) \in Atom(L)$。

（$R(t_1,\ldots\ldots,t_n)$可判断）

在命题语言中，原子命题是最小单位，用一个命题符号表示。一阶语言中，原子命题不是最小单位，它刻画基础对象之间的某种关系（或性质）。对象之间有这种关系（或性质）就取真，否则就假。

谓词公式集 $Form(L)$ 的归纳定义：

(1) 原子公式集 $Atom(L) \subseteq Form(L)$。

(2) 若 $A, B \in Form(L)$，则 $(\neg A), (A * B) \in Form(L)$。

其中 $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(2) 若 $A(u) \in Form(L)$，x 不在 $A(u)$ 中出现，则

$(\forall x)A(x),\ (\exists x)A(x) \in Form(L)$。

在一阶语言中，变元只对个体，函数符号和谓词符号视为常元符号。量词只作用在个体变元上。

谓词语言的表达能力仍然有限！

如下推理一阶语言不能表达：

（1） 前提：自然数集的**任何子集**都有最小元。

A 是自然数集的一个子集。

结论：A 有最小元。

子集的描述可用一元谓词。“任何子集”的表达需要将谓词作为变元，用全称量词才能表达！

需要引入关系变元（二阶语言）：

$(\forall A)\ (\exists x)\ A[\ x(\wedge\ )\forall\ y(\ A)\ y(\rightarrow\ ($

（2） 前提：有算法就能用程序实现。

存在求解问题 A 的算法。

结论：存在求解问题 A 的程序。

算法和程序可用函数表达。“存在算法”的表达需要将函数作为变元，用存在量词才能表达！

例 1. 公式 $(\forall x)[F(x)\to(\exists y)[(\forall z)G(y,z)\vee H(u,x,y)]$ 的归纳生成过程。

（1） $F(u_1), G(u_2,u_3), H(u,u_1,u_2)$

（2） $(\forall z)G(u_2,z)$

（3） $(\forall z)G(u_2,z)\vee H(u,u_1,u_2)]$

（4） $(\exists y)[(\forall z)G(y,z)\vee H(u,u_1,y)]$

（5） $F(u_1)\to(\exists y)[(\forall z)G(y,z)\vee H(u,u_1,y)]$

（6） $(\forall x)[F(x)\to(\exists y)[(\forall z)G(y,z)\vee H(u,x,y)]$

例 2. 自然语言陈述表达公式表达

（1）苏格拉底论断。

前提：所有的人要死。（$(\forall x)[M(x)\to D(x)]$）

苏格拉底是人。（a ：苏格拉底，$M(a)$）

结论：苏格拉底要死。$D(a)$

（2）前提：有人在教室看书则灯亮。（$(\exists x)[R(x)\to Q]$）

张三在教室看书。（a ：张三，$R(a)$）

结论：教室灯亮。（Q）

例 3. 前提：相互认识的人是朋友。

$$(\forall x)(\forall x)[K(x,y)\to F(x,y)]$$

张三和李四相互认识。

（a ：张三，b：李四。$K(a,b)$）

结论：张三和李四是朋友。$F(a,b)$

例 4. 每一个自然数都存在唯一后继。

存在性：$N(u) \to (\exists y)(N(y) \wedge (y = s(u)))]$

唯一性：$(\forall z)(\forall w)\{([N(z) \wedge (z = s(u))] \wedge [N(w) \wedge (w = s(u))]) \to (z = w)\}$

最后公式：

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)\{N(x) \to \\
&\quad [(\exists y)(N(y) \wedge (y = s(x)))] \wedge \\
&\qquad (\forall z)(\forall w)\{([N(z) \wedge (z = s(x))] \\
&\qquad\qquad \wedge [N(w) \wedge (w = s(x))]) \to (z = w)\}
\end{aligned}
$$

一元谓词 $N(x)$ 作为特称（限定）谓词可以省去。

$$(\forall x)\{[(\exists y)(y = s(x))] \wedge (\forall z)(\forall w)\{([(z = s(x)) \wedge (w = s(x))] \to (z = w)\}\}$$

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)\{[(\exists y)(N(y) \wedge (y = s(x)))] \wedge \\
&\qquad (\forall z)(\forall w)\{([N(z) \wedge (z = s(x))] \\
&\qquad\qquad \wedge [N(w) \wedge (w = s(x))]) \to (z = w)\}
\end{aligned}
$$

例 5. 三人行，必有我师。

含义：任意三个人中，有一位是我的老师。

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[T(x,a) \vee T(y,a) \vee T(z,a)]$$

论域：人构成的集合。特称（限定）谓词 $M(x)$。

习题：

P92：3.2.2,　3.2.4

语义解释系统(赋值)

在命题逻辑语言中，语义赋值是一个映射：$v: Atom(L^P) \to \{0,1\}$

在一阶语言中，解释系统$v=(D, C, F, R)$是一个复杂映射。(仍称为赋值)，要求对公式中的每一个符号进行分类解释。

个体符号、函数符号、谓词（关系）符号

D 作为实际个体数据对象集，称为**论域**。

符号含义：

D：论域---- 个体对象的取值范围。

C：对常元符号的解释：$C: Const(L) \to \{a^v \mid a^v \in D\}$。

F：对函数符号的解释：$F: Func(L) \to \{f^v: D^n \to D \mid n \geq 1\}$ 。

R：对关系符号的解释：$R: \mathrm{Re}l(L) \to \{P^v \subseteq D^n \mid n \geq 1\}$。

赋值$v=(D, C, F, R)$ 下项取值的归纳定义：

(1) $a^v, u^v \in D$。

(2) $[f(t_1,......,t_n)]^v = f^v(t_1^v,......,t_n^v)$。

其中，$f^v = F(f): D^n \to D$

赋值$v=(D, C, F, R)$下原子公式的取值：

$[P(t_1,......,t_n)]^v = P^v(t_1^v,......,t_n^v) \subseteq D^n$，其中$(P^v \subseteq D^n)$，

$$[P(t_1,......,t_n)]^v = \begin{cases} 1 & (t_1^v,......,t_n^v) \in P^v \\ 0 & (t_1^v,......,t_n^v) \notin P^v \end{cases}$$

$$[t_1 \equiv t_2)]^v = \begin{cases} 1 & t_1^v = t_2^v,\ t_1^v, t_2^v \in D \\ 0 & t_1^v \neq t_2^v \end{cases}$$ （二元等值谓词）

赋值 $v=(D,\ C,\ F,\ R)$ 下公式取值的归纳定义：

（1）原子公式赋值定义（见上）

（2）$\neg P,\ P\vee Q,\ P\wedge Q,\ P\to Q,\ P\leftrightarrow Q$ 的取值与命题公式中的定义一致。（略）

（3）含量词的公式取值

$$[(\exists x)A(x)]^v=\begin{cases}1 & \text{若存在}a\in \mathrm{D},[A(u)]^{v[u/a]}=1\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

$$[(\forall x)A(x)]^v=\begin{cases}1 & \text{若对任意的}a\in \mathrm{D},[A(u)]^{v[u/a]}=1\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

其中，x 不在 A(u)中出现。

这里，$w^{v[u/a]}=\begin{cases}a & w=u\\ w^v & w\neq u\end{cases}$。

可满足、有效：设 $A\in Form(L)$，

若存在一个赋值 v，使得 $A^v=1$。称 A 可满足。

若对**任一个赋值** v，使得 $A^v=1$。称 A 有效。

注意：含有 n 个变元的命题公式的所有赋值只有 2^n。而任一个带有谓词和函数的谓词公式的所有赋值不止有限个。

例1. 考虑公式 $(\forall x)P(x)$ 的赋值。

（1）$D=\{1,2,3,4,5\}$

$P^v=\{1,3,5\}$

$v=(D,C,R,F)$ 是一个赋值。公式在此赋值下取假。

（2）$D=\{1,2,3,4,5\}$

$P^{v'}=\{1,2,3,4,5\}$

$v'=(D,C,R,F)$ 是一个赋值。公式在此赋值下取真。

例 2．考虑公式 $(\forall x)(\exists y)[P(x,y)\to(y=f(x))]$ 的赋值。

（1）$v=(D,C,R,F)$

$D = N = \{0,1,2,3,.....\}$

$P^v(x,y): x < y,\ f^v(x) = x+5$，

$v = (D,C,R,F)$ 是一个赋值。公式在此赋值下取真。

（2）$v = (D,C,R,F)$

$D = N = \{0,1,2,3,.....\}$

$P^v(x,y): x < y,\ f^v(x) = x$，

$v = (D,C,R,F)$ 是一个赋值。公式在此赋值下取假。

例 3. 构造一个公式，它在不超过 3 个个体的论域中是有效的，但更大的论域中不是有效的。

如：$(\exists x)(\forall y)[(F(x,y) \wedge \neg F(y,x) \to (F(x,x) \leftrightarrow F(y,y))]$

相对满足性、相对有效性：论域 D 固定下的相对满足性、相对有效性。简称 D-可满足、D-有效。

若存在以 D 为论域的赋值 v，使得 $A^v = 1$ 。称 A 为 D-可满足。

若对任意以 D 为论域赋值 v，使得 $A^v = 1$ 。称 A 为 D-有效。

定理 1. 设 $A \in Form(L),\ D \subseteq D'$，则

A 为 D-可满足 A 为 D'-可满足。

A 为 D'-有效 A 为 D-有效。

证明：固定 $c \in D$. 作映射 $*: D' \to D$。

$$b^* := \begin{cases} b & b \in D \\ c & b \in D' - D \end{cases}$$

以 D 为论域且满足 A 的任何赋值 v 均可扩充为一个以 D' 为论域的赋值 v*，使其满足 A。■

定理 2. 设 $A \in Form(L), |D| = |D'|$，则

A 为 D-可满足 $\Leftrightarrow$ A 为 D'-可满足。

证明： 作双射 $*: D' \to D$。

定理 3. 设 $A \in Form(L), |D| \leq |D'|$，则

A 为 D-可满足 A 为 D'-可满足。

A 为 D'-有效 A 为 D-有效。

背景：（1）实际应用中只用到 D-可满足。

（2）解释系统之间的转换。

逻辑推理

逻辑推理：设 $A \in Form(L)$，$\Sigma \subseteq Form(L)$。若对于任一赋值 v，如果 $\Sigma^v = 1$，则 $A^v = 1$，称由 Σ 逻辑可推 A。记为：$\Sigma \models A$。

例 1. (1) $(\exists x)\neg A(x) \models\!\!\!\models \neg(\forall x)A(x)$。

证明：（a）设有赋值 v 使得 $((\exists x)\neg A(x))^v = 1$，则存在 $a \in D$，使得 $(\neg A(u))^{v[u/a]} = 1$，从而存在 $a \in D$，$(A(u))^{v[u/a]} = 0$。

如果 $(\neg(\forall x)A(x))^v = 0$，则 $((\forall x)A(x))^v = 1$。由定义，对于任意 $b \in D$，$(A(u))^{v[u/b]} = 1$。矛盾。

（b）设有赋值 v 使得 $(\neg(\forall x)A(x))^v =$ ，则 $((\forall x)A(x))^v = 0$。由定义，存在 $a \in D$，使得 $(A(u))^{v[u/a]} = 0$。从而，存在 $a \in D$，使得 $(\neg A(u))^{v[u/a]} = 1$。即 $((\exists x)\neg A(x))^v = 1$。■

(2) $(\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x) \not\models (\forall x)[A(x) \to B(x)]$。

证明：构造一个赋值 v，使得

$[(\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)]^v = 1,\ [(\forall x)[A(x) \to B(x)]]^v = 0$。

取 $D = \{a, b\}\ (a \neq b)$，$A^v = \{a\}, B^v = \{b\}$。则 $[(\forall x)A(x)]^v = 0$。

所以 $[(\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)]^v = 1$。从而 $[(\forall x)[A(x) \to B(x)]]^v = 0$。

因为 $[A(u) \to B(u)]]^{v[u/a]} = 0$。■

形式化推理： $\Sigma \mid\!- A$

规则系统：

（1）命题逻辑中的规则。

（2）补充规则：

(∀−)： 若 $\Sigma \mid\!-(\forall x)A(x)$， 则 $\Sigma \mid\!-A(t)$ 。

(∀+)： 若 $\Sigma \mid\!-A(u)$， 则 $\Sigma \mid\!-(\forall x)A(x)$

其中，u 不在 Σ 中出现。

(∃−)： 若 $\Sigma, A(u) \mid\!-B$， 则 $\Sigma, (\exists x)A(x) \mid\!-B$

其中，u 不在 B 和 Σ 中出现。

(∃+)： 若 $\Sigma \mid\!-A(t)$， 则 $\Sigma \mid\!-(\exists x)A(x)$

其中，A(x)是在 A(t)是将部分 t 换为 x。

(≡−)：若 $\Sigma \mid\!-A(t_1), \Sigma \mid\!-t_1 \equiv t_2$， 则 $\Sigma \mid\!-A(t_2)$

其中，$A(t_2)$是在 $A(t_1)$是将部分 t_1换为 t_2.

