第 21卷第 2期 (总第 116期)　系 统 工 程　Vol. 21, No. 2
2003年 3月　Systems Engineering　Mar., 2003

文章编号: 1001-4098(2003) 02-0116-04

# 最小偏差的指标赋权方法研究与应用*

任 全,李为民

(空军工程大学 导弹学院,陕西 三原 713800)

摘 要: 提出一种用于多属性决策中的最小偏差指标赋权方法,该方法将主观和客观两类权重信息相结合,既充分利用了客观信息,又尽可能地满足了决策者的主观意愿,达到两者的统一,具有思路清晰、易于求解和计算机实现等特点。最后通过具体的应用案例验证了该方法的可行性和有效性。

关键词: 最小偏差;指标赋权法;离差最大化法

中图分类号: O223　　文献标识码: A

多属性决策是现代决策的一个重要组成部分,在工程设计、经济、管理和军事等诸多领域中具有广泛的理论和实际应用背景。其中,对给定的备选决策方案进行排序或择优,是多属性决策的一个重要过程。在多属性决策的过程中,权重的确定方法有主观法和客观法两大类。主观法是由决策分析者对各属性的主观重视程度而进行赋权的方法,主要有 Delphi法、层次分析法[1]等,它体现了决策者的意向,但同时也具有较大的主观随意性。客观法是指单纯利用属性的客观信息而确定权重的方法,主要有熵权信息法[2]、变异系数法[3]、离差最大化法[4]等。客观法虽然具有较强的数学理论依据,但没有考虑到决策者的主观意愿,且有时得出的结果会与各属性的实际重要程度相悖,难以给出明确的解释。文献 [5]给出了一种结合主、客观权重信息的线性目标规划组合赋权方法,本文则从偏差最小的角度出发,对文献 [5]进行了改进,提出了一种最小偏差指标赋权方法,并给出了具体应用案例验证了该方法的可行性和有效性。

## 1 多属性决策的最小偏差指标赋权方法

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为多属性决策问题的方案集,$I=\{I_1,I_2,\cdots,I_m\}$为属性集。对于方案 $x_j\in X$,按第 $i$个属性 $I_i$进行测度,得到 $x_j$ 关于 $I_i$ 的属性值 $a_{ij}$,从而构成决策矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. 为了消除不同物理量纲对决策结果的影响,决策时还需要对决策矩阵进行规范化处理,常见的属性类型有效益型、成本型、固定型、区间型、偏离型、区间偏离型等[6]。假设决策矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$经规范化处理后,得到规范化矩阵 $R=(r_{ij})_{m\times n}$. $w=\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}^T$为属性的权重向量,其中 $w_i>0,\sum_{i=1}^{m}w_i=1$. 令 $M=\{1,2,\cdots,m\}$,$N=\{1,2,\cdots,n\}$. 方案 $x_j$ 的综合属性值与属性权重的关系为

$$z_j=\sum_{i=1}^{m}r_{ij}w_i,\quad j\in N \tag{1}$$

其中,$w_i$是第 $i$个属性 $I_i$ 的权重。

通常,确定属性权重的方法主要有主观法和客观法两大类。对于某一多属性决策问题,设决策者运用了 $l$种主观法和 $q-l$种客观法对属性进行赋权,并分别给出了下列属性权重向量:

$$u_k=(u_{k1},u_{k2},\cdots,u_{km})^T,\quad k=1,2,\cdots,l \tag{2}$$

$$v_k=(v_{k1},v_{k2},\cdots,v_{km})^T,\quad k=l+1,l+2,\cdots,q \tag{3}$$

* 收稿日期: 2002-11-18
基金项目: 高等学校骨干教师资助计划项目(GG-1105-90039-1004)
作者简介: 任全(1977-),男,山西大同人,空军工程大学,博士研究生,研究方向: 系统工程,运筹学,决策分析; 李为民(1964-),男,甘肃民勤人,空军工程大学,教授,博士生导师,研究方向: 军事运筹学,防空(天)反导作战运筹分析。

其中,(2)式为 $l$种主观赋权法所给出的属性权重向量,(3)式为 $q-l$种客观赋权法所给出的属性权重向量。为了既照顾到决策者的主观偏好,又做到决策的客观真实性,达到主观与客观的统一,合理的属性权重向量 $w=\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}^T$的获取,应使其相应的决策与主、客观赋权下的决策结果的总偏差最小,为此引入偏差函数:

$$f_j(u_k)=\sum_{i=1}^{m}[r_{ij}(w_i-u_{ki})]^2,\quad k=1,2,\cdots,l;\ i\in M;\ j\in N \tag{4}$$

$$g_j(v_k)=\sum_{i=1}^{m}[r_{ij}(w_i-v_{ki})]^2,\quad k=l+1,l+2,\cdots,q;\ i\in M;\ j\in N \tag{5}$$

