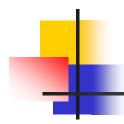
§ 2.6自然演绎推理系统(ND)

自然演绎推理系统是基于多规则少公理的推理系统,它采用了5种逻辑联结词一,人,〉,,一,〈 因此比较符合人的逻辑推理思维习惯,与PC相比是一个更加实用的逻辑推理系统。



1. 公理:ND仅采用一个公理模式:

$$\Gamma;A \mid -A$$

(相当于肯定前提的规则)

2. 推理规则: ND的推理规则主要是围绕 5个联结词展开的, 共7对14个推理规则.

1) 假设引入规则:

$$\frac{\Gamma | -B}{\Gamma; A | -B}$$

2) 假设消除规则:

$$\frac{\Gamma; A - B, \quad \Gamma; A - B}{\Gamma - B}$$

3) \/引入规则:

$$\frac{\Gamma | -A}{\Gamma | -A \vee B}$$

$$\frac{\Gamma | -A}{\Gamma | -B \vee A}$$

4) \/消除规则:

$$\frac{\Gamma; A \middle| -C, \Gamma; B \middle| -C, \Gamma \middle| -A \lor B}{\Gamma \middle| -C}$$

5) 人引入规则:

$$\frac{\Gamma|-A, \quad \Gamma|-B}{\Gamma|-A \wedge B}$$

6) / 消除规则:

$$\frac{\Gamma | -A \wedge B}{\Gamma | -A} \qquad \frac{\Gamma | -A \wedge B}{\Gamma | -B}$$

7)
$$\rightarrow$$
引入规则: $\Gamma; A | -B$
$$\Gamma | -A \rightarrow B$$
 (即PC中的演绎定理)

8)→消除规则:

$$\begin{array}{c|c}
\Gamma \mid -A, & \Gamma \mid -A \rightarrow B \\
\hline
\Gamma \mid -B \\
(即PC中的分离规则)
\end{array}$$

9) 引入规则:

$$\frac{\Gamma; A \middle| -B, \quad \Gamma; A \middle| -\neg B}{\Gamma \middle| -\neg A}$$
 (即反证法)

10) 7 消除规则:

$$\frac{\Gamma|-A, \quad \Gamma|-A}{\Gamma|-B} \quad (即不一致)$$

11) ¬¬引入规则:

12) ¬ ¬ 消除规则:

13) ← 引入规则:

$$\frac{\Gamma | -A \to B, \quad \Gamma | -B \to A}{\Gamma | -A \longleftrightarrow B}$$

14) ← 消除规则:

$$\frac{\Gamma | -A \longleftrightarrow B}{\Gamma | -A \longleftrightarrow B} \qquad \frac{\Gamma | -A \longleftrightarrow B}{\Gamma | -B \to A}$$

3. ND的定理

定义1 演绎结果: 在ND中,若有 Γ - $_{ND}$ A即存在序列: $\Gamma_1 | -A_1, \dots, \Gamma_m | -A_m (A_m = A)$

使得 Γ_i -ND A_i $(1 \le i \le m)$ 或为公理,或为 Γ_j $-A_j$ (j < i)

或是对 Γ_{j_1} $-A_{j_1}$,…, Γ_{j_k} $-A_{j_k}$ $(j_1, \dots j_k < i)$ 使用推理规则导出。

ND定理: 若 $\Gamma = \phi$ 即 $|-_{ND} A$ 则称A为ND定理

定理1
$$|-A\lor\neg A|$$

定理2 $|-\neg(A\lor B)\leftrightarrow\neg A\land\neg B|$
定理3 $|-\neg(A\land B)\leftrightarrow\neg A\lor\neg B|$
定理4 $\neg A\to B\mid A\lor B$
定理5 $A\to B\mid -A\lor B$
定理6 $|-(A\land (B\lor C))\leftrightarrow ((A\land B)\lor (A\land C))|$

定理7证明PC的公理均为ND的定理,即有:

$$1) \mid -_{ND} A \to (B \to A)$$

$$2) \mid -_{ND} (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

3)
$$|-_{ND}(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$