(≡+)： $\mid\!-\ u \equiv u$ 。

上述规则可以推广到 n 元情形。

例. (1) $(\exists x)\neg A(x) \mid\!-\!\mid \neg(\forall x)A(x)$ 。

(2) $(\forall x)\neg A(x) \mid\!-\!\mid \neg(\exists x)A(x)$ 。(习题)

证明： (a) $(\exists x)\neg A(x) \mid\!-\neg(\forall x)A(x)$

(1) $(\forall x)A(x) \mid\!-\ A(u)$

(2) $\neg A(u) \mid\!-\neg(\forall x)A(x)$

(3) $(\exists x)\neg A(x) \mid\!-\neg A(u)$ （∃−， (2)）

(4) $(\exists x)\neg A(x) \mid\!-\neg(\forall x)A(x)$ （可传(2，3)）

(b) $\neg(\forall x)A(x) \mid\!-(\exists x)\neg A(x)$

(1) $\neg A(u) \mid\!-(\exists x)\neg A(x)$ (∃+)

(2) $\neg A(u), \neg(\exists x)\neg A(x) \mid\!-(\exists x)\neg A(x)$ （单调性， (1)）

(3) $\neg A(u), \neg(\exists x)\neg A(x) \mid\!-\neg(\exists x)\neg A(x)$ （∈）

(4) $\neg(\exists x)\neg A(x) \mid\!-A(u)$ （¬−），(2)(3)

(5)　$A(u)|-(\forall x)A(x)$　（∀+），(4)

(6)　$\neg(\exists x)\neg A(x)|-(\forall x)A(x)$　（可传，(4，5)）

(7)　$\neg(\forall x)A(x),\neg(\exists x)\neg A(x)|-(\forall x)A(x)$　（单调性，　(6)）

(8)　$\neg(\forall x)A(x),\neg(\exists x)\neg A(x)|-\neg(\forall x)A(x)$　（∈）

(9)　$\neg(\forall x)A(x)|-(\exists x)\neg A(x)$　（¬－），(8，9)

前束范式： $Q_1x_1......Q_nx_nB$。其中，$Q_1,......,Q_n\in\{\forall,\neg\}$，B 中不含量词，称为公式的母式。

定理. 每一个谓词公式 A 都可以划为与之语义等价的前束范式 A’. 即，　$A|=|A'$，其中 A’具有形式 $Q_1x_1......Q_nx_nB$。

进一步，可以要求母式具有合取范式（或析取范式）形式。

证明方法： 基于如下语义等价关系：

（1）等价替换

如果 $A|=|A', B|=|B', C(u)|=|C'(u)$，则

（1.1）$\neg A|=|\neg A'$

（1.2）$A\wedge B|=|A'\wedge B'$

（1.3）$A\vee B|=|A'\vee B'$

（1.4）$A\to B|=|A'\to B'$

（1.5）$A\leftrightarrow B|=|A'\leftrightarrow B'$

(1.6)　$(\exists x)C(x)|=|(\exists x)C'(x)$

(1.7)　$(\forall x)C(x)|=|(\forall x)C'(x)$

(保证母式部分可以仿命题公式代范式方法)

（2）（量词向前移动）

(2.1) $\neg(\forall x)A(x)|=|(\exists x)\neg A(x)$。

（2.2）$\neg(\exists x)A(x)|=|(\forall x)\neg A(x)$

（3）分配律仍然成立

（3.1） $A\wedge(B\vee C)\models\!\mid(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

（3.2） $A\vee(B\wedge C)\models\!\mid(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

前束范式与公式分层：

量词合并： $(\exists x_1)(\exists x_2)B(x_1,x_2)\models\!\mid(\exists x)B(x),\ x=<x_1,x_2>$

$(\forall x_1)(\forall x_2)B(x_1,x_2)\models\!\mid(\forall x)B(x)$

标准前束范式： $Q_1x_1......Q_nx_nB$ 前束词 $Q_1x_1......Q_nx_n$ 要求具有如下交替形式：

$(\forall x_1)(\exists x_1)......(\forall x_n)$ (n为奇数), $(\forall x_1)(\exists x_1)......(\exists x_n)$ (n为偶数)

$(\exists x_1)(\forall x_1)......(\exists x_n)$ (n为奇数), $(\exists x_1)(\forall x_1)......(\forall x_n)$ (n为偶数)

公式分层：

（1） $\Sigma_0=\Pi_0$：不含量词的公式类。

（2） $\Sigma_1:=\{(\exists x)B：B\in\Pi_0\}$ $\Pi_1:=\{(\forall x)B：B\in\Sigma_0\}$。

（3） $\Sigma_{n+1}:=\{(\exists x)B：B\in\Pi_n\}$ $\Pi_{n+1}:=\{(\forall x)B：B\in\Sigma_n\}$。

习题： P108：3.4.3(2,4,6) P119：3.5.4.

第四章 可靠性和完备性

可靠性：指形式推理的可靠性。

形式推理的结论在逻辑推理下是否仍然成立？

可靠性保证：应作系统中形式推理（纯符号演算）结论的正确性、安全性、…..。

一个智能专家系统中，形式推理完全由程序完成。如果没有可靠性保证，专家系统推理的结论不一定可靠、不一定正确。**命题逻辑和谓词逻辑中的可靠性定理都成立。**

可靠性定理：设 $A \in Form(L), \Sigma \subseteq Form(L)$， $\Sigma \mid\!- A \Rightarrow \Sigma \models A$。

完备性：指形式推理的完备性。推理系统的能力。逻辑推理的结论能否在形式推理下完成？

完备性体现：形式推理系统的推理能力。逻辑推理正确性推理结论，在形式系统中一定能做到！

一个智能专家系统中，如果形式推理具有完备性，则表示它的能力已经足够。然而，通常的专家系统（如：医疗诊断系统）不具备完全性。所以，是用准确率刻划系统的功能。

命题逻辑和谓词逻辑中的完备性定理都成立。

完备性定理：设 $A \in Form(L), \Sigma \subseteq Form(L)$， $\Sigma \models A \Rightarrow \Sigma \mid\!- A$。

从证明的难易程度上看： $\Sigma \mid\!- A$的证明比 $\Sigma \models A$难。

如果完备性定理成立，则只需证明 $\Sigma \models A$，就能保证 $\Sigma \mid\!- A$成立。

命题逻辑和谓词逻辑中的可靠性定理和完备性定理都成立。

- ◆可靠性定理的证明比较容易。直接可以证明。
- ◆ 完备性定理的证明比较难容易。采用间接证明。证明它的一个等价定理。并将命题逻辑和谓词逻辑中的完备性定理分别证明。

借助于协调性概念，两个定理有如下等价形式：

对于**任意**的 $A \in Form(L), \Sigma, \Sigma' \subseteq Form(L)$

	可靠性定理	完备性定理
原始定理 1	$\Sigma \mid\!- A \Rightarrow \Sigma \models A$	$\Sigma \models A \Rightarrow \Sigma \mid\!- A$
等价定理 2	Σ' 可满足$\Rightarrow$ Σ' 协调	Σ' 协调$\Rightarrow$ Σ' 可满足

协调： 设 $\Sigma \subseteq Form(L)$，称 Σ **不协调**，如果存在 $B \in Form(L)$，使得 $\Sigma \mid -B, \Sigma \mid -\neg B$。$\Sigma$ 不是不协调，称 Σ **协调**。

可靠性定理

可满足性与有效性：

定理 1. 设 $A \in Form(L)$，则 A 可满足 $\Leftrightarrow$ $\neg A$ 不是有效。A 有效 $\Leftrightarrow$ $\neg A$ 不可满足。

证明： 由定义。

定理 2. 设 $A \in Form(L)$，则

A(u) 可满足 $\Leftrightarrow$ $(\exists x)A(x)$ 可满足。

A(u)有效 $\Leftrightarrow$ $(\forall x)A(x)$ 有效。

证明：(1) (==>) 设 A(u) 可满足。则存在赋值 v 满足 A。令 $a = u^v \in D$。$1 = A(u)^v = A(u)^{v[u/a]}$，

即，$[(\exists x)A(u)]^v = 1$。

(<==) 设 $(\exists x)A(x)$ 可满足。则存在赋值 v 满足 $(\exists x)A(x)$： $[(\exists x)A(x)]^v = 1$。 由定义，存在 $a \in D$， $A(u)^{v[u/a]} = 1$。

此表明： $v[u / a]$ 满足 A(u).

（2）类似证明。或由定理 1 及(1)证明。

A(u) 有效 $\Leftrightarrow$ $\neg A(u)$ 为不可满足 $\Leftrightarrow$ $(\exists x)\neg A(x$ 为不可满足 $\Leftrightarrow$ $\neg(\forall x)A(x$ 为不可满足 $\Leftrightarrow$ $(\forall x)A(x$ 有效。■

定理 3. (可靠性定理 1) 设 $A \in Form(L)$， $\Sigma \subseteq Form(L)$。

如果 $\Sigma \mid -A$，则 $\Sigma \models A$。

如果 $\mid -A$，则 $\models A$。

证明： 对规则的使用归纳法：

如：(¬ −)：

$$\frac{\Sigma, \neg A \mid -B, \Sigma, \neg A \mid -\neg B}{\Sigma \mid -A}$$

归纳假设：$\Sigma, \neg A \models B, \Sigma, \neg A \models \neg B$，证明：$\Sigma \models A$。

设赋值 v 使得 $\Sigma^v = 1$。如果 $A^v = 0$，则 $(\neg A)^v = 1$。

于是，$(\Sigma \cup \neg A)^v = 1$，则归纳假设：$\Sigma, \neg A \models B, \Sigma, \neg A \models \neg B$。我们有：$(\neg B)^v = 1, B^v = 1$。矛盾。

如：（∃−）：(u 不在 Σ, B 中出现)

$$\frac{\Sigma, A(u) \mid -B}{\Sigma, (\exists x)A(x) \mid -B}$$

归纳假设：$\Sigma, A(u) \models B$，证明：$\Sigma,\ (\exists x)A(x) \models B$。

注意：由于 u 不在 Σ, B 中出现，$\Sigma^{v[u/a]} = \Sigma^v = 1$，$B^{v[u/a]} = B^v$。

设 $\Sigma^v = [(\exists x)A(x)]^v = 1$，$\exists a \in D$，$A(u)^{v[u/a]} = 1$，由于 u 不在 Σ, B 中出现，$\Sigma^{v[u/a]} = \Sigma^v = 1$。

由归纳假设：$\Sigma, A(u) \mid -B$。因此，$B^{v[u/a]} = 1$。从而，$B^v = B^{v[u/a]} = 1$。所以，$\Sigma, (\exists x)A(x) \models B$。

■

定理 4. （可靠性定理 2）设 $\Sigma \subseteq Form(L)$，$A \in Form(L)$。

（1）如果Σ可满足，则Σ协调。（2）如果 A 可满足，则 A 协调。

证明： Σ可满足，证明：Σ协调。若Σ不协调，则存在 $B \in Form(L)$，使得 $\Sigma \mid -B, \Sigma \mid -\neg B$.

由(可靠性定理 1)，$\Sigma \models B, \Sigma \models \neg B$，则Σ不可满足。否则，存在赋值 v，使得 $\Sigma^v = 1$。从而，$B^v = 1, (\neg B)^v = 1$。矛盾。

从(可靠性定理 2)证明（可靠性定理 1)[如果 $\Sigma \mid -A$，则 $\Sigma \models A$]。

设 $\Sigma \mid -A$，若 $\Sigma \not\models A$，则 $\Sigma \cup \{\neg A\}$ 可满足。由(可靠性定理 2)，$\Sigma \cup \{\neg A\}$ 协调。

但是，$\Sigma \cup \{\neg A\} \mid -A, \Sigma \cup \{\neg A\} \mid -\neg A$。

表明：$\Sigma \cup \{\neg A\}$ 不协调。矛盾。■

完备性定理

定理 1. （完备性定理 1）设 $\Sigma \subseteq Form(L)$， $A \in Form(L)$。

（1）如果 $\Sigma \models A$，则 $\Sigma \vdash A$。（2）如果 $\models A$，则 $\vdash A$。

定理 2. （完备性定理 2）设 $\Sigma \subseteq Form(L)$， $A \in Form(L)$。

（1）如果Σ协调，则Σ可满足。（2）如果 A 协调，则 A 可满足。

由定理 1 证明定理 2：

（1）假定 A 协调，证明 A 可满足。

假设 A 不可满足，则对于任意赋值 v， $A^v = 0$. 从而 $\neg A$ 有效。即，$\models \neg A$。由定理 1，$\vdash \neg A$。于是， $A \vdash A$ (Ref), $A \vdash \neg A$(单调性)。所以， A 不协调。与假设矛盾。

（2）假定Σ协调，证明 Σ 可满足。

假定 Σ 不可满足，则对于任意赋值 v, 有 $\Sigma^v = 0$。从而必有一个公式 $A \in \Sigma$，对于任意赋值 v，如果 $(\Sigma - \{A\})^v = 1$，必有 $A^v = 0$。此即，对于任意赋值 v，$(\Sigma - \{A\})^v = 1$，必有 $(\neg A)^v = 1$。由定义，$(\Sigma - \{A\}) \models \neg A$。

由定理 1，$(\Sigma - \{A\}) \vdash \neg A$。从而，$(\Sigma - \{A\}), A \models A$， $(\Sigma - \{A\}), A \models \neg A$。即，Σ不协调。与假设矛盾。■

由定理 2 证明定理 1：

（1） 假定 $\Sigma \models A$，证明 $\Sigma \vdash A$。

由 $\Sigma \models A$，则 $\Sigma \cup \{\neg A\}$ 不可满足。由定理 2，$\Sigma \cup \{\neg A\}$ 不协调。从而存在公式 B，$\Sigma \cup \{\neg A\} \vdash B, \Sigma \cup \{\neg A\} \vdash \neg B$。

使用规则 $(\neg -)$，有 $\Sigma \vdash A$。

（2） 假定 $\models A$，证明 $\vdash A$。在（1）的证明中取 $\Sigma = \phi$。

完备性定理的一般性证明是证明它的等价定理：协调一定可满足。

在命题逻辑中，当 Σ 为有限命题公式集时，可以直接证明。

命题逻辑中完备性定理的有限形式：设 $A\in Form(L^P)$，$\Sigma\subseteq Form(L^P)$ 为一个有限命题公式集合，则(1) 如果 $\models A$，则 $\vdash A$。(2) 如果 $\Sigma\models A$，则 $\Sigma\vdash A$。

引理. 设 $A\in Form(L^P)$ 含有变元 $p_1,\ldots\ldots,p_n$，v 为一个赋值。令

$$A_i=\begin{cases} p_i & p_i^v=1 \\ \neg p_i & p_i^v=0 \end{cases}\qquad i=1,\ldots.,n，则$$

(1) 如果 $A^v=1$，则 $A_1,\ldots\ldots,A_n\vdash A$。

(2) 如果 $A^v=0$，则 $A_1,\ldots\ldots,A_n\vdash\neg A$。

证明：对命题公式 A 的结构进行归纳。

(1) 原子命题情形 $A=p$。$p^v=1$，$p\vdash p$。

(2) $A=\neg A'$。

如果 $A^v=1$，则 $A'^v=0$，则归纳假设，$A_1,\ldots\ldots,A_n\vdash\neg A'$。

如果 $A^v=0$，则 $A'^v=1$，则归纳假设，$A_1,\ldots\ldots,A_n\vdash A'$。

由于 $\neg\neg A'\vdash A'$，有 $A_1,\ldots\ldots,A_n\vdash\neg\neg A'$，从而 $A_1,\ldots\ldots,A_n\vdash\neg A$。