并构造如下单目标优化模型:

$$\begin{aligned}&\min J=\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\lambda_k f_j(u_k)+\sum_{k=l+1}^{q}\sum_{j=1}^{n}\lambda_k g_j(v_k)\\&\text{s. t.}\sum_{i=1}^{m}w_i=1,\ w_i>0,\ i\in M\end{aligned} \tag{6}$$

其中,$\lambda_k(k=1,2,\cdots,q)$表示 $l$个主观赋权法与 $q-l$个客观赋权法的给定权系数,作归一化处理$\sum_{k=1}^{q}\lambda_k=1$

定理　$\forall\, 1\leqslant i\leqslant m$,当 $(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{in})\neq(0,0,\cdots,0)$时,优化模型(6)有唯一解,其解为

$$w=\left(\frac{\frac{1}{T_1}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{T_i}(U_1-U_i)}{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{T_i}},\frac{\frac{1}{T_2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{T_i}(U_2-U_i)}{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{T_i}},\cdots,\frac{\frac{1}{T_m}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{T_i}(U_m-U_i)}{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{T_i}}\right)^T \tag{7}$$

式中,$T_i=\sum_{j=1}^{n}r_{ij}^2$,$U_i=T_i\left(\sum_{k=1}^{l}\lambda_k u_{ki}+\sum_{k=l+1}^{q}\lambda_k v_{ki}\right)$,$i\in M$.

证明　构造 Lagrange函数

$$L(w,\lambda)=\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_k[r_{ij}(w_i-u_{ki})]^2+\sum_{k=l+1}^{q}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_k[r_{ij}(w_i-v_{ki})]^2-2\lambda\left(\sum_{i=1}^{m}w_i-1\right)$$

根据极值存在的必要条件,有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial w_i}=\sum_{k=1}^{l}2\lambda_k(w_i-u_{ki})\sum_{j=1}^{n}r_{2ij}+\sum_{k=l+1}^{q}2\lambda_k(w_i-v_{ki})\sum_{j=1}^{n}r_{ij}^2-2\lambda=0,\quad i\in M\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{m}w_i-1=0\end{cases} \tag{8}$$

由$\sum_{k=1}^{q}\lambda_k=1$,且令 $T_i=\sum_{j=1}^{n}r_{ij}^2$,$U_i=T_i\left(\sum_{k=1}^{l}\lambda_k u_{ki}+\sum_{k=l+1}^{q}\lambda_k v_{ki}\right)$,$i\in M$,则 $m+1$阶线性方程组化简为

$$\begin{cases}T_i w_i-\lambda=U_i,\quad i\in M\\\sum_{i=1}^{m}w_i=1\end{cases}$$

当$(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{in})\neq(0,0,\cdots,0)$时有 $T_i>0(i\in M)$,从而线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}T_1&0&\cdots&0&-1\\0&T_2&\cdots&0&-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&T_m&-1\\1&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=T_1T_2\cdots T_m\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{T_i}$$

故线性方程组(8)有唯一解。

通过克莱姆法则即可求得方程组的解为 $w_j=\dfrac{\frac{1}{T_j}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{T_i}(U_j-U_i)}{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{T_i}}$,$j\in M$,从而定理得证。

最后给出各方案的综合属性值为

$$(z_1,z_2,\cdots,z_n)^T=R^T\times w \tag{9}$$

## 2 应用案例

某区域防空系统的远程预警雷达发现有 6批敌空袭目标分别向我方三个重点保卫要地进行突袭,取各空袭目标的五个参数作为威胁程度排序的衡量指标[7]。6批敌空袭目标的各参数如表 1所示。(设 $x_i$ 为第 $i$批, $i=1,2,\cdots,6$)

表 1 各批次敌空袭目标的属性值

| 批次 / 属性 | 第一批 $x_1$ | 第二批 $x_2$ | 第三批 $x_3$ | 第四批 $x_4$ | 第五批 $x_5$ | 第六批 $x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 飞临时间(s) | 50 | 60 | 120 | 65 | 100 | 55 |
| 航路捷径(km) | 7 | 12 | 10 | 8 | 3 | 4 |
| 飞行高度(km) | 6 | 6 | 4 | 7 | 3 | 7 |
| 飞行目标类型 | 5.5 | 6 | 8 | 5.5 | 3 | 4 |
| 保卫要地等级 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |

