

数理逻辑习题作业参考答案 2016

第 2 章

2.

解:此题可以直接根据逻辑蕴涵和逻辑等价的定义用真值表来验证(真值表的方法请大家自己尝试一下吧),另外也可以根据逻辑蕴涵与逻辑等价的判定定理来做,对于逻辑等价还可以通过替换原理即等价变换来验证,但此方法一般适用逻辑等价成立时。

1) $A \Rightarrow B \rightarrow A$

根据定理只需验证 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 为永真式即可。

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee A) \Leftrightarrow (\neg A \vee A) \vee \neg B \Leftrightarrow T$$

2) $\neg A \rightarrow \neg B \Leftrightarrow B \rightarrow A$

只需验证 $(\neg A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \rightarrow A)$ 为永真式即可。

$$(\neg A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\Leftrightarrow [(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \wedge [(B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)]$$

$$\Leftrightarrow [\neg(A \vee \neg B) \vee (\neg B \vee A)] \wedge [\neg(\neg B \vee A) \vee (A \vee \neg B)]$$

$$\Leftrightarrow [(\neg A \wedge B) \vee (\neg B \vee A)] \wedge [(B \wedge \neg A) \vee (A \vee \neg B)]$$

$$\Leftrightarrow [\neg A \vee (\neg B \vee A)] \wedge [B \vee (\neg B \vee A)] \wedge$$

$$[(B \vee (A \vee \neg B))] \wedge [\neg A \vee (A \vee \neg B)] \Leftrightarrow T$$

3) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$

同上述 1) 题方法

4) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow A \wedge B \rightarrow C$

运用等价变换的方法:

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C$$

$$\Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow A \wedge B \rightarrow C$$

5) $(A \vee B) \rightarrow C \Leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

大家可以尝试用 4) 题方法验证。

$$6) \neg A \vee B, A \rightarrow (B \wedge C), D \rightarrow B \Rightarrow \neg B \rightarrow C$$

对于形如 $\Gamma \Rightarrow B$ 这样的逻辑蕴涵的判定，其中 Γ 为公式集，即 $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ ，即 $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$ 的判定，可以直接用定义来做，具体可参见教材的示例，但请注意，通常在寻求前提为真的指派的过程中，有时候可以进行优化，不需要遍历所有的真值指派，比如课堂所介绍的优化方法。例如此题就不需要遍历所有 2^4 个真值指派，因为蕴涵结果 “ $\neg B \rightarrow C$ ” 只有一种情况为假，即 B 为 F ， C 为 F ，则接下来寻找前提 Γ 中是否有为真的指派：当 A 为 F ， B 为 F ， C 为 F ， D 为 F 即使得 Γ 中每个公式均为真，但此时结论 $\neg B \rightarrow C$ 为假，故逻辑蕴涵不成立。

3.

范式求解较简单，略。