(3) $A=B\wedge C$。

假定 B 含有命题变元 $p_1,\ldots\ldots,p_k$，C 含有命题变元 $p_{k'},\ldots\ldots,p_n$ $(k'\le k)$。重复部份为：$p_{k'},\ldots\ldots,p_k$。

如果 $A^v=1$，则 $B^v=C^v=1$。由归纳假设：

$$A_1,\ldots\ldots,A_k\vdash B,\ A_1,\ldots\ldots,A_k,A_{k+1},\ldots\ldots,A_n\vdash B$$
$$A_{k'},\ldots\ldots,A_n\vdash C,\ A_1,\ldots\ldots,A_{k'-1},A_{k'},\ldots\ldots,A_n\vdash C$$

从而，$A_1,\ldots\ldots,A_n\vdash B\wedge C$。

如果 $A^v=0$，则 $B^v=0$ or $C^v=0$。设 $B^v=0$，由归纳假设：$A_1,\ldots\ldots,A_k\vdash\neg B,\ A_1,\ldots\ldots,A_k,A_{k+1},\ldots\ldots,A_n\vdash\neg B$。

进一步，$A_1,\ldots\ldots,A_n\vdash\neg B\vee\neg C$。由于 $\neg(B\wedge C)\dashv\vdash\neg B\vee\neg C$，我们有：$A_1,\ldots\ldots,A_n\vdash\neg(B\wedge C)$。

(4) $A=B\vee C,\ B\to C,\ B\leftrightarrow C$ 的情形类似证明。■

定理的证明：

(1) 设 $\models A$，则 A 为重言式。从而，任意一个赋值 v 使得 $A^v=1$。由引理，任一组 $A_1,\ldots\ldots,A_n$，均有 $A_1,\ldots\ldots,A_n\vdash A$。

特别：$A_1,......,A_{n-1},p_n\mid-A$， $A_1,......,A_{n-1},\neg p_n\mid-A$。

于是，$A_1,......,A_{n-1}\mid-p_n\rightarrow A$，$A_1,......,A_{n-1}\mid-\neg p_n\rightarrow A$。

所以，$A_1,......,A_{n-1}\mid-A$。

由$A_1,......,A_{n-1}$的任意性，重复上述过程 n-1 次，$\mid-A$。

注： 若$\Sigma\mid-A\rightarrow B,\Sigma\mid-\neg A\rightarrow B$，则$\Sigma\mid-B$。

$$\Sigma\mid-A\rightarrow B,\ \Sigma\mid-\neg B\rightarrow\neg A,\qquad \Sigma,\neg B\mid-\neg A$$
$$\Sigma\mid-\neg A\rightarrow B,\ \Sigma\mid-\neg B\rightarrow\neg\neg A,\ \Sigma,\neg B\mid-\neg\neg A$$
$$\Sigma\mid-B$$

(2) 设$\Sigma\models A$。由Σ有限，令$\Sigma=\{B_1,......,B_m\}$，$B_1,......,B_m\models A$。

从而，$B_1,......,B_{m-1}\models B_m\rightarrow A$，……，$\models B_1\rightarrow(B_2\rightarrow......(B_m\rightarrow A)...)$。

由(1) $\mid-B_1\rightarrow(B_2\rightarrow......(B_m\rightarrow A)...)$

$$B_1\mid-B_1\rightarrow(B_2\rightarrow......(B_m\rightarrow A)...)$$
$$B_1\mid-B_1$$
$$B_1\mid-B_2\rightarrow(B_3\rightarrow......(B_m\rightarrow A)...)$$

$$B_1,B_2\mid-B_3\rightarrow(B_4\rightarrow......(B_m\rightarrow A)...)$$

……

$B_1,B_2,......,B_m\mid-A$。

即，$\Sigma\mid-A$。■

命题逻辑和谓词逻辑的完备性性定理

等价形式： 协调公式集必可满足。

（如果Σ协调，则Σ可满足）

证明方法： 将协调公式集Σ扩充为一个极大协调集Σ^*，利用极大协调集Σ^*的临界性质，构造一个赋值满足Σ。

由于命题逻辑和谓词逻辑中赋值形式上不相同，所以我们分开讨论。

极大协调集： 设$\Sigma \subseteq Form(L^p)$，称$\Sigma$极大协调。如果

(1) Σ协调。

(2) 任何命题公式$A \notin \Sigma$，$\Sigma \cup \{A\}$不协调。

极大协调集的（临界）性质：

设$\Sigma \subseteq Form(L)$，Σ极大协调，公式$A, B \in Form(L)$。有：

(1) $A \in \Sigma \Leftrightarrow \Sigma \mid\!- A$。（边界性质）

(2) $A \in \Sigma \Leftrightarrow \neg A \notin \Sigma$。（边界性质）

(3) $A \wedge B \in \Sigma \Leftrightarrow A \in \Sigma$且$B \in \Sigma$。

(4) $A \vee B \in \Sigma \Leftrightarrow A \in \Sigma$或$B \in \Sigma$。

(5) $A \to B \in \Sigma \Leftrightarrow$如果$A \in \Sigma$，则$B \in \Sigma$。

(6) $A \leftrightarrow B \in \Sigma \Leftrightarrow$ “$A \in \Sigma$当且仅当$B \in \Sigma$”。

证明：（1.1）$A \in \Sigma \Rightarrow \Sigma \mid\!- A$（显然）

（1.2）设$\Sigma \mid\!- A$，假定$A \notin \Sigma$，则由极大协调性，$\Sigma \cup \{A\}$不协调。

从而有公式 B，$\Sigma \cup \{A\} \mid\!- B, \Sigma \cup \{A\} \mid\!- \neg B$。由归谬律：$\Sigma \mid\!- \neg A$。于是，$\Sigma \mid\!- A, \Sigma \mid\!- \neg A$。得到：$\Sigma$不协调。矛盾。■

（2.1）设$A \in \Sigma$，如果$\neg A \in \Sigma$，则Σ不协调。

（2.2）设$\neg A \notin \Sigma$，则$\Sigma \cup \{\neg A\}$不协调。从而有公式 B，$\Sigma \cup \{\neg A\} \mid\!- B, \Sigma \cup \{\neg A\} \mid\!- \neg B$，则规

则 $(\neg-)$，$\Sigma|-A$。

其它性质由（1）（2）证明。

极大协调集性质的特征：

◆ $A\in\Sigma\Leftrightarrow\Sigma|-A$：形式可推导与集合包含元素一致。

◆ $A\in\Sigma\Leftrightarrow\neg A\notin\Sigma$：每一个公式 A，$A,\neg A$ 恰有一个在 Σ 中。

特别，每一个命题变元 p，$p,\neg p$ 恰有一个在 Σ 中. 这可以保证从 Σ 定义一个赋值：

$$v_{\Sigma}(p):=\begin{cases}1 & p\in\Sigma\\ 0 & p\notin\Sigma\end{cases}$$

可见：$v_{\Sigma}(p)=1\Leftrightarrow p\in\Sigma$。

◆ 性质（2）--（6）：处理联结词与（语义）赋值定义一致。从而可以保证：使用归纳法可以证明：对于命题 A 公式，有 $v_{\Sigma}(A)=1\Leftrightarrow A\in\Sigma$。

最终，v_{Σ} 可以满足 Σ。从而可以满足 Σ 的子公式集 Σ_0

对于一个协调命题公式集 Σ，设法将 Σ 扩充为一个极大协调集 Σ^*，则 Σ^* 构造下个赋值 v_{Σ^*} 满足 Σ。

命题逻辑中完备性定理

定理 1. 设 $A\in Form(L^P)$，$\Sigma\subseteq Form(L^P)$。

(1) 如果 Σ 协调，则 Σ 可满足。

(2) 如果 A 协调，则 A 可满足。

证明：(1) 对 Σ 进行极大协调扩充为：极大协调 Σ^*。

$Form(L^P):=\{A_0,A_1,\ldots\ldots\ldots\}$（可数集）

$$\Sigma_0=\Sigma,\quad \Sigma_{n+1}=\begin{cases}\Sigma_n & \Sigma_n\cup\{A_n\}\text{不协调}\\ \Sigma_n\cup\{A_n\} & \Sigma_n\cup\{A_n\}\text{协调}\end{cases}$$

$\Sigma^* = \bigcup_{n\geq 0}\Sigma_n$ 。

注意： $\Sigma = \Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \ldots\ldots$。

验证： Σ^* **极大协调。**

(1.1) Σ^* 协调

如果不协调，$\Sigma^* \mid -A_k, \Sigma^* \mid -\neg A_k$，则存在 Σ^* 的一个有限子集 $\Sigma' \subseteq \Sigma^*$，使 $\Sigma' \mid -A_k, \Sigma' \mid -\neg A_k$，从而必有一个 n，$\Sigma' \subseteq \Sigma_n$。于是，$\Sigma_n \mid -A_k, \Sigma_n \mid -\neg A_k$，此即，$\Sigma_n$ 不协调。矛盾。

(1.2) Σ^* 极大协调。

反证法。如果 Σ^* 不是极大协调。则必有公式 $B \in Form(L^P)$，使得：$B \notin \Sigma^*$，$\{B\}\cup\Sigma^*$ 协调。

注意：$Form(L^P) := \{A_0, A_1, \ldots\ldots\ldots\}$。故 B 必为某个 A_n 。

由 $\Sigma_n \subseteq \Sigma^*$ 及 $\{B\}\cup\Sigma^*$ 协调，必有 $\{B\}\cup\Sigma_n$ 协调。

由构造过程：$B \in \Sigma_{n+1} \subseteq \Sigma^*$。与 $B \notin \Sigma^*$ 矛盾。

(2) Σ^* 由构造一个赋值 v 满足 Σ。

$$p^v = 1 \Leftrightarrow p \in \Sigma^*$$

由 Σ^* 极大协调，则极大协调的性质（2）保证定义的合理性。

归纳证明： 对每一个命题公式 A, $A^v = 1 \Leftrightarrow A \in \Sigma^*$。从而，v 满足 Σ. 证明中充分使用了 Σ^* 是极大协调集的性质。

（2.1）A=p 为原子公式。由定义。

（2.2）$A = \neg B$ 。$\neg B \in \Sigma^* \Leftrightarrow B \notin \Sigma^*$。由归纳假：$B^v = 0$，故 $A^v = 1 \Leftrightarrow A \in \Sigma^*$。

（2.3）$A = B \wedge C$ 。$B \wedge C \in \Sigma^* \Leftrightarrow B \in \Sigma^*$ 且 $C \in \Sigma^*$。由归纳假：$B^v = 1 \Leftrightarrow B \in \Sigma^*, C^v = 1 \Leftrightarrow C \in \Sigma^*$。

所以，$B \wedge C \in \Sigma^* \Leftrightarrow (B \wedge C)^v = 1$。

（2.4）$A = B \vee C,\ B \to C,\ B \leftrightarrow C$ 类以证明。

最终由归纳法：$A^v = 1 \Leftrightarrow A \in \Sigma^*$。

而 $\Sigma \subseteq \Sigma^*$，所以 $\Sigma^v = 1$。■

谓词逻辑完备性定理

假设条件：语言 L 中不含等词 $\equiv$。对于含等词情形，引入等价关系，作论域的商集，化为不含等词情形。

语言扩充：将一阶语言 L 扩充成一个新的语言 L^0。

在 L 之外引入可数无穷多个新的自由变元： $u^0, u^1, ...$。其目的是为了量词引入时保证不出现重复符号。对相应的项集合，公式集作扩充。

$$Term(L) \subseteq Term(L^0),\ Atom(L) \subseteq Atom(L^0),\ Form(L) \subseteq Form(L^0)$$

存在性质：设 $\Sigma \subseteq Form(L^0)$，称 Σ 具有**存在性质**。如果 $(\exists x)A(x) \in \Sigma$，存在新增自由变元 $d \in \{u^0, u^1, ...\}$，使 $A(d) \in \Sigma$。

存在性质的引入和条件要求，其主要目的是处理公式 $(\exists x)A(x) \in \Sigma$ 时，从 $(\exists x)A(x)$ 到 $A(d)$ 保证封闭。

引理. （带存在性质的扩充）设 $\Sigma \subseteq Form(L)$， Σ 协调，则 Σ 可以扩充为一个具有存在性质的极大协调集 $\Sigma^{**} \subseteq Form(L^0)$。（$\Sigma \subseteq \Sigma^{**}$）

证明：(1) $Form(L)$ 中的所有形如 $(\exists x)A(x)$ 的公式可数：

$$(\exists x_0)A_0(x_0), (\exists x_1)A_1(x_1), ..., (\exists x_n)A_n(x_n), ...$$

扩充过程：

第 0 步：$\Sigma_0 = \Sigma$。

第 1 步：取公式 $(\exists x_0)A(x_0)$，以及从 $\{u^0, u^1, ...\}$ 中取在未用过的最前面的新变元 u^{i_0}。作

$$\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{(\exists x_0)A_0(x_0) \to A_0(u^{i_0})\}。$$

第 n+1 步：取公式 $(\exists x_n)A_n(x_n)$，以及从 $\{u^0, u^1, ...\}$ 中取在未用过的最前面的新变元 u^{i_n}。

作 $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{(\exists x_n)A_n(x_n) \to A_n(u^{i_n})\}$。（$0 \le i_0 < i_1 < .... < i_n$）

验证 Σ_n 协调：对 n 归纳.

n=0 ： 显然。

n=k+1 ： 假设Σ_k协调，Σ_{k+1}协调。

若$\Sigma_{k+1}=\Sigma_k\bigcup\{(\exists x_k)A_k(x_k)\to A_k(u^{i_k})\}$不协调，则

$$\Sigma_k\mid-\neg[(\exists x_k)A_k(x_k)\to A_k(u^{i_k})]$$
$$\Sigma_k\mid-(\exists x_k)A_k(x_k)\wedge\neg A_k(u^{i_k})$$
$$\Sigma_k\mid-(\forall y)[(\exists x_k)A_k(x_k)\wedge\neg A_k(y)]\quad(\forall+)$$
$$\Sigma_k\mid-(\exists x_k)A_k(x_k)\wedge(\forall y)(\neg A_k(y))$$
$$\Sigma_k\mid-(\exists x)A_k(x)\wedge(\forall y)(\neg A_k(y))$$
$$\Sigma_k\mid-(\exists x)A_k(x)\wedge\neg(\exists y)A_k(y)$$
$$\Sigma_k\mid-(\exists x)A_k(x)$$
$$\Sigma_k\mid-\neg(\exists y)A_k(y)$$
$$\Sigma_k\mid-\neg(\exists x)A_k(x)$$