由表 1中的数据建立决策矩阵 $A=(a_{ij})_{5\times 6}$,经规范化处理后得到规范化矩阵 $R=(r_{ij})_{5\times 6}$. 规范化方法可按照如下公式进行:

$$r_{ij}=\frac{a_{ij}}{a_j^{\max}},\quad j\in N;\ i\in T_1$$

$$r_{ij}=\frac{a_j^{\min}}{a_{ij}},\quad j\in N;\ i\in T_2$$

$T_1$为效益型

$T_2$为成本型

矩阵 $A=(a_{ij})_{5\times 6}$和矩阵 $R=(r_{ij})_{5\times 6}$分别如下所示:

$$A=\begin{bmatrix} 50 & 60 & 120 & 65 & 100 & 55 \\ 7 & 12 & 10 & 8 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 & 3 & 7 \\ 5.5 & 6 & 8 & 5.5 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} 1.000 & 0.833 & 0.417 & 0.769 & 0.500 & 0.909 \\ 0.429 & 0.250 & 0.300 & 0.375 & 1 & 0.750 \\ 0.500 & 0.500 & 0.750 & 0.429 & 1 & 0.429 \\ 0.546 & 0.500 & 0.375 & 0.546 & 1 & 0.750 \\ 0.333 & 0.333 & 0.666 & 0.666 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1)用离差最大化法(客观赋权法)求取权向量

离差最大化法的基本思想基于加权向量 $W$ 的选择应使所有评价指标对所有决策方案之总离差最大。满足模型:

$$\max F(W)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|r_{ij}-r_{kj}|W_j$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{m}W_j^2=1$$

求解得:

$$W_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|r_{ij} - r_{kj}|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|r_{ij} - r_{kj}|\right]^2}}, \quad j = 1,2,\cdots,m$$

由于 $W^*$ 为单位化加权向量,故对其进行归一化处理得:

$$v_j = \overline{W}_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|r_{ij} - r_{kj}|}{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|r_{ij} - r_{kj}|}, \quad j = 1,2,\cdots,m$$

$v = (v_1, v_2, \cdots, v_m\}^T$ 即为属性的权重向量。

求得权重向量为 $v = (0.19,\ 0.23,\ 0.17,\ 0.17,\ 0.24)^T$.

(2)用层次分析法(主观赋权法)求取权向量

决策者(专家)通过对到达飞临时间、航路捷径、飞行高度、目标类型、保卫要地等级五个属性进行两两比较,用层次分析法求得的五个属性的威胁权系数为

$$u = (0.25, 0.23, 0.06, 0.24, 0.22)^T$$

考虑到防空系统偏重于强调主观判断,故选择 $\lambda_u > \lambda_v$,分别取 $\lambda_v = 0.3$ 和 $\lambda_u = 0.7$,将向量 $u$、$v$、$\lambda_u$、$\lambda_v$ 代入公式(7),即可求得属性权重向量

$$w = (0.23, 0.23, 0.09, 0.22, 0.23)^T$$

按照公式(9)求得各批次的威胁程度值为

$$z = (0.570, 0.481, 0.468, 0.575, 0.885, 0.815)^T$$

相应的威胁程度排序依次为 $x_5, x_6, x_4, x_1, x_2, x_3$. 此排序结果与实际战例检验相符合。

## 参考文献:


[1] 赵焕臣,许树柏,和金生.层次分析法[M].北京:科学出版社,1986.

[2] 郭显光.多指标综合评价中权数的确定[J].数量经济技术研究,1989,6(11):49~53.

[3] 胡永宏,贺思辉.综合评价方法[M].北京:科学出版社,2000.

[4] 王应明.运用离差最大化方法进行多指标决策与排序[J].系统工程与电子技术,1998,20(7):24~26.

[5] 徐泽水,达庆利.多属性决策得组合赋权方法研究[J].中国管理科学,2002,10(2):84~87.

[6] 刘树林,邱菀华.多属性决策基础理论研究[J].系统工程理论与实践,1998,18(1):38~43.

[7] 刘健,王献锋,聂成.空袭目标威胁程度评估与排序[J].系统工程理论与实践,2001,21(2):142~144.


# Study and Application on The Index Weighting Method of Minimizing Deviations


REN Quan, LI Wei-min

(The Missile Institute of Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China)



**Abstract** The index weighting method of minimizing deviations has been put forward in multi-attribute decision-making in this paper. This method combines information on subjective weights and objective weights, and can sufficiently utilize objective evaluation information and meet the requirements of decision-maker, achieves the unification of both. This method can also be solved and performed on computer easily. Finally, a numerical example is given to show the feasibility and effectiveness of this method.



**Key words** Minimizing Deviations; Index Weighting; The Method of Maximizing Deviations