从而Σ_k不协调。矛盾。

作$\Sigma^*=\bigcup_{n\geq0}\Sigma_n$，则$\Sigma^*=\bigcup_{n\geq0}\Sigma_n$协调。

（2）第二次扩充： $\Sigma\subseteq\Sigma^*(\text{为"存在性质"作准备})\subseteq\Sigma^{**}(\text{极大协调, 有"存在性质"})$。

验证：Σ^{**}有“存在性质”。

设有$(\exists x)A(x)\in\Sigma^{**}$，则$\Sigma_n$的定义，存在 n，使得$(\exists x)A(x)\to A(d)\in\Sigma_n$。从而，$\Sigma^{**}\mid-A(d)$，由极大协调性：$A(d)\in\Sigma^{**}$。■

定理 2. 设$A\in Form(L)$，$\Sigma\subseteq Form(L)$。

(1) 如果Σ协调，则Σ可满足。

(2) 如果 A 协调，则 A 可满足。

证明：分两次扩充：Σ可以扩充为一个具有存在性质的极大协调集Σ^{**}。构造一个赋值 v 如下：

论域：$D=\{c^t\mid t\in Term(L^0)\}$

项： 在 L 中，$a^v=c^a,u^v=c^u,$

在L^0中，$d^v=c^d$ ，$t^v=c^t$，$[f(t_1,......,t_n)]^v=f^v(t_1^v,......,t_n^v)=c^{f(t_1,......,t_n)}$

原子公式：$f^v(t_1^v,......,t_n^v)\in P^v\Leftrightarrow P(t_1,......,t_n)\in\Sigma^{**}$

验证 v 满足具有性质：$A^v=1\Leftrightarrow A\in\Sigma^{**}$

对 A 的结构进行归纳。

（1）原子公式：显然。

（2）$\neg A, A\wedge B, A\vee B,\ A\rightarrow B, A\leftrightarrow B$。（由极大协调性，仿命题逻辑中完备性定理的证明部分）

（3）$(\exists x)A(x)$：

$(\Leftarrow)$ 设 $(\exists x)A(x)\in\Sigma^{**}$ 。证：$[(\exists x)A(x)]^{v}=1$。

由存在性质。 $(\exists x)A(x)\in\Sigma^{**}\Rightarrow A(d)\in\Sigma^{**}$。

由归纳假设：$A(d)^{v}=1$。所以，$[(\exists x)A(x)]^{v}=1$。

$(\Rightarrow)$ 反之，设 $[(\exists x)A(x)]^{v}=1$，证：$(\exists x)A(x)\in\Sigma^{**}$。

由 $[(\exists x)A(x)]^{v}=1$，存在 $a=c^{t}$，$[A(u)]^{v[u/a]}=1$。

注意：$c^{t}=t^{v}$。$A(t)^{v}=[A(u)]^{v[u/t^{v}]}=[A(u)]^{v[u/c^{t}]}=1$。

由归纳假设，$A(t)\in\Sigma^{**}$。

所以，$\Sigma^{**}\mid -A(t)$。 $\Sigma^{**}\mid -(\exists x)A(x)$。

由极大协调性：$(\exists x)A(x)\in\Sigma^{**}$。■

P138：4.3.1

P141：4.4.4，4.4.5

P150：4.5.1

第五章 紧致性定理、L-S 定理、Herbrand 定理

可靠性与完备性定理保证了如下关系：

$$\Sigma \models A \Leftrightarrow \Sigma \vdash A$$

这表明：形式可推导和（语义）逻辑推导是一致的。从而可以考虑纯粹语义下的一些性质和结论。

紧致性定理：刻画无穷公式集可满足性与其有限子集可满足性之间的关系。

Lowenheim-Skolem 定理：公式集的可满足性测试，可以只在模型论域大小为可数集上测试。

Herbrand 定理：人工知能中自动定理证明的重要理论基础。它告诉了模型构造方法。公式的不可满足性测试只在 Herbrand 赋值上进行。形如 $(\forall x)B(x)$ 不可满足当且仅当存在 A 的母式的有限个例式 $B(t_1),......,B(t_k)$ 不可满足。

定理 1.（紧致性定理） 设 $\Sigma \subseteq Form(L)$，Σ 可满足当且仅当 Σ 的任何有限子集可满足。

证明： $(\Rightarrow)$ 显然。

$(\Leftarrow)$ 设 Σ 不可满足，由完备性定理，Σ 不协调。所以，存在 $A \in Form(L)$，使得 $\Sigma \vdash A$，$\Sigma \vdash \neg A$。从而，存在 Σ 的一个有限子集 Σ'，使得：$\Sigma' \vdash A, \Sigma' \vdash \neg A$。此表明：$\Sigma'$ 不协调。则可靠性定理：Σ' 不可满足。矛盾。■

应用： 如果找到 Σ 的一个有限子集不可满足，则 Σ 不可满足。

定理 2.（L-S 定理） 设 $\Sigma \subseteq Form(L)$，$A \in Form(L)$。

(1) 不含等词的 Σ 可满足当且仅当 Σ 在可数无穷论域 D 上，Σ 是 $D-$ 可满足。

(2) 含等词的 Σ 可满足当且仅当 Σ 在可数无穷或有限论域 D 上，Σ 是 $D-$ 可满足。

证明： 由可靠性和完备性定理。■

推论（L-S 定理） 设 $\Sigma \subseteq Form(L)$，$A \in Form(L)$。

（1）不含等词的 A 有效当且仅当 A 在可数无穷论域 D 上，Σ 是 $D-$ 有效。

（2）含等词的 A 有效当且仅当 Σ 在可数无穷或有限论域 D 上，Σ 是 $D-$ 有效。

Herbrand 定理

Herbrand 定理的证明需要一些预备知识。

无∃前束范式：不含∃前束范式。

我们曾以介绍过这样的结论：

定理：（1）$(\exists x)B(x)$ 可满足，当且仅当　$B(u)$ 可满足。

（2）$(\forall x)B(x)$ 有效，当且仅当　$B(u)$ 有效。

按如下方法取消存在量词，构造原始公式的无∃前束范式。

第 1 个∃：引入自由变元，取消存在量词。$(\exists x)B(x)$可满足 $\Leftrightarrow B(u)$可满足。

第 2 个以后的∃：引入函数。$(\forall x)(\exists y)B(x,y) \Leftrightarrow (\forall x)B(x,f(x))$。

“对于任意的 x，存在 y，.....”这样的 y 依赖于 x. 所以，视为 x 的函数。

注意：“存在 y，对于任意的 x，.....”中 y 不依赖于 x。对 x 通用。

例： $A=(\exists x)(\forall y)(\exists z)B(x,y,z)$。

A 的无∃前束范式为：$A'=(\forall y)B(u,y,f(y))$。

其中，u，　f　不在 A 中出现

定理 3.　设 $A \in Form(L)$，前束范式 A 是 $D-$可满足公式当且仅当 A 的无∃前束范式 $D-$可满足。

从而，前束范式 A 可满足当且仅当 A 的无∃前束范式可满足。

证明： 设 $A \in Form(L)$，假定 $A=(\exists x)(\forall y)(\exists z)B(x,y,z)$（对于更复杂的结构，方法类似），引入三个新的自由变元 u_x,u_y,u_z，对应处理三个量词：$(\exists x),(\forall y),(\exists z)$。

A 有无∃前束范式为：$A'=(\forall y)B(u_x,y,f(y))$。其中 u_x,f 不在 A 中出现。

所以只要证明：$(\forall y)B(u_x,y,f(y))$ D-可满足 当且仅当 $(\forall y)(\exists z)B(u,y,z)$ D-可满足。

(=>)　设 v 满足 $(\forall y)B(u_x,y,f(y))$，$[(\forall y)B(u_x,y,f(y))]^v=1$，则对于任意的 $a \in D$，

$[B(u_x,u_y,f(u_y))]^{v[u_y/a]}=1$，其中，$u_y$ 不在 $B(u_x,y,f(y))$ 中出现。从而：

$$[f(u_y)]^{v[u_y/a]} = f^{v[u_y/a]}(u_y^{v[u_y/a]}) = f^{v[u_y/a]}(a) = f^v(a) = u_z^{v[u_y/a][u_z/f^v(a)]}$$。

其中u_z不在$B(u_x,u_y,f(u_y))$中出现。

于是，$B(u_x,u_y,u_z)^{v[u_y/a][u_z/f^v(a)]}=B(u_x,u_y,f(u_y))^{v[u_y/a]}=1$。由于$f^\upsilon(a)\in D$，有：$[(\exists z)B(u_x,u_y,z)]^{v[u_y/a]}=1$。由a的任意性，$[(\forall y)(\exists z)B(u_x,y,z)]^\upsilon=1$。

(<=)　设$[(\forall y)(\exists z)B(u_x,y,z)]^\upsilon=1$，则对任意的$a\in D$，存在$b\in D$，使得：$[B(u_x,u_y,u_z)]^{\upsilon[u_y/a][u_z/b]}=1$。其为，$u_y,u_z$不在$B(u_x,u_y,u_z)$中出现。

作一个赋值v’，引入一个函数f，使得：$f^{v'}(a)=b$。其余v’与v完全相同。于是：$[B(u_x,u_y,u_z)]^{\upsilon[u_y/a][u_z/f^{v'}(a)]}=1$。

$$[f(u_y)]^{\upsilon'[u_y/a]}=f^{\upsilon'[u_y/a]}(u_y{}^{\upsilon'[u_y/a]})=f^{\upsilon'}(a)=u_z{}^{\upsilon[u_y/a][u_z/f^{\upsilon'}(a)]}$$

由于除$f^{v'}(a)=b$外，v’与v完全相同。

所以，$[B(u_x,u_y,f(u_y))]^{\upsilon'[u_y/a]}=[B(u_x,u_y,u_z)]^{\upsilon[u_y/a][u_z/f^{v'}(a)]}=1$。

由a的任意性，$[(\forall y)B(u_x,y,f(y))]^{\upsilon'}=1$。■

Herbrand 域：　设$A\in Form(L)$为无∃前束范式。定义集合：

$$H_A=\{t'\mid t\text{为出现在A中的自由变元、常元、函数生成的项}\}$$

称为A的**Herbrand 域**。

(若A中不含自由变元和常元，取任一自由变元代替。)

例： A=$(\forall y)B(a,u,y,f(\mathrm{y}))$，$H_A=\{a,u,f(a),f(u),..........\}$。

B=$(\forall y)C(f(\mathrm{y}))$，　$H_B=\{u,f(u),.........\}$

Herbrand 赋值：　设$A\in Form(L)$为无∃前束范式。定义以H_A为论域的满足如下条件的赋值v称为Herbrand赋值。

(1)　$a^v=a'\in H_A$, $u^v=u'\in H_A$　。

(2)　$f^v(t_1',......,t_n')=[f(t_1,......,t_n)]'\in H_A$　。

Herbrand 赋值的特征：项集合作论域，项自己解释自己。

定理 4.　无∃前束范式公式A不可满足，当且仅当A在所有Herbrand赋值下不可满足。

注意：一般的不可满足性要求在所有赋值下检验。

证明：(==>) 显然。

(<==) 设 A 在所有 Herbrand 赋值下不可满足。证明：A 不可满足

反证法。 假定 A 可满足，构造出一个 Herbrand 赋值满足 A。

设 v 满足 A，v 的论域为 D。$A^{v}=1$。以下由 v 构造一个 Herbrand 赋值 v_H 使得：$A^{v_H}=1$

(1) 对于 $t_1^{'},......,t_n^{'} \in H_A$ ，$<t_1^{'},......,t_n^{'}> \in P^{v_H} \Leftrightarrow <t_1^{v},......,t_n^{v}> \in P^{v}$ 。

(2) $t_1^{'},t_2^{'} \in H_A$ ，$t_1^{'} \equiv^{v_H} t_2^{'} \Leftrightarrow t_1^{v} \equiv^{v} t_2^{v}$。

注意：$[P(t_1,......,t_n)]^{v_H}=[P(t_1,......,t_n)]^{v}$ 。

验证：$A^{v_H}=1$。

主要验证带量词形式：设 $A=(\forall x)B(x)$ 。$[(\forall x)B(x)]^{v}=1$。

则对于任意的 $a \in D, B(u)^{v[u/a]}=1$。u 不在 B（x）中出现。

对任意的 $t' \in H_A$，$t^{v} \in D$，$B(u)^{v[u/t^{v}]}=1$。因为 $B(u)$ 不含量词，

所以，$B(u)^{v_H[u/t^{'}]}=B(u)^{v_H[u/t^{v_H}]}=B(t)^{v_H}=B(t)^{v}=B(u)^{v\,[u/t^{v}]}=1$。

由 $t' \in H_A$ 的任意性，$[(\forall x)B(x)]^{v_H}=1$。■

对于无∃前束范式公式 $A=(\forall x_1).......(\forall x_n)B(x_1,.......,x_n)$

母式： $B(x_1,.......,x_n)$ 称为 A 的母式。

例式： $B(t_1,.......,t_n)$ 称为 A 的一个母式的例式。

定理 5.（Herbrand 定理） 无∃前束范式公式 $(\forall x_1).......(\forall x_n)B(x_1,.......,x_n)$ 不可满足当且仅当存在 A 的母式的有限个例式不可满足。

证明： 以 $(\forall x)B(x)$ 为例证明.

（<=） 对于任意的有限个例式：$B(t_1),.......,B(t_k)$。我们有：

$$(\forall x\ )B\ (x\ \models B\ t_1(\wedge\ \ )\ \ \wedge_k.$$

所以，如果存在有限个例式 $B(t_1),.......,B(t_k)$ 不可满足，则 $(\forall x)B(x)$ 不可满足。

由可靠性定理：$(\forall x)B(x) \models B(t_1) \wedge .... \wedge B(t_k)$。如果 $(\forall x)B(x)$ 可满足，$B(t_1) \wedge .... \wedge B(t_k)$ 可满足。

（==>）设 $(\forall x)B(x)$ 不可满足。假定任意有限个例式 $B(t_1),.......,B(t_k)$ 可满足。

作 $\Sigma=\{B(t)|t'\in H_A\}$。由紧性定理：$\Sigma=\{B(t)|t'\in H_A\}$ 可满足。

于是，存在赋值 v，使得 $\Sigma^v=1$。即，对任意的 $t'\in H_A$，$B(t)^v=1$。

由 v 构造一个 Herbrand 赋值 v_H。注意：对于 $t'\in H_A, t'=t^{v_H}$。

因为 $B(u)$ 不含量词，$B(t)^{v_H}=B(t)^v=1$。

因此，对任意的 $t'\in H_A$，取自由变元 u 不在 B(x) 中出现，有：

$B(u)^{v_H[u/t']}=B(u)^{v_H[u/t^{v_H}]}=B(t)^{v_H}=1$。

由 $t'\in H_A$ 的任意性，$[(\forall x)B(x)]^{v_H}=1$。矛盾。■

Herbrand 定理的应用： Herbrand 定理将 $(\forall x)B(x)$ 的不可满足性化归为：有限个公式的不可满足性。

在人工智能中，要证明：$A_1,......,A_k|-A$。

即证：$|-(A_1\wedge......\wedge A_k)\to A$。

即证：$\neg[(A_1\wedge......\wedge A_k)\to A]$ 不可满足。

逻辑程序设计语言（PROLOG　Programs）

Horn 子句形式	程序语句格式
a（正文字）	a:-（事实）
$a \vee \neg b \vee \neg c$	a:-b,c （一般程序语句）
$\neg b \vee \neg c = \neg(b \wedge c)$	? – b,c （提问语句）

www.csupomona.edu/%7Ejrfisher/www/prolog_tutorial/contents.html

1. **Factorial**

```
factorial(0,1).
factorial(A,B) :-
      A > 0,
      C is A-1,
      factorial(C,D),
      B is A*D.
?- factorial(10,W).
W=3628800
```

2. **Append**

```
append([], X,X):-!.

append([A|B],Y,[A|Z]):-append(B,Y,Z).

?- append([1,2,3], [2,3,4,5,6]).
```

3. **Member**

```
member(A, [A|_]):-!.

member(A, [_|B]):- member(A, B).

?- member(A, [B])
```

4. Towers of Hanoi puzzle

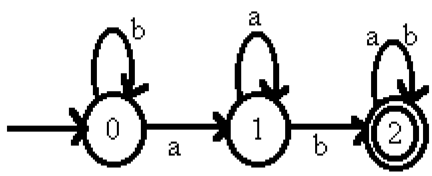
```
move(1,X,Y,_) :-
    write('Move top disk from '),
    write(X),
    write(' to '),
    write(Y),
    nl.
move(N,X,Y,Z) :-
    N>1,
    M is N-1,
    move(M,X,Z,Y),
    move(1,X,Y,_),
    move(M,Z,Y,X).
?-  move(3,left,right,center).
```

5. DFA parser

```
parse(L) :- start(S),
            trans(S,L).
trans(X,[A|B]) :-
      delta(X,A,Y),   /*  X ---A---> Y */
      write(X),
      write('  '),
      write([A|B]),
      nl,
      trans(Y,B).
trans(X,[]) :-
      final(X),
      write(X),
      write('  '),
      write([]), nl.
```

```
delta(0,a,1).
delta(0,b,0).
delta(1,a,1).
delta(1,b,2).
delta(2,a,2).
delta(2,b,2).
start(0).
final(2).
```

A state diagram for this machine is as follows:




```
?- parse([b,b,a,a,b,a,b]).
0  [b,b,a,a,b,a,b]
0  [b,a,a,b,a,b]
0  [a,a,b,a,b]
1  [a,b,a,b]
1  [b,a,b]
2  [a,b]
2  [b]
2  []
yes
```

习题：

（1）P156：5.1.1、5.1.2、5.1.3、5.1.4

（2）调试上述 Prolog程序。

第六章 公理推演系统

数学系统的建立：

- 公理系统（基础）(如：初等到几何的 5 条公理)
- 概念引入
- 演算、推理
- 性质研究
- 重大结论
- 知识累积
- ……

公理推演系统： 公理系统 + 规则模式

规则模式：

1、MP 规则：$\dfrac{A, A \to B}{B}$

2、$(\forall +)$ 规则：$\dfrac{A(u)}{(\forall x)A(x)}$

自然公理系统：

Ax_n	公 理	对应自然推理系统规则
1	$A \to (B \to A)$	$\dfrac{\Sigma \mid\!- A}{\Sigma, B \mid\!- A}$
2	$[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$	$\dfrac{\Sigma \mid\!- A \to B, \Sigma \mid\!- B \to C}{\Sigma \mid\!- A \to C}$
3	$(\neg A \to B) \to [(\neg A \to \neg B) \to A]$	$\dfrac{\Sigma, \neg A \mid\!- B, \Sigma, \neg A \mid\!- \neg B}{\Sigma \mid\!- A}$ （反证法）
4	$(A \wedge B) \to A$	$\dfrac{\Sigma \mid\!- A \wedge B}{\Sigma \mid\!- A}$
5	$(A \wedge B) \to B$	
6	$A \to [B \to (A \wedge B)]$	$\dfrac{\Sigma \mid\!- A, \Sigma \mid\!- B}{\Sigma \mid\!- A \wedge B}$
7	$A \to (A \vee B)$	$\dfrac{\Sigma \mid\!- A}{\Sigma \mid\!- A \vee B}$
8	$A \to (B \vee A)$	

9	$(A\to C)\to[(B\to C)\to[(A\vee B)\to C]]$	$\dfrac{\Sigma,A\vdash C,\Sigma,B\vdash C}{\Sigma,A\vee B\vdash C}$
10	$(A\leftrightarrow B)\to(A\to B)$	$\dfrac{\Sigma\vdash A\leftrightarrow B,\Sigma\vdash A}{\Sigma\vdash B}$
11	$(A\leftrightarrow B)\to(B\to A)$	
12	$(A\to B)\to[(B\to A)\to(A\leftrightarrow B)]$	$\dfrac{\Sigma,A\vdash B,\Sigma,B\vdash A}{\Sigma\vdash A\leftrightarrow B}$
13	$(\forall x)A(x)\to A(t)$	$\dfrac{\Sigma\vdash(\forall x)A(x)}{\Sigma\vdash A(t)}$
14	$(\forall x)[A\to B(x)]\to[A\to(\forall x)B(x)]$ x 不在 A 中出现	
15	$A(t)\to(\exists x)A(x)$，部分替换	$\dfrac{\Sigma\vdash A(t)}{\Sigma\vdash(\exists x)A(x)}$
16	$(\forall x)[A(x)\to B]\to[(\exists x)A(x)\to B]$ x 不在 B 中出现	
17	$t_1\equiv t_2\to[A(t_1)\to A(t_2)]$，部分替换	$\dfrac{\Sigma\vdash t_1\equiv t_2,\Sigma\vdash A(t_1)}{\Sigma\vdash A(t_2)}$
18	$u\equiv u$	$\vdash u\equiv u$

公理系统下的证明定义： $\Sigma\vdash_a A$

一个公式 序列 $A_1,\ldots\ldots,A_n$ 称为从 Σ 到 A 的一个证明。如果

(1) $A_1\in\Sigma$ 或 A_1 为一个公理。

(2) $A_n=A$。

(3) 对 $2\le k\le n$，A_k 为如下情形之一：

(3.1) $A_k\in\Sigma$ 或 A_k 为一个公理；

(3.2) 存在 $1\le i,j<k$，$A_i=A_j\to A_k$；

(3.3) 存在 $1\le i<k$，$A_i=B(u)$，$A_k=(\forall x)B(x)$；u 不在 A_1 和 Σ 中出现。

例. 证明：$\vdash_a A\to A$

(1)	$A\to[(A\to A)\to A]$	Ax1
(2)	$\{A\to[(A\to A)\to A]\}\to\{[A\to(A\to A)]\to(A\to A)\}$	Ax2
(3)	$[A\to(A\to A)]\to(A\to A)$	
(4)	$A\to(A\to A)$	Ax1
(5)	$A\to A$	

定理 $\Sigma\vdash_a A\Leftrightarrow\Sigma\vdash A$ 。

证明： (1) $\Sigma\vdash_a A\Rightarrow\Sigma\vdash A$，对证明长度归纳。

(2) $\Sigma\vdash A\Rightarrow\Sigma\vdash_a A$，对规则归纳。

直观上，规则（公理模式）越多，证明起来相对容易。因为可用的推理规则较多。但是，多了可能会出现不协调性。规则之间相互矛盾。

公理数越少，说明模式的能力越强。

在保证协调的前提下，新公理模式的加入有两种结果：

（1） 新公理可由原来公理系统推导出。

（2） 新公理不能由原来公理系统推导出。(独立）

类比于线性代数中的线性无关： 在一个 n 维线性空间中，假定$e_1,\ldots\ldots,e_m$线性无关。则

（1） 如果$m<n$，则可加入一个新向量e，使$e_1,\ldots\ldots,e_m,e$线性无关。

（2） 如果$m=n$，则不可再加入新向量e，使$e_1,\ldots\ldots,e_m,e$线性无关。

（3） 对于向量组$\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_m$，$m>n$，则$\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_m$必定线性相关。即，其中必有一个向量可以被其余向量线性表示。

与自然公理系统等价的三个公理系统：（命题逻辑）

(1)	$A \to (B \to A)$ $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (B \to C)]$ $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
(2)	$(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$ $(\neg A \to A) \to A$ $A \to (\neg A \to B)$
(3)	$(\{[(A \to B) \to (\neg C \to \neg D)] \to C\} \to E) \to [(E \to A) \to (D \to A)]$

（参见：许道云，三个公理系统的等价性. 贵州大学学报，1988？）

一阶逻辑通常使用的公理系统：

$(Ax1)$ $A \to (B \to A)$

$(Ax2)$ $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (B \to C)]$

$(Ax3)$ $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

$(Ax4)$ $(\forall x)[A \to B(x)] \to [A \to (\forall x)B(x)]$ （x不在A中出现）

（Ax5） $(\forall x)A(x) \to A(t)$

其中，$A(t)$是将t全部替换$A(x)$中的x而得到.

（Ax6） $u \equiv u$

（Ax7） $t_1 \equiv t_2 \to (A(t_1) \to A(t_2))$

其中，$A(t_2)$是将t_1替换$A(t_1)$中的（部分）t_1而得到.

推理规则：

（1） 分离规则（MP）：$\dfrac{A \quad A \to B}{B}$。

（2） 概括规则$(\forall x)$：$\dfrac{A(u)}{(\forall x)A(x)}$

第七章 构造性逻辑

在构造性逻辑中，不承认反证法。

反证法公理：$(\neg A\to B)\to[(\neg A\to\neg B)\to A]$

反证法规则：$\dfrac{\Sigma,\neg A\mid -B,\Sigma,\neg A\mid -\neg B}{\Sigma\mid -A}$

反证法公理减弱到如下两条公理：

$$(A\to B)\to[(A\to\neg B)\to\neg A]$$
$$\neg A\to(A\to B)$$

在构造性逻辑中，形式证明记为：$\Sigma\mid -_c A$。

定理 1. $\Sigma\mid -_c A\Rightarrow\Sigma\mid -A$。（即在构造逻辑公理系统中可证，则自然公理系统中可证。反之，不一定成立。）

定理 2（Glivenko）. 在命题逻辑中， $\Sigma\mid -A\Leftrightarrow\neg\neg\Sigma\mid -_c\neg\neg A$。

构造性命题逻辑的语义

回忆一下，命题逻辑中的赋值具有形式$v: Atom(L^p)\to\{0,1\}$。如果一个公式 A 含有 n 个变元，出现在 A 中的命题变元集为$Var(A)=\{p_1,.....,p_n\}$。则 A 的一个赋值$v: Var(A)\to\{0,1\}$作为特征函数对应$Var(A)$的一个子集。

Kripke 结构：设 K 为一个命题变元赋值集合，R 中 K 上的一个二元关系。称（K，R）为一个 Kripke 结构。

构造性赋值：设（K，R）为一个 Kripke 结构，如果 R 肯有自反性，可传性，则称每个$v\in K$为对语言L^p的构造性赋值。

公式在构造性赋值下的求值递归计算定义：对于给定的（K，R）为一个 Kripke 结构，对于给定的$v\in K$，命题公式的真值计算递归定义如下：

(1) $p^v \in \{0,1\}$

(2) $(A \wedge B)^v = \begin{cases} 1 & A^v = B^v = 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

(3) $(A \vee B)^v = \begin{cases} 0 & A^v = B^v = 0 \\ 1 & o.w. \end{cases}$

(4) $(A \to B)^v = \begin{cases} 1 & \begin{array}{l} \text{任何使得} vRv' \text{的} v' \in K, \\ A^{v'} = 1 \Rightarrow B^{v'} = 1 \end{array} \\ 0 & o.w. \end{cases}$

(5) $(A \leftrightarrow B)^v = \begin{cases} 1 & \text{任何使得} vRv' \text{的} v' \in K, A^{v'} = B^{v'} \\ 0 & o.w. \end{cases}$

(6) $(\neg A)^v = \begin{cases} 1 & \text{任何使得} vRv' \text{的} v' \in K, A^{v'} = 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

对一阶语言 L 的构造性赋值：对于给定的（K，R）为一个 Kripke 结构，对于给定的 $v \in K$，关联一个论域 $D(v)$，论域之间满足如下关系：

(1) 如果 $v, v' \in K$, vRv', 则 $D(v) \subseteq D(v')$.

(2) $a^v, u^v \in D(v)$. 如果 $v, v' \in K$, vRv', 则 $a^v = a^{v'}, u^v = u^{v'}$.

(3) $P^v \subseteq D(v)^n$. 如果 $v, v' \in K$, vRv', 则 $P^v \subseteq P^{v'}$.

(4) $\equiv^v = \{(x,x) \mid x \in D(v)\} \subseteq D(v)^2$. 如果 $v, v' \in K$, vRv', 显然 $\equiv^v \subseteq \equiv^{v'}$.

(5) $f^v : D(v)^m \to D(v)$. 如果 $v, v' \in K$, vRv', 则 $f^v = f^{v'} \mid D(v)$.

项的赋值：

(1) $a^v, u^v \in D(v)$.

(2) $[f(t_1, \ldots\ldots, t_m)]^v = f^v(t_1^v, \ldots\ldots, t_m^v)$

定理 1. 对于给定的（K，R）。

（1） 如果 $v \in K, t \in Term(L)$. 则 $t^v \in D(v)$。

（2） 如果 $v, v' \in K, vRv'$. 则 $t^v = t^{v'}$。

公式的赋值计算：对于给定的（K，R）。

(1) $[F(t_1, \ldots\ldots, t_n)]^v = \begin{cases} 1 & (t_1^v, \ldots\ldots, t_m^v) \in F^v \\ 0 & o.w. \end{cases}$

(2) $[t_1 \equiv t_2)]^v = \begin{cases} 1 & t_1^v = t_2^v \\ 0 & o.w. \end{cases}$。

(3) $(A \wedge B)^v, (A \vee B)^v, (A \rightarrow B)^v, (A \leftrightarrow B)^v$ 的定义与命题公式中形式上一致。

(4) $[(\exists x)A(x)]^v = \begin{cases} 1 & \text{若存在} a \in \mathrm{D(v)}, [A(u)]^{v[u/a]} = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

(5) $[(\forall x)A(x)]^v = \begin{cases} 1 & \text{若对任意的} a \in \mathrm{D(v)}, [A(u)]^{v[u/a]} = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

其中，x 不在 A(u)中出现。

类似定义 C-可满足性、C-有效性、C 逻辑推理 $\Sigma \models_c A$。

可靠性定理：

（1）$\Sigma \mid -_c A \Rightarrow \Sigma \models_c A$。

（2） 如果 Σ 是 C-可满足，则 Σ 是 C-协调。

完备性定理：

（1）$\Sigma \models_c A \Rightarrow \Sigma \mid -_c A$。

（2） 如果 Σ 是 C-协调，则 Σ 是 C-可满足。

第八章　模态命题逻辑

模态概念：必然，可能。

（下一步必然……，以后必然……，　下一步可能……，以后可能……）

模态特征：多态性，不确定性描述。

模态命题真值：必然真，必然假，可能真，可能假。

算子：L，M。命题 A 真，公式 LA 真：命题 A 必然真。MA 可能真。

模态命题公式集 $Form(L^{pm})$ **的归纳定义：**

（1）　$Form(L^{p}) \subseteq Form(L^{pm})$

（2）　如果 $A \in Form(L^{pm})$，则 $LA \in Form(L^{pm})$。

定义： $MA = \neg L \neg A$。

模态辖域：引入模态算子前的（最近）公式。

一、 形式推理规则

（1）　保留 L^{p} 中 11 条规则。

（2）　$(L-)$: 若$\Sigma \mid - LA$, 则$\Sigma \mid - A$。

（3）　$\rightarrow_{-}(L)$: 若$\Sigma \mid - L(A \rightarrow B), \Sigma \mid - LA$, 则$\Sigma \mid - LB$。

（4）　$(L+)$: 若$\mid - A$, 则$\mid - LA$。

（5）　$(L+L)$: 若$\Sigma \mid - LA$, 则$\Sigma \mid - LLA$。

（6）　$(L+M)$: 若$\Sigma \mid - MA$, 则$\Sigma \mid - LMA$

二、 公理系统

（1）　$LA \rightarrow A$

（2）　$L(A \rightarrow B) \rightarrow (LA \rightarrow LB)$

（3）　$LA \rightarrow LLA$

（4）　$MA \rightarrow LMA$

三、 三个典的模态系统

公共推理规则：

(1) $(L+)$ $\dfrac{A}{LA}$ (2) (MP) $\dfrac{A, A\rightarrow B}{B}$

（1）T一系统（$\Sigma|-_T A$）

公理系统	新增加规则
$LA\rightarrow A$ $L(A\rightarrow B)\rightarrow(LA\rightarrow LB)$	$(L-)$：若$\Sigma|-LA$，则$\Sigma|-A$ $\rightarrow_{-}(L)$：若$\Sigma|-L(A\rightarrow B),\Sigma|-LA$，则$\Sigma|-LB$ $(L+)$：若$|-A$，则$|-LA$

（2）S_4-系统（$\Sigma|-_{S_4}A$）

公理系统	新增加规则
$LA\rightarrow A$ $L(A\rightarrow B)\rightarrow(LA\rightarrow LB)$	$(L-)$：若$\Sigma|-LA$，则$\Sigma|-A$ $\rightarrow_{-}(L)$：若$\Sigma|-L(A\rightarrow B),\Sigma|-LA$，则$\Sigma|-LB$ $(L+)$：若$|-A$，则$|-LA$
$LA\rightarrow LLA$	$(L+L)$：若$\Sigma|-LA$，则$\Sigma|-LLA$

（3）S_5-系统（$\Sigma|-_{S_5}A$）

公理系统	新增加规则
$LA\rightarrow A$ $L(A\rightarrow B)\rightarrow(LA\rightarrow LB)$	$(L-)$：若$\Sigma|-LA$，则$\Sigma|-A$ $\rightarrow_{-}(L)$：若$\Sigma|-L(A\rightarrow B),\Sigma|-LA$，则$\Sigma|-LB$ $(L+)$：若$|-A$，则$|-LA$
$MA\rightarrow LMA$	$(L+M)$：若$\Sigma|-MA$，则$\Sigma|-LMA$

定理 1　若 $A|-_T B$，则 $LA|-_T LB$。

证明：(1) $A|-_T B$ (假设)

(2) $|-_T A \to B$

(3) $|-_T L(A \to B)$　　L_+

(4) $LA|-_T L(A \to B)$

(5) $LA|-_T LA$

(6) $LA|-_T LB$　　$\to_-(L)$

定理 2　$LA|-|_T \neg M\neg A$。

证明：(1) $LA|-|_T \neg\neg LA$

(2) $\neg\neg LA|-|_T \neg\neg L\neg\neg A$

(3) $LA|-|_T \neg\neg L\neg\neg A$

(4) $\neg M\neg A|-|_T \neg\neg L\neg\neg A$

(5) $LA|-|_T \neg M\neg A$

定理 3　若 $A|-_T B$，则 $MA|-_T MB$。

证明：(1) $A|-_T B$

(2) $\neg B|-_T \neg A$

(3) $L\neg B|-_T L\neg A$　　（定理 1）

(4) $\neg L\neg A|-_T \neg L\neg B$

(5) $MA|-_T MB$

推论 4　若 $A|-|_T B$，则 $MA|-|_T MB$，$LA|-|_T LB$。

定理 5 （1） $LA \mid - \mid_{S_4} LLA$。

(2) $MA \mid - \mid_{S_4} MMA$。

证明：（1） $LA \mid - \mid_{S_4} LLA$

$LA \mid -_{S_4} LLA$ ($+L$

$LLA \mid -_{S_4} LA$ ($-L$)

(2) $MA \mid - \mid_{S_4} MMA$。

$MMA \mid - \mid_{S_4} \neg L \neg MA$

$\mid - \mid_{S_4} \neg L \neg\neg L \neg A$

$\mid - \mid_{S_4} \neg LL \neg A$

$\mid - \mid_{S_4} \neg L \neg A$ (1)

$\mid - \mid_{S_4} MA$

定理 6 $LA, MB \mid -_T M(A \wedge B)$。

证明：(1) $A, B \mid -_T A \wedge B$

(2) $A \mid -_T B \to (A \wedge B)$

(3) $LA \mid -_T L(B \to (A \wedge B))$

(4) $L(B \to (A \wedge B)) \mid -_T MB \to M(A \wedge B)$

(4.1) $B \to (A \wedge B)) \mid - \mid_T \neg(A \wedge B) \to \neg B$

(4.2) $L(B \to (A \wedge B)) \mid - \mid_T L(\neg(A \wedge B) \to \neg B)$

(4.3) $L(\neg(A \wedge B) \to \neg B) \mid -_T L(\neg(A \wedge B)) \to L \neg B$ $(\to_- (L))$

(4.4) $L(\neg(A \wedge B)) \to L \neg B \mid - \mid_T \neg L \neg B \to \neg L(\neg(A \wedge B))$

(4.5) $L(B \to (A \wedge B)) \mid -_T MB \to M(A \wedge B)$

(5) $LA \mid -_T MB \to M(A \wedge B)$ $(Tr,\ (3,4))$

(6) $LA, MB \mid -_T M(A \wedge B)$

模态命题语言 L^{pm} 的语义

模态赋值： 设 $K \neq \phi$ 为一个命题公式赋值集， $R \subseteq K \times K$ ， $\mathrm{S} = (K, R)$ 为一个 Kripke 结构。

$v \in K,\ v: Var(L^p) \to \{0,1\}$。在 v 下，模态命题公式的真值计算递归定义如下：

（1） $p \in Var(L^p),\ p^v \in \{0,1\}$

(2) $(\neg A)^v, (A * B)^v$ 定义与命题公式形式上一致。

(3) $(LA)^v = \begin{cases} 1 & (\forall v' \in K)\,(vRv' \to A^{v'} = 1) \\ 0 & o.w \end{cases}$

严格定义： 对于 Kripke 结构 $\mathrm{S} = (K, R)$， $R \subseteq K \times K$ 。 $v \in K$， $v: Var(L^p) \to \{0,1\}$。对于模态命题公式 A，递归定义 $\mathrm{S,v} \models A$。

（1） $p \in Var(L^p)$， $\begin{matrix} \mathrm{S,v} \models p: \text{如果} \mathrm{p}^v = 1 \\ \mathrm{S,v} \not\models p: \text{如果} \mathrm{p}^v = 0 \end{matrix}$ 。

（2） $\mathrm{S,v} \models \neg B$: 如果 $\mathrm{S,v} \not\models B$ 。

（3） $\mathrm{S,v} \models B \vee C$: 如果 $\mathrm{S,v} \models B$ 或 $\mathrm{S,v} \models \mathrm{C}$ 。

（4） $\mathrm{S,v} \models B \wedge C$: 如果 $\mathrm{S,v} \models B$ 且 $\mathrm{S,v} \models \mathrm{C}$ 。

（5） $\mathrm{S,v} \models B \to C$: 如果 $\mathrm{S,v} \models B$ 则有 $\mathrm{S,v} \models \mathrm{C}$ 。

（6） $\mathrm{S,v} \models B \leftrightarrow C$: 如果 $\mathrm{S,v} \models B$ 当且仅当 $\mathrm{S,v} \models \mathrm{C}$ 。

（7） $\mathrm{S,v} \models LB$: 如果任意的 $\mathrm{v'} \in \mathrm{K}$， $\mathrm{vRv'}$, 均有 $\mathrm{S,v'} \models B$ 。

模态赋值分类： **按** Kripke 结构 (K, R) 中二元关系的性质分类。

T-赋值： R 自反。

S_4 **－赋值：** R 自反、可传。

S_5 **－赋值：** R 自反、对称、可传。（等价关系）

可满足性定义： 设 $A \in Form(L^{mp})$ 。

T-可满足： 存在 Kripke 结构 $S = (K, R)$，R 自反，存在 $v \in K$， 使得 $A^v = 1$

（或 $S, v \models A$ ）。 简称**存在 T-赋值** $v \in K$**，使得** $A^v = 1$。

T-有效：对任何 Kripke 结构 (K,R)，R **自反**，对任意的 $v\in K$，有 $A^v=1$。

简称**存对任意的 T-赋值** $v\in K$**，有** $A^v=1$。

类似可以定义（ S_4-， S_5- **）可满足、有效。**

（ S_5-**赋值可满足性的等价定义）：**设 $K\neq\phi$，$R\subseteq K\times K$，R 等价。$v\in K,\ v:Var(L^p)\to\{0,1\}$。

$$(3')\quad (LA)^v=\begin{cases}1 & (\forall v'\in K)(A^{v'}=1)\\ 0 & o.w\end{cases}$$

逻辑推理分类：

（1） $\Sigma\models_T A$: 对任意的T-赋值 $v\in K$, 如果 $\Sigma^v=1$, 则 $A^v=1$

（2） $\Sigma\models_{S_4} A$: 对任意的 S_4-赋值 $v\in K$, 如果 $\Sigma^v=1$, 则 $A^v=1$ 。

（3） $\Sigma\models_{S_5} A$: 对任意的 S_5-赋值 $v\in K$, 如果 $\Sigma^v=1$, 则 $A^v=1$ 。

Σ是S_5－可满足$\Rightarrow\Sigma$是S_4－可满足$\Rightarrow\Sigma$是T－可满足

Σ是T－有效$\Rightarrow\Sigma$是S_4－有效$\Rightarrow\Sigma$是S_5－有效。

三个模态系统的可靠性

一、T－可靠性： $\Sigma \mid\!-_{\mathrm{T}} A \Rightarrow \Sigma \models_{\mathrm{T}} A$。

T 规则：（1） $(L-)$: 若$\Sigma \mid\!- LA$, 则$\Sigma \mid\!- A$

（2）$\rightarrow_{-}(L)$: 若$\Sigma \mid\!- L(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}), \Sigma \mid\!- L\mathrm{A}$，则$\Sigma \mid\!- \mathrm{LB}$

（3） $(L+)$: 若$\mid\!-\mathrm{A}$, 则$\mid\!- \mathrm{LA}$

定理 1. （T－可靠性定理）

（1） $\Sigma \mid\!-_{\mathrm{T}} A \Rightarrow \Sigma \models_{\mathrm{T}} A$。

（2） $\mid\!-_{\mathrm{T}} A \Rightarrow \models_{\mathrm{T}} A$。

证明： $\Sigma \mid\!-_{\mathrm{T}} A \Rightarrow \Sigma \models_{\mathrm{T}} A$. **对规则进行归纳（只讨论模态规则即可）。**

（1.1） $(L-)$: 若$\Sigma \mid\!-_{\mathrm{T}} LA$, 则$\Sigma \mid\!-_{\mathrm{T}} A$

由归纳假设：$\Sigma \models_{\mathrm{T}} LA$。现证$\Sigma \models_{\mathrm{T}} A$。

设 $K \neq \phi, R \subseteq K \times K$, R自反, $v \in K$, $\Sigma^{v}=1$。证 $A^{v}=1$。

由 $\Sigma^{v}=1$，有 $(LA)^{v}=1$，由自反性，$(v,v) \in R$, 所以, $\mathrm{A}^{v}=1$。

（1.2） $\rightarrow_{-}(L)$: 若$\Sigma \mid\!-_{\mathrm{T}} L(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}), \Sigma \mid\!-_{\mathrm{T}} L\mathrm{A}$，则$\Sigma \mid\!-_{\mathrm{T}} \mathrm{LB}$。

由归纳假设$\Sigma \models_{\mathrm{T}} L(A \rightarrow \mathrm{B}), \Sigma \models_{\mathrm{T}} LA$。现证$\Sigma \models_{\mathrm{T}} \mathrm{LB}$。

设 R自反, $v \in K$, $\Sigma^{v}=1$。证$(\mathrm{LB})^{v}=1$。由 $\Sigma^{v}=1$，有 $(L(A \rightarrow \mathrm{B}))^{v}=1$，$(LA)^{v}=1$，由自反性，$(v,v) \in R$, 有 $(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B})^{v}=1$, $\mathrm{A}^{v}=1$。所以，$\mathrm{B}^{v}=1$。

对任意 $(v,v') \in R$, 假定 $(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B})^{v'}=1$, $\mathrm{A}^{v'}=1$，则有 $\mathrm{B}^{v'}=1$。

所以，对任意$v' \in K$，如果 $(v,v') \in R$，有 $\mathrm{B}^{v'}=1$。从而，$(L\mathrm{B})^{v}=1$。

（1.3）$(L+)$: 若$\mid\!-_{\mathrm{T}} \mathrm{A}$, 则$\mid\!-_{\mathrm{T}} \mathrm{LA}$。显然。（因为 A 为 T-有效）。■

二、S_4一可靠性：$\Sigma \vdash_{S_4} A \Rightarrow \Sigma \models_{S_4} A$。

定理 2（S_4一可靠性定理） $\Sigma \vdash_{S_4} A \Rightarrow \Sigma \models_{S_4} A$。

证明：对规则进行归纳。只验证：$(L+\mathrm{L})$: 若$\Sigma \vdash LA$, 则$\Sigma \vdash LLA$。

由归纳假设$\Sigma \models_{S_4} LA$。现在证明$\Sigma \models_{S_4} LLA$。

设 R自反、可传，$v \in K$, $\Sigma^v = 1$。证$(\mathrm{LLA})^v = 1$。

由 $\Sigma^v = 1$，有$(LA)^v = 1$，则对于任意的 $v' \in K$，若 $(v, v') \in R$，则 $A^{v'} = 1$。（*）

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{LLA})^v = 1 &\Leftrightarrow (\forall v' \in K)[(v, v') \in R \to (\mathrm{LA})^{v'} = 1] \\
&\Leftrightarrow (\forall v', v'' \in K)[(v, v') \in R \wedge (v', v'') \in R \to \mathrm{A}^{v''} = 1]
\end{aligned}
$$

由可传性，$(v, v'') \in R$。从而，由（*）$A^{v''} = 1$。所以，$(LLA)^v = 1$。■

三、S_5一可靠性：$\Sigma \vdash_{S_5} A \Rightarrow \Sigma \models_{S_5} A$。

定理 3（S_5一可靠性定理） $\Sigma \vdash_{S_5} A \Rightarrow \Sigma \models_{S_5} A$。

证明：对规则进行归纳。只验证：$(L+\mathrm{M})$: 若$\Sigma \vdash MA$, 则$\Sigma \vdash LMA$。

由归纳假设$\Sigma \models_{S_5} MA$。现在证明$\Sigma \models_{S_5} LMA$。

设 R等价，$v \in K$, $\Sigma^v = 1$。证$(\mathrm{LMA})^v = 1$。

由 $\Sigma^v = 1$，有$(\mathrm{M}A)^v = 1$。

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{M}A)^v = 1 \Leftrightarrow (\neg \mathrm{L} \neg A)^v = 1 \Leftrightarrow (\mathrm{L} \neg A)^v = 0 \\
&\Leftrightarrow (\exists v' \in K)[(v, v') \in R \wedge ((\neg A)^{v'} = 0)] \\
&\Leftrightarrow (\exists v' \in K)[(v, v') \in R \wedge (A^{v'} = 1)]
\end{aligned}
$$

即，$(\mathrm{M}A)^v = 1 \Leftrightarrow (\exists v' \in K)[(v, v') \in R \wedge (A^{v'} = 1)]$。（*）

对任意的 $v'' \in K$，如果 $(v, v'') \in R$，证明$(\mathrm{M}A)^{v''} = 1$。

由对称性：$(v'', v) \in R$。由可传性及 $(v, v') \in R$：$(v'', v') \in R$。

由 $A^{v'} = 1 \Rightarrow (\neg A)^{v'} = 0 \Rightarrow (\mathrm{L} \neg A)^{v''} = 0 \Rightarrow (\neg \mathrm{L} \neg A)^{v''} = 1$。即，$(\mathrm{M}A)^{v''} = 1$。

所以，对任意的 $v'' \in K$，如果 $(v, v'') \in R$，$(\mathrm{M}A)^{v''} = 1$。从而，$(\mathrm{LM}A)^v = 1$。■

三个模态系统的完备性

证明其等价定理：

（1）T一完备性： Σ是T一协调⇒Σ是T一可满足。

（2） S_4 一完备性： Σ是S_4一协调⇒Σ是S_4一可满足。

（3） S_5 一完备性： Σ是S_5一协调⇒Σ是S_5一可满足。

一、T一完备性定理

Σ是T一协调⇒Σ是T一可满足。

己证结论： $LA, MB \mid\!-_T M(A \wedge B)$ 。

基本引理. 设 $B, C_1, ..., C_n \in Form(L^{mp})$ ， 若 $\{MB,\ L_1C,\ .\ .\ .\ .\ L_n($ 是 T-协调集， 则若 $\{B, C_1, ..., C_n\}$ 是 T-协调集。

证明：设$\{MB, LC_1, ..., LC_n\}$是 T-协调集。假定$\{B, C_1, ..., C_n\}$不是 T-协调集。则存在公式 C，使得： $B, C_1, ..., C_n \mid\!-_T C,\ B, C_1, ..., C_n \mid\!-_T \neg C$ 。从而

(1) $\mid\!-_T \neg(B \wedge C_1 \wedge ...... \wedge C_n)$ $(\neg+)$
(2) $\mid\!-_T L\neg(B \wedge C_1 \wedge ...... \wedge C_n)$ $(L+)$
(3) $\mid\!-_T \neg\neg L\neg(B \wedge C_1 \wedge ...... \wedge C_n)$
(4) $\mid\!-_T \neg M(B \wedge C_1 \wedge ...... \wedge C_n)$
(5) $L(C_1 \wedge ...... \wedge C_n), MB \mid\!-_T \neg M(B \wedge C_1 \wedge ...... \wedge C_n)$
(6) $L(C_1 \wedge ...... \wedge C_n), MB \mid\!-_T M(B \wedge C_1 \wedge ...... \wedge C_n)$ (已有结论)
(7) $L(C_1 \wedge ...... \wedge C_n) \mid\!-\!\mid_T L(C_1) \wedge ...... \wedge L(C_n)$
(8) $L(C_1), ..., L(C_n), MB \mid\!-_T \neg M(B \wedge C_1 \wedge ...... \wedge C_n)$
(9) $L(C_1), ..., L(C_n), MB \mid\!-_T M(B \wedge C_1 \wedge ...... \wedge C_n)$

所以，$\{MB, LC_1, ..., LC_n\}$不是 T-协调集。矛盾。■

构造一系列极大协调集：

设Σ是 T-协调集，$Form(L^{mp})=\{A_0,A_1,A_2,......\}$。按如下方法构造一个构大 T-极大协调集族$\Delta_T=\{\Sigma_0^*,\Sigma_1^*,\Sigma_2^*,......\}$。

第一步：仿命题逻辑中的极大协调集的构造。

$$\Sigma_{0,0}=\Sigma$$

$$\Sigma_{0,n+1}=\begin{cases}\Sigma_{0,n}\bigcup\{A_n\} & \Sigma_{0,n}\bigcup\{A_n\}\text{是}T-\text{协调集}\\ \Sigma_{0,n} & o.w.\end{cases}$$

$$\Sigma_0^*=\bigcup_{j\geq o}\Sigma_{0,j}$$

仿命题逻辑中的证明，$\Sigma_0^*=\bigcup_{j\geq o}\Sigma_{0,j}$是 T-极大协调集。

第二步：假定$\Sigma_0^*,\Sigma_1^*,......,\Sigma_i^*$已经构造。

（2.1）在Σ_i^*对**每一个形如 MB 的公式**（$MB\in\Sigma_i^*$），固定 B。

作公式集$\Sigma_{i+1}^B:=\{B\}\bigcup\{C\,|\,LC\in\Sigma_i^*\}$。

断言：Σ_{i+1}^B是 T-协调集.

如若不然，$\Sigma_{i+1}^B:=\{B\}\bigcup\{C\,|\,LC\in\Sigma_i^*\}$不是 T-协调，存在公式 D，使得：

$\Sigma_{i+1}^B\,|\!-_T D,\ \Sigma_{i+1}^B\,|\!-_T\neg D$。必有一个有限子集$\Sigma'\,|\!-_T D,\ \Sigma'\,|\!-_T\neg D$（不妨假设$B\in\Sigma'$，否则加入 B 即可)。反向构造$\Sigma_i^*$的一个有限子集$\{MB\}\bigcup\{LC|\ C\in\Sigma'\}$。

$\{MB\}\bigcup\{LC|\ C\in\Sigma'\}$必为 T-协调集。

由基本引理，$\{B\}\bigcup\{C|\ C\in\Sigma'\}=\Sigma'$是 T-协调集。矛盾。

$$\Sigma_{0,0}=\Sigma$$

$$\Sigma_{0,n+1}=\begin{cases}\Sigma_{0,n}\bigcup\{A_n\} & \Sigma_{0,n}\bigcup\{A_n\}\text{是}T-\text{协调集}\\ \Sigma_{0,n} & o.w.\end{cases}$$

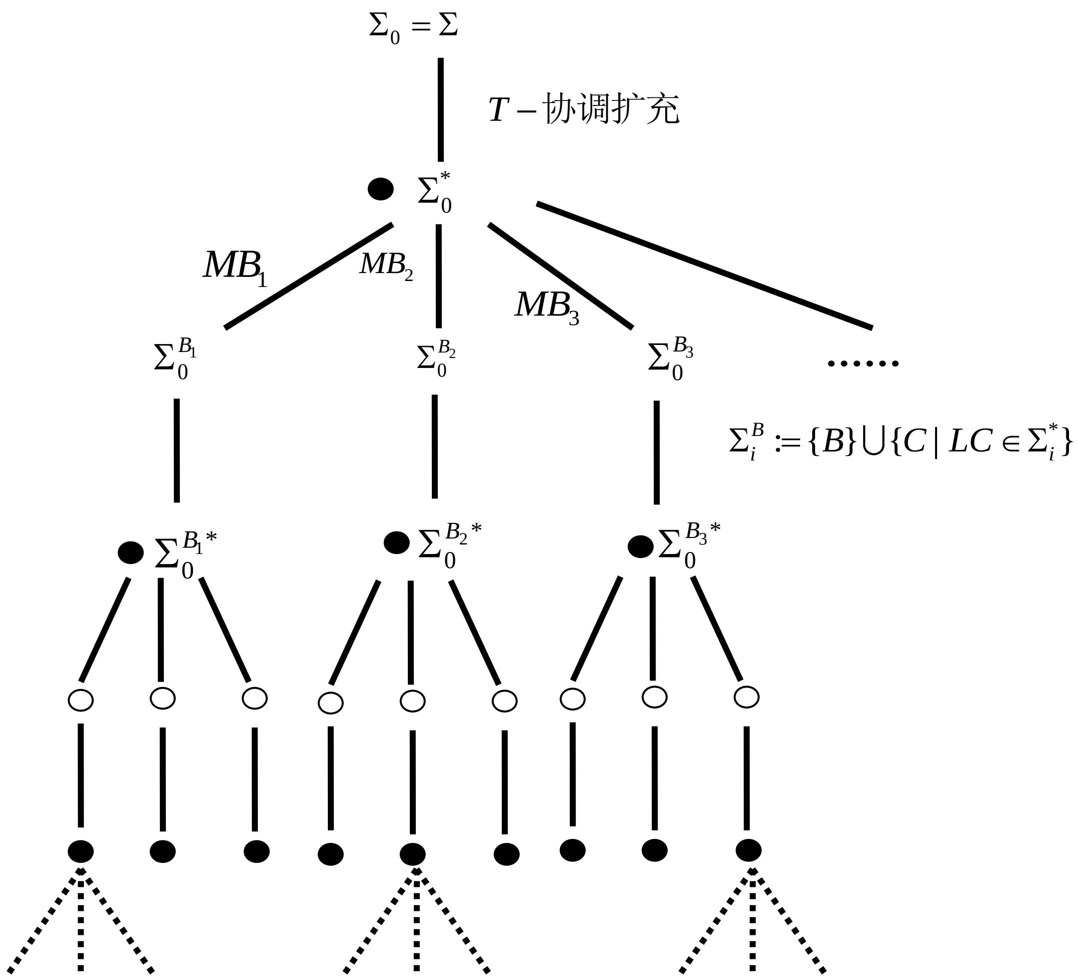
$$\Sigma_0^*=\bigcup_{j\geq o}\Sigma_{0,j}$$

（2.2） 将Σ_{i+1}^B按第一步中的方法，构造出一个 T-极大协集Σ_{i+1}^{B*}。

称这样的Σ_i^{B*}**为**Σ_i^***的从属集（简称**Σ_i^{B*}**从属于**Σ_i^*）。记为$\Sigma_i^*\ sub\Sigma_i^{B*}$。

第三步：最终生成$\Delta_T=\{\Sigma_0^*,\Sigma_1^*,......,\Sigma_i^*,......\}$。

生成过程可以用图表示：



性质：若 $\Sigma_i^*\ sub\ \Sigma_j^*$，则存在 $B\in\Sigma_j^*, MB\in\Sigma_i^*$。且对任一个 $LC\in\Sigma_i^*$，有 $C\in\Sigma_j^*$

第三步：最终生成 $\Delta_T=\{\Sigma_0^*,\Sigma_1^*,......,\Sigma_i^*,......\}$。

赋值构造：对每一个 $\Sigma_i^*\in\Delta_T$，定义一个赋值 $v_i: Atom(L^p)\to\{0,1\}$ 如下：

$$p^{v_i}=1\Leftrightarrow p\in\Sigma_i^*\text{。}$$

令 $K_T:=\{v_i:\Sigma_i^*\in\Delta_T\}$，定义 K_T 上一个二元关系 $R\subseteq K_T\times K_T$ 如下：

$$v_iRv_j:\Leftrightarrow\Sigma_i^*=\Sigma_j^*,\ or\ \Sigma_i^*\ sub\ \Sigma_j^*$$

注意关系：$\Sigma_i^*\ sub\ \Sigma_j^*:\Sigma_i^*\xrightarrow{MB}\Sigma_j^*$。

显然，R 具有自反性。

引理 1.1. 设 $\Sigma_i^*, \Sigma_j^* \in \Delta_T$，若 $\Sigma_i^* = \Sigma_j^*,\ or\ \Sigma_i^*\ sub\,\Sigma_j^*$。对于 $B \in Form(L^{mp})$，若 $LB \in \Sigma_i^*$，则 $B \in \Sigma_j^*$。

（此类似于一阶语言中的存在性质）

证明：（1） $\Sigma_i^*\ sub\,\Sigma_j^*$ 时，显然。

（2）当 $\Sigma_i^* = \Sigma_j^*$ 时，由于 $LB \mid\!-_T B\ (L-)$，有 $\mid\!-_T LB \to B$， $\Sigma_i^* \mid\!-_T LB \to B$。

由 Σ_i^* 极大协调， $LB \to B \in \Sigma_i^*$。再由 $LB \in \Sigma_i^*$，有 $B \in \Sigma_i^*$。故 $B \in \Sigma_j^*$。■

引理 1.2. 设 $A \in Form(L^{mp})$，则对任意的 $v_i \in K$，有 $A^{v_i} = 1 \Leftrightarrow A \in \Sigma_i^*$。

证明：对公式 A 的结构进行归纳。主要验证 $A = LB$ 的情形。

（1）设 $LB \in \Sigma_i^*$。证明 $(LB)^{v_i} = 1$。

对任何 $v_j, v_i R v_j$，有 $\Sigma_i^* = \Sigma_j^*,\ or\ \Sigma_i^*\ sub\,\Sigma_j^*$。由引理 1.1， $B \in \Sigma_j^*$.

由归纳假设， $B^{v_j} = 1$。所以， $(LB)^{v_i} = 1$。

（2） 设 $(LB)^{v_i} = 1$。证明 $LB \in \Sigma_i^*$。

由 $(LB)^{v_i} = 1$，则对任何 $v_j, v_i R v_j$， $B^{v_j} = 1$。由归纳假设， $B \in \Sigma_j^*$。

下面证明 $LB \in \Sigma_i^*$。若 $LB \notin \Sigma_i^*$。由 Σ_i^* 极大协调， $\neg LB \in \Sigma_i^*$。

$$
\begin{aligned}
\Sigma_i^* &\mid\!-_T \neg LB \\
\neg LB &\mid\!-_T \neg L \neg\neg B \\
&\mid\!-_T \neg LB \to M \neg B \\
\Sigma_i^* &\mid\!-_T \neg LB \to M \neg B \\
\Sigma_i^* &\mid\!-_T M \neg B
\end{aligned}
$$

从而， $M\neg B \in \Sigma_i^*$。由此，可以构造一个 $\Sigma_j^* = \Sigma_i^{\neg B *}$，并且 $\neg B \in \Sigma_j^*$， $\Sigma_i^*\ sub\,\Sigma_j^*$。

由 $v_i R v_j$ 及 $(LB)^{v_i} = 1$， $B^{v_j} = 1$；由 $\neg B \in \Sigma_j^*$， $B^{v_j} = 0$。矛盾。■

由基本引理，引理 1.1，引理 1.2。我们有：

定理 1. （**T-完备性定理**）设 Σ 是 T-协调集，则 Σ 是 T-可满足集。

二、S_4一完备性定理

Σ是S_4一协调⇒Σ是S_4一可满足。

仿 Δ_T, K_T，构造 S_4一极大协调集族 $\Delta_{S_4}=\{\Sigma_0^*,\Sigma_1^*,......,\Sigma_i^*,......\}$，以及命题变元赋值集 $K_{S_4}=\{v_0,v_1,......,v_i,......\}$。

归纳定义从属可达：$\Sigma_i^* sub_n\ \Sigma_j^*\ \ (n\ge 1)$。

$\Sigma_i^*\ sub_1\ \Sigma_j^* :\Leftrightarrow \Sigma_i^*\ sub\ \Sigma_j^*$

$\Sigma_i^*\ sub_{n+1}\ \Sigma_j^* :\Leftrightarrow$ 存在 $\Sigma_r^*\in\Delta_{S_4}, \Sigma_i^*\ sub_n\ \Sigma_r^*, \Sigma_r^*\ sub_1\ \Sigma_j^*$

定义 K_{S_4} 上一个二元关系 $R\subseteq K_{S_4}\times K_{S_4}$ 如下：

$$v_i R v_j :\Leftrightarrow \Sigma_i^*=\Sigma_j^*,\ or\ \ (\exists n\ge 1)\Sigma_i^*\ sub_n\ \Sigma_j^*$$

则 R 具有自反性和可传性。

引理 2.1. 设 $\Sigma_i^*,\Sigma_j^*\in\Delta_{S_4}$，若 $\Sigma_i^*=\Sigma_j^*,\ or\ \ (\exists n\ge 1)\Sigma_i^*\ sub_n\ \Sigma_j^*$。对于 $B\in Form(L^{mp})$，若 $LB\in\Sigma_i^*$，则 $B\in\Sigma_j^*$。（对应引理 1.1）

证明：（1）$\Sigma_i^*=\Sigma_j^*$ 时，（由引理 1.1 的证明，因为 $\Sigma\mid-_T A\Rightarrow\Sigma\mid-_{S_4}A$）。

（2）当 $(\exists n\ge 1)\Sigma_i^*\ sub_n\ \Sigma_j^*$ 时，对 进行归纳。

n=1 时，由引理 1.1 的证明。

$n=k+1$ 时，存在 $\Sigma_r^*\in\Delta_{S_4},\Sigma_i^*\ sub_k\ \Sigma_r^*,\Sigma_r^*\ sub_1\ \Sigma_j^*$。

$$LB\mid-_{S_4}LLB\qquad (L+L)$$
$$\mid-_{S_4}LB\to LLB$$
$$\Sigma_i^*\mid-_{S_4}LB\to LLB$$

由 Σ_i^* 极大协调，$LB\to LLB\in\Sigma_i^*$。再由 $LB\in\Sigma_i^*$，有 $LLB\in\Sigma_i^*$。

由归纳假设，$LB\in\Sigma_r^*$，由 $\Sigma_r^*\ sub_1\ \Sigma_j^*$ 及归纳基 $B\in\Sigma_j^*$。■

引理 2.2. 设 $A\in Form(L^{mp})$，则对任意的 $v_i\in K_{S_4}$，有 $A^{v_i}=1\Leftrightarrow A\in\Sigma_i^*$。

证明：对公式 A 的结构进行归纳。主要验证 $A=LB$ 的情形。

（1）设 $LB\in\Sigma_i^*$。证明 $(LB)^{v_i}=1$。

对任何 v_j, v_iRv_j，有 $\Sigma_i^*=\Sigma_j^*,\ or\ \ (\exists n\ge 1)\Sigma_i^*\ sub_n\ \Sigma_j^*$。由引理 2.1，$B\in\Sigma_j^*$.

由归纳假设，$B^{v_j}=1$。所以，$(LB)^{v_i}=1$。

（2） 设 $(LB)^{v_i}=1$。证明 $LB\in\Sigma_i^*$。

由 $(LB)^{v_i}=1$，则对任何 v_j, v_iRv_j， $B^{v_j}=1$。由归纳假设，$B\in\Sigma_j^*$。

下面证明 $LB\in\Sigma_i^*$。若 $LB\notin\Sigma_i^*$。由 Σ_i^* 极大协调，$\neg LB\in\Sigma_i^*$。

$$
\begin{aligned}
\Sigma_i^* &\mid-_{S_4}\neg LB\\
\neg LB &\mid-_{S_4}\neg L\neg\neg B\\
&\mid-_{S_4}\neg LB\to M\neg B\\
\Sigma_i^* &\mid-_{S_4}\neg LB\to M\neg B\\
\Sigma_i^* &\mid-_{S_4}M\neg B
\end{aligned}
$$

从而，$M\neg B\in\Sigma_i^*$。由此，可以构造一个 $\Sigma_{j'}^*=\Sigma_i^{\neg B*}$，并且 $\neg B\in\Sigma_{j'}^*$，$\Sigma_i^*\ sub_1\ \Sigma_{j'}^*$。

由 $v_iRv_{j'}$ 及 $(LB)^{v_i}=1$，$B^{v_{j'}}=1$；由 $\neg B\in\Sigma_{j'}^*$，$B^{v_{j'}}=0$。矛盾。■

由基本引理，引理 2.1，引理 2.2。我们有：

定理 2. （S_4 – **完备性定理**）设 Σ 是 S_4 – 协调集，则 Σ 是 S_4 – 可满足集。

三、S_5 一完备性定理

Σ是S_5一协调$\Rightarrow\Sigma$是S_5一可满足。

仿 Δ_T, K_T，构造 S_5一极大协调集族 $\Delta_{S_5}=\{\Sigma_0^*,\Sigma_1^*,......,\Sigma_i^*,......\}$，以及命题变元赋值集 $K_{S_5}=\{v_0,v_1,......,v_i,......\}$。

定义 K_{S_5} 上一个二元关系 $R\subseteq K_{S_5}\times K_{S_5}$ 如下：

$$v_iRv_j :\Leftrightarrow \Sigma_i^*=\Sigma_j^*,\ or\ (\exists n\geq 1)\Sigma_i^*\ sub_n\ \Sigma_j^*,\ or\ \Sigma_j^*\ sub\ \Sigma_i^*$$

则 R **具有自反，可传性，对称性。**

引理 3.1. 设 $\Sigma_i^*,\Sigma_j^*\in\Delta_{S_5}$，若 $\Sigma_i^*=\Sigma_j^*$，$or\ (\exists n\geq 1)\Sigma_i^*\ sub_n\ \Sigma_j^*,\ or\ \Sigma_j^*\ sub\ \Sigma_i^*$。对于 $B\in Form(L^{mp})$，若 $LB\in\Sigma_i^*$，则 $B\in\Sigma_j^*$。（对应引理 1.1）

证明：（1） $\Sigma_i^*=\Sigma_j^*$，$(\exists n\geq 1)\Sigma_i^*\ sub_n\ \Sigma_j^*$ 时，（类似引理 2.1 的证明 $\Sigma\mid-_T A\Rightarrow\Sigma\mid-_{S_5}A$）。

（2）当 $\Sigma_j^*\ sub_1\ \Sigma_i^*$ 时，设 $B\notin\Sigma_j^*$。由 Σ_j^* 极大协调，$\neg B\in\Sigma_j^*$。

$$\neg B \mid -_{S_5} LM\neg B \qquad (L+M)$$

$$\neg B \mid -_{S_5} L\neg L\neg\neg B$$

$$\neg B \mid -_{S_5} L\neg LB$$

$$\mid -_{S_5} \neg B \rightarrow L\neg LB$$

$$\Sigma_i^* \mid -_{S_5} \neg B \rightarrow L\neg LB$$

$$\Sigma_i^* \mid -_{S_5} L\neg LB$$

由 Σ_j^* 极大协调，$L\neg LB \in \Sigma_j^*$。由 $\Sigma_j^*\ sub_1\ \Sigma_i^*$，$\neg LB \in \Sigma_i^*$。

再由假设，$LB \in \Sigma_i^*$。Σ_i^* 不协调。■

引理 3.2. 设 $A \in Form(L^{mp})$，则对任意的 $v_i \in K_{S_5}$，有 $A^{v_i}=1 \Leftrightarrow A \in \Sigma_i^*$。

证明：对公式 A 的结构进行归纳。主要验证 $A = LB$ 的情形。

（1）设 $LB \in \Sigma_i^*$。证明 $(LB)^{v_i}=1$。

对任何 v_j, v_iRv_j，有 $\Sigma_i^*=\Sigma_j^*$，$\sigma\ (n\exists\ni 1\ \Sigma b_i^*\ \Sigma p_j^*\ b\Sigma_j^*\ \Sigma_i^*$ 。由引理 3.1，$B \in \Sigma_j^*$.

由归纳假设，$B^{v_j}=1$。所以，$(LB)^{v_i}=1$。

（2） 设 $(LB)^{v_i}=1$。证明 $LB \in \Sigma_i^*$。

证明过程与引理 2.2 类似。■

由基本引理，引理 3.1，引理 3.2。我们有：

定理 2. （S_5 **－完备性定理**）设 Σ 是 S_5－协调集，则 Σ 是 S_5－可满足集。

其它模态系统：

公理列表

记号	公理模式
k	$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$
t	$\Box p \to p$
d	$\Box p \to \Diamond q$
4	$\Box p \to \Box\Box p$
5	$\neg\Box\neg\Box p \to \Box p$
b	$\neg\Box\neg\Box p \to p$
w_5	$\neg\Box\neg\Box p \to (p \to \Box p)$
f	$(p \wedge \Diamond\Box q) \to \Box(\Diamond p \vee q)$

公理系统表

公理系统	公理系统	关系性质
N	ϕ	无限限制
t	t	自反，可达
K	k	
T	k,t	自反
S_4	$k,t,4$	自反，可传
S_5	$k,t,4,5$	自反，可传，对称
S_{4f}	$k,t,4,f$	
S_{w5}	$k,t,4,w_5$	
$kd45$	$k,d,4,5$	